

Электрические фильтры с переходными частотными характеристиками

М.А. Янцевич¹, Г.А. Филиппович¹, А.С. Коноплицкий², В.О. ИСАЕВ²

В работе рассматривается решение задачи проектирования фильтров Баттерворта дробного порядка посредством использования модифицированной максимально-плоской аппроксимирующей функции передачи мощности с дополнительными вариативными параметрами. Конструкция предлагаемой аппроксимирующей функции позволяет формировать переходные частотные характеристики. Представлены результаты синтеза фильтров с частотной характеристикой дробного порядка, а также произведено сравнение аппроксимирующей функции Баттерворта со значением порядка 1,05, которая была получена известным методом оптимизации. Также рассмотрен вариант конструкции предлагаемой аппроксимирующей функции с комбинированием полиномов Баттерворта и Чебышева.

Ключевые слова: фильтр, аппроксимация, синтез, дробный порядок.

The paper considers the solution of the problem of designing fractional-order Butterworth filters by using a modified analytical Butterworth approximating function with additional variable parameters. The design of the proposed approximating function allows the formation of transient frequency characteristics. The results of the synthesis of filters with a fractional frequency response are presented, and the Butterworth approximating function with a value of the order of 1,05 is compared with the known result obtained by the well-known optimization method. A variant of the construction of the proposed approximating function with a combination of Butterworth and Chebyshev polynomials is also considered.

Keywords: filter, approximation, synthesis, fractional order.

Введение. Теория проектирования широкополосных частотно-избирательных цепей основана на использовании полиномиальных аппроксимирующих функций (АФ), описывающих желаемые частотные характеристики для электрических фильтров. Наличие аналитической записи АФ позволяет путем синтеза получить элементы фильтра, характеристики которого воспроизводят изначально заданную функцию коэффициента передачи мощности (рисунок 1).

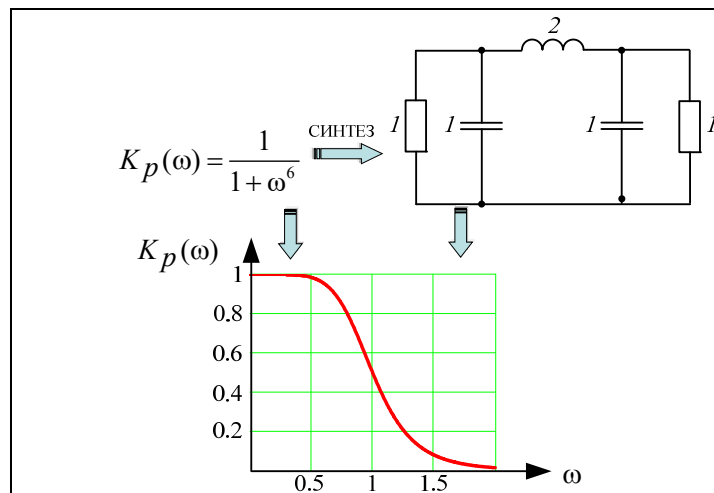


Рисунок 1 – Пример реализации фильтра Баттерворта 3-го порядка

Классический подход к синтезу фильтров обладает простым и понятным алгоритмом действий, а также поддается совершенствованию. Последнее подразумевает видоизменение (модификацию) известных АФ для удовлетворения условий конкретных задач. Однако для некоторых задач поиск рациональной функции оказывается затруднительным, и выходом в таких случаях является использование математического аппарата численных оптимизационных методов.

Предлагается рассмотреть одну из таких задач, суть которой заключается в нахождении частотной характеристики АФ Баттерворта дробного порядка (1) [1], [2], [3].

$$K_p(\omega) = \frac{K}{1 + \omega^{2(n+\alpha)}}, \quad (1)$$

где $K \in (0; 1]$ – коэффициент уровня передачи мощности; n – целое число, характеризующее порядок полинома; $\alpha \in (0, 0.01 \dots 1)$ – дробное число.

Функция Баттерворта максимально гладкая на частотах полосы пропускания и в сопоставлении с большинством классических АФ обладает более линейной фазо-частотной характеристикой. Это обстоятельство определяет приоритет в выборе фильтров Баттерворта при проектировании систем навигации, связи и управления, где существенно важна точность передаваемой информации. Увеличение порядка функции повышает избирательность частотной характеристики и вместе с тем ухудшает линейность фазовой составляющей. Компромисс этих характеристик можно обеспечить функцией дробного порядка (1). Проблема заключается в том, что функция с дробным порядком (1) не является рациональной и физически не реализуема. В публикации [1] предлагается двухэтапная процедура синтеза с использованием метода взвешенной суммы. Алгоритм позволяет найти физически реализуемую функцию, близкую по форме к частотной характеристике Баттерворта дробного порядка (1). Решение данной задачи в виде аналитической дробно-рациональной АФ, с одной стороны, значительно упростит процедуру синтеза, с другой стороны, даст полное объяснение природы формирования подобных частотных характеристик. Ниже предлагается аналитический способ формирования переходных частотных характеристик.

Переходные АФ. В качестве решения предлагается рассмотреть гибкую АФ (2), полученную на основе классической функции Баттерворта, в которой аппроксимирующая по Тейлору степенная функция ω^{2n} заменена суммой $\sum_{i=1}^n v_i \omega^{2i}$ с весовыми положительными коэффициентами v_i [4], [5].

$$K_p(\omega) = \frac{K}{1 + \varepsilon^2 \cdot \frac{v_1 \omega^2 + v_2 \omega^4 + \dots + v_n \omega^{2n}}{v_1 + v_2 + \dots + v_n}}, \quad (2)$$

где $\varepsilon \in (0; 1]$ – коэффициент регулировки полосы согласования (для классической АФ Баттерворта $\varepsilon = 1$); $v_i \in (0; \infty]$ – варьируемые параметры.

Форма частотной характеристики АФ (2) плавно регулируется за счет варьирования ее коэффициентов v_i .

Так, при $v_n = 1$ и равными нулю остальными коэффициентами v_i мы имеем максимально-плоскую АФ, а при $v_1 = 1$ и $v_{i+1} = 0$, получаем минимальный порядок аппроксимации (минимально-плоскую АФ). Рассмотрим АФ (2) при следующих значениях её параметров $K = 1$, $\varepsilon = 1$, $v_1 = 1$, $v_3 = v_4 = \dots = v_n = 0$. Тогда выражение (2) можно записать следующим образом:

$$K_p(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 + v_2 \omega^4}{1 + v_2}}, \quad (3)$$

Как показано на рисунке 2, изменяя значения всего одного параметра v_2 в АФ (3), можно регулировать вид частотной характеристики между первым и вторым порядком функции Баттерворта.

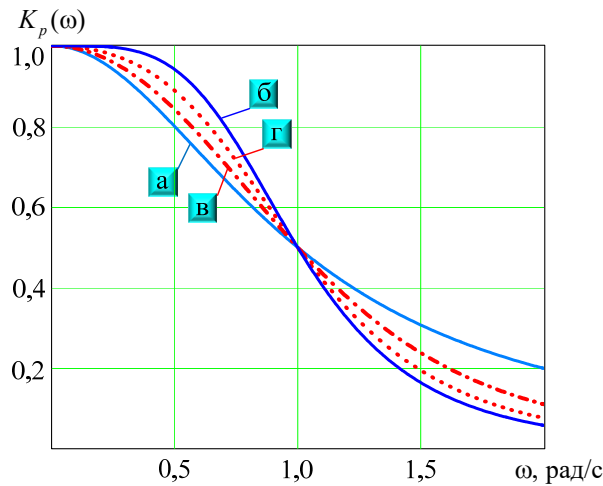


Рисунок 2 – Характеристика $K_p(\omega)$: а – АФ Баттерворта 1-го порядка; б – АФ Баттерворта 2-го порядка; в – АФ (3) при $\nu_2=0.5$; г – АФ (3) при $\nu_2=2$

В таблице 1 показаны схемы фильтров, полученных в результате синтеза из АФ Баттерворта и выражения (3).

Таблица 1 – Результат синтеза элементов фильтра из АФ Баттерворта и выражения (3)

Схемы фильтров полученных в результате синтеза из АФ Баттерворта	
$n = 1$ 	$n = 2$
Схемы фильтров полученных в результате синтеза из АФ (3)	
$\nu_2 = 0.5$ 	$\nu_2 = 2$

Приведенные выше схемы фильтров, синтезированные из АФ (3), обладают таким же количеством элементов, что и для фильтра Баттерворта 2-го порядка.

Алгоритм, представленный в работе [1], позволяет найти рациональную АФ, близкую по форме целевой функции (2). Представляет интерес сравнить вид АФ (3) и функции (4), полученной при помощи разработанного алгоритма в статье [1] для случая $n + \alpha = 1.05$.

$$K_p(-s^2) = \left| \frac{0.0354s^2 + 12.7050s + 167.2891}{s^3 + 70.7800s^2 + 236.1953s + 165.1961} \right|^2. \tag{4}$$

Для обеспечения соответствующего вида частотной характеристики в АФ (3) выбрано значение параметра $\nu_2 = 0.01$. На рисунке (3) представлено сопоставление частотных характеристик передачи мощности.

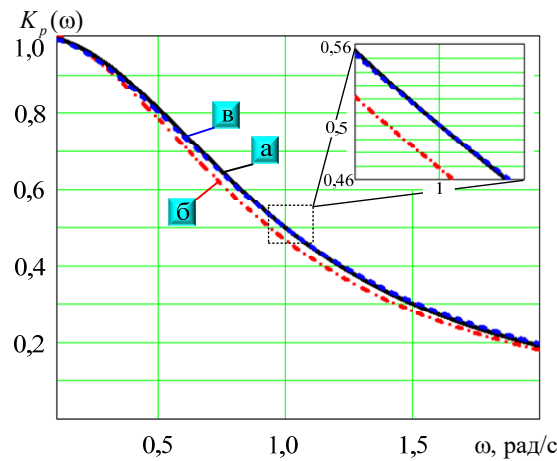


Рисунок 3 – Характеристика $K_p(\omega)$: а – АФ (1) при $n + \alpha = 1.05$; б – АФ (4); в – АФ (3) при $v_2 = 0.01$

Алгоритм поиска функций дробного порядка [1] принципиально обусловлен выбором метода оптимизации, а, как известно, увеличение числа решаемых уравнений (что означает увеличение порядка функции) может приводить к нарастанию ошибок в вычислениях, тем самым ухудшая качество аппроксимации. Следует отметить, что предлагаемый вариант аппроксимации (3) в большей степени соответствует заданной целевой функции. Также АФ (3) в отличие от (4) сохраняет условие нормировки по частоте (при $\omega_c = 1$ $K_p(\omega) = 0,5$).

Используя описанный выше подход можно получить другие варианты переходных аппроксимаций. Например, выражение (5) позволяет осуществлять переход между полиномами Баттерворта и Чебышева 3-го порядка.

$$K_p(\omega) = \frac{K}{1 + \varepsilon^2 \frac{v_1 \omega^6 + v_2 (4\omega^3 - 3\omega)^2}{v_1 + v_2}} \quad (5)$$

На рисунке (4) показана АФ (5) совместно с АФ Баттерворта и Чебышева 3-го порядка с заданными параметрами $K = 1$ и $\varepsilon = 0,349$ (0,5 дБ) при различных значениях параметра v_2 .

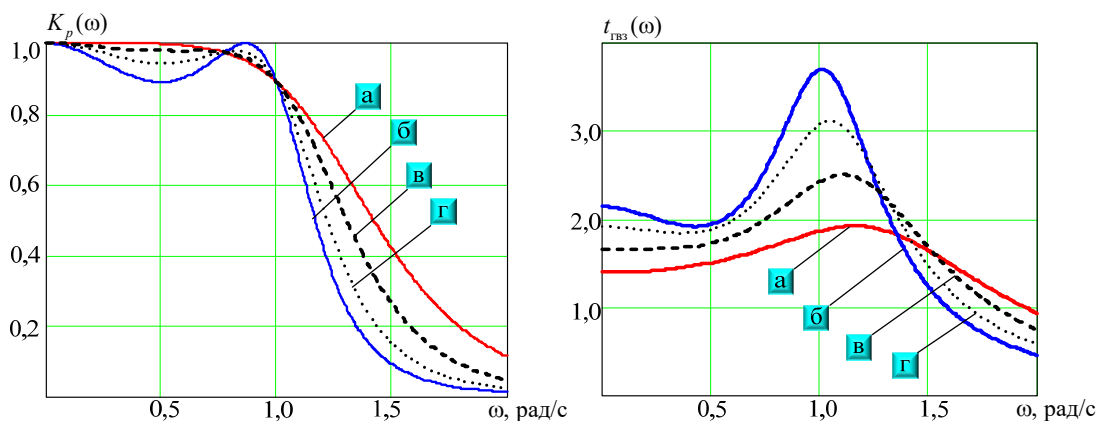


Рисунок 4 – Характеристики $K_p(\omega)$, $t_{гвз}(\omega)$: а – АФ Баттерворта 3-го порядка; б – АФ Чебышева 3-го порядка; в – АФ (5) при $v_1 = 1$; $v_2 = 0,2$; г – АФ (5) при $v_1 = 1$; $v_2 = 1$

Показанная зависимость группового времени запаздывания $t_{гвз}(\omega)$ на рисунке 4 также отражает гибкие свойства АФ (5). Ниже представлены схемы фильтров, которые получены после процедуры синтеза из АФ (5).

