

## О стационарном режиме в СМО с конечным числом приборов и разнотипными заявками

В.В. БУРАКОВСКИЙ

Исследуется система массового обслуживания (СМО), состоящая из конечного числа  $N$  приборов, в которую поступают требования (заявки)  $n$  типов. Входящий поток заявок предполагается простейшим с интенсивностью  $\lambda$ , но таким, что каждая заявка с вероятностью  $p(i), 1 \leq i \leq n$ , независимо от предыдущих, оказывается  $i$ -го типа. Очередь для заявок может быть неограниченной. Обслуживание происходит в порядке поступления. Заявки различных типов требуют различного обслуживания. Приведены векторно-матричные уравнения, позволяющие вычислить стационарные вероятности СМО.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, прибор, заявка, простейший поток, стационарные вероятности.

The queuing system with finite number  $N$  of servers and customers of  $n$  different types is studied. The customer arrival stream is assumed to be independent Poisson process with rate  $\lambda$ , but any customer with probability  $p(i), 1 \leq i \leq n$ , becomes of type  $i$ . The queue for customers may be infinite. The service discipline is FIFO. The vector-matrix equations were obtained for calculating the steady-state probabilities of the queueing system.

**Keywords:** queueing system, server, customer, Poisson flow, steady-state probabilities.

**Введение.** Многие реально протекающие процессы обслуживания на транспорте, в торговле, медицине, экономике и других сферах можно изучать, исходя из соответствующих им математических моделей систем обслуживания. В теории массового обслуживания интенсивно разрабатываются методы анализа и оптимизации процессов обслуживания требований (заявок) на вычисления с использованием компьютеров.

Системы массового обслуживания (СМО) широко используются для математического моделирования сложных технических структур: в сетях связи, вычислительных комплексах, транспортных системах, различных диспетчерских службах и т. п.

В работе приводится описание математической модели СМО с конечным числом приборов, заявками нескольких типов, требующими различного времени обслуживания [1, с. 61]. Проводится исследование стационарного режима в изучаемой СМО, составляются уравнения равновесия для стационарных вероятностей состояний и получена процедура для их расчета.

**1. Описание математической модели.** Рассмотрим СМО с  $N$  приборами, в которую поступают заявки  $n$  типов. Входящий поток является простейшим с интенсивностью  $\lambda$ , но таким, что с вероятностью  $p(i), 1 \leq i \leq n$ , каждая заявка, независимо от предыдущих, оказывается  $i$ -го типа [2, с. 14].

При поступлении в СМО заявки, когда все приборы заняты, она встает в очередь с неограниченным числом свободных мест. Обслуживание производится в порядке поступления. Различные типы заявок. Предполагается разное время обслуживания для различных типов заявок. Время обслуживания в СМО распределено по показательному закону с интенсивностями  $\mu_k, 1 \leq k \leq n$ , где  $k$  – тип заявки. Для определенности будем предполагать, что

$$p(k) > 0, \sum_{k=1}^n p(k) = 1.$$

Состоянием СМО будем называть вектор, состоящий из  $N + 1$  числа  $(l, i, \dots, j, m)$ , где  $l$  – общее количество заявок, находящихся в СМО,  $i$  – номер типа заявки, обслуживаемой на первом приборе;  $j$  – номер типа заявки, обслуживаемой  $(N-1)$ -м приборе;  $m$  – тип заявки, обслуживаемой на  $N$ -ом приборе. Для унификации обозначений будем считать, что если в СМО нет ни одной заявки, то она находится в состоянии  $(0, 0, \dots, 0, 0)$ .



Для построения блоков  $A_1, A_2, A_3$  введем следующие обозначения:  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix}$  – вектор-

столбец интенсивностей обслуживания заявок различных типов,  
 $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}, p^T = (p(1), p(2), \dots, p(n)), I$  – единичная  $(n \times n)$  матрица.

С учетом этих обозначений получаем, что блоки  $A_1$  имеют вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu p^T + \mu_1 p(1)I & \mu_1 p(2)I & \dots & \mu_1 p(n)I \\ \mu_2 p(1)I & \mu p^T + \mu_2 p(2)I & \dots & \mu_2 p(n)I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n p(1)I & \mu_n p(2)I & \dots & \mu p^T + \mu_n p(n)I \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $A_1$  имеют размерность  $(n^N \times n^N)$  и состоит из блоков  $\{A_1^{(i,j)}\}$ , которые можно записать в виде:  $A_1^{(i,j)} = \delta_{i,j} \mu p^T + \mu_i p(j)I$ , где  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Блоки  $A_3$  также имеют размерность  $(n^N \times n^N)$  и диагональный вид:

$$A_3 = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda I \end{pmatrix}.$$

Блоки  $A_2$  диагонального вида  $A_2 = \text{diag}\{-(\lambda + \mu_i + \mu_{i_2} + \dots + \mu_n) \mid i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  размерности  $(n^N \times n^N)$ .

Для стационарных вероятностей можно записать

$$P(l) = P(l-1)R, l > N. \tag{2}$$

Таким образом, последнее соотношение (1) будет иметь вид:

$$P(l-1)(A_3 + RA_2 + R^2 A_1) = 0.$$

Введем следующие обозначения:  $\pi_k = \frac{\mu_k}{\lambda}, \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \dots \\ \pi_n \end{pmatrix}, D = \frac{1}{\lambda_1} A_2$ .

Учитывая вид блоков  $A_1$ , получим:  $A_1 = \mu p^T \otimes I + I \otimes \mu p^T$ , откуда  $\frac{1}{\lambda} A_1 = \pi p^T \otimes I + I \otimes \pi p^T$ , где  $\otimes$  – символ кронекеровского произведения. Последнее соотношение из (1) примет вид:  $P(l-1) + P(l)D + P(l+1)(\pi p^T \otimes I + I \otimes \pi p^T) = 0$ . Или с учетом (2)  $P(l-1) + P(l)(D + R(\pi p^T \otimes I + I \otimes \pi p^T)) = 0$ . Таким образом, учитывая (2), имеем

$$R = -(D + R(\pi p^T \otimes I + I \otimes \pi p^T))^{-1}.$$

Полагая  $R(0) = 0, R(k+1) = -(D + R(k)(\pi p^T \otimes I + I \otimes \pi p^T))^{-1}$ , получим, что  $R(k+1) \rightarrow R$  при  $k \rightarrow \infty$  по методу Ньютона [3, с. 69].

**Заключение.** В статье описана математическая модель системы массового обслуживания [4, с. 23] с конечным числом  $N$  приборов. В нее поступают заявки нескольких типов,

требующие различного обслуживания. Входящий поток заявок является простейшим. Очередь для обслуживания – неограниченная. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Время обслуживания распределено по показательному закону, но с разными интенсивностями в зависимости от типа заявки. Получены уравнения равновесия для стационарных вероятностей состояний исследуемой СМО, построены инфинитезимальные матрицы для векторно-матричных уравнений, приведена процедура для определения стационарных состояний произвольного уровня.

### Литература

1. Burakovski, V. V. The investigation of the stationary regime in the queuing systems with finite number of servers and heterogeneous customers / V. V. Burakovski // *Queues : flows, systems, networks : Proceedings of the International conference «Modern mathematical methods of analysis and optimization of telecommunication networks»*, Gomel, 23–25 September, 2003. – BWWQT-2003. – Gomel, 2003. – Vol. 17. – P. 61–63.

2. Бураковский, В. В. Исследование стационарного режима в СМО с несколькими приборами и разнотипными требованиями / В. В. Бураковский // *Efektivní nástroje moderních věd – 2012 : materiály VIII mezinárodní vědecko-praktická konference, Praha, 27 dubna – 05 května 2012 roku. – Díl 29 : Matematika. – Praha : Publishing House «Education and Science» s.r.o., 2013. – P. 14–17.*

3. Neuts, M. F. Matrix-geometric solutions in stochastic models : An algorithmic approach / M. F. Neuts. – Baltimore, MD : Johns Hopkins University Press, 1981. – 332 p.

4. Бураковский, В. В. Исследование стационарного режима в СМО с двумя приборами и разнотипными требованиями / В. В. Бураковский // *Математические методы исследования сетей связи и сетей ЭВМ. – Минск : БГУ, 1990. – С. 23–24.*

Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 03.02.2026