

## О пересечении $\theta$ -подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, А.В. Бузланов

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер максимальных  $A$ -допустимых подгрупп близких к  $F$ -абнормальным с индексами, не делящимися на простые числа из  $\pi$ . Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.

**Ключевые слова:** конечная группа, формация,  $\mathfrak{F}$ -корадикал, функтор.

In this paper, we study the structure of a subgroup equal to the intersection of the kernels of maximal  $A$ -admissible subgroups close to  $F$ -abnormal ones with indices not divisible by primes from  $\pi$ . The properties of the corresponding generalized Frattini subgroup are established.

**Keywords:** finite group, formation,  $\mathfrak{F}$ -residual, functor.

**Введение.** В данной статье все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Одним из классических и активно развивающихся направлений в теории конечных групп является изучение свойств пересечений максимальных подгрупп, а также выяснение того, каким образом такие пересечения влияют на подгрупповую структуру и нормальное строение группы. Ключевую роль в указанных исследованиях традиционно играет подгруппа Фраттини – пересечение всех максимальных подгрупп группы, впервые введённая в работе [1] и ставшая фундаментальным объектом теории.

В дальнейшем теорема Фраттини и связанные с ней идеи получили естественное развитие в работах различных авторов. Так, В. Гашоц [2] рассмотрел пересечение всех тех максимальных подгрупп, которые не являются нормальными (так называемых ненормальных максимальных подгрупп), а В. Дескинс [3] изучил пересечение максимальных подгрупп, индексы которых не делятся на заданное простое число. Другие важные результаты в этом направлении, касающиеся взаимосвязи между пересечениями максимальных подгрупп и арифметическими свойствами их индексов, представлены в работах [4]–[6].

Особенно интенсивное развитие теория пересечений максимальных подгрупп получила в 1960-х гг., что во многом было связано с крупными достижениями в теории формаций конечных групп. Использование формационной терминологии и методов позволило не только систематизировать накопленные ранее разрозненные данные о максимальных подгруппах, но и получить новые содержательные результаты. Важную роль в этом процессе сыграло введённое Р. Картером, Т. Хоуксом [7] и Л.А. Шеметковым [8] понятие  $\pi$ -абнормальной максимальной подгруппы, которое дало ключ к описанию строения групп через пересечения подгрупп с ограничениями на индексы.

Настоящая работа продолжает указанные направления исследований, но уже в контексте групп с операторами. Тем самым она развивает и обобщает результаты, полученные ранее в работах [9], [10], [11], где были заложены основы подхода, применяемого в данной статье.

**2. Определения и обозначения.** Основные определения можно посмотреть в работе [12]. Остановимся только на введении подгрупп, необходимых для изложения материала в данной работе.

Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация. Обозначим через

$\Phi_{\theta, \pi}(G, A) = \bigcap \{M_G \mid M \in \theta(G), M - A\text{-допустимая подгруппа, } |G:M| \text{ не делится на числа из } \pi\}$ ;

$\Phi_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \in \theta(G), M \not\cong G^{\mathfrak{F}}, M - A\text{-допустимая подгруппа, } |G : M| \text{ не делится на числа из } \pi \}$ ;

$\overline{\Phi}_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \in \theta(G), M \not\cong G^{\mathfrak{F}}, M \notin \mathfrak{F}, M - A\text{-допустимая подгруппа, } |G : M| \text{ не делится на числа из } \pi \}$ ;

В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны  $G$ .

Отметим, что максимальная  $A$ -допустимая подгруппа  $M$  группы  $G$  должна либо целиком содержать  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ , либо  $MG^{\mathfrak{F}} = G$ . Это связано с тем, что произведение  $A$ -допустимых подгрупп будет  $A$ -допустимо и  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{F}}$  – характеристическая подгруппа (допустима относительно любой группы операторов), то  $MG^{\mathfrak{F}} = M$  или  $MG^{\mathfrak{F}} = G$ .

Необходимо также заметить, что, во-первых, не всякая максимальная подгруппа группы  $G$  будет являться максимальной  $A$ -допустимой подгруппой относительно некоторой группы операторов  $A$ . Во-вторых, не всякая максимальная  $A$ -допустимая подгруппа группы  $G$  обязана быть максимальной подгруппой в самой группе  $G$  (см. [9]).

### 3. Вспомогательные результаты.

**Лемма 3.1.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $\mathfrak{F}$  – формация. Тогда если  $N$  – нормальная  $A$ -допустимая  $\theta$ -подгруппа группы  $G$  и  $N \subseteq \Phi_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ , то

$$\Phi_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \Phi_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N.$$

**Доказательство.** Если  $N \subseteq \Phi_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ , то  $N \subseteq M$ , где  $M$  – любая максимальная  $A$ -допустимая  $\theta$ -подгруппа из  $G$ , не содержащая  $G^{\mathfrak{F}}N/N$ , с индексом, не делящимся на простые числа из  $\pi$ . Тогда

$$\Phi_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \cap (M/N)_{G/N}$$

где  $M/N$  пробегает множество всех максимальных  $A$ -допустимых  $\theta$ -подгрупп, не содержащих  $G^{\mathfrak{F}}N/N$  из  $G/N$ , с индексом, не делящимся на простые числа из  $\pi$ . Поэтому

$$\cap (M/N)_{G/N} = (\cap M_G)/N = \Phi_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N$$

и утверждение леммы верно.

**Лемма 3.2.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$ ,  $\mathfrak{F}$  – формация. Тогда если  $N$  – нормальная  $A$ -допустимая подгруппа группы  $G$  и  $N \subseteq \overline{\Phi}_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ , то

$$\overline{\Phi}_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \overline{\Phi}_{\theta, \pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N.$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой, как и в лемме 1.

**Теорема 3.3** [11, с. 29]. Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$ ,  $\mathfrak{F}$  – ступенчатая формация. Тогда

$$\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi_{\theta}(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_{\theta}(G, A)).$$

**Теорема 3.4** [12, с. 72]. Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор и подгруппа  $\Phi_{\theta, \pi}(G, A)$  обладает свойством  $C_{\pi}$ . Тогда

$$\Phi_{\theta, \pi}(G, A)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\theta}(G/O_{\pi}(G), A).$$

### 4. Основной результат.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор, группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ . Если в группе  $G$  подгруппа  $\Phi_{\theta, \pi}(G, A)$  обладает свойством  $C_{\pi}$ , то

$$\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

**Доказательство.** Пусть  $O_{\pi}(G) \neq 1$ . По теореме 3.4

$$\Phi_{\theta\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi_{\theta}(G / O_{\pi}(G), A).$$

Тогда теорема для факторгруппы  $G / O_{\pi}(G)$  верна по индукции. Следовательно,

$$\Phi_{\theta\pi}(G / O_{\pi}(G), A) / O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)) = \Phi_{\theta}(G / O_{\pi}(G) / O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)), A).$$

Так как  $O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)) = 1$  и на основании леммы 3.1

$$\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) = \Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G),$$

то

$$\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

Пусть теперь  $O_{\pi}(G) = 1$ . Тогда по теореме 3.4  $\Phi_{\theta\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi_{\theta}(G / O_{\pi}(G), A)$ . Значит,

$$\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta\pi}(G, A) = \Phi_{\theta}(G, A).$$

Пусть  $K / N$  – главный фактор группы  $G$ , причём,

$$\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq \Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta}(G, A),$$

то

$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}} \simeq K / K \cap NG^{\mathfrak{F}} = K / N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K / N.$$

Но  $G / NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ , поэтому главный фактор  $KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}}$  является  $\mathfrak{F}$ -центральным в  $G$ . Следовательно, главный фактор  $K / N$  также является  $\mathfrak{F}$ -центральным в  $G$ . Таким образом,  $\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A)$  –  $\mathfrak{F}$ -гиперцентральная нормальная подгруппа группы  $G / \Phi_{\theta}(G, A)$ . Поэтому

$$\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 3.3

$$\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) \supseteq \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

Значит,

$$\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

Следовательно,

$$\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A),$$

то есть  $\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ . Теорема доказана.

Из теоремы 4.1 с помощью теоремы 3.3 получаем следующее

**Следствие 4.1.1.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $\mathfrak{F}$  – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, и подгруппа  $\Phi_{\theta\pi}(G, A)$  обладает свойством  $C_{\pi}$ , тогда  $\Phi_{\theta\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{F}$ .

Так как в любой группе  $G$  подгруппа  $\Phi_{\theta\pi}(G, A)$  обладает свойством  $C_p$ , то при  $\pi = \{p\}$  получаем следующий результат.

**Следствие 4.1.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор, группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ , тогда

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

**Следствие 4.1.3.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $\mathfrak{F}$  – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, тогда  $\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$ .

Если группа операторов тривиальна, то из теоремы 4.1 получаем

**Следствие 4.1.4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор. Если в группе  $G$  подгруппа  $\Phi_{\theta_\pi}(G)$  обладает свойством  $C_\pi$ , то

$$\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) / O_\pi(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_\pi(G)).$$

**Следствие 4.1.5.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор и подгруппа  $\Phi_{\theta_\pi}(G)$  обладает свойством  $C_\pi$ , то  $\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) / O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$ .

**Следствие 4.1.6.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор, тогда

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G) / O_p(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G)).$$

**Следствие 4.1.7.** Пусть  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $\mathfrak{F}$  – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, тогда  $\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$ .

В случае, когда  $\theta$  является тривиальным, то из теоремы 4.1 получается ещё ряд соответствующих утверждений.

**Теорема 4.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор, группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ , и  $\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$ . Если в группе  $G$  подгруппа  $\Phi_{\theta_\pi}(G, A)$  обладает свойством  $C_\pi$ , то

$$\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_\pi(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_\pi(G), A).$$

**Доказательство.** Вначале покажем, что

$$K = \overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G, A).$$

Пусть  $K \not\subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G, A)$ . Тогда в  $G$  найдётся такая абнормальная максимальная  $A$ -допустимая подгруппа  $M$ , индекс которой не делится на простое число из  $\pi$ , что  $G = KM$ . Понятно, что  $M$  не содержит  $G^{\mathfrak{F}}$ . Если  $M \notin \mathfrak{F}$ , то  $K \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq M$ , что невозможно. Следовательно,  $M \in \mathfrak{F}$ . Отсюда

$$G / K = MK / K \simeq M / M \cap K \in \mathfrak{F},$$

а это значит, что  $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ . Это противоречит существованию в группе  $G$  абнормальной максимальной  $A$ -допустимой подгруппы, не содержащей  $G^{\mathfrak{F}}$ , индекс которой не делится на простые числа из  $\pi$ . Итак,  $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G, A)$ .

Пусть  $O_\pi(G) \neq 1$ . Тогда по теореме 3.4

$$\Phi_{\theta_\pi}(G, A) / O_\pi(G) = \Phi_{\theta}(G / O_\pi(G), A),$$

получаем справедливость теоремы для группы  $G / O_\pi(G)$  по индукции. Следовательно,

$$\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G / O_\pi(G), A) / O_\pi(G / O_\pi(G)) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_\pi(G) / O_\pi(G / O_\pi(G)), A).$$

Так как  $O_\pi(G / O_\pi(G)) = 1$  и

$$\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G / O_\pi(G), A) = \overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_\pi(G),$$

то

$$\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi_0^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

Пусть теперь  $O_{\pi}(G) = 1$ . Тогда

$$\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{0\pi}(G, A) = \Phi_0(G, A).$$

Пусть  $K / N$  – главный фактор группы  $G$ , причём,

$$\Phi_0(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_0(G, A),$$

то

$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}} \simeq K / K \cap NG^{\mathfrak{F}} = K / N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K / N.$$

Так как  $G / NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ , поэтому главный фактор  $KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}}$  является  $\mathfrak{F}$ -центральным в  $G$ .

Следовательно, главный фактор  $K / N$  также является  $\mathfrak{F}$ -центральным в  $G$ . Таким образом,

$\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_0(G, A)$  –  $\mathfrak{F}$ -гиперцентральная нормальная подгруппа группы  $G / \Phi_0(G, A)$ . Поэтому

$$\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_0(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_0(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 3.3

$$\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_0(G, A) \supseteq \Phi_0^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_0(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_0(G, A)).$$

Значит,

$$\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_0(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_0(G, A)).$$

Следовательно,

$$\Phi_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_0(G, A) = \Phi_0^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_0(G, A),$$

то есть  $\Phi_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \Phi_0^{\mathfrak{F}}(G, A)$ . Теорема доказана.

**Следствие 4.2.1.** *Группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $\mathfrak{F}$  –  $S_n$ -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и  $\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$ . Если подгруппа  $\Phi_{0\pi}(G, A)$  обладает свойством  $C_{\pi}$ , то*

$$\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{F}.$$

Так как в любой группе  $G$  подгруппа  $\Phi_{0\pi}(G, A)$  обладает свойством  $C_p$ , то при  $\pi = \{p\}$  получаем следующий результат.

**Следствие 4.2.2.** *Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор, группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\overline{\Phi}_{0p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$ . Тогда*

$$\overline{\Phi}_{0p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = \Phi_0^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

**Следствие 4.2.3.** *Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $\overline{\Phi}_{0\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$ . Если  $\mathfrak{F}$  –  $S_n$ -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то  $\overline{\Phi}_{0p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$ .*

Если группа операторов тривиальна, то из теоремы 4.2 получаем

**Следствие 4.2.4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор и  $\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) \neq G$ . Если в группе  $G$  подгруппа  $\Phi_{\theta_\pi}(G)$  обладает свойством  $C_\pi$ , то

$$\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) / O_\pi(G) = \Phi_\theta^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G)).$$

**Следствие 4.2.5.** Пусть  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $\mathfrak{F}$  –  $S_n$ -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и  $\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) \neq G$ . Если подгруппа  $\Phi_{\theta_\pi}(G)$  обладает свойством  $C_\pi$ , то

$$\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) / O_\pi(G) \in \mathfrak{F}.$$

Так как в любой группе  $G$  подгруппа  $\Phi_{\theta_p}(G)$  обладает свойством  $C_p$ , то при  $\pi = \{p\}$  получаем следующий результат.

**Следствие 4.2.6.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор и  $\overline{\Phi}_{\theta_p}^\mathfrak{F}(G) \neq G$ . Тогда

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^\mathfrak{F}(G) / O_p(G) = \Phi_\theta^\mathfrak{F}(G / O_p(G)).$$

**Следствие 4.2.8.** Пусть  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $\overline{\Phi}_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) \neq G$ . Если  $\mathfrak{F}$  –  $S_n$ -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то  $\overline{\Phi}_{\theta_p}^\mathfrak{F}(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$ .

В случае, когда  $\theta$  является тривиальным, то из теоремы 4.2 получается ещё ряд соответствующих утверждений.

## Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die  $\Phi$ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 160–170.
3. Deskins, W. A condition for the solvability of a finite group / W. Deskins // III. J. Math. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 306–313.
4. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
5. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
6. Кондратьев, А. С. Конечные группы. Итоги науки и техники / А. С. Кондратьев, А. А. Махнев, А. И. Старостин. – М. : ВИНТИ, 1986. – С. 3–120.
7. Carter, R. The  $\mathfrak{F}$ -normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // III. J. Math. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.
8. Шеметков, Л. А. Ступенчатые формации групп / Л. А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648
9. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2019. – № 14 (02). – DOI : 10.1142/S1793557121500261.
10. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.
11. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
12. Бородич Р. В. О влиянии индексов  $A$ -допустимых  $\theta$ -подгрупп на их пересечения / Р. В. Бородич // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2024. – №6 (147). – С. 70–74.