

Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{60, 52, 10; 1, 10, 48\}$ не существует

ХАЙАН ЛИ¹, К.С. ЕФИМОВ^{2,3}, А.А. МАХНЁВ^{2,4}

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_2 будет сильно регулярным, если Γ имеет собственное значение $a_2 - c_3$. Если дополнительно Γ имеет собственное значение $\theta_2 = 0$, то Γ имеет массив пересечений $\{ux + yz, yz - y, xy - x; 1, x + z, yz\}$. Дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственным значением $\theta_1 = a_3$ называется графом Шилла. Для графа Шилла число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Имеется 3 допустимых массива пересечений примитивных дистанционно регулярных графов диаметра 3 и степени 60. Все они отвечают графам Шилла. Граф с массивом пересечений $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$ имеет $b = 3$. Граф с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ принадлежит указанной серии для $x = 2, y = 5, z = 10$ и не существует. Наконец, граф Шилла с массивом пересечений $\{60, 52, 10; 1, 10, 48\}$ имеет $b_2 = 3$ и принадлежит серии $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs; 1, bs, (b^2-1)s\}$ для $b = 5, s = 2$. В работе доказано, что граф с массивом пересечений $\{60, 52, 10; 1, 10, 48\}$ не существует.

Ключевые слова: граф Шилла, дистанционно регулярный граф.

For a distance-regular graph Γ of diameter 3, graph Γ_2 will be strongly regular if Γ has an eigenvalue $a_2 - c_3$. If additionally Γ has an eigenvalue $\theta_2 = 0$, then Γ has an intersection array $\{ux + yz, yz - y, xy - x; 1, x + z, yz\}$. A distance-regular graph of diameter 3 with eigenvalue $\theta_1 = a_3$ is called a Schilla graph. For the Schilla graph, the number $a = a_3$ divides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. There are 3 admissible intersection arrays of primitive distance-regular graphs of diameter 3 and degree 60. All of them correspond to Schilla graphs. The graph with intersection array $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$ has $b = 3$. The graph with intersection array $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ belongs to the specified series for $x = 2, y = 5, z = 10$ and does not exist. Finally, the Schilla graph with intersection array $\{60, 52, 10; 1, 10, 48\}$ has $b_2 = 3$ and belongs to the series $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs; 1, bs, (b^2-1)s\}$ for $b = 5, s = 2$. The work proves that the graph with intersection array $\{60, 52, 10; 1, 10, 48\}$ does not exist.

Keywords: Schilla graph, distance regular graph.

Введение. Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a .

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ) λ -подграфом.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$ с $[w]$). Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i . Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p_{ij}^l и параметры Крейна q_{ij}^l определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d . Для $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_{\Gamma(u, w)} = i$.

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_2 будет сильно регулярным, если Γ имеет собственное значение $a_2 - c_3$ (см. [2]). Если дополнительно Γ имеет собственное значение $\theta_2 = 0$, то Γ имеет массив пересечений $\{ux + yz, yz - y, xy - x; 1, x + z, yz\}$ (см. [3]).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственным значением $\theta_1 = a_3$ (см. [4]). Для графа Шилла число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$.

Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab, (a + 1)(b - 1), b_2; 1, c_2, a(b - 1)\}$.

Имеется 3 допустимых массива примитивных дистанционно регулярных графов диаметра 3, степени 60 с числом вершин не большим 1024 (см. [1]). Все они отвечают графам Шилла.

Граф с массивом пересечений {60,42,18; 1,6,40} имеет $b = 3$. Граф с массивом пересечений {60,45,8; 1,12,50} принадлежит указанной серии для $x = 2, y = 5, z = 10$. Наконец, граф Шилла с массивом пересечений {60,52,10; 1,10,48} имеет $b_2 = c_2$ и принадлежит серии $\{b(b + 1)s, (bs + s + 1)(b - 1), bs; 1, bs, (b^2 - 1)s\}$ для $b = 5, s = 2$.

В работе изучается граф Шилла с массивом пересечений {60,52,10; 1,10,48}.

Теорема: Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений {60,52,10; 1,10,48} не существует.

Тройные числа пересечений. В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений (см. [6]).

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d . Если u_1, u_2, u_3 – вершины графа Γ , r_1, r_2, r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d , то $\begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{Bmatrix}$ – множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \left| \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{Bmatrix} \right|$. Числа $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1 \ r_2 \ r_3]$.

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0 \ j \ h]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0 \ j \ h] = \delta_{jW} * \delta_{hV}$.

Аналогично, $[i \ 0 \ h] = \delta_{iW} * \delta_{hU}$ и $[i \ j \ 0] = \delta_{iU} * \delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей. Получим:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^d [ljh] &= p_{jh}^U - [0jh], \\ \sum_{l=1}^d [ilh] &= p_{ih}^V - [i0h], \\ \sum_{l=1}^d [ijl] &= p_{ij}^W - [ij0]. \end{aligned} \quad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^W = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} u & v & w \\ r & s & t \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим

$$\begin{aligned} \{i, j, h\} &= \begin{Bmatrix} u & v & w \\ i & j & h \end{Bmatrix}, [i, j, h] = \begin{bmatrix} u & v & w \\ i & j & h \end{bmatrix}, [i, j, h]' = \begin{bmatrix} u & w & v \\ i & h & j \end{bmatrix}, \\ [i, j, h]^* &= \begin{bmatrix} v & u & w \\ j & i & h \end{bmatrix}, [u, v, w]^{sim} = \begin{bmatrix} u & v & w \\ h & j & i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Вычисление параметров $[uvw]', [uvw]^*$ и $[uvw]^{sim}$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Доказательство теоремы 1. В этом разделе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений {60,52,10; 1,10,48}.

Тогда Γ имеет $1 + 60 + 312 + 65 = 438$ вершин, спектр $\{60^1, 12^{73}, 0^{292}, -13^{72}\}$, матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 73 & 292 & 72 \\ 1 & \frac{73}{5} & 0 & -\frac{78}{5} \\ 1 & 0 & \frac{-73}{13} & \frac{60}{13} \\ 1 & \frac{-73}{5} & \frac{292}{13} & \frac{-576}{65} \end{pmatrix}$$

и числа пересечений:

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 7, p_{12}^1 = 52, p_{13}^1 = 0, p_{21}^1 = 52, p_{22}^1 = 208, p_{23}^1 = 52, p_{31}^1 = 0, p_{32}^1 = 52, p_{33}^1 = 13 \\ p_{11}^2 &= 10, p_{12}^2 = 40, p_{13}^2 = 10, p_{21}^2 = 40, p_{22}^2 = 226, p_{23}^2 = 45, p_{31}^2 = 10, p_{32}^2 = 45, p_{33}^2 = 10 \\ p_{11}^3 &= 0, p_{12}^3 = 48, p_{13}^3 = 12, p_{21}^3 = 48, p_{22}^3 = 216, p_{23}^3 = 48, p_{31}^3 = 12, p_{32}^3 = 48, p_{33}^3 = 4. \end{aligned}$$

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $\{rst\} = \begin{Bmatrix} u & v & w \\ r & s & t \end{Bmatrix}$ и $[rst] = \begin{bmatrix} u & v & w \\ r & s & t \end{bmatrix}$.

Положим $\Sigma = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени $p_{23}^3 = 48$ на $k_3 = 65$ вершинах.

Лемма 1. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$\begin{aligned} [122] &= -r_{12} - r_{13} - r_{14} + 175, [123] = [132] = r_{12} + r_{13} + r_{14} - 127, \\ [133] &= -r_{12} - r_{13} - r_{14} + 139; \\ [211] &= -r_{14} + 7, [212] = [221] = r_{14} + 41, [222] = r_{12}, \\ [223] &= [232] = -r_{12} - r_{14} + 175, [233] = r_{12} + r_{14} - 127; \\ [311] &= r_{14}, [312] = [321] = -r_{14} + 11, [322] = r_{13} + r_{14} + 33, \\ [323] &= [332] = -r_{13} + 4, [333] = r_{13}, \end{aligned}$$

где $0 \leq r_{13} \leq 4, 120 \leq r_{12} \leq 139, 0 \leq r_{14} \leq 7, 127 \leq r_{12} + r_{14} \leq 139$.

Доказательство.

Упрощения формул (+).

По лемме 1 имеем $[322] = r_{13} + r_{14} + 33 \leq 44$.

Так как $\{u, w\} \cap \Lambda(u) \cap \Lambda(w)$ содержит $98 - [322]$ вершин, то $33 \leq [322] \leq 44$.

Лемма 2. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$\begin{aligned} [122] &= r_{37}, [123] = [132] = -r_{37} + 48, [133] = r_{37} - 36; \\ [212] &= r_{34} + r_{35} - r_{36} - r_{37} + 48, [213] = -r_{34} - r_{35} + r_{36} + r_{37}, [222] \\ &= -r_{35} + r_{36} + 168, [223] = r_{35}, [231] = r_{36}, [232] = -r_{34} + r_{37}, \\ [233] &= r_{34} - r_{36} - r_{37} + 48; \\ [312] &= -r_{34} - r_{35} + r_{36} + r_{37}, [313] = r_{34} + r_{35} - r_{36} - r_{37} + 12, [321] = r_{36}, \\ [322] &= r_{35} - r_{36} - r_{37} + 48, [323] = -r_{35} + r_{37}, [332] = r_{34}, [333] = -r_{34} + r_{36} + 9, \end{aligned}$$

где $0 \leq r_{34} \leq 3, 33 \leq r_{35} \leq 39, 9 \leq r_{36} \leq 12, 36 \leq r_{37} \leq 39, r_{35} \leq r_{37}$.

Доказательство.

Упрощения формул (+).

По лемме 2 имеем $[322] = r_{35} - r_{36} - r_{37} + 48 \leq 42$. Как и выше, $33 \leq [322] \leq 42$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p_{13}^3 = 12, p_{23}^3 = 48, p_{33}^3 = 4$, то $528 = 12 \cdot 33 + 4 \cdot 33 \leq d \leq 12 \cdot 44 + 4 \cdot 42 = 696$. С другой стороны, $d = 48 \cdot (47 - \lambda)$, поэтому $11 \leq 47 - \lambda \leq 14,5$ и $33,5 \leq \lambda \leq 36$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 3. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$\begin{aligned} [122] &= -r_{33} + 48, [123] = [132] = r_{33}, [133] = -r_{33} + 12; \\ [211] &= -r_{31} + r_{32} + 8, [212] = r_{29}, [213] = -r_{29} + r_{31} - r_{32} + 40, [221] = -r_{32} + 40, \\ [222] &= -r_{30} + r_{32} + 176, [223] = r_{30}, [231] = r_{31}, [232] = r_{29} + r_{30} - r_{32} + 40, \\ [233] &= r_{29} - r_{30} - r_{31} + r_{32} + 8; \\ [311] &= r_{31} - r_{32} + 2, [312] = -r_{29} + 40, [313] = r_{29} - r_{31} + r_{32} - 30, \end{aligned}$$

$$[321] = r_{32}, [322] = r_{30} - r_{32} + r_{33} + 2, [323] = -r_{30} - r_{33} + 45,$$

$$[331] = -r_{31} + 10, [332] = -r_{29} - r_{30} + r_{32} - r_{33} + 5,$$

$$[333] = -r_{29} + r_{30} + r_{31} - r_{32} + r_{33} - 11,$$

где $28 \leq r_{29} \leq 40$, $29 \leq r_{30} \leq 42$, $6 \leq r_{31} \leq 10$, $0 \leq r_{32} \leq 12$, $3 \leq r_{33} \leq 12$, $r_{32} - r_{31} \leq 2$.

Доказательство.

Упрощения формул (+).

По лемме 3 имеем $[322] = r_{30} - r_{32} + r_{33} + 2 \leq 56$. Как и выше, $31 \leq [322]$.

Пусть $d(u, v) = 3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин y, z на расстоянии 1 в графе Γ , где $y \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $[321] = -r_{14} + 11$, где $0 \leq r_{14} \leq 7$, поэтому $48 = 12(11 - 7) \leq f_1 \leq 12(11 - 0) = 132$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[311] = r_{31} - r_{32} + 2$, поэтому

$$\begin{aligned} 48 \leq f_1 &= - \sum_i (-r_{31}^i + r_{32}^i) + 96 \leq 132, \\ -36 &\leq \sum_i (-r_{31}^i + r_{32}^i) \leq 48, \\ -0,75 &\leq \sum_i (r_{31}^i + r_{32}^i)/48 \leq 1. \end{aligned}$$

Подсчитаем число f_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ , где $y \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $33 \leq [322] \leq 44$, поэтому $396 \leq f_2 \leq 528$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[312] = -r_{29} + 40$, поэтому

$$\begin{aligned} 396 \leq f_2 &= - \sum_i r_{29}^i + 2160 \leq 528, \\ 1632 &\leq \sum_i r_{29}^i \leq 1764, \\ 34 &\leq \frac{1}{25} \sum_i r_{29}^i / 48 \leq 36,75. \end{aligned}$$

Подсчитаем число f_3 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ , где $y \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $[323] = -r_{13} + 4$, где $r_{13} \leq 4$, поэтому $0 \leq f_3 \leq 192$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[313] = r_{29} - r_{31} + r_{32} - 30$, поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq f_3 &= \sum_i (r_{29}^i - r_{31}^i + r_{32}^i) - 1440 \leq 192, \\ 1440 &\leq \sum_i (r_{29}^i - r_{31}^i + r_{32}^i) \leq 1632, \\ 30 &\leq \sum_i (r_{29}^i - r_{31}^i + r_{32}^i)/48 \leq 34. \end{aligned}$$

Подсчитаем число g_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ , где $y \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 3 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $31 \leq [322] \leq 56$, поэтому $124 \leq g_2 \leq 224$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[332] = -r_{29} - r_{30} + r_{32} - r_{33} + 5$, поэтому

$$\begin{aligned} 124 &\leq - \sum_i (r_{29}^i + r_{30}^i - r_{32}^i + r_{33}^i) + 240 \leq 224, \\ 16 &\leq \sum_i (r_{29}^i + r_{30}^i - r_{32}^i + r_{33}^i) \leq 116, \end{aligned}$$

$$0,333 \leq \sum_i (r_{29}^i + r_{30}^i - r_{32}^i + r_{33}^i)/48 \leq 2,417$$

Противоречие с тем, что $28 \leq r_{29} \leq 40, 29 \leq r_{30} \leq 42, 0 \leq r_{32} \leq 12, 3 \leq r_{33} \leq 12$ и $28 + 29 - 12 + 3 = 48 \leq \sum_i (r_{29}^i + r_{30}^i - r_{32}^i + r_{33}^i)/48$.

Теорема доказана.

Литература

1. Brouwer, A.E. Distance-regular graphs / A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1989. – 495 p.
2. Koolen, J. Distance-regular graphs with diameter 3 and eigenvalue $a_2 - c_3$ / Q. Iqbal, J. H. Koolen, J. Park, M. U. Rehman // Linear Algebra Appl. – 2020. – № 587. – P. 271–290.
3. Makhnev, A. A. On distance-regular graphs of diameter 3 with eigenvalue 0 / I. N. Belousov, A. A. Makhnev // Math. Trudy (Novosibirsk). – 2022. – № 25:2. – P. 162–173.
4. Park, J. Shilla distance-regular graphs / J. H. Koolen, J. Park // Europ. J. Comb. – 2010. – № 31. – P. 2064–2073.
5. Makhnev, A. A. Q-polynomial graph with intersection array $\{60,45,8;1,12,50\}$ does not exist / V. Bitkina, A. Gutnova, A. A. Makhnev // Vestnik Perm. University. – 2023. – № 2(61). – P. 29–33.
6. Coolsaet, K. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs / K. Coolsaet, A. Jurishich // J. Comb. Theory. Series, A. – 2008. – № 115. – P. 1086–1095.

¹Хайнаньский университет, г. Хэйкоу

²Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН

³Уральский государственный
горный университет

⁴Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Поступила в редакцию 08.11.2024