

О пересечении подгрупп близких к $\mathfrak{F}$ -абнормальным

Р.В. БОРОДИЧ, Е.Н. БОРОДИЧ, А.В. БУЗЛАНОВ, И.В. БЛИЗНЕЦ

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер максимальных A -допустимых подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал, с ограничениями на индексы. Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.

Ключевые слова: конечная группа, формация, $\mathfrak{F}$ -корадикал, функтор.

The structure of a subgroup equal to the intersection of the kernels of maximal A -admissible subgroups not containing $\mathfrak{F}$ -residual, with restrictions on indexes is studied. The properties of the corresponding generalized Frattini subgroup are established.

Keywords: finite group, formation, $\mathfrak{F}$ -residual, functor.

Введение. В данной статье все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Одним из классических направлений в теории конечных групп является изучение свойств пересечений максимальных подгрупп и их влияния на подгрупповую и нормальную структуру группы. Ключевую роль в этих исследованиях играет подгруппа Фраттини, впервые введенная в работе [1].

Теорема Фраттини получила дальнейшее развитие в работах различных авторов. В частности, В. Гашюц [2] рассмотрел пересечение всех ненормальных максимальных подгрупп, а В. Дескинс [3] изучил пересечение максимальных подгрупп, индексы которых не делятся на заданное простое число. Другие важные результаты в этом направлении представлены в работах [4]–[6].

В 1960-х гг. развитие теории пересечений во многом было связано с достижениями в теории формаций. Использование её методов позволило систематизировать накопленные данные о максимальных подгруппах и получить новые значимые результаты. Важную роль сыграло введенное Р. Картером, Т. Хоуксом [7] и Л.А. Шеметковым [8] понятие $\mathfrak{F}$ -абнормальной максимальной подгруппы.

Настоящая работа развивает указанные направления в контексте групп с операторами, продолжая исследования, начатые в [9], [10].

2. Определения и обозначения. Подгруппа H группы G называется:

– пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$;

– абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Класс групп называют нормально наследственным (S_n -замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G .

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

- 1) $f(G)$ – формация;
- 2) $f(G) \subseteq f(G^\phi) \cap f(\text{Ker}\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G ;
- 3) $f(1) = \mathfrak{O}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p -группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G (значение f на любой неединичной p -группе обозначается $f(p)$).

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^\mathfrak{F}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной ($\mathfrak{F}$ -абнормальной), если $G^\mathfrak{F}$ содержится (не содержится) в M .

Пусть $\mathfrak{X}$ произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [11] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A \rightarrow B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^\phi \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{O}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть:

- 1) абнормально полным, если для любой группы G среди элементов множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G ;
- 2) абнормальным, если $\theta(G) \setminus \{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных подгрупп;
- 3) тривиальным, если функтор θ выделяет в группе G все её подгруппы.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G , сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \rightarrow \text{Aut}(G)$, где $\text{Aut}(G)$ – группа автоморфизмов группы G . Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Поскольку операторы действуют на группу как автоморфизмы, то любая характеристическая подгруппа оказывается будет являться A -допустимой для произвольной группы операторов.

Отметим, что максимальная A -допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , либо $MG^\mathfrak{F} = G$. Действительно. Так как произведение A -допустимых подгрупп A -допустимо и $G^\mathfrak{F}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A -допустимая, то $MG^\mathfrak{F} = M$ или $MG^\mathfrak{F} = G$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Обозначим через

$$\overline{\Phi}_\theta^\mathfrak{F}(G, A) = \bigcap \{M_G \mid M \not\subseteq G^\mathfrak{F}, M \notin \mathfrak{F}, M \in \theta(G), M \text{ – } A\text{-допустимая подгруппа}\};$$

$$\Phi_\theta^\mathfrak{F}(G, A) = \bigcap \{M_G \mid M \not\subseteq G^\mathfrak{F}, M \in \theta(G), M \text{ – } A\text{-допустимая подгруппа}\};$$

$$\Phi_{\theta_p}^\mathfrak{F}(G, A) = \bigcap \{M_G \mid M \in \theta(G), M \text{ – } A\text{-допустимая подгруппа}, |G:M| \text{ не делится на простое число } p\};$$

$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \in \theta(G), M \not\geq G^{\mathfrak{F}}, M - A\text{-допустимая подгруппа, } |G : M| \text{ не делится на простое число } p\}$;

$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \in \theta(G), M \not\geq G^{\mathfrak{F}}, M \notin \mathfrak{F}, M - A\text{-допустимая подгруппа, } |G : M| \text{ не делится на простое число } p\}$;

Если в группе отсутствуют подгруппы с требуемыми свойствами, соответствующие пересечения по определению полагаются равными всей группе.

Важно подчеркнуть, что между обычными и операторно-допустимыми подгруппами существуют принципиальные различия: не всякая максимальная подгруппа является максимальной A -допустимой, и обратно, максимальная A -допустимая подгруппа не обязательно будет максимальной в обычном смысле [9].

3. Вспомогательные результаты.

Лемма 3.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A -допустимая θ -подгруппа группы G и $N \subseteq \Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая максимальная A -допустимая θ -подгруппа из G , не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, с индексом, не делящимся на простое число p . Тогда

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \cap (M/N)_{G/N}$$

где M/N пробегает множество всех максимальных A -допустимых θ -подгрупп, не содержащих $G^{\mathfrak{F}}N/N$ из G/N , с индексом, не делящимся на простое число p . Поэтому

$$\cap (M/N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = \Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N$$

и утверждение леммы верно.

Лемма 3.2. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не принадлежащая $\mathfrak{F}$ и не содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , с индексом, не делящимся на простое число p . Тогда

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \cap (M/N)_{G/N}, (1),$$

где M/N пробегает множество всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп из G/N , не принадлежащих $\mathfrak{F}$ и не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G/N .

Продолжим равенство (1):

$$\cap (M/N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N (2).$$

Из равенств (1) и (2) вытекает справедливость утверждения. Лемма доказана.

Теорема 3.3 [10]. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой функтор, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – ступенчатая формация. Тогда

$$\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

Теорема 3.4 [10]. Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой функтор и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \subseteq \Phi_{\theta}(G, A)$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$.

Теорема 3.5 [9]. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой функтор и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда

$$\Phi_{\theta_p}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\theta}(G / O_p(G), A).$$

4. Основной результат.

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

Доказательство. Пусть $O_p(G) \neq 1$. По теореме 3.5

$$\Phi_{\theta_p}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\theta}(G / O_p(G), A).$$

Тогда теорема для факторгруппы $G / O_p(G)$ верна по индукции. Следовательно,

$$\Phi_{\theta_p}(G / O_p(G), A) / O_p(G / O_p(G)) = \Phi_{\theta}(G / O_p(G) / O_p(G / O_p(G)), A).$$

Так как $O_p(G / O_p(G)) = 1$ и на основании леммы 3.1

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A) = \Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G),$$

то

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = D_{\Phi_{\theta}}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

Пусть теперь $O_p(G) = 1$. Тогда по теореме 3.5 $\Phi_{\theta_p}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\theta}(G / O_p(G), A)$.

Значит,

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta_p}(G, A) = \Phi_{\theta}(G, A).$$

Пусть K / N – главный фактор группы G , причём,

$$\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq \Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta}(G, A),$$

то

$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}} \simeq K / K \cap NG^{\mathfrak{F}} = K / N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K / N.$$

Но $G / NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$ -центральным в G . Следовательно, главный фактор K / N также является $\mathfrak{F}$ -центральным в G . Таким образом, $\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A)$ – $\mathfrak{F}$ -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Phi_{\theta}(G, A)$. Поэтому

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 3.3

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) \supseteq \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

Значит,

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

Следовательно,

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A),$$

то есть $\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.1 с помощью теоремы 3.4 получаем следующее

Следствие 4.1.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, тогда $\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

Если θ – абнормальный подгрупповой функтор, то получаем

Следствие 4.1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда

$$\Phi_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

В частности, если $\mathfrak{F}$ – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\Phi_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

Если θ – тривиальный подгрупповой функтор, то получаем

Следствие 4.1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда

$$\Phi_p^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

В частности, если $\mathfrak{F}$ – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\Phi_p^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов тривиальна, то из теоремы 4.1 получаем

Следствие 4.1.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, тогда

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G) / O_p(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G)).$$

Следствие 4.1.5. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ – абнормально полный подгрупповой функтор и подгруппа $\Phi_{\theta_p}(G)$, тогда $\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

Теорема 4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, и $\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$, тогда

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K = \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta_p}(G, A).$$

Пусть $K \not\subseteq \Phi_{\theta_p}(G, A)$. Тогда в G найдётся такая максимальная A -допустимая θ -подгруппа M , индекс которой не делится на простое число p , что $G = KM$. Понятно, что M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то $K \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$. Отсюда

$$G / K = MK / K \simeq M / M \cap K \in \mathfrak{F},$$

а это значит, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Это противоречит существованию в группе G максимальной A -допустимой θ -подгруппы, не содержащей $G^{\mathfrak{F}}$ индекс которой не делится на простые числа из π . Итак, $K \subseteq \Phi_{\theta_p}(G, A)$.

Пусть $O_p(G) \neq 1$. Тогда по теореме 3.5

$$\Phi_{\theta_p}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\theta}(G / O_p(G), A),$$

откуда получаем справедливость теоремы для группы $G / O_p(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A) / O_p(G / O_p(G)) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G) / O_p(G / O_p(G)), A).$$

Так как $O_p(G / O_p(G)) = 1$ и по лемме 3.2

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A) = \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G),$$

то

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

Пусть теперь $O_p(G) = 1$. Тогда

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta_p}(G, A) = \Phi_{\theta}(G, A).$$

Пусть K / N – главный фактор группы G , причём,

$$\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta}(G, A),$$

то

$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}} \simeq K / K \cap NG^{\mathfrak{F}} = K / N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K / N.$$

Так как $G / NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$ -центральным в G . Следовательно, главный фактор K / N также является $\mathfrak{F}$ -центральным в G . Таким образом, $\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A)$ – $\mathfrak{F}$ -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Phi_{\theta}(G, A)$.

Поэтому

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 3.3

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) \supseteq \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

Значит,

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi_{\theta}(G, A)).$$

Следовательно,

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A),$$

то есть $\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Теорема доказана.

Следствие 4.2.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$, тогда

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}.$$

Если группа операторов тривиальна, то из теоремы 4.2 получаем

Следствие 4.2.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Тогда

$$\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G) / O_p(G) = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G)).$$

Следствие 4.1.3. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$. Если $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\overline{\Phi}_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – V. 58. – P. 160–170.
3. Deskins, W. A condition for the solvability of a finite group / W. Deskins // III. J. Math. – 1961. – V. 5, № 2. – P. 306–313.
4. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
5. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
6. Кондратьев, А. С. Конечные группы. Итоги науки и техники / А. С. Кондратьев, А. А. Махнев, А. И. Старостин. – М. : ВИНТИ, 1986. – С. 3–120.
7. Carter, R. The $\mathfrak{F}$ -normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // III. J. Math. – 1967. – V. 5, № 2. – P. 175–202.
8. Шеметков, Л. А. Ступенчатые формации групп / Л. А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.
9. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2019. – № 14 (02). – DOI : 10.1142/S1793557121500261
10. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.
11. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.