Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (141), 2023

Физика

УДК 535.42 EDN: DIKSXM

Векторные декартовы пучки Куммера-Гаусса. I. Однородная поляризация. Энергетические свойства

С.С. Гиргель

Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для векторных декартовых 3D световых пучков Куммера-Гаусса с однородной поляризацией. Сформулированы ограничения на свободные параметры, чтобы такие пучки Куммера-Гаусса переносили конечную мощность. Вычислены и графически исследуются потоки энергии таких пучков.
Ключевые слова*:* параксиальные пучки, векторные декартовы пучки, пучки Куммера-Гаусса, потоки энергии.

The analytical expressions in the closed form for vector cartesian 3D light of Kummer-Gauss beams from a uniform polarization are offered and investigated. Restrictions on free parameters that such of Kummer-Gauss beams transferred final power are formulated. Streams of energy of such beams are calculated and graphically investigated.
Keywords: paraxial beams, vector cartesian beams, Kummer-Gauss beams, streams of energy.

Введение. В работах [1]–[3] изучались скалярные параксиальные декартовы пучки Куммера-Гаусса (K-G), затем в [4], [5] – скалярные декартовы астигматические и децентрированные пучки K-G с однородной и неоднородной по сечению пучка поляризацией (энергетические и поляризационные свойства). В настоящей работе обсуждаются энергетические и поляризационные свойства векторных параксиальных декартовых астигматических пучков K-G с однородной и неоднородной поляризациями. Получены явные выражения для векторов поляризации векторных декартовых астигматических параксиальных световых пучков K-G. Исследованы поляризационные свойства, продольные и поперечные потоки энергии таких световых пучков.

1. Скалярные астигматические пучки Куммера-Гаусса. Прежде чем перейти к рассмотрению векторных пучков K-G, предварительно необходимо изложить необходимую информацию о скалярных пучках K-G. В работах [4]–[5] было представлено общее решение безразмерного параболического уравнения

$$(\partial^2_{X,X} + \partial^2_{Y,Y} + 4i\partial_Z) f = 0 \tag{1.1}$$

для амплитуды $f(X,Y,Z)$ трехмерного скалярного астигматического пучка K-G в форме

$$f(X,Y,Z) = G(X,Y,Z)\cdot h_1(X_1)\cdot h_2(Y_1)\cdot h_3(Z)\,. \tag{1.2}$$

Здесь безразмерные переменные $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$, астигматический гауссиан $G(X,Y,Z) \equiv G = \sqrt{\dfrac{Q_{0X}Q_{0Y}}{Q_X Q_Y}}\exp\left(i\left(\dfrac{X^2}{Q_X}+\dfrac{Y^2}{Q_Y}\right)\right)$. Согласующая функция $h_3(Z) = \left(\dfrac{Q_{0X}P_X}{P_{0X}Q_X}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\left(\dfrac{Q_{0X}P_Y}{P_{0Y}Q_Y}\right)^{\frac{\nu_2}{2}}$. Новые переменные X_1, Y_1 выражаются через старые $(X,\ Y)$, как $X_1^2 = t_X X^2, Y_1^2 = t_Y Y^2$, где зависящие только от Z множители $t_X = i(1/P_X - 1/Q_X)$, $t_Y = i(1/P_Y - 1/Q_Y)$. Для краткости введены четыре безразмерных комплексных параметра пучка $Q_{X,Y} = Z - Q_{0X,0Y}$ и $P_{X,Y} = Z - P_{0X,0Y}$, где свободные комплексные константы $Q_{0X,0Y} = Q'_{0X,0Y} + iQ''_{0X,0Y}$; $P_{0X,0Y} = P'_{0X,0Y} + iP''_{0X,0Y}$.

Амплитуды $h_1(X_1)$ и $h_2(Y_1)$ в плоскостях (X, Z) и (Y, Z) 3D пучка $K-G$ выражаются через функции Куммера M следующим образом:

$$h_1(X_1) = A_1 \cdot X_1 \cdot M\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu_1}{2},\frac{3}{2},X_1^2\right)+B_1 \cdot M\left(-\frac{\nu_1}{2},\frac{1}{2},X_1^2\right) \equiv h_{1o}+h_{1e}; \tag{1.3}$$

$$h_2(Y_1) = A_2 \cdot Y_1 \cdot M\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu_2}{2},\frac{3}{2},Y_1^2\right)+B_2 \cdot M\left(-\frac{\nu_2}{2},\frac{1}{2},Y_1^2\right) \equiv h_{2o}+h_{2e}, \tag{1.4}$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 – некоторые произвольные константы. Пометки o и e здесь и далее указывают соответственно на четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций h_e и h_o относительно изменения знаков их аргументов.

Так как существуют четные и нечетные функции h_1 и h_2, то по четности все решения (1.2) уравнения (1.1) делятся на четыре типа:

$$f_{ee} = Gh_{1e}h_{2e}h_3\,,\ f_{oe} = Gh_{1o}h_{2e}h_3\,,\ f_{oe} = Gh_{1o}h_{2e}h_3\,,\ f_{oo} = Gh_{1o}h_{2o}h_3\,. \tag{1.5}$$

Кратко эти решения для амплитуд скалярных параксиальных астигматических 3D пучков K-G можно записать, как $f_{jk} = Gh_{1j}h_{2k}h_3$, где индексы (j, k) принимают два значения (o, e). Функции f_{jk} зависят от трех переменных $(X,\ Y,\ Z)$ и шести $(\nu_1, \nu_2, Q_{0X}, Q_{0Y}, P_{0X}, P_{0Y})$ свободных комплексных параметров. Они описывают шестипараметрическое семейство решений для амплитуд скалярных параксиальных астигматических 3D пучков K-G.

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная интегрируемость (КИ) функций *f*. Для обсуждаемых пучков с простым астигматизмом условия КИ должны выполняться для каждой из плоскостей (X, Z) и (Y, Z) сечения пучка. В таблице 1 представлены, следуя [4], достаточные условия КИ скалярных 2D пучков K-G в определенной плоскости, например, (X, Z). Во всех случаях децентровка пучка может только ухудшить условия КИ. Поэтому здесь исключены варианты, содержащие условия типа $Q_0'' = 0$ и $P_0'' = 0$, поскольку тогда условия КИ могут выполняться только для центрированных (несмещенных) пучков. Интересно, что во всех случаях мнимая часть ν'' комплексного параметра $\nu = \nu' + i\nu''$ не влияет на выполнение условий КИ.

Таблица 1 – Условия КИ для 2D световых пучков K-G с непрерывным свободным параметром $\nu = \nu' + i\nu''$

№	Ограничения на параметры Q_0''	Ограничения на параметры P_0''	Ограничения на индекс $\nu = \nu' + i\nu''$. $\mathbb{N} = 1,2,\ldots$	Предел $\lvert f \rvert$ при $\lvert x \rvert \to \infty$	Выполнение условий КИ
1	$Q_0'' > 0$	$P_0'' > 0$	нет	$\lvert f_e \rvert \to 0;\ \lvert f_o \rvert \to 0$	да
2	$Q_0'' > 0$	$P_0'' \le 0$	$\nu = 2\mathbb{N} - 2$	$\lvert f_e \rvert \to 0;\ \lvert f_0 \rvert \to \infty$	только для Gf_e
3	$Q_0'' > 0$	$P_0'' \le 0$	$\nu = 2\mathbb{N} - 1$	$\lvert f_0 \rvert \to 0;\ \lvert f_o \rvert \to \infty$	только для Gf_o
4	$Q_0'' \le 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -2\mathbb{N}$	$\lvert f_o \rvert \to 0;\ \lvert f_e \rvert \to \infty$	только для Gf_o
5	$Q_0'' \le 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -2\mathbb{N} + 1$	$\lvert f_e \rvert \to 0;\ \lvert f_o \rvert \to \infty$	только для Gf_e
6	$Q_0'' > 0$	$\lvert P_0'' \rvert \to \infty$	$\nu' > -1/2$	$\lvert f \rvert \to 0$	да
7	$Q_0'' > 0$	$\lvert P_0'' \rvert \to \infty$	$\nu' = -1$	$\lvert f \rvert \to \mathrm{const}$	нет
8	$Q_0'' > 0$	$\lvert P_0'' \rvert \to \infty$	$\nu' \in (-1;-1/2]$	$\lvert f \rvert \to 0$	нет
9	$\lvert Q_0'' \rvert \to \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' < -1/2$	$\lvert f \rvert \to 0$	да
10	$\lvert Q_0'' \rvert \to \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' \in [-1/2;0)$	$\lvert f \rvert \to 0$	нет
11	$\lvert Q_0'' \rvert \to \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' = 0$	$\lvert f \rvert \to \mathrm{const}$	нет

2. Векторные астигматические световые пучки K-G с однородной поляризацией. Перейдем теперь от скалярных к векторным пучкам K-G с однородной поляризацией. Следуя разработанному нами формализму [4]–[5], векторы электрического и магнитного полей векторных параксиальных декартовых пучков K-G с однородной поляризацией запишем, как $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\perp f + \theta \nabla \mathbf{e}_\perp f \cdot \mathbf{e}_z$, $\mathbf{H} = n[\mathbf{e}_Z, \mathbf{e}_\perp] f$. Здесь безразмерный параметр параксиальности пучка $\theta = 1/kx_0 << 10^{-4}$. Заданный комплексный постоянный вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp = \eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y$ однозначно определяет поляризационные характеристики пучка. Поперечные компоненты вектора $\mathbf{E}$ равны: $E_X = \eta_X f$; $E_Y = \eta_X f$. Введем комплексный параметр поляризации $\eta = \eta_Y / \eta_X = tg(\psi' + i\psi'')$, тогда азимут световой волны равен ψ', а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = th\psi''$ [6]. Продольная составляющая E_Z электрического поля пучка выражается через вектор $\mathbf{a} = \nabla f / f$, как $E_Z = i\theta(E_X a_X + E_Y a_Y) = i\theta(\eta_X a_X + \eta_Y a_Y) f = i\theta \mathbf{e}_\perp \mathbf{a}_\perp f$. Каждому из четырех типов скалярных пучков K-G, описываемых функциями f_{jk}, соответствует некоторый пучок K-G с вектором однородной поляризации $\mathbf{E}_{jk}$. Поперечные компоненты вектора $\mathbf{a}$: $a_{kX} = \partial_X f_{1k} / f_{1k}$; $a_{kY} = \partial_Y f_{2k} / f_{2k}$.

Перейдем к энергетическим характеристикам векторных декартовых пучков K-G. Усредненные по времени плотности энергии w, продольного S_z и поперечного $\mathbf{S}_\perp$ потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков K-G с однородной поляризацией можно представить как [2]:

$$w = \frac{\varepsilon\ |f|^2}{8\pi};\ S_z = \frac{c}{n} w;\quad \mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s;\mathbf{S}_o = \theta\, S_z \cdot Im\left(\mathbf{e}_X a_X + \mathbf{e}_Y a_Y\right);$$
$$\mathbf{S}_s = \theta\, S_z \cdot th2\psi'' \cdot \mathrm{Re}\left(\mathbf{e}_X a_Y - \mathbf{e}_Y a_X\right). \qquad (2)$$

В выражении для $\mathbf{S}_\perp$ выделены явно, следуя формализму [7]–[8], плотность орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинового $\mathbf{S}_s$ потоков энергии.

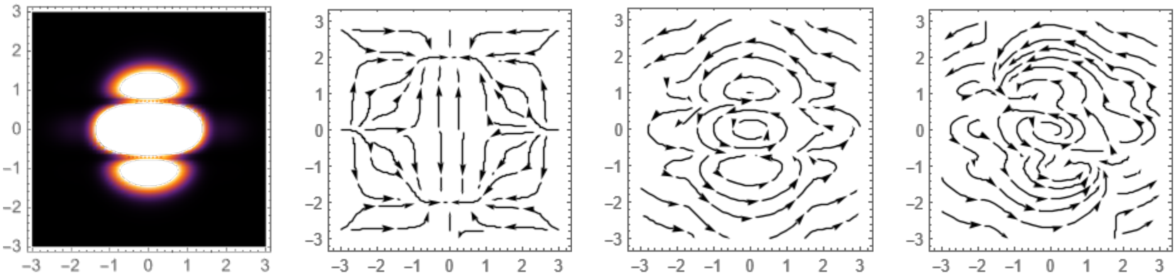
Вычисляя X-компоненты векторов $\mathbf{a}$, получаем $a_{eX} = \frac{2iX}{Q_X} - \frac{2t_1\nu_1 X \cdot M\left(1-\nu_1/2, 3/2;\, t_1X^2\right)}{M\left(-\nu_1/2, 1/2; t_1X^2\right)}$;

$a_{oX} = \frac{1}{X} + \frac{2iX}{Q_X} + \frac{2t_X(\nu_1-1)X \cdot M\left((3-\nu_1)/2, 5/2;\, t_1X^2\right)}{3Q_X M\left((1-\nu_1)/2, 3/2; t_1X^2\right)}$ и аналогичные выражения для a_{eY} и a_{oY}.

Здесь использованы известные [9] преобразования Куммера $\partial_u M(a,b,u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u)$.

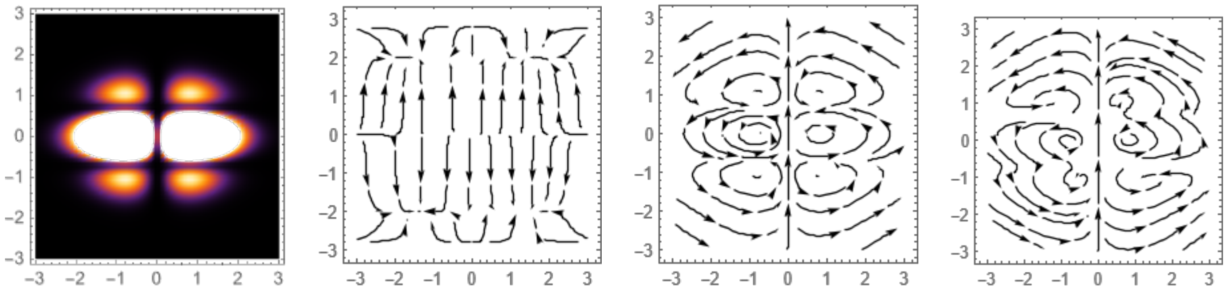
Чтобы векторные пучки K-G с однородной поляризацией переносили конечную мощность, необходимо, чтобы для функций *f* выполнялись условия её КИ. Выше нами были представлены условия КИ для скалярных 2D пучков K-G. Эти ограничения на свободные параметры пучка, как показывает анализ, справедливы также и для векторных 3D пучков K-G с однородной поляризацией.

Так как поляризация исследуемых векторных пучков K-G однородная и она задается предварительно, то перейдем к графическому исследованию свойств энергетических потоков пучков. Продольный поток энергии S_z определяет интенсивность *I* пучка. Поперечные потоки энергии вследствие параксиального характера рассматриваемых полей значительно меньше продольных, однако часто очень важны в приложениях и ими нельзя пренебречь. Как отмечалось выше, возможны четыре различные типы пучков. На рисунках 2.1–2.3 показаны интенсивность и линии орбитального-$\mathbf{S}_o$, спинового-$\mathbf{S}_s$ и общего $\mathbf{S}_\perp$ потоков энергии для Eee, Eeo, Eoo мод векторных декартовых пучков K-G с однородной поляризацией. Как видим, число пиков интенсивности может изменяться от одного до нескольких. Все картины интенсивности и поперечных потоков энергии обладают двумя XZ и YZ плоскостями симметрии. Поэтому общая точечная группа симметрии $2_Z m_X m_Y$ у всех рисунков одинакова. Это обусловлено тем, что исходные функции h_1 и h_2 являются четными или нечетными относительно изменения знаков их аргументов. На рисунках 2.1–2.3 выбраны одинаковые значения свободных параметров, чтобы можно было проследить влияние четности или нечетности функций h_1 и h_2 на характеристики картин. По условиям КИ эти изображения соответствуют варианту № 1 таблицы 1. Как видим, картины интенсивностей и поперечных потоков энергии могут быть самыми разнообразными. Как известно [10], для простейших векторных однородно поляризованных пучков Гаусса спиновые потоки энергии представляют собой концентрические окружности, а орбитальные – радиальные линии. Для ТЕ и ТМ мод Гаусса орбитальные потоки энергии снова направлены вдоль поперечных радиусов, а спиновые потоки энергии отсутствуют! Однако для мод K-G кривые поперечных потоков энергии очень сложные. Переходы Eee – Eeo – Eoo также значительно изменяют соответствующие картины.



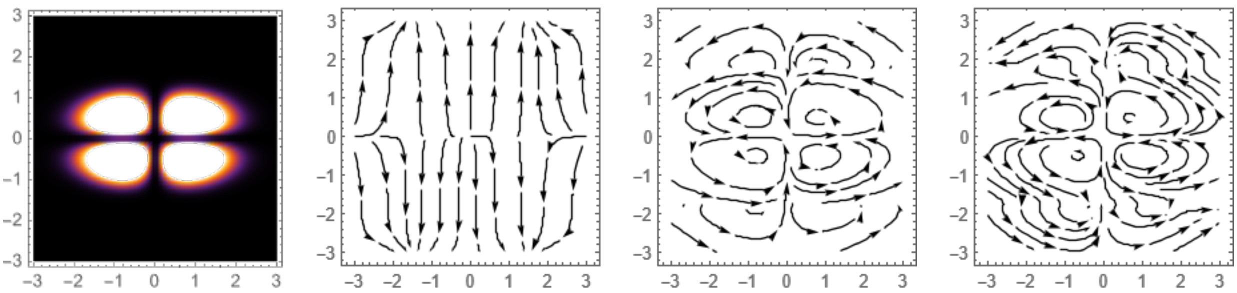
а) б) в) г)

Рисунок 2.1 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Eee-мод векторных декартовых пучков K-G: а) интенсивность I; б) линии орбитального $\mathbf{S}_o$ потока энергии; в) линии спинового $\mathbf{S}_s$ потока энергии; г) линии общего $\mathbf{S}_\perp$ потока энергии. Используемые параметры: $Z = 0.1$; $P''_{oX} = 1$; $P'_{oX} = 0$; $P'_{oY} = 0$; $P''_{oY} = 0.5$; $Q''_{oX} = 3$; $Q''_{oY} = 2$; $Q'_{0Y} = 0$; $Q'_{0X} = 0$; $v''_1 = -0.2$; $v''_1 = 0.1$; $v'_1 = -1$; $v'_2 = -2.2$; $v''_2 = -0.1$



а) б) в) г)

Рисунок 2.2 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Eeo-мод векторных декартовых пучков K-G: а) интенсивность I; б) линии орбитального $\mathbf{S}_o$ потока энергии; в) линии спинового $\mathbf{S}_s$ потока энергии; г) линии общего $\mathbf{S}_\perp$ потока энергии. Используемые параметры, как на Рисунке 2.1



а) б) в) г)

Рисунок 2.3 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Eoo-мод векторных декартовых пучков K-G: а) интенсивность I; б) линии орбитального $\mathbf{S}_o$ потока энергии; в) линии спинового $\mathbf{S}_s$ потока энергии. г) линии общего $\mathbf{S}_\perp$ потока энергии. Используемые параметры, как на Рисунке 2.1.

На рисунке 2.4 значение $Q''_{oX} < 0$ и используется функция h_{10}, поэтому для выполнения условий КИ выбран вариант № 4 таблицы 1. Так как здесь $P''_{oY} < 0$ и используется функция

h_{2e}, то выбирались ограничения на параметры, соответствующие варианту № 4 таблицы 1. Аналогичные результаты по условиям КИ будут также наблюдаться для Eeo-мод (варианты № 3 и № 5 таблицы 1).

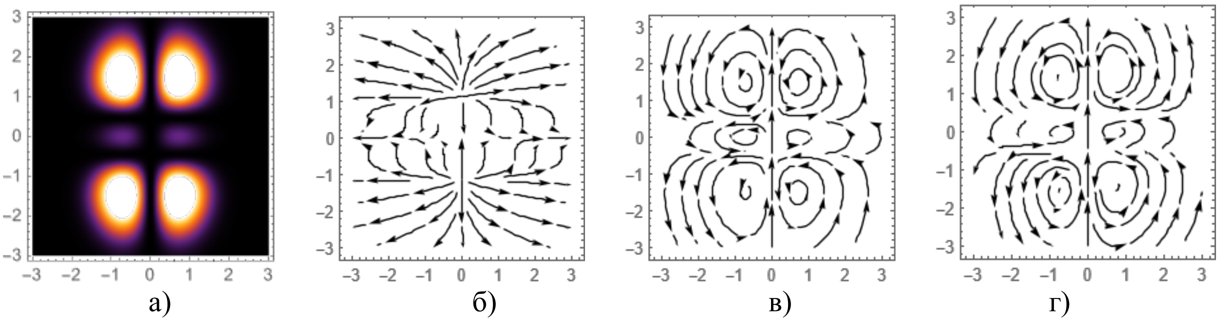


Рисунок 2.4 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Eoe-мод векторных декартовых пучков K-G: а) интенсивность I; б) линии орбитального $\mathbf{S}_o$ потока энергии; в) линии спинового $\mathbf{S}_s$ потока энергии; г) линии общего $\mathbf{S}_\perp$ потока энергии. Используемые параметры: $Z = 0.1$; $P''_{oX} = 1$; $P'_{oX} = 0$; $P'_{oY} = 0$; $P''_{oY} = -0.5$; $Q''_{oX} = -1$; $Q''_{oY} = 2$; $Q'_{0Y} = 0$; $Q'_{0X} = 0$; $\nu''_1 = 0$; $\nu'_1 = -2$; $\nu'_2 = 2$; $\nu''_2 = 0$.

Рисунок 2.5 соответствует варианту № 9 таблицы 1. Аналогичные результаты по условиям КИ будут также наблюдаться для варианта №6 таблицы 1. Вариант № 6 эквивалентен № 9 после замен $P \leftrightarrow Q$. Хотя на рисунке 2.5 построены графики для Eoo-мод, условия КИ и те же самые параметры пригодны также для остальных трех типов мод.

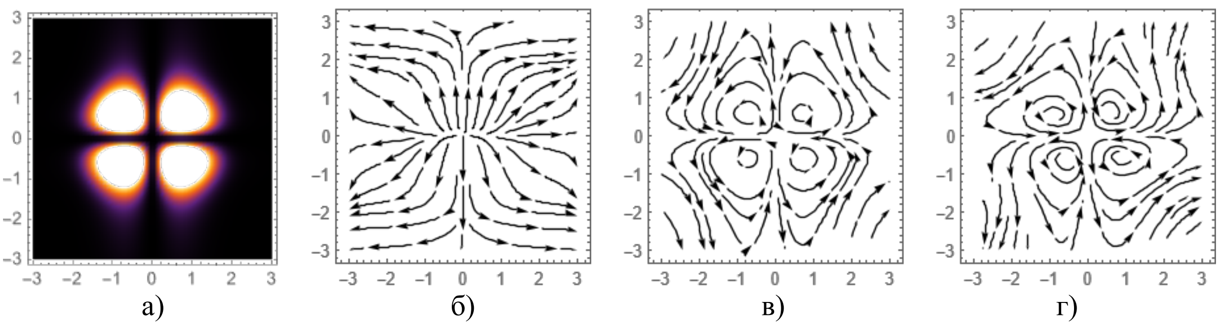


Рисунок 2.5 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Eoo-мод векторных декартовых пучков: а) интенсивность I; б) линии орбитального $\mathbf{S}_o$ потока энергии; в) линии спинового $\mathbf{S}_s$ потока энергии; г) линии общего $\mathbf{S}_\perp$ потока энергии. Используемые параметры: $Z = 0.1$; $P''_{oX} = 1$; $P'_{oX} = 0$; $P'_{oY} = 0$; $P''_{oY} = 0.5$; $Q''_{oX} \to \infty$; $Q''_{oY} \to \infty$; $Q'_{0Y} = 0$; $Q'_{0X} = 0$; $\nu''_1 = -0.2$; $\nu''_1 = 0.1$; $\nu'_1 = -2$; $\nu'_2 = -1.5$; $\nu''_2 = 0.2$.

Коснемся теперь вопроса о влиянии различных свободных параметров на свойства изображений. Возрастание продольного расстояния Z приводит, как известно, к поперечному расплыванию картин. Варьирование остальных комплексных свободных параметров сложным образом влияет на возможные изменения соответствующих картин. Даже мнимые части ν''_1, ν''_2 свободных параметров ν_1, ν_2 могут количественно и качественно влиять на картины, хотя не изменяют условий физической реализуемости пучков.

Заключение. В данной работе выведены выражения, описывающие практически не изучавшиеся типы пучков – векторные параксиальные астигматические декартовы световые пучки K-G с однородной поляризацией. Они характеризуются шестью свободными непрерывными комплексными параметрами $(\nu_1, \nu_2, Q_{0X}, Q_{0Y}, P_{0X}, P_{0Y})$. Приведен формализм для вычисления поляризационных характеристик таких пучков. Сформулированы условия физической реализуемости однородно поляризованных декартовых векторных пучков K-G с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Существенно, что условия КИ пригодны для не-

прерывных комплексных значений свободных параметров ν_1 и ν_2. Вычислены явные выражения для плотностей продольного и поперечного потоков энергии для исследуемых пучков K-G. Выполнено графическое моделирование их поперечных потоков энергии и интенсивности. Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим картинам.

Литература

1. Bandres, M. A. Cartesian beams / M. A. Bandres, J. C. Gutierres-Vega // Optics Letters.– 2007. – Vol. 32, № 23.– P. 3459–3461.

2. Гиргель, С. С. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные световые пучки / С. С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.

3. Гиргель, С. С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера-Гаусса / С. С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 19–23.

4. Гиргель, С. С. Децентрированные пучки Куммера-Гаусса / С. С. Гиргель // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2015. – № 6 (93). – С. 112–116.

5. Гиргель, С. С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016.– № 1 (26).– С. 17–21.

6. Гиргель, С. С. Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52).– С. 13–17.

7. Berry, M. V. Optical currents / M. V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.

8. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.

10. Гиргель, С. С. Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12).– С. 19–24.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 18.08.2023