

К теории $\mathfrak{H}_\sigma$ -критических формаций конечных групп

И.Н. САФОНОВА, В.В. СКРУНДЬ

Изучается вопрос о существовании у всякой σ -локальной формации $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$, минимальных σ -локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций или, иначе, $\mathfrak{H}_\sigma$ -критических формаций, где σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, $\mathfrak{H}$ – σ -локальная формация. Доказано, что если $\mathfrak{H}$ – σ -локальная формация классического типа, то у всякой σ -локальной формации $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$, существует по меньшей мере одна $\mathfrak{H}_\sigma$ -критическая формация. Обобщен ряд результатов о существовании минимальных локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций.

Ключевые слова: конечная группа, формационная σ -функция, σ -локальная формация, критическая σ -локальная формация, формация классического типа.

The question of the existence of minimal σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations or, in other words, $\mathfrak{H}_\sigma$ -critical formations for any σ -local formation $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$ is studied, where σ is some partition of the set of all prime numbers, $\mathfrak{H}$ is a σ -local formation. It is proved that if $\mathfrak{H}$ is a σ -local formation of classical type, then in any σ -local formation $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$ there exists at least one $\mathfrak{H}_\sigma$ -critical formation. A number of results on the existence of minimal local non- $\mathfrak{H}$ -formations are generalized.

Keyword: finite group, formation σ -function, σ -local formation, critical σ -local formation, classical type formation.

Введение. В теории формаций конечных групп изучение и классификация формаций неразрывно связаны с исследованием вопросов наличия или отсутствия у изучаемой формации подформаций того или иного вида. Поскольку решетка подформаций любой неединичной локальной формации континуальна, то при изучении структурного строения такой формации довольно затруднительно применение индуктивных рассуждений. Данное обстоятельство привело к необходимости разработки специальных методов исследования локальных формаций, связанных с понятием критической формации. В частности, при изучении структурного строения локальных формаций важную роль играют минимальные локальные не $\mathfrak{H}$ -формации [1] или, иначе, $\mathfrak{H}_1$ -критические формации [2], т. е. такие локальные формации $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$, все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Общая задача изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [1]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А.Н. Скибой в цикле работ 1980–1993 гг., завершающим результатом которого стало описание $\mathfrak{H}_1$ -критических формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа [3] (т. е. формация $\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны), а также доказано существование $\mathfrak{H}_1$ -критических формаций у всякой локальной формации $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$. Результаты теории $\mathfrak{H}_1$ -критических формаций широко использовались в вопросах классификации локальных формаций, при исследовании их структурного строения, а также при изучении несократимых факторизаций ограниченных и однопорожденных локальных формаций [4], [5].

Развитие теории σ -свойств групп [6], [7] и их классов, в частности, теории σ -локальных формаций [8]–[20], привело к необходимости изучения и классификации σ -локальных формаций, в том числе, развитию теории критических σ -локальных формаций [13], [17], [20]. При этом, следуя [1], [2], минимальной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией или $\mathfrak{H}_\sigma$ -критической формацией называют [13] σ -локальную формацию $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$, все собственные σ -локальные

подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Изучение $\mathfrak{H}_\sigma$ -критических формаций начато в работах [13], [17], где основным результатом является решение задачи Л.А. Шеметкова (1980 г.) об описании критических формаций в классе σ -локальных формаций, т. е. описание минимальных σ -локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций для произвольной σ -локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа. Следуя [2], σ -локальную формацию $\mathfrak{H}$ мы называем σ -*локальной формацией классического типа*, если $\mathfrak{H}$ имеет такое σ -локальное определение, все неабелевы значения которого σ -локальны. Результаты о критических σ -локальных формациях с успехом использовались [20] при изучении σ -локальных формаций с ограниченным $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом.

В данной работе, на основе результатов работ [13], [17], изучается вопрос о существовании минимальных σ -локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций у всякой σ -локальной формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Основным результатом работы является

Теорема А. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная формация, $\mathfrak{H}$ – произвольная σ -локальная формация классического типа. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация.

Мы докажем теорему А в разделе 2 и приведем некоторые следствия этого результата.

1. Базовые определения и вспомогательные результаты. Основные определения, обозначения и ряд свойств σ -локальных формаций представлены в работах [6]–[20]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Если n – целое число, G – группа и $\mathfrak{F}$ – класс групп, то $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \sigma(n) \neq \emptyset\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$, $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Группу G называют [7] σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого i ; σ -нильпотентной, если $G = G_1 \times \dots \times G_t$ для некоторых σ -примарных групп $G_1, \dots, G_t$; σ -разрешимой, если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор G является σ -примарным.

Отметим, что класс всех σ -разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, а через $\mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ -нильпотентных групп. Класс всех единичных групп обозначают через (1).

Пусть $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группу G называют Π -группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают класс всех Π -групп, а через $\mathfrak{N}_\Pi$ – класс всех σ -нильпотентных Π -групп. В частности, если $\Pi = \{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i -групп, а $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ_i' -групп. Символом $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)$ обозначают $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i})$ -радикал группы G (наибольшую нормальную $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i})$ -подгруппу группы G), т. е. $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = G_{\mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i}}$.

Функцию f вида $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называют *формационной σ -функцией*. Для всякой формационной σ -функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = \{G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)\}.$$

Если для некоторой формационной σ -функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является σ -*локальной*, а f – σ -*локальное определение* $\mathfrak{F}$.

Формационную σ -функцию f называют *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i ; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i . Если f – полная внутренняя формационная σ -функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то f называют *каноническим σ -локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l_\sigma \text{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех σ -локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, и называют σ -*локальной формацией*, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ для некоторой группы G , то $\mathfrak{F}$ называют *однопорожденной σ -локальной формацией*.

Для всякого класса групп $\mathfrak{F}$ и всякого $\sigma_i \in \sigma$ полагают

$$\mathfrak{F}(\sigma_i) = \begin{cases} (G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}), \\ \emptyset, & \text{если } \sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *минимальной не $\mathfrak{H}$ -формацией* или *$\mathfrak{H}$ -критической формацией*, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$. Принято σ -локальную формацию $\mathfrak{F}$ называть *минимальной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma$ -критической формацией* [13], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные σ -локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – некоторый непустой набор подклассов $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = (1)$ для любого $j_1 \neq j_2$ из J . Если, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{j_1} \times \dots \times A_{j_t}$, где $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$ для некоторого $j_1, \dots, j_t \in J$, то пишут, что $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_t$, если $J = \{1, \dots, t\}$). Представление формации $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ (см. [5, с. 171]) называют *прямым разложением* формации $\mathfrak{F}$.

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся следующие известные факты теории формаций.

Лемма 1.1 [10, лемма 2.1]. Пусть f и h – формационные σ -функции и пусть $\Pi = \text{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Тогда:

- (1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;
- (2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией;
- (3) Если каждая группа из $\mathfrak{F}$ является σ -разрешимой, то $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$;
- (4) Если $\sigma_i \in \Pi$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$;
- (5) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, где F – единственная формационная σ -функция, такая что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i .

Лемма 1.2 [10, теорема 1.13]. Множество S_n^σ всех n -кратно σ -локальных формаций образует подполугруппу полугруппы всех формаций $G\mathfrak{G}$. Кроме того, $|S_n^\sigma| = 2^{n_0}$ для каждого σ с $|\sigma| > 1$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является минимальным идемпотентом в S_n^σ для всех $n > 0$ и $i \in I$.

Лемма 1.3 [15, лемма 3.2]. Пусть $\sigma_i \in \sigma$, $1 \neq P$ – σ_i -группа, A – группа с $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $G = P \wr A = K \rtimes A$ – регулярное сплетение групп P и A , где K – база сплетения G . Тогда $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K$.

Лемма 1.4 [12, лемма 11]. Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и $G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1.5 [17, теорема А]. Пусть $\mathfrak{H}$ – σ -локальная формация классического типа и H – ее каноническое σ -локальное определение. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^\mathfrak{H}$, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – простая σ_i -группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;
- 2) P – не σ -примарная группа и $P = G^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;

3) $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ и либо $\Phi(K) = 1$ и $K^{H(\sigma_j)} \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$, либо K – минимальная не $H(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$; б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$; в) циклическая q -группа, $q \notin \sigma_i$.

Группа называется π -замкнутой, если она имеет нормальную холлову π -подгруппу.

Лемма 1.6 [21, лемма 4.4]. Пусть $K \subseteq N \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, $K \subseteq \Phi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если N/K π -замкнута, то и N π -замкнута;
- 2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Лемма 1.7 [3, лемма 8] Во всякой неабелевой формации имеется, по крайней мере, одна минимальная неабелева подформация.

Лемма 1.8 [4, лемма 18.13]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная неабелева формация, когда $\mathfrak{F} = \text{form}(G)$, где G – одна из следующих групп: 1) ненильпотентная монолитическая группа с таким монолитом P , что $P \not\subseteq \Phi(G)$ и факторгруппа G/P абелева; 2) группа кватернионов порядка 8; 3) неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p .

Лемма 1.9 [13, теорема 3.1]. Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$, где G – такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^\mathfrak{H}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$ -критической.

Лемма 1.10 [4, следствие 19.14]. Тогда и только тогда группа нильпотентна, когда в формации, ею порожденной, наследственны все подформации.

Лемма 1.11 [4, лемма 18.8]. Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G) = 1$ (p – некоторое простое число), то существует точный неприводимый $F_p G$ -модуль, где F_p – поле из p элементов.

2. Основной результат. Установим вначале справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$ и $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$.

Доказательство. Ввиду леммы 1.1(1) имеем $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$. Поскольку формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является наследственной, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ и по лемме 1.1(5) имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всякого $\sigma_i \in \Pi$. Поэтому $\mathfrak{N}_\Pi = \bigoplus_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, то мы имеем искомое равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы А. Рассмотрим вначале случай, когда $\sigma(\mathfrak{F}) \not\subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \sigma(\mathfrak{H})$. Тогда ввиду леммы 1.1 формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \not\subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку формация (1) всех единичных групп является единственной собственной σ -локальной подформацией $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $(1) \subseteq \mathfrak{H} \neq \emptyset$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – искомая минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация из $\mathfrak{F}$.

Далее будем считать, что $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Пусть f – наименьшее σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$, H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{H}$. Положим $\Sigma := \{\sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}) \mid f(\sigma_j) \not\subseteq H(\sigma_j)\}$. Поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то $\Sigma \neq \emptyset$. Сопоставим со всяким $\sigma_j \in \Sigma$ группу A_j , являющейся группой минимального порядка из $f(\sigma_j) \setminus H(\sigma_j)$. Пусть $\mathcal{L} = \{A_j \mid \sigma_j \in \Sigma\}$. Пусть $B = A_i$ – группа, имеющая наименьший порядок среди групп множе-

ства $\mathcal{L}$. Пусть Q – монолит группы B . По условию $\mathfrak{H}$ имеет такое σ -локальное определение h , каждое непустое значение которого является либо абелевой, либо σ -локальной формацией. Не теряя общности, можно считать, что σ -локальное определение h внутреннее. Поскольку $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то в силу леммы 1.1 $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i) \neq \emptyset$. Следовательно, $h(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Пусть $h(\sigma_i)$ – σ -локальная формация. Тогда в силу леммы 1.2 формация $H(\sigma_i)$ также является σ -локальной. Поскольку ввиду леммы 1.1(2) формация $H(\sigma_i)$ является насыщенной формацией, то $Q \not\subseteq \Phi(B)$.

Предположим, что Q – не σ -примарная группа. Тогда $\Phi(B) = 1$ и $O_{\sigma_j, \sigma_j}(B) = 1$ при всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$. Допустим, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ и пусть $p \in \sigma_i$. По лемме 1.11 существует точный неприводимый $F_p B$ -модуль K . Пусть $G = K \rtimes B$. Ввиду леммы 1.3 $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K$. Поскольку $G / O_{\sigma_i}(G) = G / K \simeq B \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.4. Значит, $\mathfrak{M} = l_\sigma \text{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$. По выбору B – группа минимального порядка из $f(\sigma_i) \setminus H(\sigma_i)$ и $Q = B^{H(\sigma_i)}$. Поскольку $B \in \mathfrak{F}$, то $B \simeq B / O_{\sigma_j, \sigma_j}(B) \in f(\sigma_j)$ для любого $\sigma_j \in \sigma(Q)$. Значит, $B^{H(\sigma_j)} = 1 \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$. Если теперь $K = G^\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}$ – искомая минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация из $\mathfrak{F}$ по лемме 1.5(3). Пусть $G / K \notin \mathfrak{H}$. Тогда $B \notin \mathfrak{H}$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{X} = l_\sigma \text{form}(B)$. Ввиду нашего предположения $B^\mathfrak{H} = Q$. Допустим, что существует такое $\sigma_r \in \sigma(Q)$, что $B / Q \notin H(\sigma_r)$. Так как $B \in \mathfrak{F}$ и $O_{\sigma_r, \sigma_r}(B) = 1$, то $B \in f(\sigma_r)$. Таким образом, $B / Q \in f(\sigma_r) \setminus H(\sigma_r)$. Так как при этом $|B / Q| < |B|$, то последнее противоречит определению группы B . Значит, $B^{H(\sigma_r)} = Q$ для всякого $\sigma_r \in \sigma(Q)$. Тогда $\mathfrak{X}$ – искомая минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация из $\mathfrak{F}$ по лемме 1.5(2). Предположим теперь, что $\sigma_i \in \sigma(Q)$. Пусть $\mathfrak{B} = l_\sigma \text{form}(B)$. Ясно, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $B^{H(\sigma_i)} = Q$, то $B / Q \in \mathfrak{H}$. Если допустить, что $B \in \mathfrak{H}$, то $B \simeq B / O_{\sigma_i, \sigma_i}(B) \in H(\sigma_i)$. Это противоречит определению группы B . Значит, $Q = B^\mathfrak{H}$. Как и выше, можно показать, что $B^{H(\sigma_r)} = Q$ для всякого $r \in \sigma(Q)$. Значит, группа B удовлетворяет условию (2) леммы 1.5. Поэтому $\mathfrak{B}$ – искомая минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация из $\mathfrak{F}$.

Пусть Q – σ -примарная группа, т. е. σ_j -группа для некоторого j . Тогда $O_{\sigma_j, \sigma_j}(B) = O_{\sigma_j}(B)$. Поскольку $Q = B^{H(\sigma_i)}$ и $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i)$, то $j \neq i$. Пусть $p \in \sigma_i$. По лемме 1.11 существует точный неприводимый $F_p B$ -модуль K . Пусть $G = K \rtimes B$. Тогда $K = O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)$ по лемме 1.3. Поскольку $G / K = G / O_{\sigma_i}(G) \simeq B \in f(\sigma_i)$ и f – внутреннее σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ в силу леммы 1.4. Поэтому $\mathfrak{D} = l_\sigma \text{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что группа G удовлетворяет условию (3) леммы 1.5.

Допустим, что $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $B \simeq G / K = G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in H(\sigma_i)$, что противоречит определению группы B . Значит, $G \notin \mathfrak{H}$. Если $B \notin \mathfrak{H}$, то в силу леммы 1.4 имеем $B / O_{\sigma_j}(B) \notin H(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $Q \subseteq O_{\sigma_j}(B)$, то $|B / O_{\sigma_j}(B)| < |B|$. Так как σ -функция f внутренняя, то $B \in \mathfrak{F}$ и $B / O_{\sigma_j, \sigma_j}(B) \in f(\sigma_j)$. Значит, для некоторого $j \neq i$ имеем

$$B / O_{\sigma_j, \sigma_j}(B) \in f(\sigma_j) \setminus H(\sigma_j).$$

Следовательно, в $\mathcal{L}$ имеется группа меньшего порядка чем $|B|$. Последнее противоречит выбору группы B . Поэтому $B \in \mathfrak{H}$ и значит, $K = G^\mathfrak{H}$. Кроме того, ввиду выбора группы B

имеем $Q = B^{H(\sigma_i)}$. Значит, группа G удовлетворяет условию (3) леммы 1.5. Поэтому $\mathfrak{D}$ – искомая минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация из $\mathfrak{F}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $h(\sigma_i)$ – абелева формация. Если $Q \not\subseteq \Phi(B)$, то рассуждая также как и в случае, когда $h(\sigma_i)$ – σ -локальная формация мы покажем, что в формации $\mathfrak{F}$ найдется минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация.

Пусть $Q \subseteq \Phi(B)$. Поскольку $B/Q \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i)$ и B – группа минимального порядка из $f(\sigma_i) \setminus H(\sigma_i)$, то $T/Q := (B/Q)^{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Так как $Q \subseteq \Phi(B)$, то по лемме 1.6 группа T является σ_i -замкнутой. Значит, если $|T/Q| \neq 1$, то $O_{\sigma_i}(T) \neq 1$. Поскольку $O_{\sigma_i}(T)$ – характеристическая подгруппа группы T и T нормальна в B , то $O_{\sigma_i}(T)$ – нормальная подгруппа группы B . Но B – монолитическая группа с монолитом Q . Следовательно, $Q \subseteq O_{\sigma_i}(T)$, т. е. Q – σ_i -группа. Последнее невозможно, так как Q – σ_j -группа и $j \neq i$. Таким образом, $|T/Q| = 1$. Но тогда $B/Q \in h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{N}$. Поскольку формация $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп насыщена и $Q \subseteq \Phi(B)$, то B – нильпотентная q -группа, где $q \notin \sigma_i$.

Пусть B – неабелева группа и $\mathfrak{M} = \text{form}(B)$. Тогда $\mathfrak{M}$ неабелева формация. Значит, по лемме 1.7 в $\mathfrak{M}$ имеется минимальная неабелева подформация $\mathfrak{R}$. Так как $Q \subseteq \Phi(B)$, то в силу леммы 1.8 имеем $\mathfrak{R} = \text{form}(X)$, где X либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q . По лемме 1.11 в каждом из этих случаев существует точный неприводимый $F_p X$ -модуль R , где $p \in \sigma_i$. Пусть $G = R \rtimes X$. Тогда $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = R$. Поскольку $G/O_{\sigma_i}(G) = G/R \simeq X \in \text{form}(B) \subseteq f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.4. Следовательно, $\mathfrak{T} = l_o \text{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{T}$ – искомая минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация. Ввиду лемм 1.5 для этого достаточно доказать, что $R = G^{\mathfrak{H}}$. Покажем, что $X \in \mathfrak{H}$. Поскольку $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то в силу леммы 2.1 имеют место включения $\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}$. Но X нильпотентна, а значит, и σ -нильпотентна. Поэтому $G/R \simeq X \in \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{H}$. Допустим, что $G \in \mathfrak{H}$. Тогда

$$X \simeq G/R = G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i).$$

Так как X – q -группа и $q \notin \sigma_i$, то $X \in h(\sigma_i)$. Но в рассматриваемом случае формация $h(\sigma_i)$ абелева. Полученное противоречие показывает, что $G \notin \mathfrak{H}$. Следовательно, $R = G^{\mathfrak{H}}$.

Ввиду леммы 1.10 формация $\text{form}(B)$ является наследственной. Поэтому $\text{form}(B) = \text{form}(B)$. Ввиду выбора группы B , она является минимальной не $H(\sigma_i)$ -группой. Следовательно, все собственные подгруппы группы B принадлежат абелевой формации $h(\sigma_i)$.

Пусть X – группа кватернионов порядка 8. Все собственные подгруппы группы X являются абелевыми группами экспоненты, делящей 4. Так как $X \in \text{form}(B)$, то экспонента группы X является делителем экспоненты группы B . Значит, X – минимальная не $H(\sigma_i)$ -группа. В силу леммы 1.5(3) формация $\mathfrak{T}$ является искомой $\mathfrak{H}_\sigma$ -критической формацией.

Пусть X – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q . Тогда все собственные подгруппы группы X являются абелевыми группами экспоненты q . Поскольку $X \in \text{form}(B)$, то экспонента группы X является делителем экспоненты группы B . Следовательно, X – минимальная не $H(\sigma_i)$ -группа. Поэтому в силу леммы 1.5(3) формация $\mathfrak{T}$ является искомой минимальной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией.

Пусть B – абелева группа. Тогда B – абелева q -группа, где $q \in \sigma_j$. Пусть $p \in \sigma_i$. Ввиду леммы 1.11 существует точный неприводимый $F_p B$ -модуль R . Пусть $G = R \rtimes B$. Тогда $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = R$. Поскольку $G / O_{\sigma_i}(G) = G / R \simeq B \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.4. Значит, $\mathfrak{M} = l_\sigma \text{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Заметим, что $R = G^{\mathfrak{H}}$. Действительно, если $G \in \mathfrak{H}$, то $B \simeq G / R = G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in H(\sigma_i)$, что противоречит выбору группы B . Поэтому $R = G^{\mathfrak{H}}$. Кроме того, поскольку по выбору группы B она является минимальной не $H(\sigma_i)$ -группой. Поэтому по лемме 1.5(3) формация $\mathfrak{M}$ является искомой минимальной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией. Теорема доказана.

Напомним [10], что формацию называют 2-кратно σ -локальной, если она имеет такое σ -локальное определение, все непустые значения которого σ -локальные формации.

Следствие 2.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная формация, $\mathfrak{H}$ – произвольная 2-кратно σ -локальная формация. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация.

Пусть $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\sigma$ – формация всех σ -нильпотентных групп. Всякую минимальную σ -локальную не $\mathfrak{N}_\sigma$ -формацию называют минимальной σ -локальной не σ -нильпотентной формацией. Ввиду примера 1.2(iv) [10] $\mathfrak{N}_\sigma = LF_\sigma(h) = LF_\sigma(H)$, где $h(\sigma_i) = (1)$ и $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i -групп, для всех i . Поэтому $\mathfrak{N}_\sigma$ – σ -локальная формация классического типа. Следовательно, из теоремы А получаем

Следствие 2.5 [20, следствие 3.9]. Пусть $\mathfrak{F}$ не σ -нильпотентная σ -локальная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная не σ -нильпотентная σ -локальная формация.

Пусть теперь $\mathfrak{H}$ – произвольная собственная неединичная σ -локальная подформация из $\mathfrak{N}_\sigma$. Тогда ввиду [20, лемма 3.3] имеет место равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. Согласно [17, лемма 2.1] имеем $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n) = LF_\sigma(N)$, где n и N , соответственно, наименьшее и каноническое σ -локальные определения формации $\mathfrak{N}_\Pi$. При этом, $n(\sigma_i) = (1)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$, $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $N(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Значит, $\mathfrak{N}_\Pi$ – σ -локальная формация классического типа. Поэтому из теоремы А получаем

Следствие 2.6 [20, теорема 3.8]. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие σ -локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация.

Пусть $\mathfrak{H}$ – формация всех групп с σ -нильпотентным коммутантом. Тогда в силу примера 1.2(v) [10] формация $\mathfrak{H}$ совпадает с произведением $\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, где $h(\sigma_i) = \mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп. Поэтому $\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{A}$ – σ -локальная формация классического типа. Следовательно, из теоремы А имеем

Следствие 2.7. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная формация, $\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{A}$ – формация всех групп с σ -нильпотентным коммутантом. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная σ -локальная не $\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{A}$ -формация.

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\sigma$ – формация всех σ -разрешимых групп. Всякую минимальную σ -локальную не $\mathfrak{S}_\sigma$ -формацию называют минимальной σ -локальной не σ -разрешимой формацией. Ввиду [10, замечание 2.4] $\mathfrak{S}_\sigma = LF_\sigma(H)$, где $H(\sigma_i) = \mathfrak{S}_{\sigma_i}$ для всех i . Поэтому $\mathfrak{S}_\sigma$ – σ -локальная формация классического типа. Значит, из теоремы А вытекает

Следствие 2.8. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная не σ -разрешимая формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная σ -локальная не σ -разрешимая формация.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ из теоремы А получаем

Следствие 2.9 [3, следствие 1]. Пусть формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ локальны и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{H}$ является формацией классического типа, то в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна $\mathfrak{H}_1$ -критическая формация.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328).

Литература

1. Шеметков, Л. А. Экраны ступенчатых формаций / Л. А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп. – Киев : Наукова думка, 1980. – С. 37–50.
2. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Изв. АН БССР. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
3. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев : Ин-т матем. АН Украины, 1993. – С. 258–268.
4. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 256 с.
5. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Бел. навука, 1997. – 240 с.
6. Skiba, A. N. On σ -properties of finite groups I / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 34 (4). – С. 89–96.
7. Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – V. 436. – P. 1–16.
8. Skiba, A. N. On one generalization of the local formations / A. N. Skiba // Probl. Phys., Math., Tech. – 2018. – № 34 (1). – P. 79–82.
9. Chi, Z. On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Probl. Phys., Math., Tech. – 2018. – № 34 (2). – P. 85–88.
10. Chi, Z. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
11. Tsarev, A. Laws of the lattices of σ -local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Art.: 75.
12. Safonova, I. N. On some properties of the lattice of totally σ -local formations of finite groups / I. N. Safonova, V. G. Safonov // Журнал Бел. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2020. – № 3. – С. 1–14.
13. Сафонова, И. Н. О минимальных σ -локальных не $\mathfrak{H}$ -формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.
14. Воробьев, Н. Н. Отделимые решетки кратно σ -локальных формаций / Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько, А. О. Ходжагулыев // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 4. – С. 721–735.
15. Safonova, I. N. Some properties of n -multiply σ -local formations of finite groups / I. N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – Art.: 2250138.
16. Safonova, I. N. A criterion for σ -locality of a non-empty formation. / I. N. Safonova // Communications in Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376.
17. Сафонова, И. Н. О критических σ -локальных формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.
18. Safonova, I. N. On the τ -closedness of n -multiply σ -local formation / I. N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – P. 123–136.
19. Сафонова, И. Н. О n -кратной σ -локальности непустой τ -замкнутой формации конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 32–38.
20. Сафонова, И. Н. О σ -локальных формациях конечных групп с ограниченным $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 41–62.
21. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 271 с.