Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (147), 2024

УДК 519.17 EDN: TPZQKR

$AT4(4,6,5)$-граф не существует*

Юань Юань[1], А. А. Махнев[1, 2], В. С. Климин[3]

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$ – собственные значения Γ. Тогда выполняется фундаментальная граница $\left(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1}\right)\left(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}\right) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}$. Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d}, b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется плотным. Граф является плотным тогда и только тогда, когда окрестность любой вершины в нем сильно регулярна с собственными значениями $a_1, p = b^+, -q = b^-$. В этом случае все параметры Γ выражаются через p, q, r и мы назовем Γ антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами p, q, r ($AT4(p,q,r)$-графом). В $AT4(q-2,q,r)$-графе Γ для любой вершины $u \in \Gamma$ подграф $\Gamma_2(u)$ является дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{(q-2)q^2, (q-1)^3, (r-1)q\,(2q-2)/r, 1; 1, q\,(2q-2)/r, (q-1)^3, (q-2)q^2\}$. В работе рассмотрены графы с $q = 5$ и массивами пересечений $\{144,125,32,1; 1,8,125,144\}$, $\{204,175,48,1; 1,12,175,204\}$.

Ключевые слова: графы, параметры, числа, вершина.

Let Γ be a remotely regular graph of diameter $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$ be the eigenvalues of Γ. Then the fundamental boundary $\left(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1}\right)\left(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}\right) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}$. is satisfied. Let's put

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d}, b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

A non-bipartite graph for which equality is achieved in the fundamental boundary is called dense. A graph is dense if and only if the neighborhood of any vertex in it is strongly regular with eigenvalues $a_1, p = b^+, -q = b^-$. In this case, all Γ parameters are expressed in terms of p, q, r and we will call Γ an antipodal dense graph of diameter 4 with parameters p, q, r ($AT4(p,q,r)$-graph). In the $AT4(q-2,q,r)$-graph Γ, for any vertex $u \in \Gamma$, the subgraph $\Gamma_2(u)$ is a distantly regular graph of diameter 4 with an intersection array $\{(q-2)q^2, (q-1)^3, (r-1)q\,(2q-2)/r, 1; 1, q\,(2q-2)/r, (q-1)^3, (q-2)q^2\}$. Graphs with $q = 5$ and intersection arrays $\{144,125,32,1; 1,8,125,144\}$, $\{204,175,48,1; 1,12,175,204\}$ are considered in the paper.

Keywords: graphs, parameters, numbers, vertex.

Введение. Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b) = 1$(если $d(a,b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом*.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d

* Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p_{ij}^l и параметры Крейна q_{ij}^l определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$ – собственные значения Γ. По выполняется фундаментальная граница

$$\left(\theta_1 + \frac{k}{a_1 + 1}\right)\left(\theta_d + \frac{k}{a_1 + 1}\right) \geq -\frac{k a_1 b_1}{(a_1 + 1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1 + \theta_d}, b^- = -1 - \frac{b_1}{1 + \theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется плотным.

Пусть Γ – антиподальный граф диаметра 4 с индексом антиподальности r. Тогда по Γ имеет массив пересечений $\{k, k - a_1 - 1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k - a_1 - 1, k\}$. Если Γ – плотный граф, то окрестность любой вершины имеет неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$ и все параметры Γ выражаются через p, q, r. В этом случае назовем Γ антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами p, q, r ($AT4(p, q, r)$-графом) [2].

В $AT4(q-2, q, r)$-графе Γ для любой вершины $u \in \Gamma$ подграф $\Gamma_2(u)$ является дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{(q-2)q^2, (q-1)^3, (r-$ *1q2q−2r,1;1,q2q−2r,q−13,q−2q2}.*

Гипотеза 1. *Если Γ является графом с массивом пересечений* $\{(q-2)q^2, (q-1)^3, 2q(q-$ *−2,1;1,2q,q−13,q−2q2}, то q=4 и Γ – первый граф Сойчера.*

Частичным подтверждением гипотезы является следующий результат.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{144,125,32,1; 1,8,125,144\}$ *не существует.*

Следствие 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{204,175,48,1; 1,12,175,204\}$ *($AT4(4,6,5)$-граф) не существует.*

Тройные числа пересечений.

В доказательстве теоремы используются тройные числа пересечений [3].

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 – вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d, то $\{u_1u_2u_3; r_1r_2r_3)$ – множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3] = |\{u_1u_2u_3; r_1r_2r_3)|$. Числа $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w – вершины графа Γ, $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \sum_{l=1}^{d}[ilh] = p_{ih}^V - [i0h], \sum_{l=1}^{d}[ijl] = p_{ij}^W - [ij0]/, (+).$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^W = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \ldots, d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}\, Q_{sj} Q_{th}[uvw; rst]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ и положим $\{ijh\} = \{uvw; ijh\}$, $[ijh] = [uvw; ijh]$, $[ijh]' = [uvw; ihj]$, $[ijh]^* = [uvw; jih]$ и $[ijh]^\sim = [uvw; hji]$. Вычисление параметров $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Граф с массивом пересечений $\{144,125,32,1; 1,8,125,144\}$.

В этом параграфе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{144,125,32,1;1,8,125,144\}$. Тогда Γ имеет $1+144+2250+576+4=2975$ вершин, спектр $144^1, 24^{476}, 4^{510}, -6^{1904}, -26^{84}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 476 & 510 & 1904 & 84 \\ 1 & \frac{238}{3} & \frac{85}{6} & \frac{-238}{3} & \frac{-91}{6} \\ 1 & 0 & \frac{-17}{3} & 0 & \frac{14}{3} \\ 1 & \frac{-119}{6} & \frac{85}{6} & \frac{119}{6} & \frac{-91}{6} \\ 1 & -119 & 510 & -476 & 84 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Числа пересечений графа Γ равны:*

$p^1_{11}=18, p^1_{12}=125, p^1_{22}=1625, p^1_{23}=500, p^1_{33}=72, p^1_{34}=4, p^1_{44}=0$;

$p^2_{11}=8,\ p^2_{12}=104,\ p^2_{13}=32,\ p^2_{22}=1725,\ p^2_{23}=416,\ p^2_{24}=4,\ p^2_{33}=128,\ p^2_{34}=0,$ $p^2_{44}=0$;

$p^3_{12}=125,\ p^3_{13}=18,\ p^3_{14}=1,\ p^3_{22}=1625,\ p^3_{23}=500,\ p^3_{24}=0,\ p^3_{33}=54,\ p^3_{34}=3,$ $p^3_{44}=0$;

$p^4_{13}=144, p^4_{22}=2250, p^4_{23}=0, p^4_{24}=0, p^4_{33}=432, p^4_{34}=0, p^4_{44}=3$.

Доказательство. Прямые вычисления.

Пусть u,v,w – вершины графа Γ, $\{rst\}=\{uvw;rst\}$ и $[rst]=[uvw;rst]$. Положим $\Sigma=\Gamma_2(u)$, $\Lambda=\Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени $p^2_{22}=1725$ на $k_2=2250$ вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=1$. *Тогда верны равенства:*

$[111]=-3r_3/4+r_4/4,\ [112]=[121]=3r_3/4-r_4/4+8,\ [122]=r_3/4+r_4/4+64,$ $[123]=[132]=-r_3+32, [133]=r_3$;

$[211]=-r_3/4-r_4/4+18,\quad [212]=[221]=r_3/4+r_4/4+85,\quad [222]=-5r_3/4-5r_4/4+1300, [223]=[232]=r_3+r_4+340, [233]=-r_3-r_4+72, [234]=[243]=4,$

$[311]=r_3,\ [312]=[321]=-r_3+32,\ [322]=r_3+r_4+256,\ [323]=[332]=-r_4+128, [333]=r_4,$

где $0\le r_3\le 18, 0\le r_4\le 62, r_3+r_4$ *делится на* 4 *и не больше* 72.

Доказательство. Упрощения формул (+).

По лемме 2 имеем $1210\le[222]=-5r_3/4-5r_4/4+1300\le 1300$.

Лемма 3. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=3$. *Тогда верны равенства:*

$[112]=-r_{14}+8,\quad [113]=r_{14},\quad [121]=-r_{12}+r_{13}-r_{14}+8,\quad [122]=r_{12}+r_{14}+64,$ $[123]=-r_{13}+32, [131]=r_{12}-r_{13}+r_{14}, [132]=-r_{12}+32, [133]=r_{13}-r_{14}$;

$[212]=[221]=r_{12}+r_{14}+85,\quad [213]=[231]=-r_{12}-r_{14}+18,\quad [214]=[241]=1,$ $[222]=-5r_{12}-5r_{14}+1300, [223]=[232]=4r_{12}+4r_{14}+340, [233]=-3r_{12}-3r_{14}+54,$ $[234]=[243]=3$;

$[312]=-r_{12}+32,\ [313]=r_{12},\ [321]=-r_{13}+32,\ [322]=4r_{12}+4r_{14}+256,\ [323]=-4r_{12}+r_{13}-4r_{14}+128, [331]=r_{13}, [332]=-3r_{12}-4r_{14}+128, [333]=3r_{12}-r_{13}+4r_{14}$;

$[422]=4,$

где $0\le r_{12},r_{13}\le 18, 0\le r_{14}\le 8, r_{12}+r_{14}\le 18$.

Доказательство. Упрощения формул (+).

По лемме 3 имеем $1210\le[222]=-5r_{12}-5r_{14}+1300\le 1300$.

Лемма 4. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=4$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

$[113]=[131]=8, [122]=104$;

$[213]=[231]=104, [222]=1725, [233]=312, [244]=3$;

$[313]=[331]=32, [322]=416, [333]=96$;

$[422]=4$.

Доказательство. Упрощения формул (+).

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p^2_{12} = 104$, $p^2_{22} = 1725$, $p^2_{23} = 416$, $p^2_{24} = 4$, то $636100 = 104 \cdot 1210 + 416 \cdot 1210 + 4 \cdot 1725 \le d \le 104 \cdot 1300 + 416 \cdot 1300 + 4 \cdot 1725 = 682900$.

С другой стороны, $d = 1725(1724 - \lambda)$, поэтому $368.75 \le 1724 - \lambda \le 395.89$, $1328.11 \le \lambda \le 1355.25$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 5. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

$[111] = r_{10}$, $[112] = [121] = -r_{10} - r_9 + 8$, $[113] = [131] = r_9$, $[122] = r_7$, $[123] = [132] = r_{10} + r_9 - r_7 + 96$, $[133] = r_8$*;*

$[211] = -r_{10} - r_9 + 8$, $[212] = [221] = r_7$, $[213] = [231] = -r_8 - r_9 + 32$, $[222] = -5r_7 + 1720$, $[223] = [232] = 4r_7$, $[224] = [242] = 4$, $[233] = -4r_7 + r_8 + r_9 + 384$*;*

$[311] = r_9$, $[312] = [321] = r_{10} - r_7 + r_9 + 96$, $[313] = [331] = r_8$, $[322] = 4r_7$, $[323] = [332] = -r_{10} - 3r_7 - r_9 + 320$, $[333] = r_{10} + 3r_7 + r_9 - r_8 - 192$*;*

$[422] = 4$,

где $64 \le r_7 \le 104$, $r_8 + r_9 \le 32$, $r_9 + r_{10} \le 8$.

Доказательство. Упрощения формул (+) дают равенства

$[111] = r_{10}$, $[112] = [121] = -r_{10} - r_9 + 8$, $[113] = r_9$, $[122] = r_7$, $[123] = r_{10} + r_{11} - r_7 + 96$, $[131] = r_{11}$, $[123] = [132] = r_{10} + r_9 - r_7 + 96$, $[133] = -r_{10} - r_{11} + r_7 - r_9 - 64$;

$[211] = -r_7 + r_8 + r_9 + 72$, $[212] = [221] = r_7$, $[213] = [231] = -r_8 - r_9 + 32$, $[222] = -5r_7 + 1720$, $[223] = [232] = 4r_7$, $[224] = [242] = 4$, $[233] = -4r_7 + r_8 + r_9 + 384$;

$[311] = -r_{10} - r_8 + r_7 - r_9 - 64$, $[312] = r_{10} - r_7 + r_9 + 96$, $[313] = r_8$, $[321] = r_{10} - r_7 + r_{11} + 96$, $[322] = 4r_7$, $[323] = [332] = -r_{10} - 3r_7 - r_{11} + 320$, $[331] = -r_{11} + r_8 + r_9$, $[332] = -r_{10} - 3r_7 - r_9 + 320$, $[333] = r_{10} + 3r_7 + r_{11} - r_8 - 192$;

$[422] = 4$,

где $64 \le r_7 \le 104$, $0 \le r_8 \le 32$, $0 \le r_9, r_{10}, r_{11} \le 8$, $r_9 + r_{10} \le 8$, $r_8 + r_9 \le 32$.

Симметризация $[111] = r_{10} = r_{10}{}' = r_{10}{}^* = r_{10}^{\sim}$, $[113] = r_9 = r_9{}^*$, $[122] = r_7 = [212] = [221]$, $[131] = r_{11} = r_{11}^{\sim}$, $[313] = r_8 = r_8^{\sim}$ и $r_7 = r_7{}' = r_7^* = r_7^{\sim}$.

Далее, $[113] = r_9 = [131]' = r_{11}{}'$, из равенств $[112] = [121] = -r_{10} - r_9 + 8$ следует, что $r_{10} + r_9 = r_{10}{}' + r_9{}'$ и $r_9 = r_9{}' = r_{11}$. Поэтому $r_9 = r_9{}' = r_9^* = r_9^{\sim}$ и $[311] = -r_{10} + r_7 - r_8 - r_9 - 64 = [113] = r_9^{\sim}$. Отсюда $r_{10} + r_8 + 2r_9 + 64 = r_7$, следовательно, $r_8 = r_8{}' = r_8^* = r_8^{\sim}$.

Аналогично, $[233] = -4r_7 + r_8 + r_9 + 384 = [323] - r_{10} - 3r_7 - r_9 + 320$, $r_7 - r_8 - 2r_9 - r_{10} = 64$ и выполняются равенства из заключения леммы.

По лемме 5 имеем $1200 \le [222] = -5r_7 + 1720 \le 1400$.

Пусть $d(u,v) = 2$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин (s,t) на расстоянии 1, где $s \in \{uv; 21)$ и $t \in \{uv; 22)$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[221] = r_3/4 + r_4/4 + 85$, где $r_3 + r_4 \le 72$, поэтому $8840 = 85 \cdot 104 \le f_1 \le 103 \cdot 104 = 10712$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[211] = -r10 - r_9 + 8$ и $8840 \le f_1 = -\sum_i(r^i_{10} + r^i_9) + 13800 \le 10712$. Таким образом, $3088 \le \sum_i(r^i_{10} + r^i_9) \le 4960$ и $1.79 \le \sum_i(r^i_{10} + r^i_9)/1725 \le 2.88$.

Подсчитаем число g_1 пар вершин (s,t) на расстоянии 1, где $s \in \{uv; 23\}$ и $t \in \{uv; 22\}$. С одной стороны, по лемме 3 имеем $[221] = r_{12} + r_{14} + 85$, где $r_{12} + r_{14} \le 18$, поэтому $35360 = 85 \cdot 416 \le g_1 \le 103 \cdot 416 = 42848$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[231] = -r_8 - r_9 + 32$ и $35360 \le g_1 = -\sum_i(r^i_8 + r^i_9) + 55200 \le 42848$. Таким образом, $12352 \le \sum_i(r^i_8 + r^i_9) \le 19840$ и $5.0777 \le \sum_i(r^i_8 + r^i_9)/1725 \le 7.6622$.

Подсчитаем число g_2 пар вершин (s,t) на расстоянии 2, где $s \in \{uv; 23\}$ и $t \in \{uv; 22\}$. С одной стороны, по лемме 3 имеем $392 \le [222] \le 432$, поэтому $163072 = 392 \cdot 416 \le g_2 \le 432 \cdot 416 = 179712$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[232] = 3r_7$ и $163072 \le g_2 = 3\sum_i r^i_7 \le 179712$. Таким образом, $31.51 \le \sum_i r^i_7/1725 \le 34.73$. Противоречие с тем, что $64 \le r_7$.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Brouwer, A. E. Distance-Regular Graphs / A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1989. – 495 p.

2. Jurisic, A. Tight distance-regular graphs / A. Jurisic, J. Koolen, P. Terwilliger // J. Algebr. Comb. – 2000. – Vol. 12. – P. 163–197.

3. Coolsaet, K. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs / K. Coolsaet, A. Jurishich // J. Comb. Theory. Series A. – 2008. – Vol. 115. – P. 1086–1095.

[1]Хайнаньский университет, г. Хэйкоу

[2]Институт математики и
механики УрО РАН

[3]Уральский федеральный университет

Поступила в редакцию 01.10.2024