Известия Гомельского государственного университета
имени Ф Скорины, № 6 (147), 2024

Математика

УДК 512.542 EDN: QBKYZE

О влиянии индексов A-допустимых θ-подгрупп на их пересечения

Р.В. Бородич

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер максимальных A-допустимых подгрупп с ограничениями на индексы. Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.
Ключевые слова: конечная группа, формация, функтор.

The structure of the subgroup equal to the intersection of the kernels of maximal A-admissible subgroups not containing $\mathfrak{F}$-residual, with restrictions on indexes. The properties of the corresponding generalized Frattini subgroup are established.
Keywords: finite group, formation, $\mathfrak{F}$-residual, functor.

Введение. Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Одно из классических направлений в исследовании конечных групп связано с исследованием свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и влиянием этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Важную роль здесь занимает подгруппа Фраттини, введенная в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие в работах многих авторов: В. Гашюца [2] (пересечение $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп группы G), В. Дескинса [3] (пересечение $\Phi_p(G)$ всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на p) и других авторов (см. работу [4]).

В настоящее время развитие теории пересечений максимальных подгрупп связано с применением функторного метода (А.Н. Скиба [5], С.Ф. Каморников [6], А.Ф. Васильев [7]).

Данная работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами и продолжает исследования, начатые в работах [8]–[9].

Определения и обозначения. Подгруппа H группы G называется:

– пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $< H, H^x >$;

– абнормальной, если $x \in < H, H^x >$ для любого $x \in G$.

Напомним, что группа G обладает свойством C_π, если в ней существует холловская π-подгруппа и любые две из них сопряжены между собой.

Пусть $\mathfrak{X}$ произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^\phi \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть:

1) абнормально полным, если для любой группы G среди элементов множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G;

2) абнормальным, если $\theta(G)\setminus\{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных подгрупп;

3) тривиальным, если функтор θ выделяет в группе G все её подгруппы.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из $G,$ сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа $G,$ множество A и отображение $f: A \mapsto Aut(G),$ где $Aut(G)$ – группа автоморфизмов группы $G.$ Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из $A,$ то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A.$

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения.

$\Phi_{\theta}(G,A) = \cap\{M_G \mid M \in \theta(G),$ M – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Phi_{\theta_{\pi}}(G,A) = \cap\{M_G \mid M \in \theta(G),$ M – максимальная A-допустимая подгруппа, $|G:M|$ не делится на числа из π $\}$;

$\Delta(G,A) = \cap\{M_G \mid M$ – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Delta_{\pi}(G,A) = \cap\{M_G \mid M$ – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, $|G:M|$ не делится на числа из π $\}$;

$\Phi(G,A) = \cap\{M_G \mid M$ – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Phi_{\pi}(G,A) = \cap\{M_G \mid M$ – максимальная A-допустимая подгруппа, $|G:M|$ не делится на числа из π $\}$;

В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны $G.$

Если группа операторов A тривиальна, то соответствующие подгруппы будут обозначаться $\Phi_{\theta}(G),$ $\Phi_{\theta_{\pi}}(G),$ $\Delta(G)$ (подгруппа Гашюца), $\Delta_{\pi}(G),$ $\Phi(G)$ (подгруппа Фраттини), $\Phi_{\pi}(G).$

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов $A,$ а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [9].

Вспомогательные результаты.

Лемма 3.1. [10]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1.$ Тогда в группе G существует A-допустимая силовская p-подгруппа для любого простого числа $p \in \pi(G)$ и все такие подгруппы сопряжены между собой в $G.$*

Лемма 3.2. [9] Предположим, что G имеет группу операторов $A,$ такую, что $(|G|,|A|)=1,$ θ – аномально полный функтор. Тогда подгруппа $\Phi_{\theta}(G,A)$ нильпотентна.

Лемма 3.3. *Если θ – подгрупповой функтор, N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \Phi_{\pi}(G,A),$ то*

$$\Phi_{\theta_{\pi}}(G/N,A) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G,A)/N$$

Доказательство. Если $N \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G,A),$ то $N \subseteq M,$ где M – любая максимальная A-допустимая θ-подгруппа из G с индексом, не делящимся на простые числа из $\pi.$ Тогда

$$\Phi_{\theta_{\pi}}(G/N,A) = \cap(M/N)_{G/N}$$

где M/N пробегает множество всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп из G/N с индексом, не делящимся на простые числа из $\pi.$

Продолжим равенство

$$\cap(M / N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = \Phi_{\theta_\pi}(G, A) / N.$$

Из приведенных равенств вытекает утверждение леммы.

Основной результат.

Теорема 4.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор и подгруппа* $\Phi_{\theta_\pi}(G, A)$ *обладает свойством* C_π. *Тогда*

$$\Phi_{\theta_\pi}(G, A) / O_\pi(G) = \Phi_\theta(G / O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Очевидно, что $O_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G, A)$. По лемме 3.1 в $\Phi_{\theta_\pi}(G, A)$ существует A-допустимая холловская π-подгруппа. Обозначим её через P. Тогда по обобщенной лемме Фраттини

$$G = \Phi_{\theta_\pi}(G, A) N_G(P).$$

Предположим, что $N_G(P)$ – собственная подгруппа группы G. Тогда в G найдётся максимальная A-допустимая θ-подгруппа M, такая что $\Phi_{\theta_\pi}(G, A) \not\subseteq M$ и $N_G(P) \subseteq M$. Ясно, что индекс $N_G(P)$ в G не делится на числа из π. Следовательно, $\Phi_{\theta_\pi}(G, A) \subseteq M$. Получили противоречие. Значит, P – нормальная подгруппа группы G. Отсюда следует, что число $|\Phi_{\theta_\pi}(G, A) / O_\pi(G)|$ не делится на числа из π. Очевидно, что

$$\Phi_\theta(G / O_\pi(G), A) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G / O_\pi(G), A).$$

Применяя лемму 3.3, получим

$$\Phi_\theta(G / O_\pi(G), A) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G, A) / O_\pi(G).$$

Если $\Phi_\theta(G / O_\pi(G), A) \subset \Phi_{\theta_\pi}(G, A) / O_\pi(G)$, то в G найдётся максимальная A-допустимая θ-подгруппа K такая, что $O_\pi(G) \subseteq K$ и $K\Phi_{\theta_\pi}(G, A) = G$. Следовательно,

$$|G : K| = |\Phi_{\theta_\pi}(G, A) : \Phi_{\theta_\pi}(G, A) \cap K|$$

не делится на числа из π. Отсюда получаем, что $\Phi_{\theta_\pi}(G, A) \subseteq K$, что противоречит определению K. Значит, $\Phi_\theta(G / O_\pi(G), A) = \Phi_{\theta_\pi}(G, A) / O_\pi(G)$. Теорема доказана.

Применяя лемму 3.2, получаем

Следствие 4.1.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор и подгруппа* $\Phi_{\theta_\pi}(G, A)$ *обладает свойством* C_π. *Тогда факторгруппа* $\Phi_{\theta_\pi}(G, A) / O_\pi(G)$ *нильпотентна.*

Следствие 4.1.2. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$ *и подгруппа* $\Delta_\pi(G, A)$ *обладает свойством* C_π. *Тогда факторгруппа* $\Delta_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Delta(G / O_\pi(G), A)$ *нильпотентна.*

Следствие 4.1.3. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$ *и подгруппа* $\Phi_\pi(G, A)$ *обладает свойством* C_π. *Тогда факторгруппа* $\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi(G / O_\pi(G), A)$ *нильпотентна.*

По теореме Силова в любой группе G подгруппа $\Phi_p(G, A)$ обладает свойством C_p, тогда при $\pi = \{p\}$ имеем следующий результат.

Следствие 4.1.4. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда* $\Phi_{\theta_p}(G, A) / O_p(G) = \Phi_\theta(G / O_p(G), A)$ *– нильпотентная факторгруппа.*

Следствие 4.1.5. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1.$ Тогда факторгруппа $\Delta_p(G,A)/O_p(G)=\Delta(G/O_p(G),A)$ нильпотентна.*

Следствие 4.1.6. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1.$ Тогда факторгруппа $\Phi_p(G,A)/O_p(G)=\Phi(G/O_p(G),A)$ нильпотентна.*

Если группа операторов $A=1,$ то из теоремы 4.1 получаем

Следствие 4.1.7. *Пусть θ – абнормально полный подгрупповой функтор и подгруппа $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ обладает свойством C_π. Тогда факторгруппа $\Phi_{\theta_\pi}(G)/O_\pi(G)$ нильпотентна.*

Следствие 4.1.8. *Пусть подгруппа $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π, тогда факторгруппа $\Delta_\pi(G)/O_\pi(G)=\Delta(G/O_\pi(G))$ нильпотентна.*

Из следствия 4.1.6 для подгруппы $\Phi_p(G)$ вытекает соответствующий результат В. Дескинса из [3].

Теорема 4.2. *Пусть π и τ – различные множества простых чисел, $\pi\cap\tau=\varnothing$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|,|A|)=1,$ справедливо равенство*

$$\Phi_{\theta_\pi}(G,A)\cap\Phi_{\theta_\tau}(G,A)=\Phi_\theta(G,A).$$

Доказательство. Очевидно, $\Phi(G,A)\subseteq\Phi_{\theta_\pi}(G,A)\cap\Phi_\tau(G,A).$ Пусть $\Phi(G,A)\subset K=\Phi_{\theta_\pi}(G,A)\cap\Phi_\tau(G,A).$ Тогда в G найдётся максимальная A-допустимая θ-подгруппа M такая, что $G=MK.$ Если $|G:M|$ не делится на числа из $\omega=\pi\cup\tau,$ то $\Phi_\omega(G,A)\subseteq M.$ Следовательно, $KM=M,$ что не возможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на числа из $\pi\cup\tau.$

Пусть $O_\pi(G)=1.$ Тогда ввиду теоремы 4.1 имеем равенство $\Phi_{\theta_\pi}(G,A)=\Phi(G,A).$ Поэтому $K\subseteq M,$ что противоречит определению подгруппы $K.$ Значит, $O_\pi(G)\not\simeq 1.$ Если $O_\pi(G)M=G,$ то $|G:M|$ делится на числа из $\pi.$ Противоречие. Поэтому $O_\pi(G)\subseteq M.$ На основании теоремы 4.1 имеем

$$\Phi_{\theta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=\Phi_{\theta_\pi}(G/O_\pi(G),A)\subseteq M/O_\pi(G).$$

Отсюда следует, что $\Phi_{\theta_\pi}(G,A)\subseteq M.$ Снова пришли к противоречию. Таким образом, остаётся заключить, что

$$\Phi_{\theta_\pi}(G,A)\cap\Phi_\tau(G,A)=\Phi(G,A).$$

Теорема доказана.

Следствие 4.2.1. *Пусть θ – абнормально полный подгрупповой функтор, π и τ – различные множества простых чисел и $\pi\cap\tau=\varnothing$. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|,|A|)=1,$ подгруппа $\Phi_{\theta_\pi}(G,A)\cap\Phi_{\theta_\tau}(G,A)$ нильпотентна.*

Следствие 4.2.2. *Пусть π и τ – различные множества простых чисел, $\pi\cap\tau=\varnothing$, тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|,|A|)=1,$ справедливо равенство*

$$\Delta_\pi(G,A)\cap\Delta_\tau(G,A)=\Delta(G,A)$$

и соответствующее пересечение является нильпотентной подгруппой группы $G.$

Следствие 4.2.3. *Пусть π и τ – различные множества простых чисел, $\pi\cap\tau=\varnothing$, тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|,|A|)=1$ подгруппа*

$$\Phi_\pi(G,A)\cap\Phi_\tau(G,A)=\Phi(G,A)$$

является нильпотентной.

Если $\pi=\{p\}$ и $\tau=\{q\},$ то имеем

Следствие 4.2.4. *Пусть* θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* p *и* q *– различные простые числа. Тогда для любой группы* G *с группой операторов* A *такой, что* $(|G|,|A|)=1$ *подгруппа* $\Phi_{\theta_p}(G,A)\cap\Phi_{\theta_q}(G,A)=\Phi(G,A)$ *нильпотентна.*

Следствие 4.2.5. *Пусть* p *и* q *– различные простые числа. Тогда для любой группы* G *с группой операторов* A *такой, что* $(|G|,|A|)=1$ *подгруппа* $\Delta_p(G,A)\cap\Delta_q(G,A)=\Delta(G,A)$ *нильпотентна.*

Следствие 4.2.6. *Пусть* p *и* q *– различные простые числа. Тогда для любой группы* G *с группой операторов* A *такой, что* $(|G|,|A|)=1$ *подгруппа* $\mathit{\Phi}_p(G,A)\cap\mathit{\Phi}_q(G,A)=\mathit{\Phi}(G,A)$ *нильпотентна.*

В случае, когда группа операторов единична, получаем

Следствие 4.2.7. *Пусть* π *и* τ *– различные множества простых чисел и* $\pi\cap\tau=\varnothing$*. Тогда для любой группы* G *пересечение*

$$\Phi_{\theta_\pi}(G)\cap\Phi_{\theta_\tau}(G)=\Phi_\theta(G)$$

является нильпотентной подгруппой.

Следствие 4.2.8. *Пусть* π *и* τ *– различные множества простых чисел,* $\pi\cap\tau=\varnothing$*, тогда справедливо равенство*

$$\Delta_\pi(G)\cap\Delta_\tau(G)=\Delta(G)$$

и соответствующее пересечение является нильпотентной подгруппой группы G.

Следствие 4.2.9. *Пусть* p *и* q *– различные простые числа. Тогда для любой группы* G *пересечение*

$$\Phi_{\theta_p}(G)\cap\Phi_{\theta_q}(G)=\Phi_\theta(G)$$

является нильпотентной подгруппой.

Следствие 4.2.10. *Пусть* p *и* q *– различные простые числа. Тогда для любой группы* G *подгруппа* $\Delta_p(G)\cap\Delta_q(G)=\Delta(G)$ *нильпотентна.*

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – V. 58. – P. 160–170.
3. Deskins, W. A condition for the solvability of a finite group / W. Deskins // III. J. Math. – 1961. – V. 5, № 2. – P. 306–313.
4. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
5. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
6. Каморников, С. Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. – Минск : Бел. навука, 2003. – 254 с.
7. Васильев, А. Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, В. Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы : материалы Междунар. алгебр. конф. / Институт математики Акад. Украины ; редкол.: Н. С. Черников [и др.] – Киев, 1993. – С. 27–54.
8. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.
9. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2019. – № 14 (02). – DOI : 10.1142/S1793557121500261.
10. Gorenshtein, D. Finite groups / D. Gorenshtein. – New York : Harper and Row, 1968. – 572 p.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 25.10.2024