

## Приближение Вина в ультрафиолетовой области спектра теплового излучения звёзд

О.В. НОВИКОВА, Г.Ю. ТЮМЕНКОВ

В работе проведена количественная оценка эффективности приближения Вина для теплового излучения звёзд в ультрафиолетовой области спектра. Для ряда фиксированных температур рассчитано относительное отклонение спектральной плотности Вина от планковской на границах диапазонов *NUV*, *MUV*, *FUV* и *EUUV*. Для указанных диапазонов также определены относительные отклонения излучательных способностей, светимостей и блесков. Проведена оценка эффективности приближения для некоторых звёзд. **Ключевые слова:** ультрафиолетовое излучение, спектральная плотность, кривая Планка, формула Вина, относительное отклонение, светимость.

The paper provides a quantitative assessment of the effectiveness of the Wien approximation for the thermal radiation of stars in the ultraviolet region of the spectrum. For a number of fixed temperatures, the relative deviations of the Wien spectral density from the Planck one at the edges of the *NUV*, *MUV*, *FUV* and *EUUV* ranges are calculated. For the same ranges, the relative deviations of emissivities, luminosities and fluxes are also determined. The efficiency of the approximation for some stars was assessed as well.

**Keywords:** ultraviolet radiation, spectral density, Planck curve, Wien formula, relative deviation, luminosity.

**Введение.** Вид непрерывных составляющих спектров электромагнитного излучения звёзд говорит о правомерности использования модели абсолютно-чёрного тела (АЧТ) для их описания [1], [2]. Как любая модель, АЧТ не является идеально точной, но она достаточно эффективна. Физическая привлекательность модели заключается в том, что единственным параметром звезды, определяющим характер излучения, является температура её поверхности  $T$ . Следовательно, законы, описывающие излучение АЧТ, можно использовать в качестве законов излучения звёзд. В этом случае функция спектральной плотности  $\varepsilon(T, \lambda)$ , параметризованная температурой  $T$  и длиной волны  $\lambda$ , часто называемая «кривой Планка», имеет вид [1], [2]

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\frac{hc}{e^{\lambda kT}} - 1} \equiv \varepsilon_p(T, \lambda). \quad (1)$$

В (1) присутствуют физические константы:  $h$  – постоянная Планка,  $k$  – постоянная Больцмана,  $c$  – скорость света в вакууме. Численные значения этих констант общеизвестны.

В свою очередь,  $\varepsilon(T, \lambda)$  имеет связь с интегральной мощностью излучения с единицы поверхности  $\varepsilon(T)$ , которую также часто называют излучательной способностью, вида

$$\varepsilon(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda = \sigma T^4. \quad (2)$$

Выражение (2) – это закон Стефана-Больцмана, где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$  – постоянная Стефана-Больцмана. Если же проинтегрировать (2) в пределах от некоторого  $\lambda_1$  до некоторого  $\lambda_2$ , то получится мощность излучения с единицы поверхности в выбранном диапазоне

$$\varepsilon(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda. \quad (3)$$

В дальнейшем на  $\varepsilon(T)$  будем навешивать индексы диапазона и типа спектральной плотности, например,  $\varepsilon_p^{MUV}(T)$  – то есть, *MUV* – диапазон и «планковская» плотность.

Исследование функции (1) на экстремум при фиксированной температуре, требующее выполнения условия

$$\left[ \frac{\partial \varepsilon(T, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_T = 0$$

приводит к координате максимума

$$\lambda_{(max)} = \frac{b}{T}. \tag{4}$$

Выражение (3) – закон «смещения Вина», где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная Вина.

Таким образом, приведенные здесь математические соотношения (1), (2), (4) и рассматриваются в качестве законов излучения АЧТ.

**Приближение Вина.** Выражение (1) для функции спектральной плотности  $\varepsilon(T, \lambda)$  неудобно было интегрировать аналитическими методами. В настоящее же время используются численные методы, встроенные в компьютерные технологии, например [3]. Поэтому исторически сложилось так, что формула (1) была упрощена для случая «коротких» волн. Например, для середины ультрафиолетовой (далее  $УФ$ ) области спектра с длиной волны  $\lambda = 205 \text{ нм}$  при температуре  $T = 6000 \text{ К}$  показатель экспоненты в (1)

$$\frac{hc}{\lambda kT} \cong 70.$$

Предположение о правомерности утверждения о большом значении показателя и для других «коротких» волн и температур, позволяет пренебречь единицей, и (1) преобразуется к виду

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \equiv \varepsilon_w(T, \lambda). \tag{5}$$

Полученную формулу (5) называют *формулой Вина*, которую и надо понимать, как приближение Вина для функции спектральной плотности (1) в «коротковолновой» области спектра.

**Относительное отклонение спектральных плотностей в ультрафиолетовой области спектра.** Специфика различных научных дисциплин часто предполагает наличие собственных единиц измерения, различных шкал, специфической терминологии и т. д. Это касается и деления спектра электромагнитного излучения на области, диапазоны и поддиапазоны. Согласно стандарту ISO-DIS-21348 [4], ультрафиолетовую область спектра делят на диапазоны так, как это представлено в Таблице 1, и мы будем следовать этому делению. Следует заметить, что ультрафиолетовая астрономия продолжает активно развиваться, особенно в технологическом отношении [5]. И большие надежды ученых в наше время связаны с новейшей информацией, получаемой со снимков, сделанных в диапазонах  $УФ$  области спектра, космическим телескопом *Хаббл* [6].

Таблица 1 – Разделение инфракрасного излучения на диапазоны

Наименование	Аббревиатура	Длины волн (нм)
Экстремальный ультрафиолетовый диапазон	<i>EUV</i>	10–121
Дальний ультрафиолетовый диапазон	<i>FUV</i>	121–200
Средний ультрафиолетовый диапазон	<i>MUV</i>	200–300
Ближний ультрафиолетовый диапазон	<i>NUV</i>	300–400

Для оценки качества приближения можно использовать относительное отклонение спектральных плотностей  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  вида

$$\delta\varepsilon(T, \lambda) = \frac{\varepsilon_p(T, \lambda) - \varepsilon_w(T, \lambda)}{\varepsilon_p(T, \lambda)}, \tag{6}$$

которое характеризует близость расположения приближенной «виновской» кривой к точной «планковской».

Ниже в таблице 2 приведены значения  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  для ряда температур, совпадающих либо близких к границам спектральных классов, и для граничных длин волн диапазонов из таблицы 1. При расчётах на основе формул (6), (1) и (5) использовалась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica [7], которая была применена и при последующих вычислениях.

Таблица 2 – Относительное отклонение спектральных плотностей  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  на границах диапазонов

$\delta\varepsilon(T, \lambda)$ \ $\lambda, \text{ нм}$	10	121	200	300	400
$\delta\varepsilon(2000 \text{ K}, \lambda)$	<b>0,0000</b>	<b><math>1,5123 \cdot 10^{-26}</math></b>	<b><math>2,0320 \cdot 10^{-16}</math></b>	<b><math>3,8538 \cdot 10^{-11}</math></b>	<b><math>1,5468 \cdot 10^{-8}</math></b>
$\delta\varepsilon(5000 \text{ K}, \lambda)$	<b>0,0000</b>	<b><math>4,6974 \cdot 10^{-11}</math></b>	<b><math>5,6434 \cdot 10^{-7}</math></b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0008</b>
$\delta\varepsilon(10000 \text{ K}, \lambda)$	<b>0,0000</b>	<b><math>6,8546 \cdot 10^{-6}</math></b>	<b>0,0008</b>	<b>0,0083</b>	<b>0,0274</b>
$\delta\varepsilon(30000 \text{ K}, \lambda)$	<b><math>1,4845 \cdot 10^{-21}</math></b>	<b>0,0190</b>	0,0909	0,2022	0,3015
$\delta\varepsilon(60000 \text{ K}, \lambda)$	<b><math>3,8530 \cdot 10^{-11}</math></b>	0,1378	0,3015	0,4496	0,5491

По данным таблицы 2 можно сделать заключение, что при температурах от 2000 K до 10000 K приближение Вина работает прекрасно во всех диапазонах ультрафиолетовой области, и даже на дальнем краю *NUV*  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  имеет значение всего около 3 %. Также оно эффективно в *EUUV* диапазоне при температуре 30000 K и только вблизи его ближнего края при 60000 K. В таблице 2 все приемлемые значения  $\delta\varepsilon(T, \lambda)$  меньше 5 % выделены жирным шрифтом.

**Относительное отклонение излучательных способностей (светимостей, блесков).** Теперь обратимся непосредственно к излучательной способности  $\varepsilon(T)$  вида (3), которая связана со светимостью звезды  $L$  и наблюдаемым блеском  $E$  в рассматриваемом диапазоне, соотношениями

$$L = 4\pi R^2 \varepsilon(T), \quad E = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \varepsilon(T), \quad (7)$$

где  $R$  – радиус звезды, а  $r$  – расстояние до звезды.

Данные её расчетов для случаев «планковской» (1) и «виновской» спектральных плотностей (5) во всех диапазонах *УФ* области приведены в таблице 3.

Теперь введем относительное отклонение излучательной способности  $\delta\varepsilon(T)$  вида

$$\delta\varepsilon(T) = \frac{\varepsilon_p(T) - \varepsilon_w(T)}{\varepsilon_p(T)}, \quad (8)$$

которое носит обобщающий характер в силу взаимосвязей (7) и будет равно относительным отклонениям светимости и блеска, то есть

$$\delta\varepsilon(T) = \delta L(T) = \delta E(T).$$

Так как блеск является наблюдаемой характеристикой звёзд, отдадим ему приоритет.

Таблица 3 – Значения излучательных способностей  $\varepsilon(T)$  в *УФ* диапазонах для различных температур

$\varepsilon(T), \text{ Вт/м}^2$ \ $T, \text{ K}$	2000	5000	10000	30000	60000
$\varepsilon_p^{NUV}(T)$	14,8293	$1,9096 \cdot 10^6$	$1,1774 \cdot 10^8$	$2,5291 \cdot 10^9$	$7,6552 \cdot 10^9$
$\varepsilon_w^{NUV}(T)$	14,8293	$1,9089 \cdot 10^6$	$1,1580 \cdot 10^8$	$1,9074 \cdot 10^9$	$3,8742 \cdot 10^9$
$\varepsilon_p^{MUV}(T)$	0,0843	$4,4408 \cdot 10^5$	$1,1710 \cdot 10^8$	$6,9907 \cdot 10^9$	$2,6279 \cdot 10^{10}$
$\varepsilon_w^{MUV}(T)$	0,0843	$4,4407 \cdot 10^5$	$1,1665 \cdot 10^8$	$6,0356 \cdot 10^9$	$1,6721 \cdot 10^{10}$
$\varepsilon_p^{FUV}(T)$	$1,6926 \cdot 10^{-6}$	$1,1366 \cdot 10^3$	$3,6535 \cdot 10^7$	$1,5069 \cdot 10^{10}$	$9,0169 \cdot 10^{10}$
$\varepsilon_w^{FUV}(T)$	$1,6926 \cdot 10^{-6}$	$1,1366 \cdot 10^3$	$3,6524 \cdot 10^7$	$1,4366 \cdot 10^{10}$	$7,1922 \cdot 10^{10}$
$\varepsilon_p^{EUUV}(T)$	$4,6747 \cdot 10^{-16}$	3,9219	$1,3064 \cdot 10^6$	$1,8819 \cdot 10^{10}$	$6,0436 \cdot 10^{11}$
$\varepsilon_w^{EUUV}(T)$	$4,6747 \cdot 10^{-16}$	3,9219	$1,3064 \cdot 10^6$	$1,8700 \cdot 10^{10}$	$5,8422 \cdot 10^{11}$

Результаты расчётов  $\delta E(T)$  по данным таблицы 3, абсолютно правомерные для  $\delta\varepsilon(T)$  и  $\delta L(T)$ , приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Значения относительного отклонения блеска  $\delta E(T)$ 

$T, \text{ K}$ \ $\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{NUV}$	$[\delta E(T)]^{MUV}$	$[\delta E(T)]^{FUV}$	$[\delta E(T)]^{EUUV}$
2000	<b><math>7,1337 \cdot 10^{-9}</math></b>	<b><math>1,8069 \cdot 10^{-11}</math></b>	<b><math>2,5021 \cdot 10^{-16}</math></b>	<b>0,0000</b>
5000	<b><math>3,6539 \cdot 10^{-4}</math></b>	<b><math>2,9671 \cdot 10^{-5}</math></b>	<b><math>2,5317 \cdot 10^{-7}</math></b>	<b><math>2,2017 \cdot 10^{-11}</math></b>

Окончание таблицы 4

10000	<b>0,0165</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0003</b>	<b>3,0020·10<sup>-6</sup></b>
30000	0,2458	0,1366	<b>0,0466</b>	<b>0,0063</b>
60000	0,4939	0,3637	0,2024	<b>0,0333</b>

На основе данных таблицы 4 приходим к выводу, что при температурах от 2000 K до 10000 K приближение Вина абсолютно корректно во всех диапазонах ультрафиолетовой области спектра. Вполне разумно полагать, что достаточно качественную оценку даёт относительное отклонение на уровне 5 % и ниже, поэтому реальная верхняя граница температуры выше 10000 K и составляет 13850 K, что несложно проверить. Здесь, как и в таблице 2, все приемлемые значения  $\delta E(T, \lambda)$  выделены жирным шрифтом. При температурах до 30000 K приближение Вина применимо в *FUV* и *EUUV* диапазонах. Также оно эффективно в *EUUV* диапазоне при температурах 60000 K.

**Данные расчётов  $\delta E(T)$  для ряда звёзд.** Результаты расчётов относительных отклонений блесков  $\delta E(T)$  приведены в таблице 5. В ней подтверждаются выводы предыдущего пункта на примере ряда реальных звёзд в широком диапазоне температур поверхности. Вполне очевидно, что эти результаты соответствуют общим тенденциям поведения  $\delta E(T)$ , следовательно, и поведения  $\delta \epsilon(T)$  и  $\delta L(T)$ .

Таблица 5 – Значения относительного отклонения блеска  $\delta E(T)$  ряда звёзд

Звезда ( <i>T</i> )	$\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{NUV}$	$[\delta E(T)]^{MUV}$	$[\delta E(T)]^{FUV}$	$[\delta E(T)]^{EUUV}$
<i>β Ориона C</i> (33000 K)		0,2789	0,1628	0,0603	<b>0,0088</b>
<i>β Южного Креста</i> (30000 K)		0,2458	0,1366	<b>0,0466</b>	<b>0,0063</b>
<i>Сириус B</i> (25200 K)		0,1889	0,0950	<b>0,0276</b>	<b>0,0032</b>
<i>Спика</i> (22000 K)		0,1488	0,0686	<b>0,0174</b>	<b>0,0017</b>
<i>Ахернар</i> (15000 K)		0,0625	<b>0,0215</b>	<b>0,0035</b>	<b>0,0001</b>
<i>Сириус A</i> (9500 K)		<b>0,0134</b>	<b>2,9253·10<sup>-3</sup></b>	<b>2,1400·10<sup>-4</sup></b>	<b>1,6166·10<sup>-6</sup></b>
<i>Альтаир</i> (8700 K)		<b>9,1974·10<sup>-3</sup></b>	<b>1,8061·10<sup>-3</sup></b>	<b>1,0758·10<sup>-4</sup></b>	<b>5,1701·10<sup>-7</sup></b>
<i>τ Кита</i> (5300 K)		<b>5,5664·10<sup>-4</sup></b>	<b>5,0929·10<sup>-5</sup></b>	<b>5,6790·10<sup>-7</sup></b>	<b>8,4262·10<sup>-11</sup></b>
<i>ε Эридана</i> (4830 K)		<b>2,8152·10<sup>-4</sup></b>	<b>2,1212·10<sup>-5</sup></b>	<b>1,5315·10<sup>-7</sup></b>	<b>9,5549·10<sup>-12</sup></b>
<i>Вольф 359</i> (3000 K)		<b>2,8354·10<sup>-6</sup></b>	<b>5,1799·10<sup>-8</sup></b>	<b>1,8069·10<sup>-11</sup></b>	<b>0,0000</b>

**Заключение.** Таким образом, в работе показано, что приближение Вина:

- корректно использовать во всей ультрафиолетовой области спектра при температурах поверхности звёзд ниже 13850 K;
- правомерно использовать в *EUUV* диапазоне для звёзд всех спектральных классов за исключением горячих звёзд класса *W*;
- неправомерно для использования либо неудовлетворительно работает в *NUV*, *MUV* и *FUV* диапазонах для всех звёзд спектральных классов *W*, *O* и частично *B*.

### Литература

1. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии / Э. В. Кононович, В. И. Мороз. – М. : URSS, 2022. – 544 с.
2. Carroll, B. W. An introduction to modern astrophysics / B. W. Carroll, D. A. Ostlie. – San Francisco : Pearson International Edition, 2007. – 1351 p.
3. Schmidt, W. Numerical Python in astronomy and astrophysics / W. Schmidt, M. Völschow. – Cham, Switzerland : Springer, 2021. – 260 p.
4. Definitions of solar irradiance spectral categories [Electronic resource]. – Mode of access : [https://www.acttr.com/images/pdf/ISO\\_DIS\\_21348.pdf/](https://www.acttr.com/images/pdf/ISO_DIS_21348.pdf/). – Date of access : 13.02.2024.
5. The extreme-ultraviolet explorer (EUVE) [Electronic resource]. – Mode of access : <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=1992-031A/>. – Date of access : 10.02.2024.
6. The telescope that captured our imagination [Electronic resource]. – Mode of access : <https://science.nasa.gov/mission/hubble/observatory/>. – Date of access : 02.02.2024.
7. Wolfram, S. Metamathematics : foundations & physicalization / S. Wolfram. – New York, 2022. – 190 p.