Известия Гомельского государственного университета
имени Ф Скорины, № 3 (144), 2024

Математика

УДК 512.542 EDN: RDZGIZ

О пересечении абнормальных максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу p-нильпотентный радикал, в группах с операторами

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, А.В. Бузланов, И.В. Близнец

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер не p-нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп в группах с операторами. Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.
Ключевые слова: конечная группа, p-нильпотентная подгруппа, абнормальная подгруппа, группа операторов.

The work studies the structure of a subgroup equal to the intersection of the nuclei of non-p-nilpotent anomalous maximal subgroups in groups with operators. The properties of the generalized Frattini subgroup are established.
Keywords: finite group, p-nilpotent subgroup, abnormal subgroup, group of operators.

Введение. Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории конечных групп объекты, экстремально расположенные в группе, играют важную роль. Особое внимание уделяется максимальным подгруппам. Одно из направлений исследований в теории пересечений максимальных подгрупп связано с анализом свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и их воздействия на структуру подгрупп и нормальную структуру группы. Это направление исследований восходит к работе Г. Фраттини [1], который показал, что пересечение $\Phi(G)$ всех максимальных подгрупп конечной группы G является нильпотентным. Результаты этого исследования развивались в работах различных авторов, о которых можно узнать из монографий [2] и [3].

Данная работа посвящена развитию указанного направления в группах с операторами и продолжает исследования работ [5]–[7].

Определения и обозначения. Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G, (то есть пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G / N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G / N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G / N \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ – формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, то наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-радикал группы G, либо $MG_{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G_{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG_{\mathfrak{F}} = M$ или $MG_{\mathfrak{F}} = G$. Аналогичные рассуждения верны и для $\mathfrak{F}$-корадикала.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация p-нильпотентных групп. Введем следующие обозначения:

$\overline{\Delta}^{p}_{F_p}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \not\supseteq G_{\mathfrak{F}},\ M \notin \mathfrak{F},\ M$ – абнормальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Delta^{p}_{\overline{F}_p}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \not\supseteq G_{\mathfrak{F}},\ M$ – абнормальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Delta^{p}_{F_p}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \supseteq G_{\mathfrak{F}},\ M$ – абнормальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Delta(G, A) = \cap\{M_G \mid$ M – абнормальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Phi\ (G, A) = \cap\{M_G \mid\ M\ –\ A$-допустимая подгруппа$\}$.

В частном случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация p-нильпотентных (нильпотентных) групп, подгруппу $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G, A)$ будем обозначать $\overline{\Delta}^{p}_{F_p}(G, A)$ ($\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{F}(G, A)$).

Если A – единичная группа операторов, то понятия A-допустимой максимальной подгруппы, не содержащей $\mathfrak{F}$-корадикал, и максимальной $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппы совпадают. В этом случае будем использовать обозначения $\overline{\Delta}^{p}_{F_p}(G)$ и $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{F}(G)$.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

Напомним, что подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют подгруппу, равную пересечению всех ненормальных максимальных подгрупп группы G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [6].

Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и $\Delta^p(G, A) \neq G$, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Delta^p(G, A) \subseteq F_p(G)$, если G – разрешимая неединичная группа, то $\Delta^p(G, A) \subset F_p(G)$;

2) $F_p(G / \Delta^p(G, A)) = F_p(G) / \Delta^p(G, A)$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 работы [5] следует, что $\Delta^p(G, A)$ является p-нильпотентной подгруппой. Следовательно, $\Delta^p(G, A) \subseteq F_p(G)$. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда $G / \Delta^p(G, A)$ разрешима и неединична. Пусть $B / \Delta^p(G, A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G / \Delta^p(G, A)$. Так как $B / \Delta^p(G, A)$ – p-группа для некоторого простого p, а формация p-нильпотентных групп является нормально наследственной локальной формацией, содержащей все нильпотентные группы, то по теореме 3.2 из [5] B является p-нильпотентной, а это значит, что $B \subseteq F_p(G)$. Следовательно, $\Delta^p(G, A) \subset G$.

Если $F_p(G / \Delta^p(G, A)) = K / \Delta^p(G, A)$, то K является p-нильпотентной подгруппой, поэтому $K \subseteq G$ и $F_p(G / \Delta^p(G, A)) \subseteq F_p(G) / \Delta^p(G, A)$. Обратное включение следует из определения подгруппы $F_p(G)$.

Основной результат.

Теорема 1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

1) в разрешимой неединичной группе выполняется равенство $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)=\Delta^p(G,A)$;

2) в разрешимой не p-нильпотентной группе подгруппа $\Delta^p_{F_p}(G,A)\in(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p)^2$.

Доказательство. Подгруппы $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ и $\Delta^p_{F_p}(G,A)$ являются характеристическими в G и

$$\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)\cap\Delta^p_{F_p}(G,A)=\Delta^p(G,A).$$

Для факторгруппы $G/\Delta^p(G,A)$ выполняется

$$F_p(G/\Delta^p(G,A))=F_p(G)/\Delta^p(G,A)$$

поэтому

$$\Delta^p_{\overline{F}_p}(G/\Delta^p(G,A))=\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\Delta^p(G,A).$$

Предположим, что $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\Delta^p(G,A)\neq 1$ и пусть $K/\Delta^p(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Delta^p(G,A)$, содержащаяся в $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\Delta^p(G,A)$. Так как формация p-нильпотентных групп содержит формацию всех нильпотентных групп, то $K/\Delta^p(G,A)$ p-нильпотентна и по теореме 3.5 из [5] K является p-нильпотентной подгруппой. Следовательно, $K\subseteq F_p(G)$. Тогда

$$K\subseteq\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)\cap\Delta^p_{F_p}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\Delta^p(G,A)=1$, а, значит, $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)=\Delta^p(G,A)$.

Пусть G – разрешимая не p-нильпотентная группа. Из того, что $F_p(G)\subseteq\Delta^p_{F_p}(G,A)F_p(G)$ и

$$\Delta^p_{F_p}(G,A)/F_p(G)=\Delta^p(G/F_p(G),A),$$

следует, что подгруппа $\Delta^p_{F_p}(G,A)\in(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p)^2$.

Следствие 1.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, *тогда в разрешимой неединичной группе подгруппа* $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ p*-нильпотентна.*

Если группа операторов A является тривиальной, то имеет место следующее

Следствие 1.2. *Пусть* G *– разрешимая группа, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Если $G\neq 1$, то $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G)=\Delta^p(G)$;

2) В любой не p-нильпотентной группе G подгруппа $\Delta^p_{F_p}(G)\in(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p)^2$.

Следствие 1.3. *В разрешимой неединичной группе подгруппа* $\Delta^p_{\overline{F}_p}(G)$ p*-нильпотентна.*

Если вместо формации p-нильпотентных групп выбрать формацию всех нильпотентных групп, то из следствия 1.2 вытекает результат из работы [4].

Теорема 2. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, G *– разрешимая группа. Если* $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)\neq G$, *то* $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)=\Delta^p(G,A)$.

Доказательство. Пусть G обладает не p-нильпотентными максимальными A-допустимыми подгруппами, не содержащими $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$-корадикал и не содержащими $F_p(G)$. Не сложно заметить, что

$$\Delta^p(G,A)\subseteq\overline{\Delta}^p(G,A)\subseteq\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$$

и согласно теореме 3.4 из работы [5] $\Delta^p(G,A)=\overline{\Delta}^p(G,A)$.

Пусть подгруппа $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ не совпадает с подгруппой $\overline{\Delta}^p(G,A)$, тогда $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{\Delta}^p(G,A)\neq 1$ и пусть $K/\overline{\Delta}^p(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\overline{\Delta}^p(G,A)$, содержащаяся в $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{\Delta}^p(G,A)$. Так как формация p-нильпотентных групп содержит формацию всех нильпотентных групп, то $K/\overline{\Delta}^p(G,A)$ p-нильпотентна. Тогда на основании теоремы 3.5 работы [5] следует, что K p-нильпотентная подгруппа. Следовательно, $K\subseteq F_p(G)$. Тогда

$$K\subseteq\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)\cap\overline{\Delta}^p_{F_p}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{\Delta}^p(G,A)=1$, а, значит, $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)=\Delta^p(G,A)$.

Применяя результаты работы [5] и теорему 1, получаем следующее

Следствие 2.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, G – разрешимая группа. Если $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)\neq G$, то $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ p-нильпотентная подгруппа группы G.*

В случае, когда группа операторов A является тривиальной, из теоремы 2 получаем

Следствие 2.2. *Пусть G – разрешимая группа. Если $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G)\neq G$, то $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G)=\Delta^p(G)$.*

Следствие 2.3. *Пусть G – разрешимая группа. Если $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G)\neq G$, то $\overline{\Delta}^p_{\overline{F}_p}(G)$ p-нильпотентная подгруппа группы G.*

Из следствия 2.3 вытекает соответствующий результат работы [4].

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А.Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

3. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск : Бел. навука, 1997. – 144 с.

4. Монахов, В. С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т .47, № 4. – С. 31–33.

5. Бородич, Е. Н. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е. Н. Бородич, Р. В. Бородич, М. В. Селькин // Вестник БГУ. – 2012. – № 1. – С. 54–62.

6 Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2019. – № 14 (02). – DOI : 10.1142/S1793557121500261.

7. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 09.01.2024