ISSN 1609–9672

И З В Е С Т И Я

Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

№ 6 (123)

Естественные науки

2020

Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины
ИЗВЕСТИЯ

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации
№ 546 от 06.07.2009 года)

Журнал включен ВАК Республики Беларусь
в перечень научных изданий Республики Беларусь,
в которых публикуются результаты
диссертационных исследований
(приказы № 207 от 13.12.2005, № 9 от 15.01.2010,
№ 57 от 16.05.2013)

Журнал включен в библиографические базы данных
ВИНИТИ и Научную электронную библиотеку
eLIBRARY.RU

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор С.А. ХАХОМОВ,
д-р. физ.-мат.наук, доцент
Зам. главн. редактора О.М. ДЕМИДЕНКО,
д-р тех. наук, профессор
Зам. главн. редактора М.В. СЕЛЬКИН,
д-р физ.-мат. наук, профессор

Члены редакционной коллегии:

Г.Г. Гончаренко, д-р биол. наук, проф.,
чл.-корр. НАН Беларуси
Ф.В. Кадол, д-р пед. наук, проф.
В.Н. Калмыков, д-р филос. наук, проф.
В.И. Коваль, д-р филол. наук, проф.
Г.Г. Лазько, д-р ист. наук, проф.
И.В. Семченко, д-р физ.-мат. наук, проф.
В.С. Смородин, д-р тех. наук, проф.
Б.В. Сорвиров, д-р экон. наук, проф.
В.М. Хомич, д-р юрид. наук, проф.
О.Г. Шляхтова, ответственный секретарь

**Члены редакционной коллегии
по естественным наукам:**

В.Ф. Багинский, д-р биол. наук, проф., член-корр. НАН Беларуси
А. Баллистер-Болинше (Испания), д-р, проф. математики
Ван Сяо Фэн (Китай), д-р тех. наук, проф.
Го Вэньбинь (Китай), д-р физ-мат. наук, проф.
В.П. Кудин, д-р тех. наук, проф.
А.А. Махнев (Россия), д-р физ-мат. наук, проф., член-корр. РАН
В.В. Можаровский, д-р тех. наук, проф.
А.Н. Сердюков, д-р физ-мат. наук, проф., член-корр. НАН Беларуси
А.Н. Скиба, д-р физ-мат. наук, проф.
Шэн Рику (Китай), д-р тех. наук, проф.
Р. Эстебан Ромеро (Испания), д-р, проф. математики

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
246019, Беларусь, Гомель, ул. Советская, 104,
Телефоны: +375 (232) 51-03-21
E-mail: vesti@gsu.by
Интернет-адрес: http://vesti.gsu.by

Francisk Scorina Gomel State University
PROCEEDINGS

The Journal is registered in the Ministry of Information of Republic of Belarus
(registration certificate
number 546 dated 06.07.2009)

The Journal is included in the Republic of Belarus Higher Attestation Commission list of scientific publications of the Republic of Belarus, which publish the main results for the degree of Doctor (Candidate) of Sciences
(order number 207 dated 13.12.2005, number 9 dated 15.01.2010, number 57 dated 16.05.2013)

The Journal is included in bibliographic databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI), Scientific electronic library eLIBRARY.RU

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief S.A. KHAKHOMOV,
Sc. D., Docent of Physics
Deputy editor-in-chief O.M. DEMIDENKO,
Sc. D., Professor
Deputy editor-in-chief M.V. SELKIN,
Sc. D., Professor

Members of editorial board:

G.G. Goncharenko, Sc. D., Professor, Corresponding Member NASB
F. V. Kadol, Sc. D., Professor
V.N. Kalmykov, Sc. D., Professor
V.I. Koval, Sc. D., Professor
G.G. Lazko, Sc. D., Professor
I.V. Semchenko, Sc. D., Professor
V.S. Smorodin, Sc. D., Professor
B.V. Sorvirov, Sc. D., Professor
V.M. Homich, Sc. D., Professor
O.G. Shlyahtova, executive secretary

**Members of editorial board
for the natural sciences**

V.F. Baginsky, Sc. D., Professor, Corresponding Member NASB
A. Ballister-Bolinshes (Spain), Sc. D., Professor
Van Siao Fen (China), Sc. D., Professor
Go Wenbin (China), Sc. D., Professor
V.P. Kudzin, Sc. D., Professor
A.A. Makhnev (Russia), Sc. D., Professor, Corresponding Member RAS
V.V. Mozharovsky, Sc. D., Professor
A.N. Serdukov, Sc. D., Professor, Corresponding Member NASB
A.N. Skiba, Sc. D., Professor
Shen Riku (China), Sc. D., Professor
R. Esteban Romero (Spain), Sc. D., Professor

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
246019, Belarus, Gomel, Sovetskaya Str., 104,
Tel: +375 (232) 51-03-21
E-mail: vesti@gsu.by
Site: http://vesti.gsu.by

© Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2020
© Educational Establishment «Francisk Scorina Gomel State University», 2020

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

И З В Е С Т И Я

Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

НАУЧНЫЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1999 г.
Выходит 6 раз в год

• 2020, № 6 (123) •
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ:
БИОЛОГИЯ • ТЕХНИКА (ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ; РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ; ЭЛЕКТРОНИКА)• МАТЕМАТИКА • ФИЗИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Биология

Абрамова И.В. *Статус птиц орнитокомлексов березовых лесов на различных стадиях сукцессий в юго-западной Беларуси* 5
Автушко М.И. *Об одном решении дилеммы Барбера* 11
Багинский В.Ф., Демид Н.П. *Повышение точности учета лесосечного фонда смешанных древостоев при лесоустройстве* 18
Булко Н.И., Потапенко А.М., Митин Н.В., Бутьковец В.В., Козлов А.К., Толкачева Н.В., Машков И.А., Серенкова В.А. *Состояние дочернобыльских сосновых лесов в 30-километровой зоне ЧАЭС* 22
Дайнеко Н.М., Мироненко В.И., Мироненко В.В. *Математическая модель влияния метеорологических условий на урожайность луговых экосистем поймы р. Сож* 28
Дрозд К.С., Галиновский Н.Г. *Сообщества щелкунов (Coleoptera, Elateridae) соснового леса в окрестностях скважин Южно-Осташковского нефтяного месторождения (Калинковичский район, Республика Беларусь)* 34
Карпенко А.Ф. *Состояние территории радиоактивного загрязнения и о мерах её возрождения* 38
Концевая И.И. *Влияние бета-лактамных антибиотиков на органогенез в культуре тканей листовых эксплантов карельской березы* 43
Лазарева М.С., Климович Л.К., Климов А.В. *Особенности формирования дубравы кисличной* 50
Логинов Д.Н. *Видовая структура имаго кровососущих комаров (Diptera, Culicidae) на территории Брестской и Гомельской областей Республики Беларусь* 56
Макаренко Т.В. *Влияние природных сорбентов на накопление тяжелых металлов в донных отложениях водоемов* 62
Островский А.М. *Определитель синантропных видов мокриц (Isopoda: Oniscidea) юго-востока Беларуси* 69
Сакович В.В., Жерносеков Д.Д. *Молокосвертывающие ферменты различного происхождения: перспективы применения в сыроделии* 75
Соколов А.С. *Оценка ландшафтной репрезентативности системы особо охраняемых природных территорий Белорусской Возвышенной провинции* 81
Углянец А.В., Гарбарук Д.К. *Загрязнение ^{137}Cs и ^{90}Sr доминантных видов живого напочвенного покрова в черноольшаниках зоны отчуждения Чернобыльской АЭС* 85

Храмченкова О.М., Матвеенков М.В. *Цитотоксические и фотомодифицирующие свойства метанольных и ацетоновых экстрактов пяти видов лишайников* 92

Информатика

Воруев А.В., Демиденко И.О., Колаиб С.М., Домасканов Д.В. *Построение рабочего места для тестирования виртуальной сетевой инфраструктуры* 99

Осипенко Н.Б., Мироненко В.М. *Автоматизация подбора персонифицированных предложений на примере задачи поиска фильма* 105

Математика

Бородич Р.В., Селькин М.В. *О пересечении не $\mathfrak{F}$-подгрупп, выделяемых подгрупповым функтором* 111

Гальмак А.М., Селькин М.В. *Косые элементы в полиадических группах специального вида нечётной арности. II* 118

Малинковский Ю.В. *Критерий эргодичности для одного класса цепей Маркова с непрерывным временем* 125

Можей Н.П. *Эквиаффинные связности нулевой кривизны на однородных пространствах с разрешимой группой преобразований* 131

Немилостивая В.А. *Стационарное распределение сетей с положительными и отрицательными заявками и двумя типами узлов* 138

Пилипчук Л.А., Пилипчук А.С., Полячок Е.Н. *Двухкритериальные задачи потокового программирования* 144

Физика

Леоненко Д.В. *Поперечный изгиб круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины* ... 151

Охрименко И.П., Кольчевский Н.Н., Петров П.В. *Модель геостационарного детектора гравитационных волн* 156

Краткие сообщения

Саварин А.А. *О находке белозубки малой (Crocidura suaveolens) на территории Могилевской области Беларуси* 163

Francisk Scorina Gomel State University

PROCEEDINGS

of Francisk Scorina Gomel State University

SCIENTIFIC, PRODUCTION AND PRACTICAL JOURNAL

There are 6 times a year
Published since 1999

• 2020, № 6 (123) •
NATURAL SCIENCES:
BIOLOGY•TECHNIQUE (INFORMATION TECHNOLOGY;
RADIO ENGINEERING AND COMMUNICATIONS; ELECTRONICS)
• MATHEMATICS • PHYSICS

CONTENTS

BIOLOGY

Abramava I.V. *The status of birds of ornithocomplexes in birch forests at different stages of succession in southwestern Belarus* 5
Avtushko M.I. *One solution to Barber's dilemma* 11
Baginskij V.F., Demid N.P. *Improving the accuracy of accounting for the felling fund of mixed forest stands during forest management* 18
Bulko N.I., Potapenko A.M., Mitin N.V., But'kovec V.V., Kozlov A.K., Tolkacheva N.V., Mashkov I.A., Serenkova V.A. *The state of the pre-Chernobyl pine forests in the 30-kilometer zone of the Chernobyl nuclear power plant* 22
Dajneko N.M., Mironenko V.I., Mironenko V.V. *Mathematical model of the influence of meteorological conditions on the productivity of meadow ecosystems of the river Sozh* 28
Drozd K.S., Galinovskij N.G. *Communities of click-beetles (Coleoptera, Elateridae) of a pine forest in the vicinity of the wells of the Yuzhno-Ostashkovskoye oil field (Kalinkovichi district, Republic of Belarus)* 34
Karpenka A.F. *On the state of radioactively contaminated territories and their revival* 38
Kontsevaya I.I. *Influence of beta-lactam antibiotics on organogenesis in tissue culture of Karelian birch leaf explants* 43
Lazareva M.S., Klimovich L.K., Klimov A.V. *Features of the formation of oxalis oak forest* .. 50
Loginov D.N. *Species structure of the imago of blood-sucking mosquitoes (Diptera, Culicidae) in the Brest and Gomel regions of the Republic of Belarus* 56
Makarenko T.V. *Influence of natural sorbents on the accumulation of heavy metals in bottom sediments of water bodies* 62
Ostrovskij A.M. *Determinant of synanthropic woodlice species (Isopoda: Oniscidea) of the south-east of Belarus* 69
Sakovich V.V., Zhernossekov D.D. *Milk-clotting enzymes of various origin: prospects for application in cheese making* 75
Sokolov A.S. *Assessment of the landscape representativeness of the system of specially protected natural areas of the Belarusian Upland Landscape Province* 81
Uglyanec A.V., Garbaruk D.K. *Contamination by ^{137}Cs and ^{90}Sr of the dominant species of the living ground cover in the black alder forests of the exclusion zone of the Chernobyl NPP*. 85
Khramchankova V.M., Matveyenkau M.V. *Cytotoxic and photomodifying properties of methanol and acetone extracts of five lichen species* 92

INFORMATION TECHNOLOGY

Voruev A.V., Demidenko I.O., Kolaib S.M., Domaskanov D.V. *Building a workplace for testing virtual network infrastructure* 99

Osipenko N.B., Mironenko V.M. *Automation of the selection of personalized sentences on the example of the problem of finding a movie* 105

MATHEMATICS

Borodich R.V., Selkin M.V. *On intersections of non-$\mathfrak{F}$-subgroups separated by a subgroup functor* 111

Galmak A.M., Selkin M.V. *Skew elements in polyadic groups of a special kind of odd arity. II* 118

Malinkovskij Yu.V. *Ergodicity criterion for one class of Markov chains with continuous time* 125

Mozhej N.P. *Equiaffine connections of zero curvature on homogeneous spaces with a solvable transformation group* 131

Nemilostivaya V.A. *Stationary distribution of networks with positive and negative claims and two types of nodes* 138

Pilipchuk L.A., Pilipchuk A.S., Polyachok E.N. *Two-criteria stream programming problems* . 144

PHYSICS

Leonenko D.V. *Transverse bending of a circular sandwich plate of stepped thickness* 151

Ohrimenko I.P., Kolchevskij N.N., Petrov P.V. *Model of a geostationary gravitational wave detector* 156

ABSTRACTS

Savarin A.A. *On the finding of the small white-toothed shrew (Crocidura suaveolens) on the territory of the Mogilev region of Belarus* 163

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

Биология

УДК 598.2(470.5)+504.74.05:500.054:66/67

Статус птиц орнитокомлексов березовых лесов на различных стадиях сукцессий в юго-западной Беларуси

И.В. Абрамова

Прослежен статус птиц по отношению к периоду размножения и миграции в процессе восстановительной сукцессии на месте вырубки березовых лесов в юго-западной Беларуси в 1996–2017 гг. Установлено, что на всех шести стадиях сукцессий преобладают гнездящиеся перелетные птицы, на долю которых приходится от 66,7 % видов на первой стадии сукцессии до 41,7 % на пятой и шестой стадиях. На 1–4 стадиях сукцессий преобладают дальние мигранты – 55,6–39,5 %, на 5–6 стадиях – оседлые (37,5 %). Основу населения птиц на всех стадиях составляют ближние и дальние мигранты, оседлые виды, как правило немногочисленны, их участие в суммарном обилии не превышает 20 %.
Ключевые слова: сукцессия, березовые леса, орнитокомплекс, доминант, редкие виды птиц, Беларусь.

The status of birds in relation to the breeding and migration period in the process of secondary succession of cleared birch forest in southwestern Belarus in the years 1996–2017 is considered. It has been established that nesting migratory birds prevail at all six stages of succession (from 66,7 % of species at the first stage of succession to 41,7 % at the fifth and sixth stages). Distant migratory birds predominate in stages 1–4 of the succession (55,6–39,5 % of the species), and sedentary birds predominate in stages 5–6 (37,5 %). The basis of the bird population at all stages is formed by near and far migratory species, sedentary species, as a rule, are not numerous, their participation in the total abundance does not exceed 20 %.
Keywords: succession, birch forest, ornithological complex, dominant, rare bird species, Belarus.

Введение. Существенные пространственно-временные сдвиги населения птиц в лесных экосистемах обусловлены сукцессией фитоценозов, вызванной рядом факторов, в том числе и антропогенных [1]–[5]. В последние годы возросло внимание исследователей к роли раннесукцессионных стадий для сохранения разнообразия и численности кустарниковых видов птиц, которые заселяют нарушенные местообитания, т. к. их численность сильно изменяется от начальных стадий к финальным по причине снижения степени пригодности местообитаний [6]–[8]. Поскольку целью управления лесными экосистемами является поддержка популяций видов, зависящих от лесных угодий, включая птиц, основополагающее значение для понимания успешности мероприятий по управлению имеет информация о том, как эти популяции реагируют на нарушение среды обитания и смену сообществ в ходе сукцессии.

В регионе наиболее полно изучены вторичные сукцессии растительности хвойных лесов и их орнитокомплексов. В работах [1]–[5] показано, что параллельно с сукцессией фитоценозов увеличивается разнообразие птиц, изменяется структура орнитокомплексов. Например, в бореальных лесах северо-восточной Финляндии [3] оседлые птицы на начальных стадиях сукцессии составляют 3,5 % суммарного обилия, ближние мигранты – 40,2 %, дальние мигранты – 56,3 %; на стадии климакса – соответственно 16,6, 48,2 и 35,2 %. Сведения о количественных параметрах летнего населения березовых лесов в юго-западной Беларуси имеются в ряде публикаций [9], [10]. Показано [9], что в процессе сукцессии березовых лесов (6 стадий) увеличиваются видовое разнообразие (от 9 до 48 видов), суммарное обилие (от 76,7 до 1031,0 ос./км²) и суммарная биомасса (от 4,05 до 34,67 кг/км²), достигая максимальных значений на последних двух стадиях. Сведения о разнообразии птиц березовых лесов

Белорусского Полесья имеются в монографии [10], наибольшее количество видов певчих птиц отмечено в орляковых и папоротниковых березняках (10 видов).

Целью данной работы было изучение структуры орнитокомплексов, формирующихся в процессе восстановительной сукцессии в березовых лесах юго-западной части Белорусского Полесья, по отношению к периоду размножения и миграции.

Материал и методы. Сбор материалов для данной работы проводился в 1996–2017 гг. в юго-западной Беларуси (52º00´–52º30´ с. ш. 23°40´–25º30´ в. д.) в Брестском, Малоритском и Ивацевичском лесхозах. Данная территория расположена в подзонах широколиственно-сосновых и грабово-дубовых темнохвойных лесов.

Исследования проводились в бородавчато-березовых лесах. При изучении сукцессий (серий) орнитокомплексов закладывали маршруты (ширина полосы 200 м, длина 1–2 км) в экосистемах, находящихся на разных стадиях сукцессионного ряда (травянистая растительность болотного и лугового типов; поросль кустарников; сплошные заросли кустарниковой поросли и подроста, ольхи, и осины; смешанный лес; приспевающий и спелый лес). Общая протяжённость пройденных маршрутов составила 250 км. Применяли общепринятые методы учета [11]–[13]. В каждой растительной ассоциации учёты птиц проводили не менее 6 раз с 15.05 по 30.06. Перерасчёт обилия птиц на единицу площади вёлся раздельно по средним дальностям обнаружения (голосу, визуально) [11]. В работе приведены средние величины суммарного обилия и биомассы на различных стадиях сукцессии. Доминантами считали виды, доля которых в сообществе составляла не менее 10 %, фоновыми – обилие которых не менее 1 ос./км², редкими – обилие которых менее 1 ос./км² [14]. Латинские названия птиц приведены по сводке «Clements checklist of birds of the world» [15].

Результаты и их обсуждение. Статус гнездящихся птиц по характеру пребывания и сезонных переселений на различных стадиях сукцессии березовых лесов представлен следующими категориями: перелетные; перелетные, частично зимующие; оседлые; оседлые и кочующие (таблица 1).

Таблица 1 – Статус гнездящихся видов птиц на различных стадиях сукцессии березовых лесов (доля, %)

Статус	Возраст сукцессии, лет					
	1–3	4–9	10–20	30–40	50–60	70–80
Оседлые	11,1	5,3	4,2	26,3	33,3	33,3
Оседлые и кочующие	11,1	10,5	8,3	5,3	4,2	4,2
Перелетные, частично зимующие	22,2	31,6	29,2	23,7	20,8	20,8
Перелетные	55,6	53,6	58,3	44,7	41,7	41,7

На первой стадии сукцессии зарегистрировано 9 видов. Доминируют (55,6 %) гнездящиеся перелетные виды (лесной конек, желтая трясогузка, луговой чекан, перепел и коростель). Оседлым видом является серая куропатка, гнездящимся кочующим видом – обыкновенная овсянка (таблицы 1, 2). На этой стадии 55,6 % видового состава – это дальние мигранты, на ближних мигрантов и оседлых приходится по 22,4 % видов. Дальние мигранты составляют основу населения птиц (56,1 % суммарного обилия), оседлые виды вносят существенный вклад в суммарную биомассу (56,0 %).

На второй стадии сукцессии также доминируют гнездящиеся перелетные птицы (52,6 %) (таблица 1). К видам, зарегистрированным на первой стадии сукцессии, добавилось еще 6 видов: жулан, обыкновенная горихвостка, коноплянка, серая, черноголовая и садовая славки, а также гнездящиеся перелетные частично зимующие птицы – коноплянка, зарянка, певчий и черный дрозды (таблица 2). Среди перелетных птиц дальних мигрантов (47,4 % видов, 42,1 % суммарного обилия) несколько больше, чем ближних (36,8 % видов, 29,9 % суммарного обилия) (таблица 3). Доминантами по обилию является три вида (таблица 2): луговой чекан, обыкновенная овсянка и лесной жаворонок, представляющие все 3 группы птиц.

Таблица 2 – Структура населения птиц (в числителе – обилие, ос./км^2, в знаменателе – биомасса, кг/км^2) в ходе вторичной сукцессии березовых лесов в юго-западной Беларуси

Вид	Доминирующая растительность					
	травянистая растительность болотного и лугового типов	молодые культуры	сплошные заросли кустарниковой поросли и подроста	смешанный лес из березы и сосны	приспевающий лес из березы с примесью сосны и дуба	спелый березовый лес
Возраст сукцессии, лет	1–3	4–9	10–20	30–40	50–60	70–80
1	2	3	4	5	6	7
Оседлые виды						
Серая куропатка *Perdix perdix*	5,0/*2,00*	3,4/*1,36*	-	-	-	-
Обыкновенная овсянка *Emberiza citrinella*	*9,0*/0,27	*15,4*/0,46	10,7/0,32	7,6/0,23	8,0/0,24	3,5/0,10
Щегол *Carduelis carduelis*	-	2,4/0,04	8,6/0,14	8,0/0,13	9,5/0,15	10,2/0,16
Обыкновенная пищуха *Certhia familiaris*	-	-	-	8,0/0,07	14,4/0,13	15,6/0,14
Поползень *Sitta europaea*	-	-	-	5,2/0,10	10,6/0,21	14,7/0,29
Большая синица *Parus major*	-	-	5,1/0,06	19,4/0,35	35,6/0,64	40,5/0,73
Буроголовая гаичка *Poecile montanus*	-	-	-	18,2/0,20	26,8/0,29	28,6/0,34
Лазоревка *Cyanistes caeruleus*	-	-	-	4,5/0,05	5,6/0,06	5,0/0,06
Сойка *Garrulus glandarius*	-	-	-	1,8/0,29	2,6/0,42	5,8/0,93
Серая ворона *Corvus corone*	-	-	-	0,8/0,42	1,5/0,79	2,2/1,16
Сорока *Pica pica*	-	-	-	0,5/0,11	1,0/0,23	1,8/0,41
Седой дятел *Picus canus*	-	-	-	-	0,4/0,03	0,5/0,04
Большой дятел *Dendrocopos major*	-	-	-	3,0/0,25	5,2/0,44	8,0/0,68
Зелёный дятел *Picus viridis*	-	-	-	-	1,5/0,30	2,4/0,48
Малый дятел *Dryobates minor*	-	-	-	-	2,0/0,05	2,8/0,06
Белоспинный дятел *Dendrocopos leucotos*	-	-	-	-	0,4/0,04	1,0/0,10
Тетеревятник *Accipiter gentilis*	-	-	-	-	1,4/1,31	1,5/1,41
Ушастая сова *Asio otus*	-	-	-	-	0,6/0,17	0,5/0,14
Серая неясыть *Strix aluco*	-	-	-	0,4/0,22	0,8/0,44	1,0/0,56
Количество видов в группе	2	3	3	12	18	18
Суммарное обилие группы, ос./км^2	14,0	21,2	24,4	77,4	127,9	145,6
Суммарная биомасса группы, кг/км^2	2,27	1,86	0,55	2,43	5,94	7,76
Ближние мигранты						
Лесной конек *Anthus trivialis*	*9,6*/0,22	10,4/0,24	13,5/0,31	26,0/0,60	58,4/1,34	68,5/1,58
Лесной жаворонок *Lullula arborea*	*10,0*/0,22	*15,4*/0,34	15,6/0,34	14,3/0,31	18,6/0,41	20,4/0,45
Коноплянка *Acanthis cannabina*	-	6,2/0,12	4,0/0,08			
Зарянка *Erithacus rubecula*	-	4,0/0,06	9,5/0,15	28,6/0,46	40,2/0,64	44,3/0,71
Певчий дрозд *Turdus philomelos*	-	4,2/0,31	18,4/*1,36*	35,0/*2,59*	38,8/2,87	40,1/2,97

Окончание таблицы 2

1	2	3	4	5	6	7
Черный дрозд *Turdus merula*	-	2,0/0,20	*14,5/1,42*	18,6/1,82	20,4/2,00	19,0/1,86
Рябинник *Turdus pilaris*	-	-	*17,6/1,76*	18,4/1,84	23,5/2,35	26,7/2,67
Черноголовая славка *Sylvia atricapilla*	-	6,3/0,12	20,2/0,38	31,6/0,60	40,4/0,77	45,4/0,86
Скворец *Sturnus vulgaris*	-	-	-	8,6/0,65	10,5/0,79	10,3/0,77
Зяблик *Fringilla coelebs*	-	-	*50,2/1,10*	*120,5/2,65*	*156,2/3,44*	*160,4/3,53*
Клинтух *Columba oenas*	-	-	-	-	0,6/0,17	1,3/0,36
Вяхирь *Columba palumbus*	-	-	-	3,0/1,61	4,0/2,14	3,6/1,93
Вальдшнеп *Scolopax rusticola*	-	-	-	-	1,8/0,52	2,0/0,58
Перепелятник *Accipiter nisus*	-	-	-	1,0/0,20	1,2/0,24	1,4/0,28
Количество видов в группе	2	7	9	11	13	13
Суммарное обилие группы, ос./км^2	19,6	48,5	163,5	305,6	414,6	443,4
Суммарная биомасса группы, кг/км^2	0,44	1,39	6,91	13,33	17,68	18,55
Дальние мигранты						
Желтая трясогузка *Motacilla flava*	8,6/0,17	7,4/0,15	3,2/0,06	-	-	-
Луговой конек *Anthus pratensis*	14,0/0,24	8,4/0,14	-	-	-	-
Луговой чекан *Saxicola rubetra*	13,5/0,20	14,0/0,21	-	-	-	-
Перепел *Coturnix coturnix*	6,0/0,58	4,2/0,40	-	-	-	-
Коростель *Crex crex*	1,0/0,16	1,5/0,23				
Жулан *Lanius collurio*	-	3,8/0,12	5,0/0,16	12,4/0,38	11,6/0,36	16,4/0,51
Обыкновенная горихвостка *Phoenicurus phoenicurus*	-	3,2/0,05	5,0/0,08	10,4/0,17	12,6/0,20	14,0/0,22
Обыкновенный соловей *Luscinia luscinia*	-	-	6,8/0,17	15,4/0,40	21,5/0,56	20,4/0,53
Серая славка *Sylvia communis*	-	4,6/0,07	5,0/0,08	4,4/0,07	23,0/0,37	20,0/0,32
Садовая славка *Sylvia borin*	-	3,6/0,06	8,2/0,15	4,8/0,09	5,0/0,09	5,2/0,09
Пеночка-весничка *Phylloscopus trochilus*	-	-	32,6/0,29	70,8/0,64	100,5/0,90	105,0/0,95
Пеночка-теньковка *Phylloscopus collybita*	-	-	4,2/0,03	50,7/0,41	60,4/0,48	70,6/0,56
Серая мухоловка *Muscicapa striata*	-	-	12,4/0,12	40,2/0,40	58,3/0,58	60,6/0,61
Мухоловка-пеструшка *Ficedula hypoleuca*	-	-	8,6/0,14	20,4/0,33	36,7/0,59	40,5/0,65
Обыкновенная иволга *Oriolus oriolus*	-	-	10,5/0,15	24,0/0,34	30,3/0,42	32,2/0,45
Зелёная пересмешка *Hippolais icterina*	-	-	-	13,0/0,95	24,5/1,79	20,9/1,53
Обыкновенная горлица *Streptopelia turtur*	-	-	4,6/0,06	12,4/0,17	16,2/0,23	16,3/0,23
Обыкновенный козодой *Caprimulgus europaeus*	-	-	-	1,0/0,13	4,2/0,55	4,4/0,57
Вертишейка *Jynx torquilla*	-	-	-	4,2/0,26	5,6/0,34	6,1/0,37
Чеглок *Falco subbuteo*	-	-	-	-	3,0/0,11	4,2/0,16
Обыкновенная кукушка *Cuculus canorus*	-	-	-	1,8/0,19	0,8/0,18	0,6/0,13
Количество видов в группе	5	9	12	15	17	17
Суммарное обилие группы, ос./км^2	43,1	50,7	106,1	285,9	417,6	442,0
Суммарная биомасса группы, кг/км^2	1,31	1,44	1,50	4,91	8,11	8,37
Всего видов	9	19	24	38	48	48
Суммарное обилие, ос./км^2	76,7	120,4	294,0	668,9	960,1	1031,0
Суммарная биомасса, кг/км^2	4,05	4,69	8,97	20,67	31,73	34,67

Примечание – курсивом выделены данные по обилию (биомассе) доминирующих на данной стадии сукцессии видов птиц.

На третьей стадии сукцессии отмечено 24 вида. Орнитокомплекс обогатился следующими видами: рябинник, зяблик (ближние мигранты), обыкновенный соловей, большая синица, три вида пеночек, серая мухоловка, мухоловка-пеструшка и зеленая пересмешка (дальние мигранты). Ряд видов открытых биотопов (луговой конек, серая куропатка, перепел и коростель) с этой стадии не регистрируются в учетах (таблица 2). Среди птиц преобладают гнездящиеся перелетные виды (58,3 %), вторую позицию занимают гнездящиеся перелетные частично зимующие птицы (29,2 %): коноплянка, певчий и черный дрозды, рябинник и зяблик и др. Оседлые птицы представлены щеглом, оседлые и кочующие – обыкновенной ов-

сянкой и большой синицей. Половина зарегистрированных видов – дальние мигранты, на долю ближних мигрантов приходится 37,5 % видов. В населении птиц доминируют ближние мигранты (55,6 % суммарного обилия и 77,2 % суммарной биомассы.

На четвертой стадии сукцессии количество видов орнитокомплекса увеличивается до 38. Здесь начинают регистрироваться обыкновенная пищуха, поползень, буроголовая гаичка, лазоревка (оседлые), скворец, вяхирь, перепелятник (ближние мигранты), обыкновенная иволга, обыкновенная горлица, обыкновенный козодой, обыкновенная кукушка (дальние мигранты). Суммарное обилие возрастает до 668,9 ос./км², суммарная биомасса – до 20,67 кг/км² (таблица 2). На этой стадии, как и других, преобладают гнездящиеся перелетные птицы (44,7 % общего количества видов). Отмечено существенное изменение структуры орнитокомплекса: примерно равное представительство трех групп птиц по отношению к характеру пребывания. Значительное увеличение доли оседлых видов (до 31,6 %) объясняется присутствием синиц, врановых и др.

На пятой и шестой стадиях сукцессии выявлено 48 видов птиц. В учеты попадает ряд видов, которые не регистрировались на предыдущих стадиях: седой, зеленый, белоспинный и малый дятлы, тетеревятник и ушастая сова (оседлые виды), клинтух и вальдшнеп (ближние мигранты), вертишейка и чеглок (дальние мигранты). Суммарное обилие (960,1–1031,0 ос./км²) и суммарная биомасса (31,73–34,67 кг/км²) значительно увеличиваются по сравнению с четвертой стадией. Среди гнездящихся видов преобладают перелетные (41,7 %), им несколько уступают оседлые (33,3%) (таблица 1). Основу населения птиц составляют мигранты: дальние (42,9–43,5 % суммарного обилия) и ближние (43,0–43,2 %). Среди оседлых птиц наиболее многочисленны большая синица, буроголовая гаичка и обыкновенная пищуха, среди мигрантов – зяблик, пеночки и лесной конек (таблица 2).

Таблица 3 – Характер пребывания видов птиц в сообществах на разных стадиях сукцессии березовых лесов (доля, %)

Статус пребывания	Возраст сукцессии, лет					
	1–3	4–9	10–20	30–40	50–60	70–80
Оседлые	22,2	15,8	12,4	31,6	37,5	37,5
Ближние мигранты	22,2	36,8	37,5	28,9	27,1	27,1
Дальние мигранты	55,6	47,4	50,0	39,5	35,4	35,4

Заключение. В структуре орнитокомплексов по ходу сукцессии березовых лесов изменяется представительство групп птиц по характеру пребывания и сезонных переселений. Доля оседлых видов сначала уменьшается, достигая наименьших значений на стадии сплошных зарослей кустарниковой поросли и подроста (возраст 10–20 лет), после чего увеличивается и на стадиях приспевающих (возраст 50–60 лет) и высокоствольных лесов (возраст 70–80 лет) составляет 37,5 % общего количества видов. Участие ближних мигрантов достигает наибольших значений на стадиях молодых культур из поросли кустарников, березы, ольхи, и осины (возраст 4–9 лет) и сплошных зарослей кустарниковой поросли и подроста (возраст 10–20 лет), на других стадиях варьирует от 22,2 % до 28,1 %. Доля дальних мигрантов наиболее высока на первой стадии (1–3 года после вырубки) – 55,6 %, на всех последующих стадиях остается высокой – не менее 35,4 %. Основу населения птиц на всех стадиях составляют ближние и дальние мигранты, оседлые виды, как правило, немногочисленны, их участие в суммарном обилии не превышает 20 %.

Литература

1. Иноземцев, А. А. Птицы и лес / А. А. Иноземцев. – М. : Агропромиздат, 1987. – 302 с.

2. Абрамова, И. В. Структура и динамика населения птиц экосистем юго-запада Беларуси / И. В. Абрамова. – Брест : БрГУ, 2007. – 208 с.

3. Helle, P. Annual fluctuations of land bird communities in different successional stages of boreal forest / P. Helle, M. Mönklönen // Ann. Zool.Fennici. – 1986. – Vol. 23. – P. 269–280.

4. Głowaciński, Z. Stability in bird communities during the secondary succession of a forest ecosystem / Z. Głowaciński // Ecol. Pol. – 1981. – Vol. 29, № 1. – P. 73–95.

5. Głowaciński, Z. Succession of bird communities in the Nielopolomice Forest (Southern Poland) / Z. Głowaciński // Ecol. Pol. – 1975. – Vol. 23, № 2. – P. 231–263.

6. Akresh, M. E. Demographic response of a shrubland bird to habitat creation, succession, and disturbance in a dynamic landscape / M. E. Akresh, D. I. King, R. T. Brooks // Forest Ecology and Management. – 2015. – V. 336. – P. 72–80.

7. Schlossberg, S. Postlogging succession and habitat usage of shrubland birds / S. Schlossberg, D. I. King // J. Wildlife Manage. – 2009. – V. 73. – P. 226–231.

8. DeGraaf, R. M. Options for managing early-successional forest and shrubland bird habitats in the northeastern United States / R. M. DeGraaf, M. Yamasaki. // For. Ecol.Manage. – 2003. – V. 185. – P. 179–191.

9. Абрамова, И. В. Сукцессия орнитофауны березовых лесов в юго-западной Беларуси / И. В. Абрамова // Веснік Брэсцкага універсітэта. Сер. 5. Хімія. Біялогія. Навукі аб Зямлі. – 2019. – № 1. – С. 5–12.

10. Долбик, М. С. Ландшафтная структура орнитофауны Белоруссии / М. С. Долбик. – Минск : Наука и техника, 1974. – 312 с.

11. Равкин, Ю. С. К методике учёта птиц лесных ландшафтов / Ю. С. Равкин // Природа очагов клещевого энцефалита на Алтае. – Новосибирск, 1967. – С. 66–75.

12. Бибби, К. Методы полевых экспедиционных исследований. Исследования и учеты птиц / К. Бибби, М. Джонс, С. Мардсен. – М. : Союз охраны птиц России, 2000. – 186 с.

13. Järvinen, O. Finnish line transect censuses / O. Järvinen, R. Väisänen // Ornis fenn. – 1976. – Vol. 53, № 4. – P. 115–118.

14. Кузякин, А. П. Зоогеография СССР / А. П. Кузякин // Учён. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской. – М., 1962. – Т. 109. – С 3–182.

15. The eBird/Clements checklist of birds of the world: v2019 [Electronic resource]. – Mode of access : https://www.birds.cornell.edu/clementschecklist/. – Date of access : 15.12.2019.

Брестский государственный
университет им. А.С. Пушкина

Поступила в редакцию 10.06.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 631.416+541.15:539.163

Об одном решении дилеммы Барбера

М.И. Автушко

Представлены и обсуждаются результаты эксперимента, направленного на решение дилеммы Барбера «активность или концентрация иона определяют скорость поглощения ее растением?» В эксперименте изучали поглощение растениями ячменя катионов кальция и стронция из питательных водных растворов. Показано, что на скорость поглощения иона растением оказывают влияние оба фактора. Концентрация катионов определяет их общее количество, способное переходить водного раствора в растения, химическая активность определяет относительное количество катиона, способное поглощаться растением, регулирует уровень биологической доступности катиона и величину его перехода из питательной водной среды в растения.
Ключевые слова: катионогенные химические элементы, питательный водный раствор, концентрация иона, химическая активность иона, ячмень, коэффициент накопления.

The results of an experiment aimed at solving Barber's dilemma «does the activity or concentration of an ion determine the rate of its absorption by a plant?» are analyzed. The experiment studied the absorption of calcium and strontium cations by barley plants from nutrient aqueous solutions. It was shown that both factors influence the rate of ion uptake by a plant. The concentration of cations determines their total amount that can pass an aqueous solution into plants; chemical activity determines the relative amount of cation that can be absorbed by a plant, regulates the level of bioavailability of a cation and the amount of its transfer from the nutrient aquatic environment to plants.
Keywords: cationogenic chemical elements, nutrient water solution, ion concentration, ion chemical activity, barley, accumulation coefficient.

Введение. Концентрация элемента, растворенного в питательной среде (в питательном водном растворе или в почвенном растворе), неизбежно влияет на параметры его поглощения растением. С другой стороны, известно, что катионогенные[1] химические элементы – Na, K, Mg, Ca, Sr и др. – поглощаются клетками корня растения из водных растворов в виде моноэлементных свободных ионов. Но в многокомпонентном водном растворе только часть ионов каждого растворенного элемента находится в свободном (химически активном) состоянии, поскольку значительная доля их оказывается связанной в составе различных ионных ассоциатов [1, с. 46]. Следовательно, при данной концентрации элемента в питательной водной среде активность свободных ионов этого элемента также, по-видимому, может выступать в качестве фактора, влияющего на количественные параметры его поглощения растениями. Эта неопределенность в оценках значимости влияния двух важных факторов, способных регулировать поглощение ионов растениями из водных растворов, находит отражение в высказывании известного американского исследователя С. Барбера: «*Пока неизвестно, активность или концентрация иона определяет скорость его поглощения растением*». Барбер отмечает далее, что почвенные растворы или искусственные питательные растворы – это разбавленные растворы, в которых активность практически равна концентрации, и поэтому для многих ионов оценить влияние активности достаточно трудно. «*В этом случае поглощение будет почти одинаковым независимо от того, концентрация или активность контролирует поглощение. Когда концентрация ионов становится достаточно высокой, а активность значительно ниже концентрации, кривая зависимости скорости поглощения от концентрации обычно достигает максимума. Следовательно, и в этом случае поглощение будет одинаковым, независимо от того, рассчитывали ли его исходя из активности или из концентрации. Однако концентрация других ионов, помимо исследуемого, может значительно сказываться на активности*» [2, с. 55].

[1]К катионогенным относятся элементы, образующие положительно заряженные ионы с низким зарядом – Li, Na, K, Rb, Cs, Ca, Sr, Ba, Fe (II) и др., ионный потенциал которых обычно менее 2, электроотрицательность менее 600 кДж/моль [3, с. 80].

Цель исследования – экспериментальная оценка влияния названных двух факторов – массовой концентрации и активности ионов катионогенных элементов в питательном водном растворе на их поглощение растениями (на примере Ca и Sr).

Материалы и методика исследования. В эксперименте изучали поглощение Ca и Sr растениями ячменя (*Hordeum vulgare* L) из питательных водных растворов (ПВР), составы которых показаны в таблице 1.

Таблица 1 – Составы питательных растворов (мг/л)

Химические соединения	Варианты эксперимента			
	1	2	3	4 (*раствор Кнопа*)
$Ca(NO_3)_2$	400,00	600,00	800,00	1000,00
KH_2PO_4	100,00	150,00	200,00	250,00
$MgSO_4$	100,00	150,00	200,00	250,00
KCl	48,00	72,00	96,00	120,00
$FeCl_3$	0,20	0,30	0,40	0,50
$SrCl_2$	0,29	0,29	0,29	0,29
$^{90}SrCl_2$ (Бк/л)	1650	1650	1650	1650
HCO_3	2,56	1,79	1,55	1,40
Сумма	651,05	974,38	1298,24	1622,19
pH	5,12	5,06	5,02	5,00
Is	0,012	0,017	0,023	0,027

Известно, что соотношение облигатных компонентов питания в питательной среде оказывает значимое влияние на их поглощение растениями и, как следствие, на выход (урожай) биомассы. Для нашего эксперимента это значит, что нельзя составлять варианты ПВР таким образом, чтобы в них изменялась концентрация только одного из облигатных компонентов, катионогенных (K, Ca, Mg) или анионогенных (P, N и др.). В противном случае нарушается баланс питательных веществ, что создает дополнительный фактор влияния на поглощение компонентов раствора растениями. Чтобы избежать искажения результатов эксперимента, обусловленного этим фактором, при составлении вариантов ПВР концентрации компонентов изменяли таким образом, чтобы их количественные соотношения оставались неизменными и соответствовали оптимальному для растений балансу питательных веществ. При этом в качестве оптимума приняты соотношения компонентов в питательном растворе Кнопа (вариант 4), остальные варианты представляли собой модификации на основе этого раствора. Помимо основных компонентов питания, в растворы вносили Sr (природная смесь изотопов) в количестве, приближенно соответствующем содержанию этого элемента в подземных водах зоны гипергенеза (по [4, с. 281]), а также ^{90}Sr, послуживший радиоактивной меткой при определении содержания элемента в растениях. Концентрация стабильного стронция во всех вариантах ПВР была одинаковой (0,206 мг/л), т. е. составляла сотые доли процента от суммарной концентрации, что заведомо не могло оказать влияния на характер поглощения компонентов раствора растениями; концентрация ^{90}Sr также была одинаковой во всех вариантах. Ион HCO_3^- в ПВР не вносили, он образовался в них самопроизвольно вследствие растворения углекислого газа из атмосферного воздуха. Концентрация HCO_3^- в растворах установлена по результатам контрольных анализов, которые выполнялись после приготовления растворов перед началом эксперимента.

Эксперимент выполняли в вегетационном помещении, в условиях нормального атмосферного давления при температуре 18 ± 1°C, при регулируемом уровне относительной влажности воздуха (86 ± 6 %), при дневном освещении. В эксперименте использовали полуторалитровые пластиковые вегетационные сосуды. Для обеспечения устойчивости стеблей растений в ходе их развития и роста использовали пробирки с марлевым дном. Пророщенные зерна ячменя опускались на дно пробирки (по 2 зерна на пробирку). Пробирки вставлялись в отверстия пенопластовых крышек-держателей (4 пробирки на сосуд, 8 растений в каждом сосуде) и размещались таким образом, чтобы марлевое дно пробирки касалось поверх-

ности питательного раствора. Питательные растворы в вегетационных сосудах по мере убывания восполняли контролируемым количеством дистиллированной воды. Каждый вариант эксперимента выполняли в трех повторностях. Эксперимент завершили после 9 недель вегетации, после нарастания достаточного количества биомассы для определения концентрации Ca и ^{90}Sr. Средняя масса растений составляла 1,23 ± 0,23 г сухого вещества на сосуд.

Содержание Ca в биомассе «надземной» части растений определяли методом атомно-адсорбционной спектрофотометрии золы растений; ^{90}Sr – радиохимическим методом в модификации ЦИНАО с радиометрическим окончанием на α-β-счетчике Canberra-2404; стабильного Sr – расчетным путем на основе данных о поступлении в растения ^{90}Sr.

При анализе и обсуждении результатов эксперимента использовали три формы представления концентрации катионогенного компонента в питательном водном растворе – C^l_i, C^l_{i+} и a_i:

C^l_i – это массовая концентрация химического элемента *i* в растворе (*мг/кг*), соответствующая его количеству (массе), внесенному в раствор в составе различных химических соединений.

C^l_{i+} – концентрация свободных ионов химического элемента *i* в растворе. В многокомпонентном растворе величина C^l_{i+} всегда меньше величины C^l_i, поскольку часть ионов элемента входит в состав разнообразных ионных ассоциатов – комплексных ионов, ионных пар, нейтральных недиссоциированных молекул. Отношение этих величин характеризует мольную долю (m_0) свободных ионов элемента, находящегося в растворе:

$$m_0 = C^l_{i+} / C^l_i,$$

a_i – активность иона. Величина a_i формируется в результате непрерывного обмена ионами между ионными ассоциатами. Этот обмен обусловлен стремлением водного раствора к состоянию термодинамического равновесия, он сопровождается разрушением или перестройкой сольватных оболочек распадающихся ионных ассоциатов, одновременно происходит гидратная сольватация вновь образованных частиц. Ионы катионогенных элементов (i^+), которые входят в состав ионных ассоциатов, не могут поглощаться корнем растения. Ионы, не входящие в состав ионных ассоциатов, но непосредственно участвующие в процессах гидратации-дегидратации и ионного обмена между ассоциатами, тоже не являются свободными и не поглощаются корнем. Таким образом, величина a_i служит мерой количества химически активных свободных ионов, которые в таких процессах участия не принимают и способны поглощаться растением. Количество (концентрация) активных свободных ионов, характеризуемое величиной *i,* всегда меньше величины C^l_{i+} и тем более меньше величины массовой концентрации C^l_i:

$$a_i < C^l_{i+} < C^l_i.$$

Функциональную зависимость между химической активностью и концентрацией свободных ионов в термодинамике растворов принято выражать соотношением: $a_i = \gamma_i * C^l_{i+}$. Здесь γ_i – коэффициент активности, который характеризует отношение числа активных свободных ионов компонента *i* к общему числу его свободных ионов в растворе: $\gamma_i = a_i / C^l_{i+}$.

Для оценки интенсивности поглощения компонента i растениями из ПВР использовали величину коэффициента поглощения (апсорбции):

$$k^{ap}_i = C^p_i / C^l_i,$$

где C^p_i – удельная массовая концентрация компонента *i* в воздушно-сухой биомассе растений; C^l_i – удельная массовая концентрация компонента в ПВР (для компонента-радионуклида вместо величин массовой концентрации используются величины удельной активности, Бк/кг).

Значения a_i и γ_i для ионов кальция и стронция оценивали путем исследования соотношения «состав–активность» с помощью компьютерной программы SOLMINEQ. Работа этой программы основана на решении системы уравнений К. Питцера, которое позволяет получить выражение для избыточной свободной энергии Гиббса. Затем, путем дифференцирования величины избыточной свободной энергии по массе растворителя (воды), программой рассчитываются концентрации и коэффициенты активности всех компонентов раствора, включая разнообразные ассоциированные частицы в виде комплексных ионов, ионных пар, нейтральных недиссоциированных молекул [5, с. 122]. Таким образом, были

определены практически все реальные миграционные формы всех элементов, содержащихся в ПВР. Данные о составе и концентрациях таких форм, образованных с участием кальция и стронция, приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Концентрация ионов и ионных ассоциатов, образованных кальцием и стронцием в питательных водных растворах (ммоль/кг)

Ионная группа	Ионы и ассоциаты	Варианты опыта			
		1	2	3	4
Ca	Ca^{2+}	2,29	3,34	4,44	5,51
	$CaCO_3^0$	$0{,}50\cdot10^{-4}$	$0{,}91\cdot10^{-5}$	$0{,}29\cdot10^{-4}$	$0{,}21\cdot10^{-4}$
	$CaHCO_3^+$	$0{,}31\cdot10^{-1}$	$0{,}17\cdot10^{-1}$	$0{,}61\cdot10^{-1}$	$0{,}47\cdot10^{-1}$
	$CaOH^+$	$0{,}51\cdot10^{-7}$	$0{,}24\cdot10^{-7}$	$0{,}28\cdot10^{-7}$	$0{,}31\cdot10^{-7}$
	$CaPO_4^-$	$0{,}75\cdot10^{-5}$	$0{,}18\cdot10^{-5}$	$0{,}25\cdot10^{-5}$	$0{,}31\cdot10^{-5}$
	$CaHPO_4^0$	$0{,}66\cdot10^{-2}$	$0{,}46\cdot10^{-2}$	$0{,}66\cdot10^{-2}$	$0{,}88\cdot10^{-2}$
	$CaH_2PO_4^+$	$0{,}25\cdot10^{-1}$	$0{,}51\cdot10^{-1}$	$0{,}83\cdot10^{-1}$	$1{,}19\cdot10^{-1}$
	$CaSO_4^0$	0,14	0,27	0,40	0,56
	$CaCl_2^0$	$0{,}76\cdot10^{-7}$	$0{,}22\cdot10^{-6}$	$0{,}46\cdot10^{-6}$	$0{,}81\cdot10^{-6}$
	m_0Ca^{2+}	*0,916*	*0,912*	*0,889*	*0,883*
Sr	Sr^{2+}	$1{,}50\cdot10^{-3}$	$1{,}49\cdot10^{-3}$	$1{,}47\cdot10^{-3}$	$1{,}46\cdot10^{-3}$
	$SrCO_3^0$	$1{,}10\cdot10^{-8}$	$1{,}34\cdot10^{-9}$	$3{,}15\cdot10^{-9}$	$1{,}77\cdot10^{-9}$
	$SrHCO_3^+$	$6{,}70\cdot10^{-5}$	$7{,}47\cdot10^{-6}$	$1{,}97\cdot10^{-5}$	$1{,}21\cdot10^{-5}$
	$SrOH^+$	$1{,}05\cdot10^{-11}$	$3{,}35\cdot10^{-12}$	$2{,}82\cdot10^{-12}$	$2{,}47\cdot10^{-12}$
	$SrSO_4^0$	$6{,}62\cdot10^{-5}$	$8{,}14\cdot10^{-5}$	$8{,}98\cdot10^{-5}$	$9{,}90\cdot10^{-5}$
	m_0Sr^{2+}	*0,945*	*0,944*	*0,931*	*0,929*

Результаты исследований и их обсуждение. Зависимости уровня поглощения катионогенного элемента растениями от величины его массовой концентрации в ПВР (C^l_i), от концентрации его ионов (C^l_{i+}) и от концентрации активных свободных ионов (a_i) исследовались применительно к двум принципиально различным ситуациям:

1) Концентрация катионогенного элемента в ПВР изменяется от варианта к варианту ($C^l_i \neq$ const) пропорционально изменению общей концентрации питательных веществ, отражением которой является величина ионной силы раствора *Is*. В этом случае можно установить характер влияния концентрации элемента в ПВР на его поглощение растениями, оцениваемое величинами концентрации элемента в растении (C^p_i) и коэффициента поглощения элемента растением (k^{ap}_i);

Зависимость величин C^p_i и k^{ap}_i от концентрации и активности катионогенного элемента в ПВР при $C^l_i \neq$ const исследовались на примере кальция. Как следует из таблицы 3, содержание ионов кальция в растворе ($C^l_{Ca^{2+}}$) увеличивается параллельно росту его массовой концентрации (C^l_{Ca}). Увеличению массовой концентрации и концентрации ионов кальция в ПВР соответствует возрастание содержания элемента в растениях (C^p_{Ca}). Из этого следует, что концентрация иона кальция в питательной водной среде ($C^l_{Ca^{2+}}$) определяет общую массу потока ионов, поступающего в растение в течение периода его вегетации, т.е. скорость поглощения иона.

Таблица 3 – Содержание Ca в растворах и растениях

В растворах				В растениях	k^{ap}_{Ca}
C^l_{Ca} ммоль/кг	$C^l_{Ca^{2+}}$ ммоль/кг	a_{Ca} ммоль/кг	γ_{Ca}	C^p_{Ca} ммоль/кг	
2,50	2,29	1,50	0,66	114 ± 8	45,6
3,74	3,41	2,01	0,59	134 ± 6	35,8
4,99	4,44	2,48	0,56	159 ± 11	31,9
6,24	5,51	2,90	0,53	164 ± 21	26,3

Таким образом, влияние концентрации Ca^{2+} в питательном растворе на скорость поглощения этого иона растением представляется очевидной. Однако преждевременно полагать, что этот вывод может служить ответом на вопрос, составляющий суть дилеммы Барбе-

ра. Существует еще одна особенность, количественно характеризующая поглощение растением иона в случае $C^{l}_{i} \neq const$, которая состоит в том, что с увеличением C^{l}_{Ca} , $C^{l}_{Ca^{2+}}$ величина C^{p}_{Ca} возрастает, однако величина k^{ap}_{Ca} снижается (таблица 3). Следовательно, в системе «питательный раствор – растение», помимо фактора концентрации, существуют иные факторы, оказывающие значимое влияние на скорость поглощения Ca^{2+} из раствора растением. Анализ полученных данных показывает, что из всех использованных параметров раствора только величина коэффициента активности γ_{Ca}, также как и k^{ap}_{Ca}, снижается с увеличением *Is* раствора и концентрации самого кальция в этом растворе. Фактически это означает, что фактором, регулирующим скорость поглощения иона Ca^{2+} растением при заданной величине $C^{l}_{Ca^{2+}}$, является его активность, характеризующая концентрацию той части ионов, которая способна поглощаться из раствора растением. Однако в рассмотренном случае ($C^{l}_{i} \neq const$), величина a_i находится в количественной связи с величиной C^{l}_{i} и тоже изменяется от варианта к варианту в соответствии с изменением *Is* растворов, поэтому характер непосредственного влияния (нетто-влияния) химической активности иона на его накопление растениями оказывается неопределенным.

2) Концентрация катионогенного элемента постоянна ($C^{l}_{i} = const$) во всех вариантах ПВР, тогда как общая концентрация раствора, оцениваемая величиной *Is*, изменяется в соответствии со схемой эксперимента, показанной в таблице 1. В этом случае, поскольку концентрация элемента в питательной среде остается неизменной, то активность не зависит от концентрации, хотя она может, как предполагал С. Барбер, изменяться в зависимости от концентрации в ПВР других ионов.

Влияние активности катионогенного элемента на его поглощение растением при $C^{l}_{i} = const$ исследовалось на примере Sr, вносимого во все варианты ПВР в одинаковых количествах. Таким образом, представляется возможным, во-первых, исключить влияние фактора концентрации катионогенного элемента в растворе на скорость его поглощения растением и, во-вторых, вычленить и охарактеризовать влияние только его активности на поступление из раствора в растение, а также оценить влияние других катионогенных элементов, содержащихся в ПВР, на величину a_i и, следовательно, поглощение иона, измеряемое величиной k^{ap}_{i}.

Таблица 4 – Содержание Sr в растворах и растениях

Варианты	В растворах						В растениях		k^{ap}_{Sr}
	C^{l90}_{Sr} Бк/кг	C^{l}_{Sr} мг/кг	C^{l}_{Sr} ммоль/кг	$C^{l}_{Sr^{2+}}$ ммоль/кг	a_{Sr} ммоль/кг	γ_{Sr}	C^{p90}_{Sr} кБк/кг	C^{p}_{Sr} ммоль/кг	
1	1910	0,16	$1{,}83\cdot10^{-3}$	$1{,}730\cdot10^{-3}$	$1{,}014\cdot10^{-3}$	0,59	$80{,}5 \pm 4{,}2$	$7{,}71\cdot10^{-2} \pm 0{,}40\cdot10^{-2}$	42,13
2	1910	0,16	$1{,}83\cdot10^{-3}$	$1{,}726\cdot10^{-3}$	$0{,}913\cdot10^{-3}$	0,53	$59{,}7 \pm 6{,}4$	$5{,}72\cdot10^{-2} \pm 0{,}61\cdot10^{-2}$	31,26
3	1910	0,16	$1{,}83\cdot10^{-3}$	$1{,}704\cdot10^{-3}$	$0{,}827\cdot10^{-3}$	0,49	$54{,}2 \pm 7{,}1$	$5{,}19\cdot10^{-2} \pm 0{,}68\cdot10^{-2}$	28,36
4	1910	0,16	$1{,}83\cdot10^{-3}$	$1{,}700\cdot10^{-3}$	$0{,}765\cdot10^{-3}$	0,45	$43{,}7 \pm 4{,}1$	$4{,}18\cdot10^{-2} \pm 0{,}39\cdot10^{-2}$	22,84

Анализ данных таблиц 2 и 4 показывает, что величины $C^{l}_{Sr^{2+}}$ и a_{Sr} изменяются от варианта к варианту в соответствии только с изменением суммарной концентрации всех компонентов в ПВР, тогда как концентрация самого стронция в растворе остается неизменной. Объясняется это тем, что возрастание суммарной концентрации раствора все большее количество ионов Sr^{+} связывается в составе комплексных ионов, ионных ассоциатов и недиссоциированных ионных пар (таблица 2). Вследствие этого падает концентрация химически активных свободных ионов a_i, способных поглощаться растением, что фиксируется уменьшением величин γ_{Sr}. Соответственно уменьшается суммарный поток ионов стронция, поступающих в растение в течение периода его вегетации, что приводит, в конечном итоге, к падению коэффициента накопления элемента (k^{ap}_{Sr}) и к снижению его содержания в растениях (C^{p}_{Sr}). Подтверждением этой цепи закономерностей, характерных для случая $C^{l}_{i} = const$, является отчетливая положительная корреляция значений C^{p}_{Sr} и k^{ap}_{Sr}, характеризующих поглощение иона Sr^{+} растениями, с величиной a_{Sr}, тогда как в показанном выше случае $C^{l}_{i} \neq const$, исследованном на примере кальция, с возрастанием концентрации элемента в растворе наблюдается столь же отчетливая отрицательная корреляция между величинами C^{p}_{Ca} и k^{ap}_{Ca}, с одной стороны, и величиной активности a_{Ca}, с другой.

Показательно, что в обоих рассмотренных случаях (при $C^l_i \neq$ const и при C^l_i = const) вынос ионов растениями из ПВР обнаруживает прямую зависимость от величины их коэффициентов активности в питательной водной среде. Поскольку поглощение ионов корнем – стохастический процесс, то физический смысл этой зависимости, регулирующей уровень биологической доступности компонентов ПВР, заключается в том, что более высокая концентрация химически активных ионов в водном растворе предопределяет, при прочих равных условиях, более высокую вероятность их поглощения корнем растения.

Заключение. Показано, что общее количество поглощенных растениями катионов определяется их концентрацией в растворе. Чем выше концентрация иона в растворе (в пределах, приемлемых для развития растений), тем большее его количество поглощается растением в единицу времени. Однако корень растения способен поглощать только химически активные ионы, и увеличение в питательном растворе концентрации любых иных ионов, способных образовать ионные ассоциаты, в составе которых часть ионов Ca и Sr может оказаться связанной в химически неактивной форме, приводит к снижению поглощения этих ионов из водных растворов растениями. Поэтому коэффициенты перехода обоих катионов из питательной водной среды в растения обнаруживают тесную положительную связь с величиной их коэффициента активности.

Таким образом, на поглощение катиона растением из водного раствора определенным образом влияют оба фактора – и концентрация, и активность. Концентрация ионов катионогенного элемента в питательной водной среде определяет общую массу потока ионов, поступающего в растение в течение периода его вегетации. Активность регулирует уровень биологической доступности катиона и величину его перехода из питательной водной среды в растения. Но поскольку увеличение концентрации иона в многокомпонентной питательной среде приводит к снижению его химической активности и к падению скорости поглощения растениями, то влияние концентрации и активности иона на скорость его поглощения растением из водного раствора оказывается, по сути, разнонаправленным. Степень влияния каждого из этих двух факторов определяется ионной силой раствора, концентрацией катиона в растворе и способностью прочих ионов многокомпонентной системы образовывать с ним ионные комплексы и ассоциаты, снижая его активность. Из этого следует, в частности, что внесение в питательную среду любых водорастворимых ионных соединений, в т. ч. внесение удобрений в почву, способно приводить к снижению поступления техногенных радионуклидов в растения.

Результаты исследования свидетельствуют, что увеличение в ПВР концентрации любых ионных веществ, способных образовывать новые ионные ассоциаты, связывающие ионы в химически неактивных формах, снижает поглощение растениями каждого из них. Из этого следует, что любой содержащийся в питательной среде биологически доступный катионогенный элемент является конкурентом при поглощении корневой системой растений по отношению к любым иным катионогенным элементам. Поэтому внесение многокомпонентных удобрений или одновременное внесения комплекса удобрений различного состава, содержащих катионогенные элементы в растворимой форме (Ca, Mg, K, NH_4 и др.), способно существенно снижать эффективность усвоения растениями каждого из них. Это обстоятельство указывает на целесообразность раздельного (и, по возможности, дробного) внесения удобрений, и подчеркивает актуальность использования медленно растворяющихся удобрений пролонгированного действия.

Из результатов эксперимента вытекают некоторые следствия, полезные для снижения уровней накопления техногенных радионуклидов (^{90}Sr, ^{137}Cs и др.) сельскохозяйственными растениями, которые возделываются в условиях водной культуры, когда удобрения могут вноситься в воду (например, рисом). В этом случае поддержание в воде концентрации удобряющих веществ на максимально возможном уровне будет способствовать минимизации накопления радионуклидов растениями.

Литература

1. Микулин, Г. И. Гидратная теория растворов электролитов в термодинамической обработке / Г. И. Микулин // Вопросы физической химии растворов электролитов. – Л. : Химия, 1968. – С. 44–72.

2. Барбер, С. А. Биологическая доступность питательных веществ в почве. Механистический подход / С. А. Барбер. – М. : ВО «Агропромиздат», 1988. – 376 с.

3. Крайнов, С. Р. Гидрогеохимия / С. Р. Крайнов, В. М. Швец. – М. : Недра, 1992. – 363 с.

4. Справочник по геохимии / Г. В. Войткевич, А. В. Кокин [и др.]. – М. : Недра, 1990. – 480 с.

5. Geochemical modeling of water-rock interactions using SOLMINEQ.89 / E. H. Perkins, Y. K. Kharaka [et al.]. – 1990. – № 416. – P. 117–127.

Институт радиобиологии
НАН Беларуси

Поступила в редакцию 30.07.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

*УДК 630*535:630*228.3:630*6*

Повышение точности учета лесосечного фонда смешанных древостоев при лесоустройстве

В.Ф. Багинский[1], Н.П. Демид[2]

Для повышения точности таксации запасов смешанных древостоев определена изменчивость сумм площадей сечений древесных пород в составе смешанного насаждения внутри выдела. Особое внимание уделено повышению точности определения запасов при назначении рубок ухода. Применение более точных методов учета запасов позволяет устанавливать запасы таксируемых насаждений с требуемой точностью.
Ключевые слова: смешанный древостой, коэффициент вариации запаса, выборочно-перечислительная таксация, круговые реласкопические площадки, структура выдела, рубки ухода, лесосечный фонд.

To improve the accuracy of the inventory of mixed forest stands, the variability of the sums of the cross-sectional areas of tree species in the composition of the mixed stand within the stand was determined. Particular attention is paid to improving the accuracy of determining reserves when assigning thinning. The use of more accurate methods of accounting for stocks allows you to establish stocks of taxed plantings with the required accuracy.
Keywords: mixed stand, stock variation coefficient, selective-enumeration taxation, circular relascopic areas, stand structure, thinning, logging fund.

Введение. В последние годы в нашей стране ежегодно заготавливают 19–22 млн. кубометров древесины. Так, в 2019 г. по всем видам рубок вырублено около 22 м^3 ликвида. При этом по рубкам главного пользования заготавливается около 8–9 млн. кубометров, по промежуточному пользованию 5–6 и по прочим рубкам 7–9 млн. м^3.

Лесное хозяйство широко использует заготовку леса силами сторонних организаций, в основном частной формы собственности.

Все это требует обеспечить учет запасов древостоев, отводимых в рубку, с высокой точностью. Оценку запасов древесины с целью определения расчетной лесосеки проводит лесоустройство [1]. Используя современные технологии, оно оценивает запасы древесины на выделе с точностью около 15 % [2]. В результате ошибки при определении запасов в целом по всем видам рубок могут достигать 3 млн. кубометров, что неприемлемо. Поэтому необходимо разработать более точные методы определения запасов древесины. Особенно актуально проведение такой работы при проведении рубок ухода в средневозрастных древостоях. При назначении рубок главного пользования материалы лесоустройства корректируются данными отводов лесосек. Проведение прочих рубок предусматривает учет по количеству заготовленной древесины [2]. Наибольшие ошибки при отводах возможны при назначении рубок промежуточного пользования. В этом случае количество вырубаемой древесины определяют в доле от наличного запаса [2]–[3]. Поэтому целью настоящей работы явилась разработка методов более точного определения общих запасов на единице площади при назначении прореживаний и проходных рубок.

Материалы и методика исследований. Рубки ухода проводят как в чистых, так и в смешанных насаждениях. При этом наиболее важно проведение ухода за лесом именно в смешанных древостоях. В Беларуси по имеющимся оценкам, в том числе и проведенных нами по анализу лесоустроительных материалов, к смешанным насаждениям относится свыше 55 % сосновых насаждений, около 60 % еловых, дубовых и мягколиственных древостоев. В силу сказанного методика повышения точности учета разрабатывалась в основном для смешанных насаждений.

Материалом для настоящей работы послужили пробные площади, заложенные в период с 1975 по 2015 гг. в лесах Беларуси. Всего было использовано свыше 1100 пробных пло-

щадей, заложенных в смешанных насаждениях. Экспериментальный материал собирался силами лаборатории лесоустройства Института леса и кафедры лесохозяйственных дисциплин УО «ГГУ им. Ф. Скорины» под руководством и при непосредственном участии авторов статьи.

Использовались также материалы из банка данных «Лесной фонд», который создан в Беларуси лесоустройством, а также открытые ведомственные данные и литературные источники.

Методика планирования эксперимента, сбора и обработки материала включала стандартные лесотаксационные, лесоводственные и лесоустроительные методики, а также биометрические методы и системный анализ [4]–[8].

При выполнении работы применяли также оригинальные методики, которые описаны ниже.

Результаты и обсуждение. Исследование смешанных древостоев представляет значительные трудности как количественного, так и качественного характера. Количественные трудности состоят в необходимости многовариантных расчетов и сбора значительно большего объема экспериментального материала, чем при работе с чистыми насаждениями. При изучении чистых древостоев необходимо учесть для каждой породы различия в уровнях производительности (не менее 3–4 классов бонитета или типов леса). По полноте (густоте) требуется иметь также 3–4 варианта. Все пробные площади должны иметь не менее 2–3 повторностей. В смешанном древостое, даже самом простом, состоящем из 2 пород, добавляется 3–4 варианта состава, что, соответственно, увеличивает необходимый объём экспериментального материала.

Но более трудными для решения оказались проблемы качественные. Для начала потребовалось определиться с самим понятием «смешанный древостой». Казалось бы, этот термин вполне ясен – он разъясняется во всех учебниках, нашел отражение в ГОСТе на термины и определения. Везде сказано, что смешанный древостой – это древостой, состоящий из двух и более древесных пород [4]–[5].

При лесоустройстве первичной таксационной единицей является выдел. Размер выдела и его характеристика по всем существовавшим и действующим инструкциям [1] определяются в основном хозяйственными соображениями. Конечно, если это лесные культуры, где смешение пород представлено рядами, или древесные породы перемешаны относительно равномерно, проблем с отличием смешанного древостоя от чистого нет.

Но когда в границах одного выдела, протаксированного как смешанный древостой, мы встречаем участки величиной 0,1–0,3 и даже до 0,5–0,6 га, занятые деревьями лишь одной породы, то возникают естественные сомнения – считать ли насаждение на этом выделе смешанным или здесь соединены несколько чистых древостоев.

Естественно, что разные исследователи сталкивались с таким явлением раньше и предлагали разные выходы. Так, известно предложение Н.Е. Дылиса [9] о парцеллярной структуре насаждений. Свой подход при оценке размещения растений предложил П. Грейг-Смит [10]. Но, как правило, в этих предложениях нет количественных критериев.

Поэтому нами была разработана классификация пространственной структуры смешанных древостоев с указанием количественных величин, основанная на наличии взаимовлияния деревьев. Суть этой классификации заключается в выделении типов пространственного расположения деревьев в смешанном древостое. При этом, сохраняя определение «биогруппа», введены новые понятия «малая и большая группа деревьев», а также «подвыдел». Наше предложение ранее достаточно полно описано в литературе [4], поэтому подробное изложение типов пространственной структуры опускаем.

В анализ не включали выдела смешанных древостоев, где смешение пород относилось к понятию «подвыдел». В этом случае выдел, протаксированный как смешанное насаждение, в лесоводственно-биологическом отношении представляет собой 2 чистых древостоя. Обычно «подвыдел» имеет площадь 0,03–0,10 га в молодняках и средневозрастных древостоях, и свыше 0,10–0,15 га в приспевающих и спелых насаждениях в зависимости от класса бонитета.

Точность определения запасов при таксации насаждений зависит от величины изменчивости сумм площадей сечения и тесно коррелирующих с ними запасов внутри выдела. Необходимое количество измерений для достижения требуемой точности рассчитывается по известным статистическим формулам [7].

Для оценки точности таксации выдела в смешанном древостое имеет значение, описываем ли мы основную породу или породу – примесь. Коэффициенты варьирования сумм площадей сечения (*G*) внутри выдела в зависимости от состава древостоя приведены в таблице.

При проведении исследований учитывали разработку А.Г. Мошкалева [11], обосновавшего величину первичной учетной площадки внутри выдела в 0,04 –0,06 га (в среднем 0,05 га).

В таблице для сокращения показаны объединенные и усредненные данные, хотя наши исследования показали, что эти величины дополнительно зависят от возраста, среднего диаметра и полноты.

Таблица – Средние значения варьирования (*V*) сумм площадей сечений (*G*) внутри выдела в смешанных древостоях

Древостои (хозсекции)	Коэффициент вариации сумм площадей сечений (*G*) внутри выдела для отдельных пород при их доле в составе ≥ 0,2				
	С	Е	Д	Б	Ос
сосновые	29	39	54	–	–
еловые	76	36	–	–	–
дубовые	–	–	32	–	–
березовые	60	–	–	31	93
осиновые	–	–	83	77	40

Повышение точности учета как чистых, так и смешанных древостоев требует дополнительных измерений. При этом наиболее рационально закладывать круговые реласкопические площадки (КРП). Методика их закладки должна учитывать особенности неоднородности таксационного выдела, которое выражается величиной варьирования сумм площадей сечений или запасов внутри выдела. Закладка увеличенного количества реласкопических площадок против действующих нормативов требует значительных затрат, что не всегда приемлемо. Поэтому дополнительные измерения следует проводить в пределах выделенных страт. По этим данным определяем коэффициенты для внесения поправок в величины запасов, найденных обычными глазомерно-измерительными методами.

При проведении измерений должна обеспечиваться случайность (равномерность) размещения выборочных площадок для всей совокупности выделов страты. Точно определив по выборочным измерениям запас или другой показатель, затем можем внести вычисленную поправку во все глазомерно протаксированные выдела страты, уменьшая в среднем ошибки для этой категории древостоев.

В результате получаем для некоторых показателей отдельных страт (выделов С, Е, Б в возрасте прореживаний и проходных рубок), по данным таксации величины систематических ошибок.

Для получения объективных результатов выборочной измерительной таксации части выделов (далее – учетных выделов) с целью последующей автоматизированной камеральной коррекции по ним результатов глазомерной таксации всех выделов предусматривается двукратная механическая (систематическая) выборка со случайным началом.

Результаты измерений фиксируются в специальном бланке. Положение КРП обозначается на абрисе (косым крестиком с номером КРП) или фотоабрисе (точкой белой или желтой тушью с номером КРП при ручном проектировании выборки или иным подобным знаком при подготовке фотоабрисов с применением технологий автоматизированного картографирования).

Выбор учетных выделов и размещение учетных площадок проводится случайным методом выборки обеспечивается неукоснительным размещением КРП (их центров) по единой для квартала схеме на основе воображаемой сетки квадратов со стороной 200 м (по горизонтальному проложению), ориентированной по магнитному меридиану или иным унифицированным способом.

Сетка проектируется в пределах каждого квартала с помощью фотоабрисов со списком координат центров КРП для поиска их с применением устройств спутникового позиционирования. Применяется единая нумерация КРП в пределах квартала.

Поиск центров КРП на местности осуществляется по компасу (навигатору) путем промера шагами с учетом масштаба, определяемого заранее индивидуально

При необходимости обхода препятствия (завал деревьев, овраг) визуально намечают за ним точку (ствол дерева, куст подлеска) и глазомерно оценивают прямое натурное проложение до нее в парах шагов (напр., 4 п.ш.). Подсчет прерывают перед препятствием (например, 12 п.ш.) и продолжают от этой намеченной точки после удобного перехода к ней с учетом величины вышеупомянутого прямого проложения.

Заключение. Обобщая изложенное, приходим к следующим выводам:

– исследования смешанных древостоев, несмотря на большие трудности при сборе экспериментального материала, имеют важное значение для организации и ведения хозяйства в лесах Беларуси;

– разработанная система пространственного размещения деревьев в смешанных древостоях позволяет четко (по количественным критериям) идентифицировать насаждение на выделе как смешанный древостой, а не как искусственную совокупность чистых.

Коэффициенты варьирования сумм площадей сечения (G) внутри выдела зависят от того, описываем ли мы основную породу или породу – примесь.

Для удешевления стоимости дополнительных измерений проводим их не во всех выделах хозсекции, а в пределах выделенных страт.

Точно определив по выборочным измерениям запас или другой показатель, затем можем внести вычисленную поправку во все глазомерно протаксированные выдела страты, уменьшая в среднем ошибки для этой категории древостоев.

Литература

1. Лесной кодекс Республики Беларусь [Электронный ресурс] : 24 декабря 2015 г., №442-З : принят Палатой представителей 3 декабря 2015 г. : одобр. Советом Республики 9 декабря 2015 г. : в ред. Закона Респ. Беларусь от 18.12.2018 г. // ЭТАЛОН. Законодательство Республики Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Минск, 2020.

2. Технические требования при лесоустройстве. Отвод и таксация лесосек в лесах Республики Беларусь. (ТКП 6220-2028). – Минск : Министерство лесного хозяйства Республики Беларусь, 2018. – 108 с.

3. Правила рубок леса в Республике Беларусь. – Минск : Министерство лесного хозяйства Республики Беларусь, 2019. – 39 с.

4. Багинский, В. Ф. Лесная таксация / В. Ф. Багинский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. – 2018. – 366 с.

5. Мелехов, И. С. Лесоведение / И. С. Мелехов. – М. : Лесная промышленность, 1980. – 406 с.

6. Антанайтис, В. В. Современное направление лесоустройства / В. В. Антанайтис. – М. : Лесная промышленность, 1977. – 280 с.

7. Никитин, К. Е. Методы и техника обработки лесоводственной информации / К. Е. Никитин, А. З. Швиденко. – М. : Лесная промышленность, 1978. – 270 с.

8. Багинский, В. Ф. Системный анализ в лесном хозяйстве / В. Ф. Багинский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. – 168 с.

9. Дылис, Н. В. Парцеллярная структура лесных биогеоценозов и ее лесоводственное значение / Н. В. Дылис // Ботаника. – Минск : Наука и техника. – 1968. – Вып. X. – С. 40–45.

10. Грейг-Смит, П. Количественная экология растений / П. Грейг-Смит. – М. : Мир, 1967. – 359 с.

11. Мошкалев, А. Г. Таксация товарной структуры древостоя / А. Г. Мошкалев [и др.]. – М. : Лесная промышленность, 1982. – 159 с.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Белорусский государственный
технологический университет

Поступила в редакцию 30.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

*УДК 630*551.521*

Состояние дочернобыльских сосновых лесов в 30-километровой зоне ЧАЭС

Н.И. Булко[1], А.М. Потапенко[1], Н.В. Митин[2], В.В. Бутьковец[1], А.К. Козлов[1], Н.В. Толкачева[1], И.А. Машков[1], В.А. Серенкова[1]

Исследована жизнеспособность сосновых лесов дочернобыльского происхождения в 30-км зоне ЧАЭС, их санитарное состояние и биологическая устойчивость. Установлено, что сосновые насаждения по санитарному состоянию являются поврежденными. По степени ухудшения санитарного состояния сосновые насаждения составляет ряд: С чер – С мш – С вер – С лш. Характеризуются как насаждения с нарушенной устойчивостью (2 класс) 71,4 % обследованных сосновых насаждений.
Ключевые слова: сосновые леса, радионуклиды, санитарное состояние.

The vitality of pine forests, their sanitary condition and biopersistence were studied in the article. These forests had grown before the Chernobyl disaster, and they are located in the Chernobyl Nuclear Power Plant Zone of Alienation (in the 30 kilometre zone). It was found out that by its sanitary condition pine woodland had been injured. Pine woodland makes the series «bilberry pine forest – moss-covered pine forest – ericetal pine forest – lichen pine forest» according to the degree of deterioration in sanitary condition. 71,4 % of the studied pine woodland can be characterized as woodland with affected resistance (of the 2nd grade).
Keywords: pine forests; radioactive nuclides; sanitary condition.

Введение. После аварии на ЧАЭС в загрязненной радионуклидами 30-км зоне оказалась часть лесных массивов Комаринского, Хойникского (на момент аварии Первомайского) и Наровлянского лесхозов Гомельского ГПЛХО, леса которых задержали значительную часть радионуклидов, выпавших на эту территорию.

К настоящему времени сохранились только доаварийные лесопожарные карты лесхозов, по которым возможно соотнести участки лесов, оказавшиеся в 30-км зоне, с участками лесных массивов на картах Полесского государственного радиоэкологического заповедника (ПГРЭЗ) лесоустройства 2012 г. К настоящему времени доаварийные таксационные описания и планшеты не обнаружены.

В состоянии лесных массивов дочернобыльского происхождения в 30-км зоне к настоящему времени произошли значительные изменения, обусловленные:

– затоплением территории мелиорированных низинных болот (31803 га);

– лесными пожарами, особенно 1992, 1996, 2003, 2015 гг. (10160 га);

– повреждением насаждений сосны стволовыми вредителями (по разным оценкам от 1000 до 5000 га);

– комплексом выполняемых противопожарных мероприятий (устройство противопожарных разрывов шириной до 200 м, противопожарных водоемов и др.).

В то же время в них разрушались без уходов такие элементы инфраструктуры, как лесные дороги, квартальные просеки, мелиоративная сеть. Внесли свой вклад в снижение устойчивости массивов дочернобыльского происхождения и климатические изменения, обусловившие адаптацию и выживание вредоносных насекомых, вспышки их численности и усиление деградационных процессов в насаждениях.

Загрязнение радионуклидами природной среды становится фактором, изменяющим естественные свойства лесных экосистем, обуславливающим формирование фитоценозов с особыми условиями роста и развития растений. Динамика лесистости и породного состава насаждений становится комплексным показателем воздействия на лес. Состав новых поколений леса близкий к породному составу первого яруса при естественном развитии лесных сообществ возможен только в единичных случаях [1]. Подтверждением данного тезиса становятся кардинальные изменения породного состава ряда лесных насаждений в зоне отчуждения, значительно поврежденных вершинным короедом. Сложившиеся на этой территории

в доаварийный период антропоморфные культурфитоценозы в результате аварии на ЧАЭС в отсутствие лесохозяйственных мероприятий стали терять биологическую и противопожарную устойчивость [2], [3].

Биологическая устойчивость лесных экосистем – одна из ключевых проблем экологии. Только в настоящее время изучению механизмов и параметров устойчивости лесов, их способности противостоять разрушающим воздействиям стали уделять должное внимание [4], [5]. Среди важнейших факторов устойчивости биологических систем фигурируют биоразнообразие и продуктивность.

Значимым показателем ответной реакции насаждений на техногенное воздействие является радиальный прирост деревьев. Сравнивая анализ хода роста деревьев сосны до и после аварии на ЧАЭС, установлено, что деревья без признаков ослабления имеют положительную связь текущего годичного прироста с плотностью загрязнения почвы в местах их произрастания. Отмечается более интенсивное увеличение годичных колец как в целом, так и ранней и поздней древесине [3], [6], [7]. Изменения размера годичных колец для сильно ослабленных и усыхающих деревьев не позволяют судить о сколько-нибудь заметной ростовой реакции деревьев этих категорий на плотность загрязнения почвы радиоцезием [3], [6], [8], [9].

Цель данной работы – определить жизнеспособность сосновых лесов дочернобыльского происхождения в 30-км зоне ЧАЭС, их санитарное состояние и биологическую устойчивость.

Объекты и методы исследования. Исследования выполнялись в сосновых лесах дочернобыльского происхождения в 30-км зоне ЧАЭС в ПГРЭЗ на 14 объектах, в т. ч. в Крюковском лесничестве – 9 объектов, Радинском – 2, Верхнеслободском – 3.

Объекты были заложены в лишайниковом – 2, вересковом – 1, мшистом – 9, черничном – 1 типах леса.

Как видно из таксационной и радиационной характеристик исследуемых насаждений (таблица 1), в настоящее время 78,6 % исследуемых сосняков имеют полноту выше 1,0, под пологом располагается густой подлесок, активно идет накопление отпада. Запас древесины в приспевающих насаждениях достигает более 600 м^3/га. Мощность дозы излучения в местах закладки опытных объектов – от 0,22 до 8,4 мкЗв/час.

Объекты заложены по общепринятым в лесоводстве, лесной таксации и геоботанике методикам [10]–[13]. Статистическая обработка полученных данных проводилась с помощью компьютерных программ Excel 2019, Statistica 6.0.

Исследование санитарного состояния сосновых насаждений в 30-километровой зоне ЧАЭС проводилось в соответствии с Санитарными правилами в лесах Республики Беларусь [14].

Санитарное состояние древостоев оценивалось по индексу состояния [15], который рассчитывался для каждой пробной площади по формуле:

$$In = \frac{\sum Ik \cdot n}{N},$$

где In – индекс состояния насаждения; Ik – балл деревьев для определения категории состояния; n – количество деревьев данной категории состояния; N – количество деревьев на пробной площади.

Оценка класса биологической устойчивости насаждений осуществлялась по существующей шкале [14].

Для изучения сукцессионных процессов в насаждениях выполнялись следующих работы:

– определение таксационных характеристик насаждений (диаметр и высота с распределением деревьев по классам Крафта [10], сумма площадей поперечного сечения, запас, полнота, бонитет);

– учет естественного возобновления леса, подлеска, живого напочвенного покрова по ярусам, который проводился на учетных площадках площадью 1–4 м^2, расположенных на пробе конвертом [12];

– отбор кернов для определения текущего прироста по диаметру и запасу деревьев по учетным периодам – приростным буравом из пяти деревьев в каждой из центральных ступеней толщины или из пяти деревьев в каждом из основных классов Крафта на высоте 1,3 м до сердцевины ствола (всего не менее 20 кернов). Обработка материалов таксации велась в соответствии с [10].

Таблица 1 – Таксационные показатели и радиационная характеристика сосновых насаждений на пробных площадях в зоне отчуждения ПГРЭЗ

№ пп	Лесничество	Квартал / выдел	Состав	Возраст, лет	D, см	H, м	Бонитет	Полнота	Тип леса	Запас по породам, м^3/га	Общий запас, м^3/га	МД, мкЗв/час
1	Верхне-слободское	82/13	7С	36	18,2	13,1	II	0,25	С. лш.	33,5	45,5	3,85
			3Б		16,8	14,2				12,0		
2	Крюковское	54/2	10С	48	12,4	12,1	III	0,28	С. лш.	51,4	51,4	5,54
3	Верхне-слободское	70/26	8С	42	23,1	14,7	II	0,53	С. вер.	82,6	107,3	0,55
			2Б		12,3	13,7				24,7		
4	Радинское	78/2	10С	57	18,2	18,8	II	1,22	С. мш.	382,2	382,2	2,18
5	Крюковское	18/6	10С	66	22,3	21,3	I	1,46	С. мш.	533,9	533,9	6,03
6	Верхне-слободское	86/14	9С	61	21,3	19,2	II	1,32	С. мш.	369,9	404,1	5,01
			1Б		18,3	17,1				34,2		
7	Радинское	90/4	10С	66	22,2	25,8	Ia	1,33	С. мш.	616,6	616,6	2,83
8	Крюковское	5/23	10С	83	30,7	26,8	I	1,23	С. мш.	575,0	585,2	0,50
			+Б		23,6	19,3				10,2		
9	Крюковское	74/11	10С	62	28,0	23,6	I	1,21	С. мш.	473,0	488,3	0,22
			+Б		20,4	18,1				15,3		
10	Крюковское	74/12	10С	60	21,9	20,6	I	1,15	С. мш.	402,3	402,3	0,24
11	Крюковское	60/6	10С	37	16,6	18,5	I^a	1,11	С. мш.	323,5	337,3	1,87
			+Б		16,4	19,1				13,8		
12	Крюковское	44/20	10С	81	30,9	26,4	I	1,29	С. мш.	612,6	612,6	8,25
13	Крюковское	24/13	10С	66	27,4	21,9	I	1,23	С. мш.	463,2	463,2	8,40
14	Крюковское	43/16	9С	88	53,1	28,9	I	1,19	С. чер.	522,2	555,1	6,61
			1Д		13,0	13,2				31,4		
			+Б		16,0	16,1				1,5		

Результаты и их обсуждение. Леса дочернобыльского происхождения, как отмечалось выше, вошедшие в 30-км зону Чернобыльской АЭС, относились к лесному фонду Комаринского, Хойникского (на момент аварии – Первомайского) и Наровлянского лесхозов. Незначительную часть их (около 1,0 тыс. га) составили колхозные леса, представленные насаждениями мягколиственных пород.

Общая площадь лесов дочернобыльского происхождения в 30-км зоне составила 20 тыс. га. Из них на долю сосновых насаждений пришлось 90,5 % (18,1 тыс. га).

По состоянию на 2012 г. молодняки дочернобыльского происхождения составляли 20,2 %, средневозрастные – 70,4 %, приспевающие, спелые и перестойные – 9,4 %. Преобладающими являются сосняки лишайниковые (18,1 %), вересковые (27,6 %), мшистые (49,1 %), черничные (7,6 %).

Анализ распределения по классам бонитета показал, что сосняки I бонитета – 22,1 %, II бонитета составляют 48,9 %, III бонитета – 18,7 %. Среди них преобладают сосняки с полнотой 0,6–0,8 (63,8 %). На долю высокополнотных (0,9–1,0) приходится 17,7 %.

До аварии на ЧАЭС в Республике Беларусь велось высокоэффективное лесное хозяйство. Рубки ухода в сосновых лесах проводились регулярно с установленной периодичностью, в насаждениях подлежали вырубке деревья низших категорий санитарного состояния (далее – категории состояния).

В итоге, сосновые насаждения, в том числе и в 30-км зоне ЧАЭС, имели повышенные индексы состояния (ИС) от 1,2 до 1,7. По данным исследований В.В. Степанчика, А.И. Василенко [16] на контрольных объектах в районе г. Гомеля и г. Мозыря, входивших в систему объектов для мониторинга техногенного загрязнения воздушной среды в лесу и попавших в

зону радиоактивного загрязнения, сосновые насаждения характеризовались преобладанием здоровых и ослабленных древостоев. При этом древостои сосны 2 класса возраста относились к категории ослабленные (82 %), реже – сильно ослабленные (18 %), а 3 класса возраста оценивались как здоровые (27 %) и ослабленные (73 %) [17].

В настоящее время санитарное состояние сосновых древостоев в 30-км зоне ЧАЭС сильно изменилось из-за прекращения лесохозяйственной деятельности.

Результаты исследования сосновых насаждений, проведенного в 30-км зоне ЧАЭС на 14 объектах в преобладающих типах леса показали, что основная масса деревьев сосны относится ко второй (57,1 %) и третьей (35,7 %) категориям состояния, т.е. ослабленные и сильно ослабленные (таблица 3). При этом индекс санитарного состояния составлял от 1,5 на объекте 14 до 2,9 на объекте 2.

Показатели устойчивости сосны обыкновенной 2–5 классов возраста на пробных площадях объектов 1–14 в 30-км зоне ЧАЭС показали, что в исследуемой зоне санитарное состояние сосны в насаждениях значительно различается в зависимости от типа леса.

Установлено, что в сосняках лишайниковых (объекты 1, 2) основная масса деревьев сосны (64,3 % от общего количества деревьев) относится к 3 категории санитарного состояния (ИС-2,8), т. е. они сильно ослаблены. Доля деревьев 2 категории (ослабленные древостои) составляет 20,4 %, при этом здоровых деревьев – 6,9 %, усыхающих и сухостойных – соответственно 3,6 и 4,9 % (таблица 2).

В сосняке вересковом (объект 3) основная масса деревьев сосны (36,8 % от общего количества деревьев) относится ко 2 категории состояния (ИС-2,2), т. е. они ослаблены. Долевая часть деревьев 3 категории (сильно ослабленные древостои) составляет 31,6 %, доля здоровых деревьев – 36,8 %, сухостойных – 10,5 %.

В сосняках мшистых (объекты 4–13) основная масса деревьев сосны (31,1 % от общего количества деревьев) относится ко 2 категории состояния (ИС-2,3), т. е. они ослаблены.

Долевая часть деревьев 3 категории в сосняках мшистых составляет 11,3 %, доля здоровых – 37,3 %, усыхающих и сухостойных – соответственно 3,6 и 16,7 %.

Установлено, что наибольшая доля здоровых деревьев сосны отмечается в сосняке черничном (объект 14) – 52,6 %. Ослабленные деревья в этом типе леса составляют 47,4 %, сильно ослабленные и другие категории отсутствовали. В сосняках черничных доля ослабленных деревьев сосны обыкновенной увеличилась в 1,6 раза по сравнению с сосняками мшистыми. Наибольшая доля деревьев 3 и 4 категорий состояния (67,9 %) была отмечена в сосняке лишайниковом. В то же время наибольшая часть деревьев 5 и 6 категорий (16,7 %) наблюдалась в сосняках мшистых.

Таблица 2 – Санитарное состояние сосновых насаждений в 30-км зоне ЧАЭС (2019 год)

№пп	Тип леса	Возраст древостоя, лет	Категория санитарного состояния древостоя, %						ИС
			1	2	3	4	5	6	
1	С. лш.	36	10,4	10,4	75	4,2	–	–	2,7
2	С. лш.	48	2,4	31,0	50,0	7,1	9,5	–	2,9
3	С. вер.	42	36,8	31,6	21,1	10,5	–	–	2,1
4	С. мш.	57	33,5	24,9	16,1	7,3	18,2	–	2,6
5	С. мш.	66	29,3	21,8	14,3	10,5	24,1	–	2,8
6	С. мш.	61	28,9	31,3	6,0	3,6	30,1	–	2,8
7	С. мш.	66	33,3	35,0	10,0	8,3	13,3	–	2,3
8	С. мш.	83	45,9	35,1	13,5	5,4	–	–	1,8
9	С. мш.	62	37,3	28,2	9,1	–	25,5	–	2,5
10	С. мш.	60	25,6	29,5	24,4	10,3	10,3	–	2,5
11	С. мш.	37	38,8	29,6	11,2	4,1	16,3	–	2,3
12	С. мш.	81	54,5	28,6	7,8	–	9,1	–	1,8
13	С. мш.	66	53,8	33,3	–	–	12,8	–	1,9
14	С. чер.	88	52,6	47,4	–	–	–	–	1,5

Таким образом, санитарное состояние сосновых насаждений в 30-км зоне ЧАЭС ухудшается в ряду: С. чер – С. мш – С. вер – С. лш. Наиболее устойчивыми являются сосняки черничные. Проведенный анализ санитарного состояния сосновых древостоев в 30-км зоне ЧАЭС показал сходные тенденции их устойчивости в зависимости от типа леса, полученных в предыдущих исследованиях в дальней зоне чернобыльских выпадений, а также от возраста древостоя. Сосновые насаждения, произрастающие в лишайниковом типе леса, оказались менее устойчивыми среди изученных сосновых насаждений различных типов леса в 30-км зоне ЧАЭС. Среди них наиболее устойчивыми оказались древостои, произрастающие в условиях C_3 (сосняки черничные).

Отмечено, что сосновые насаждения 2 класса возраста по санитарному состоянию характеризуются преобладанием ослабленных и сильно ослабленных деревьев (49,6 % от общего количества); 3 класса возраста – ослабленных и сильно ослабленных (38,1 %), а также усыхающих и сухостойных деревьев (31,8 %); 4 класса возраста – ослабленных и сильно ослабленных (45,8 %); 5 класса возраста – здоровых (54,2 %) и ослабленных (34,9 %) деревьев.

Характеристика биологической устойчивости сосновых насаждений в 30-км зоне на пробных площадях показала, что исходя из полученных данных по запасу отпада, доля деревьев 2 и 3 категорий состояния из всего объема обследованных насаждений 71,4 % относится ко 2 классу биологической устойчивости (таблица 3), т. е. характеризуются нарушенной устойчивостью.

Анализ долевой структуры общего запаса исследованных сосновых насаждений показал, что в сосняках 2 класса возраста наибольший отпад составляет 16,3 %, в 3 классе возраста – 35,0 %, в 4 классе возраста – 29,4 % и в 5 классе возраста – 13,8 %, наименее – в сосняках лишайниковых.

Таблица 3 – Биологическая устойчивость сосновых насаждений в 30-км зоне (2019 год)

№ пп	Тип леса	Возраст древостоя, лет	Запас отпада, %			Доля деревьев 2 и 3 категорий состояния, %	Класс биологической устойчивости насаждения
			валежник	сухостой	всего		
1	С. лш.	36	11,1	5,2	16,3	86,4	3
2	С. лш.	48	21,5	0,9	22,4	82,9	3
3	С. вер.	42	6,2	28,8	35,0	52,7	3
4	С. мш.	57	3,7	14,6	18,3	49,6	2
5	С. мш.	66	4,2	1,8	6,0	38,7	2
6	С. мш.	61	0,8	1,7	2,5	37,3	2
7	С. мш.	66	10,9	18,5	29,4	45,0	3
8	С. мш.	83	7,9	2,6	10,5	51,3	2
9	С. мш.	62	9,1	14,5	23,6	37,3	2
10	С. мш.	60	4,4	7,6	12,0	54,6	2
11	С. мш.	37	11,1	5,2	16,3	40,8	2
12	С. мш.	81	2,2	3,5	5,7	35,9	2
13	С. мш.	66	6,9	4,9	11,8	33,8	2
14	С. чер.	88	1,5	12,3	13,8	47,4	2

Заключение. Сосновые насаждения дочернобыльского происхождения в 30-км зоне ЧАЭС по своему санитарному состоянию являются поврежденными. Основная масса деревьев относится ко 2-й (ослабленные) – 57,1 % и 3-й категории состояния (сильно ослабленные) – 35,7 %.

По степени ухудшения санитарного состояния сосновые насаждения дочернобыльского происхождения составляет ряд: С. чер – С. мш – С. вер – С. лш. Наиболее устойчивыми были сосняки черничные, произрастающие в C_3, наименее устойчивыми – сосняки лишайниковые – в A_1.

По биологической устойчивости 71,4 % обследованных насаждений характеризуются как насаждения с нарушенной устойчивостью (2 класс). Максимальный отпад деревьев сосны (30–40 % от общего запаса насаждений) отмечается в насаждениях 3-го класса возраста. В сосняках 2-го класса – 16,3 %, 4-го класса – 29,4 %, 3-го класса – 13,8 %. Отпад в основном представлен сухостоем.

Литература

1. Коротков, С. А. Изучение динамической стабильности лесных сообществ на основе динамической типологии леса / С. А. Коротков // Лесной вестник. – 2016. – № 5. – С. 21–25.

2. Ромашкин, Д. Ю. Использование индекса флуктуирующей асимметрии для биоиндикационной оценки биологической устойчивости лесов в зонах радиоактивного загрязнения / Д. Ю. Ромашкин [и др.] // Лесной вестник – 2016. – № 5. – С. 122–128.

3. Белов, А. А. Особенности лесопатологического состояния сосновых древостоев Брянской области, подвергшихся радиационному загрязнению вследствие аварии на Чернобыльской АЭС/ А. А. Белов// Лесохозяйственная информация. – 2014. – № 1. – С. 11–17.

4. Коротков, С. А. Теоретические проблемы устойчивости леса / С. А. Коротков // Лесной вестник. – 2015. – № 4. – С. 26–32.

5. Николаевский, В. С. Биомониторинг, его значение и роль в системе экологического мониторинга и охране окружающей среды / В. С. Николаевский // Методологические и философские проблемы биологии. – Новосибирск : Наука. Сиб. отделен., 1981. – С. 341–354.

6. Иванов, В. П. Использование дендрохронологического метода для изучения закономерностей роста сосны обыкновенной в условиях техногенного воздействия / В. П. Иванов [и др.] // Актуальные проблемы лесного комплекса. – 2008. – Т. 1. – С. 1–4.

7. Мусаев, Е. К. Сезонный рост и строение годичных колец сосны обыкновенной в зоне чернобыльской катастрофы / Е. К. Мусаев// Лесоведение. – 1996. – № 1. – С. 16–29.

8. Белов, А. А. Особенности радиального прироста древесины в ослабленных сосняках-черничниках Брянской области, загрязненных радионуклидами [Электронный ресурс] / А. А. Белов // Лесохоз. информ. : электрон. сетевой журн. – 2017. – № 1. – С. 42–51.

9. Мусаев, Е. К. Сезонный рост и строение годичных колец сосны обыкновенной в зоне чернобыльской катастрофы / Е. К. Мусаев // Лесоведение. – 1996. – № 1. – С. 16–29.

10. Нормативные материалы для таксации леса Белоруской ССР / Под общ. рук. В. Ф. Багинского. – М., 1984. – 308 с.

11. Общесоюзные нормативы для таксации лесов : справочник / В. В. Загреев [и др.]. – М. : Колос, 1992. – 495 с.

12. Программа и методика биогеоценотических исследований / Под ред. Н. В. Дылиса. – М. : Наука, 1974. – 403 с.

13. Родин, Л. Е. Методические указания к изучению динамики и биологического круговорота в фитоценозах / Л. Е. Родин, Н. П. Ремезов, Н. И. Базилевич. – Л. : Наука, 1968. – 143 с.

14. Санитарные правила в лесах Республики Беларусь : утв. постановлением Министерства лесного хозяйства Республики Беларусь от 19 декабря 2016 г., № 79. – Минск : Минлесхоз, 2016. – 21 с.

15. Карпенко, А. Д. Оценка состояния древостоев, находящихся под воздействием промышленных эмиссий / А. Д. Карпенко // Экология и защита леса : Межв. сб. науч. тр. – Л. : ЛТА, 1981. – Вып. 6. – С. 39–43.

16. Степанчик, В. В. Анализ показателей устойчивости культур сосны воздействию техногенного загрязнения / В. В. Степанчик, А. И. Василенко // Проблемы лесоведения и лесоводства: науч. тр. ИЛ НАН Беларуси. – Гомель, 1996. – Вып. 44. – С. 96–103.

17. Исследование хода сукцессионных процессов в высокозагрязненных радионуклидами сосновых лесах в отдаленный послеаварийный период и разработка комплекса мер по стабилизации в них экологической обстановки : отчет о НИР (промеж.) / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т леса ; рук. Н. И. Булко. – Гомель, 2016. – 105 с. – № ГР 20160837.

[1]Институт леса НАН Беларуси

[2]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 24.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 57.045:631.559:581.526.45(282.247.321.7)

Математическая модель влияния метеорологических условий на урожайность луговых экосистем поймы р. Сож

Н.М. Дайнеко, В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

На основании многолетних данных урожайности луговых экосистем Poo-Festucetum pratensis, представленных первым автором, и метеоданных Гомельского областного метеоцентра построена математическая модель определения урожайности по метеоданным за май–июнь текущего года.
Ключевые слова: урожайность, экосистема, математическая модель, условия.

Based on the amount of precipitation on the long-term data on the productivity of meadow ecosystems Poo-Festucetum pratensis given by the first author and the data of meteorological service of Gomel region the mathematical model was built for determining the productivity of this system by meteorological data for may–june of the current year.
Keywords: yield, ecosystem, mathematical model, conditions.

Введение. Современные научные исследования невозможно представить без использования математического аппарата и компьютерной техники. В предлагаемой статье авторы применили математический аппарат для разработки моделей функционирования луговых экосистем.

Луга в Республике Беларусь занимают 3289,1 тыс. га или 15,8 % ее территории. Площадь материковых лугов составляет 3116,4 тыс. га или 94,8 %, пойменных – 169,7 тыс. га или 5,2 % [1].

Пойменные луга являются наиболее ценными кормовыми угодьями, растительность которых используется для заготовки сена, сенажа, травяной муки, а также для выпаса сельскохозяйственных животных. Кроме этого, луговая растительность является источником лекарственных, эфиромасличных, пищевых, медоносных и декоративных растений. Луга имеют также важное эстетическое и рекреационное значение, являются прекрасным местом отдыха для человека. Наиболее ценными в поймах рек являются луговые экосистемы центральной поймы среднего уровня. В этих условиях наиболее часто на больших площадях представлены луговые сообщества, относящиеся к ассоциации *Poo-Festucetum pratensis*, союза *Festucion pratensis*, порядка *Arrhenatheretalia*, класса *Molinio-Arrhenatheiretea*. Они распространены в поймах рек юго-востока Беларуси [2]–[6], северо-востока Украины [7], [8] и Центральной России [9], [10].

Изменение растительных сообществ климатических факторов происходит очень быстро. Поэтому они являются надежными индикаторами нарушения окружающей природной среды. При этом изменение растительных сообществ идет гораздо быстрее, чем отдельных видов.

Устойчивое использование и сохранение видового, ценопопуляционного, фитоценотического и синтаксономического разнообразия луговых экосистем пойм, их продуктивности и качества как кормовых угодий возможно только на основе анализа результатов многолетних стационарных исследований.

Построение математических моделей функционирования луговых экосистем, учитывающих тип ЭФС, является одним из наиболее перспективных методов их исследования. Без построения динамических математических моделей практически невозможен качественный анализ процессов развития фитопопуляций. Математические модели реальных систем позволяют дать экспериментатором теоретическую «путеводную нить», не позволяют «утонуть» в море биологических разрозненных фактов.

При исследовании фитопопуляций наибольшее распространение получили математические методы, основанные на моделях в виде дифференциальных и разностных уравнений. Такие математические модели позволяют наиболее точно и адекватно описывать реальную динамику фитопопуляций. Развитие биологии связано с ее превращением из описательной

науки в науку точную, стоящую на прочном теоретическом фундаменте общих законов, выраженной в количественной форме. В связи с этим актуальность математического моделирования динамики луговых экосистем очевидна.

Материалы и методика исследований. Анализ литературных данных [2]–[8] показал, что в условиях юго-востока Республики Беларусь в поймах рек наиболее часто встречаются и занимают большие площади луговые экосистемы ассоциации *Poo-Festucetum pratensis* союза *Festucion pratensis*, порядка *Arrhenatheretalia*, класса *Molinio-Arrhenatheretea* системы синтаксонов Браун-Бланке.

Предметом наших многолетних стационарных исследований в пойме р. Сож были луговые экосистемы, относящиеся к ассоциации *Poo-Festucetum pratensis* Sapegin 1987 [11].

Луговая экосистема на повышенной равнине правобережной центральной поймы р. Сож в районе д. Поколюбичи Гомельского района характеризуется аллювиально-луговой связносупесчаной почвой с невысоким содержанием гумуса (2,4 %), сильнокислой (pH 4,1), бедной подвижными формами фосфора и калия (0,8 и 1,9 мг на 100 г почвы соответственно) почвой. Она изучалась нами на протяжении 1987–2000 гг.

Травостой луговой экосистемы пепельно-зеленый от вегетативных органов растений и соцветий злаков с желтыми вкраплениями соцветий лядвенца рогатого (*Lotus corniculatus*), лютика едкого (*Ranunculus acris*), белыми – подмаренника мареновидного (*Galium rubioides*). Проективное покрытие травостоя колебалось от 70 до 80 %, высота – от 30 (70) до 50 (90) см. Основу травостоя составляли содоминанты: овсяница луговая (*Festuca pratensis*) и мятлик луговой (*Poa pratensis*), а также постоянные виды – кострец безостый (*Bromopsis inermis*), тимофеевка луговая (*Phleum pratense*), лядвенец рогатый (*Lotus corniculatus*), одуванчик лекарственный (*Taraxacum officinale*), щавель пирамидальный (*Rumex thyrsiflorus*) и др.

Результаты исследований и их обсуждение. Будем рассматривать устойчивую экосистему *Poo-Festucetum pratensis* в пойме реки Сож, на которую человек воздействует только регулярными сенокошениями. Поставим задачу построить модель, которая позволила бы определить урожайность этой системы в данном n-ом году. При построении этой модели будем использовать многолетние данные полученные на кафедре ботаники и физиологии растений, и метеоданные, представленные метеослужбой Гомельской области.

По данным, представленным Гомельским областным центром, строим таблицу 1.

Таблица 1 – Среднемесячная температура воздуха и сумма осадков по данным Гомельского областного центра по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды, Гомель

Годы	Температура						Осадки					
	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь
2006	8,4	13,6	18,2	20,4	19,0	14,7	32,0	86,0	136,0	44,0	173,0	45,0
2008	10,4	13,8	17,6	20,4	20,2	13,0	60,0	52,0	24,0	76,0	72,0	47,0
2009	9,3	14,0	18,5	20,3	17,3	15,6	6,0	80,0	132,0	233,0	50,0	19,0
2010	9,8	17,5	21,1	24,5	23,5	13,6	14,7	90,3	35,9	125,3	24,0	60,0
2011	9,1	15,4	20,2	21,9	18,8	13,8	22,6	60,8	86,3	98,6	64,4	22,7
2012	10,0	16,9	17,6	22,2	19,1	14,4	35,1	57,9	114,7	111,7	82,7	40,2
2013	8,9	18,1	20,7	19,6	19,1	12,1	37,0	34,0	76,0	35,0	37,0	77,0
2014	10,2	16,1	17,0	21,7	19,9	14,4	16,0	116,0	74,0	65,0	89,0	14,0
2015	8,4	14,9	19,4	20,0	21,1	16,1	13,2	76,4	71,5	69,3	6,4	48,6
2016	10,0	15,4	19,4	21,2	19,8	14,0	53,3	88,2	46,2	54,6	73,6	18,4
2017	8,1	13,4	17,7	18,5	20,3	14,8	16,9	31,2	43,5	115,2	57,9	28,9
2018	11,0	18,4	19,2	20,3	20,9	16,5	19,1	20,6	67,6	186,0	67,7	68,5
2019	10,1	16,4	23,0	18,1	18,5	13,8	15,7	35,2	44,3	118,6	35,4	52,6

Эта таблица позволяет нам построить следующую таблицу отклонений температуры и осадков от их среднемесячных значений.

Таблица 2 – Отклонения температуры и осадков от среднемесячных значений

Годы	Δt_a, апрель	$\Delta t_м$, май	$\Delta t_и$, июнь	Δh_a, апрель	$\Delta h_м$, май	$\Delta h_и$, июнь
2006	-0,9	-2,2	-1,0	6,0	22,4	64,2
2007	-2,1	1,2	0,5	-4,0	-1,6	-18,8
2008	1,1	-2,0	-1,6	34,0	-11,6	-47,8
2009	0,0	-1,8	-0,7	-20,0	16,4	60,2
2010	0,5	1,7	1,9	-11,3	26,7	-35,9
2011	-0,2	-0,4	1,0	-3,4	-2,8	14,5
2012	0,7	1,1	-1,6	9,1	-5,7	42,9
2013	-0,4	2,3	1,5	11,0	-29,6	4,2
2014	0,9	0,3	-2,2	-10,0	52,4	2,2
2015	-0,9	-0,9	0,2	-12,8	12,8	-0,3
2016	0,7	-0,4	0,2	27,3	24,6	-25,6
2017	-1,2	-2,7	-1,5	-9,1	-32,4	-28,3
2018	1,7	2,6	0,0	-6,9	-43,0	-4,2
2019	0,8	0,6	3,8	10,3	-28,4	-27,5
Средние за месяц	9,35	15,78	19,24	25,58	13,61	71,79

Многолетние данные, представленные Н.М. Дайнеко, содержатся в таблице 3.

Таблица 3 – Динамика урожайности луговой экосистемы ассоциации Poo-Festucetum pratensis поймы р. Сож за 2006–2019 гг.

Виды растений	Годы													
	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Овсяница луговая a_n	17,7	11,4	12,3	17,4	13,3	12,8	16,9	10,4	12,1	8,4	10,4	9,1	13,4	9,5
Мятлик луговой m_n	12,9	8,8	9,9	14,1	10,6	9,1	13,2	7,9	8,6	5,3	6,5	6,5	9,6	6,8
Прочие виды p_n	6,4	5,3	6,0	7,0	5,2	4,8	6,7	9,4	10,5	8,8	9,5	8,7	9,8	9,3
Всего	37,0	25,5	28,2	38,5	29,1	26,7	36,8	27,7	31,2	22,5	26,4	24,3	32,8	25,6

По данным таблицы 3 строим следующие таблицы.

Таблица 4 – Овсяница луговая (средняя урожайность 12.5)

	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Урожай a_n	17,7	11,4	12,3	17,4	13,3	12,8	16,9	10,4	12,1	8,4	10,4	9,1	13,4	9,5
Отклонение Δa_n	5,2	-1,1	-0,2	4,9	0,8	0,3	4,4	-2,1	-0,4	-4,1	-2,1	-3,4	0,9	-3,0
b_n		-0,06	-0,02	-0,4	0,05	0,02	0,34	-0,12	-0,12	-0,34	-0,25	-0,33	0,1	-0,02

Таблица 5 – Мятлик луговой (средняя урожайность 9.5)

	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Урожай m_n	12,9	8,8	9,9	14,1	10,6	9,1	13,2	7,9	8,6	5,3	6,5	6,5	9,6	6,8
Отклонение Δm_n	3,4	-0,7	0,4	4,6	1,1	-0,4	3,7	-1,6	-0,9	-4,2	-3,0	-3,0	0,1	-2,7
b_n		0,05	0,05	0,46	0,08	-0,04	0,41	-0,12	-0,11	-0,46	-0,57	-0,46	0,02	-0,28

Таблица 6 – Прочие виды (средняя урожайность 7.7)

	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Урожай p_n	6,4	5,3	6,0	7,0	5,2	4,8	6,7	9,4	10,5	8,8	9,5	8,7	9,8	9,9
Отклонение Δp_n	-1,3	-2,4	-1,7	-0,7	-2,5	-2,9	-1,0	1,7	2,8	1,1	1,8	1,0	2,1	1,6
b_n		-0,37	-0,32	-1,17	3,57	-0,56	-0,02	0,03	0,03	0,01	0,02	0,01	0,03	0,02

Данные, содержащиеся в указанных таблицах, позволят решить поставленную задачу. Мы сознательно не учитываем метеоданных за июль–август–сентябрь, так как при построении прогнозируемых урожайностей не будем ими располагать.

Будем также считать, что отклонения по урожайности видов вызваны в основном отклонениями в метеоданных от многолетних средних значений. Многолетние средние для каждого вида указаны в соответствующих подписях к таблицам 4, 5, 6. Так, например, для овсяницы луговой это среднее $a = 9{,}5$.

Отклонение в урожайности овсяницы луговой Δa_n за n-ый год определяется формулой

$$\Delta a_n = (\Delta t_a x_1 + \Delta t_м x_2 + \Delta t_u x_3 + \Delta h_a x_4 + \Delta h_м x_5 + \Delta h_u x_6) a_{n-1},$$

где a_n – средняя урожайность рассматриваемой культуры за n-ый год, a – многолетняя средняя урожайность, $\Delta a_n = a_n - a$ – отклонение урожайности от средней в n-ый год.

Числа x_1, x_2,..., x_6 представляют собой веса, приписываемые каждому отклонению от средних метеоданных. Так, например, x_1 – вес отклонения температуры в апреле месяце от многолетней средней температуры, которая известна по данным метеослужб.

Для подсчета отклонения урожайности $\Delta a_n = a_n - a$ в n-ый год будем умножать выражение $(\Delta t_a x_1 + \Delta t_m x_2 + \Delta t_u x_3 + \Delta h_a x_4 + \Delta h_m x_5 + \Delta h_u x_6)$ на урожайность предыдущего года с учётом того, что урожайность a_{n-1} характеризует сохранившуюся корневую систему овсяницы луговой в предыдущий год.

Таким образом, веса x_1, x_2,..., x_6 будут определяться из уравнений вида

$$\Delta t_a x_1 + \Delta t_m x_2 + \Delta t_u x_3 + \Delta h_a x_4 + \Delta h_m x_5 + \Delta h_u x_6 = \frac{\Delta a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n - a}{a_{n-1}} =: b_n.$$

Построим таблицу для столбцов b, где $b^T = (b_1, b_2, ..., b_n)$ – столбец, записанный в строку.

В матричном виде, при условии, что данные берутся за какие-либо шесть лет, уравнение $Ax = b$ позволяет определить веса x, если, конечно, матрица A не вырождена, т. е., если ее определитель не равен нулю. При этом столбец b записан в таблицах 4–6 в виде строки. Каждая строка в соотношении $Ax = b$ соответствует одному году.

При практическом осуществлении процедуры вычислений на компьютере разумно предварительно сформировать следующую таблицу (таблица 7).

Таблица 7 – Для расчётов

Годы	Температура			Осадки					
	Δt_a, апрель	$\Delta t_м$, май	Δt_u, июнь	Δh_a, апрель	$\Delta h_м$, май	Δh_u, июнь	b_n овсяницы	b_n мятлика	b_n прочих
2006	-0,9	-2,2	-1,0	6,0	22,4	64,2	–	–	–
2007	-2,1	1,2	0,5	-4,0	-1,6	-18,8	-0,06	0,05	-0,37
2008	1,1	-2,0	-1,6	34,0	-11,6	-47,8	-0,02	0,05	-0,32
2009	0,0	-1,8	-0,7	-20,0	16,4	60,2	-0,4	0,46	-1,17
2010	0,5	1,7	1,9	-11,3	26,7	-35,9	0,05	0,08	3,57
2011	-0,2	-0,4	1,0	-3,4	-2,8	14,5	0,02	-0,04	-0,56

Окончание таблицы 7

2012	0,7	1,1	-1,6	9,1	-5,7	42,9	0,34	0,41	-0,02
2013	-0,4	2,3	1,5	11,0	-29,6	4,2	-0,12	-0,12	0,03
2014	0,9	0,3	-2,2	-10,0	52,4	2,2	-0,12	-0,11	0,03
2015	-0,9	-0,9	0,2	-12,8	12,8	-0,3	-0,34	-0,46	0,01
2016	0,7	-0,4	0,2	27,3	24,6	-25,6	-0,25	-0,57	0,02
2017	-1,2	-2,7	-1,5	-9,1	-32,4	-28,3	-0,33	-0,46	0,01
2018	1,7	2,6	0,0	-6,9	-43,0	-4,2	0,1	0,02	0,03
2019	0,8	0,6	3,8	10,3	-28,4	-27,5	-0,02	-0,28	0,02
Средние за месяц	9,35	15,78	19,24	25,58	13,61	71,79	–	–	–

Используя строки, соответствующие годам 2008–2013, получим серию $x_{11}, x_{21}, ..., x_{61}$. Строки, соответствующие годам 2014–2019, позволяют определить вторую серию $x_{12}, x_{22}, ..., x_{62}$.

Усреднив их, получим

$$x_1 = \frac{x_{11} + x_{12}}{2} = -1.15;\ x_2 = \frac{x_{21} + x_{22}}{2} = -0.14;\ x_3 = \frac{x_{31} + x_{32}}{2} = 0.18;$$

$$x_4 = \frac{x_{41} + x_{42}}{2} = 0.12;\ x_5 = \frac{x_{51} + x_{52}}{2} = 0.08;\ x_6 = \frac{x_{61} + x_{62}}{2} = 0.03.$$

Таким образом, установлена формула для определения урожайности овсянки в виде:

$$a_n = 12.5 + (-1.15\Delta t_a - 0.14\Delta t_м + 0.18\Delta t_и + 0.12\Delta h_a + 0.08\Delta h_м + 0.03\Delta h_и)a_{n-1}. \quad (1)$$

Аналогично получаем формулы для вычисления урожайности мятлика лугового:

$$m_n = 9.5 + (1.27\Delta t_a - 0.47\Delta t_м + 0.01\Delta t_и - 0.04\Delta h_a - 0.03\Delta h_м + 0.03\Delta h_и)m_{n-1}, \quad (2)$$

и прочих культур:

$$p_n = 7.7 + (-1.22\Delta t_a + 0.26\Delta t_м - 0.46\Delta t_и - 0.29\Delta h_a - 0.02\Delta h_м - 0.03\Delta h_и)p_{n-1}. \quad (3)$$

Формулы (1), (2), (3) не могут быть использованы непосредственно при построении прогнозов урожайности в июне текущего *n*-го года, поскольку метеоданные по $\Delta t_и$ и $\Delta h_и$ за июнь ещё не будут известны. Поэтому мы заменим в этих формулах $\Delta t_и$ и $\Delta h_и$ средними $\overline{\Delta t_и}$ и $\overline{\Delta h_и}$ соответственно за предыдущие пять лет. Мы рассматриваем пятилетний, а не больший, период, так как в последние годы климат сильно менялся. Получаем следующие формулы для построения прогноза урожайностей.

– *овсянка:* $a_n = 12.5 + (-1.15\Delta t_a - 0.14\Delta t_м + 0.18\overline{\Delta t_и} + 0.12\Delta h_a + 0.08\Delta h_м + 0.03\overline{\Delta h_и})a_{n-1}$;

– *мятлик луговой:* $m_n = 9.5 + (1.27\Delta t_a - 0.47\Delta t_м + 0.01\overline{\Delta t_и} - 0.04\Delta h_a - 0.03\Delta h_м + 0.03\overline{\Delta h_и})m_{n-1}$;

– *прочие культуры:* $p_n = 7.7 + (-1.22\Delta t_a + 0.26\Delta t_м - 0.46\overline{\Delta t_и} - 0.29\Delta h_a - 0.02\Delta h_м - 0.03\overline{\Delta h_и})p_{n-1}$.

Здесь Δt_a, $\Delta t_м$ и Δh_a, $\Delta h_м$ – среднемесячные данные за апрель и май текущего года, а $\overline{\Delta t_и}$ и $\overline{\Delta h_и}$ – средние данные по июню за предыдущие пять лет.

Заключение. Результаты исследований могут быть применены при решении задач прогнозирования продуктивности рассмотренных луговых экосистем, при разработке математических моделей, учитывающих влияние природных и антропогенных факторов на долгосрочное функционирование луговых экосистем. Предложенные математические модели могут быть использованы в учебном процессе вузов по дисциплинам математического и биологического профилей.

Литература

1. Нацыянальны атлас Беларусі. – Мінск : Белкартаграфія, 2002. – 292 с.

2. Сапегин, Л. М. Пойменные луга р. Птичи / Л. М. Сапегин // Ботаника : сб. науч. ст. – Минск : Наука и техника, 1969. – Вып. 11. – С. 18–27.

3. Сапегин, Л. М. Пойменные луга юго-востока БССР, их рациональное использование, улучшение и охрана / Л. М. Сапегин. – Минск : Университетское, 1985. – 100 с.

4. Юркевич, И. Д. Геоботаническая структура и биологическая продуктивность пойменных лугов : по исследованиям поймы р. Березины / И. Д. Юркевич, Н. А. Буртыс, С. Р. Бусько. – Минск : Наука и техника, 1981. – 230 с.

5. Юркевич, И. Д. Эколого-фитоценотический анализ луговой растительности поймы Днепра / Е. А. Круганова, Н. А. Буртыс // Ботаника. – Минск : Наука и техника, 1969. – Вып. 11. – С. 3–18.

6. Юркевич, И. Д. Луга правобережной поймы р. Припяти (Дерновичский участок) / Е. А. Круганова, Н. И. Петручук // Ботаника. – Минск : Наука и техника, 1971. – Вып. 13. – С. 3–14.

7. Афанасьев, Д. Я. Заплавні луки поліського Дніпра, іх поліпшення і раціональне використанне / Д. Я. Афанасьев. – Київ : Вид-во АН УРСР, 1959. – 272 с.

8. Афанасьев, Д. Я. Природні луки УРСР / Д. Я. Афанасьев. – Київ : Наукова думка, 1968. – 255 с.

9. Природные сенокосы и пастбища / В. А. Бориневич [и др.] ; под ред. И. В. Ларина. – М.–Л., 1963. – 549 с.

10. Работнов, Т. А. Влияние минеральных удобрений на луговые растения и луговые фитоценозы / Т. А. Работнов. – М. : Наука, 1973. – 179 с.

11. Сапегин, Л. М. Структура и функционирование луговых экосистем (экологический мониторинг) / Л. М. Сапегин, Н. М. Дайнеко. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2002. – 201 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 16.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

*УДК 595.765.4:630*1:582.475:622.276(476.2-37Калинковичи)*

Сообщества щелкунов (Coleoptera, Elateridae) соснового леса в окрестностях скважин Южно-Осташковского нефтяного месторождения (Калинковичский район, Республика Беларусь)

К.С. Дрозд[1], Н.Г. Галиновский[2]

В статье рассматриваются особенности формирования сообществ щелкунов, обитающих вблизи нефтяных скважин Южно-Осташковского нефтяного месторождения Гомельской области (Республика Беларусь), которое расположено в лесном массиве. В ходе исследований в период 2018–2020 гг. на территории 2-х стационарных участков Калинковичского района было выявлено 10 видов жуков-щелкунов. Структура доминирования некоторых видов жуков отличалась по стационарам, но отличия были незначительными. В то же время было отмечено, что численность видов, приуроченных к суглинистым почвам, незначительно возрастала, распределение обилий свидетельствует о нарушенности исследованных сообществ в связи с оборудованием и эксплуатацией нефтескважин.
Ключевые слова: жук-щелкун, имаго, река, видовое разнообразие.

The features of the formation of communities of click-beetles living near oil wells of the South Ostashkovsky oil field of the Gomel region (Republic of Belarus), which is located in a forest are discussed. During the research in the period 2018–2020 10 species of click beetles were identified on the territory of 2 stationary sites of the Kalinkovichi district. The structure of dominance of some species of beetles differed according to the stations, as well as depending on meteorological conditions, but the differences were insignificant. At the same time, it was noted that the number of species associated with loamy soils increased slightly, the distribution of abundance indicates the disturbance of the studied communities in connection with the equipment and operation of oil wells.
Keywords: click-beetle, imago, river, species diversity.

Введение. Лес служит источником пищи, жилищем и укрытием для разных животных: птиц, млекопитающих и беспозвоночных. Особый интерес вызывает видовое разнообразие насекомых, обитающих в почве. Их биотопические предпочтения в основном определяются влажностью субстрата, который они заселяют. Жуки-щелкуны – крупная группа почвенных жесткокрылых, которые достаточно широко распространены в разных природных сообществах. Личинки этих видов жуков обитают в почвенной подстилке и самой почве, некоторые из них населяют перегнивающую древесину. В связи с этим достаточно интересным является изучение распределения и динамики численности жуков-щелкунов лесных территорий.

Целью нашего исследования было изучение особенностей разнообразия сообществ щелкунов (Coleoptera, Elateridae) соснового леса в окрестностях скважин Южно-Осташковского нефтяного месторождения.

Материал и методика. Для достижения поставленной цели в условиях Южно-Осташковского нефтяного месторождения были осуществлены исследования на двух стационарах:

1) стационар 1: опушка лесного массива, растительность представлена злаковой разнотравной ассоциацией на песчаных почвах;

2) стационар 2: смешанный лес (сосняк зеленомошник, переходящий в сосняк черничник) на супесчаных дерново-подзолистых почвах.

Исследования проводились с 2018 по 2020 гг., сбор материала проходил в апреле–августе, так как в это время происходит выход имаго большинства щелкунов местной фауны. Имаго были собраны методом учетного кошения по траве, на двух исследуемых стационарах было произведено 3 учетных кошения по 100 взмахов сачком за каждый учёт. Всего было проведено 20 учетов на каждом из стационаров. Для статистической обработки количественных показателей использовались пакеты прикладных программ. Первичная база беспозво-

ночных, включающая в себя данные о таксономической принадлежности, распространении, биопреферендуме, гигропреферендуме, пищевой специализации и численности составлялась с использованием «MS Excel». Показатели α-разнообразия в сообществах, а также кластерный анализ проводился с использованием программного пакета «BioDiversity Pro». В основу кластеризации заложен коэффициент сходства Жаккара. Расчет индекса разнообразия Шеннона, моделей распределения проводился с использованием натурального основания логарифма. Доминирование в сообществах определялось по шкале Ренконена [1].

Результаты и обсуждение. Всего за весь период исследований на изученных нами стационарах было собрано почвенными ловушками 215 экземпляров жуков-щелкунов, относящихся к 10 (таблица 1). В целом, сообщества отличались достаточно низким разнообразием, что подтверждает ранее проведенные исследования на территориях, не сопряженных с нефтедобычей [2].

Наибольшей численностью за весь период исследований характеризовался стационар 2. В то же время за данный период стационар 1 отличался более высоким видовым богатством, хоть и незначительно.

Таблица 1 – Видовой состав и обилие (%) жесткокрылых исследованных территорий

Вид	2018–2019 гг.		2019–2020 гг.		2018–2020 гг.	
	C1	C2	C1	C2	C1	C2
Agriotes obscurus (Linnaeus,1758)	21,8	25,9	5,4	13,0	13,5	20,2
Agriotes sputator (Linnaeus,1758)	27,3	24,1	30,4	28,3	28,9	26,0
Agrypnus murinus (Linnaeus,1758)	0	5,2	1,8	2,2	0,9	3,8
Athous niger (Linnaeus,1758)	9,1	3,4	5,4	0	7,2	1,9
Dicronychus equiseti (Herbst,1784)	0	10,3	3,6	19,6	1,8	14,4
Oedostethus tenuicornis (Germar,1824)	0	10,3	0	2,2	0	6,7
Hypnoidus riparius (Fabricius,1792)	5,5	0	16,1	10,9	10,8	4,8
Prosternon tesellatum (Linnaeus,1758)	20	6,9	21,4	6,5	20,7	6,7
Negastrius sabulicola (Boheman,1853)	7,3	13,8	3,6	15,2	5,4	14,4
Selatosomus aeneus (Linnaeus,1758)	9,1	0	12,5	2,2	10,8	1,1
Всего видов	***7***	***8***	***9***	***8***	***9***	***10***
Всего экземпляров	***55***	***58***	***56***	***46***	***111***	***104***
Видовое богатство Маргалефа, Mg	***1,557***	***1,536***	***1,55***	***1,629***	***1,325***	***1,343***
Информационное разнообразие, H'	***2,588***	***2,726***	***2,697***	***2,737***	***2,739***	***2,866***
Мера разнообразия Макинтоша, U	***1,147***	***1,139***	***1,139***	***1,151***	***1,101***	***1,103***

Примечание: C1 – стационар 1, C2 – стационар 2.

Изучение обилия щелкунов показало, что практических вся их численность находится на достаточно низком уровне. Интересным является факт повышенной численности вида *Agriotes sputator*, которая значительно превысила численность оставшихся видов. В целом динамика численности щелкунов изменилась незначительно. Наивысшее видовое богатство представленных жуков также было отмечено на стационаре 2 (таблица 1).

Анализируя видовой спектр, следует отметить, что, учитывая близкое расположение стационаров, всего один вид щелкунов *Oedostethus tenuicornis* встречался только на стационаре 2, что характеризует особенности данного местообитания как наиболее предпочтительные для этого вида (таблица 1).

На двух стационарах в качестве доминантов были отмечены щелкуны *Agriotes obscurus* и *Agriotes sputator.*

Изменения численности щелкунов в зависимости от места обитания были незначительными, но тем не менее они все же наблюдались. Можно сделать вывод, что виды *Athous niger, Hypnoidus riparius, Prosternon tesellatum* и *Selatosomus aeneus* предпочитают более открытые места обитания, нежели щелкуны *Agrypnus murinus, Dicronychus equiseti, Oedostethus tenuicornis* и *Negastrius sabulicola.*

В период с 2018–2019 гг. на обоих стационарах доминантными видами являлись *Agriotes obscurus* и *Agriotes sputator.* Щелкуны *Hypnoidus riparius* и *Selatosomus aeneus* встре-

чались только на стационаре 1. В свою очередь такие виды, как *Agrypnus murinus, Dicronychus equiseti* и *Oedostethus tenuicornis,* тяготеющие к суглинистым почвам, встречались только на стационаре 2.

В период с 2019–2020 гг. щелкуны *Agriotes sputator, Hypnoidus riparius, Prosternon tesellatum* и *Selatosomus aeneus* являлись доминантными на стационаре 1. На стационаре 2 доминантными видами были *Agriotes obscurus, Dicronychus equiseti* и *Negastrius sabulicola. Agriotes sputator* был доминантным на обоих стационарах.

Несмотря на то, что единственным своеобразным уникальным видом был *Oedostethus tenuicornis* на втором стационаре, мы провели дендрограммный кластерный анализ видового сходства исследованных стационаров. Полученные результаты (рисунок 1) подтверждают видовые особенности стационаров в разный период исследований и свидетельствуют о высоком видовом сходстве стационаров между собой, учитывая их географическую близость, и об определенном сходстве лесных экосистем между собой.

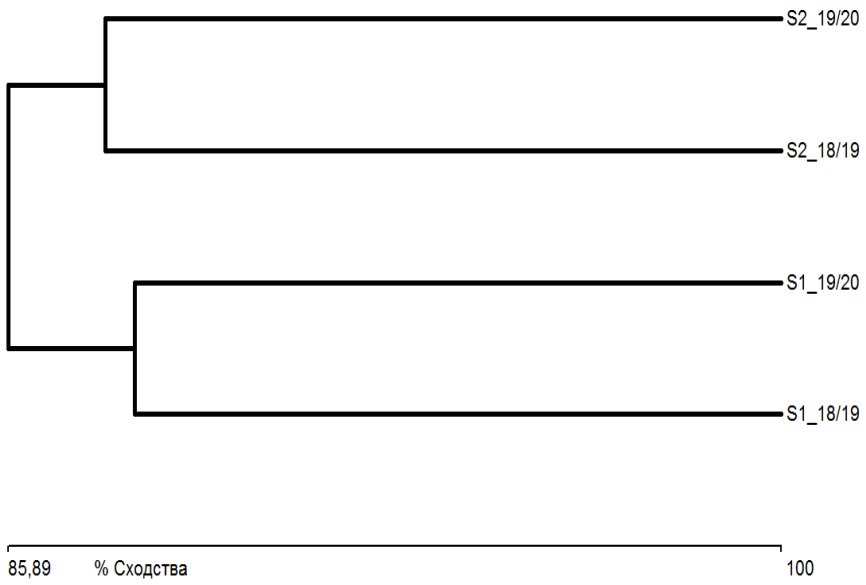


Рисунок 1 – Дендрограммный кластерный анализ видового сходства сообществ щелкунов исследованных участков

Наименьшее разнообразие видов щелкунов было отмечено на стационаре 2 в 2019–2020 гг., что, возможно, было связано с пониженной влажностью почвы, которая препятствовала развитию личинок многих видов. В 2018–2019 гг. на стационаре 1 отмечалось 7 видов щелкунов, на стационаре 2 – 8 видов, в 2019–2020 гг. на стационаре № 1 было обнаружено 9 видов жуков-щелкунов. Приуроченность различных видов к стационарам являлась непостоянной. Такие виды, как *Dicronychus equiseti*, *Prosternon tessellatum*, *Agriotes obscurus*, *Agriotes sputator* были встречены на большей части обследованных стационаров, другие виды (*Agrypnus murinus*, *Selatosomus aeneus*) были отмечены лишь в определенных местах обитания.

Проведенное нами ранжирование (рисунок 2) позволяет определить модели распределения обилий в исследованных сообществах. Для этих стационаров наиболее подходит модель распределения «разломанного стержня» Макартура. Модель Макартура предполагает, что пространство экологических ниш в исследованной экосистеме поделено на случайные, соприкасающиеся, но неперекрывающиеся участки. Такое распределение характерно для сообществ с интенсивной межвидовой конкуренцией и высокой выравненностью, что и подтверждается выявленными параметрами разнообразия.

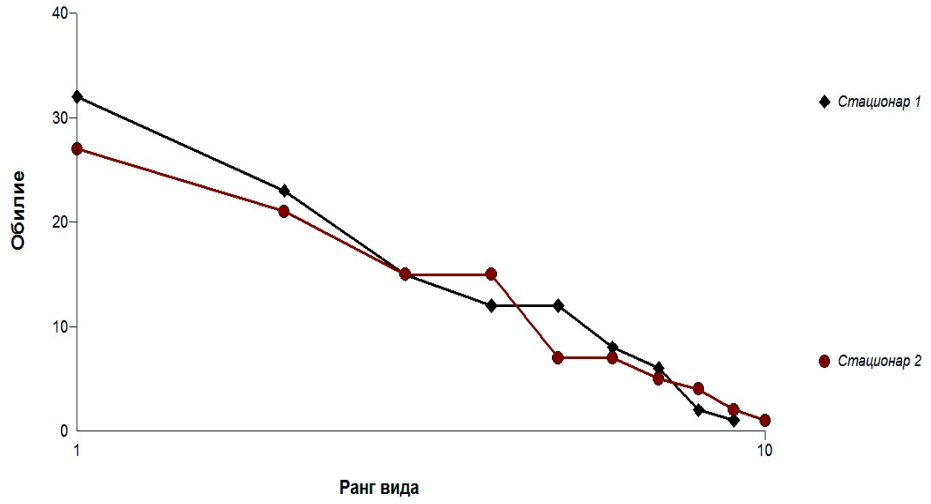


Рисунок 2 – Ранжирование сообществ щелкунов исследованных участков

Полученные результаты говорят о низкой численности щелкунов на стационарах во время проведения исследований. Но не стоит забывать, что личинки большого количества видов могут развиваться в течение 3–5 лет, поэтому не стоит исключать того, что исследования могли проводиться именно в годы с низкой численностью жуков-щелкунов [3], [4].

Заключение. Таким образом, при проведении исследований о возможном влиянии организации и эксплуатации нефтескважин, размещенных в лесном массиве (на примере Южно-Осташковского нефтяного месторождения) было выявлено следующее:

1) За время исследования было выявлено 10 видов щелкунов. Численность видов, приуроченных к суглинистым почвам, незначительно возрастала на стационаре 2.

2) Распределение обилий щелкунов в сообществах окраин нефтескважин соответствуют моделям логарифмического ряда и «разломанного стержня», что говорит о высокой выравненности видов при влиянии ограниченного числа факторов, что позволяет их причислить к нарушенным сообществам.

Литература

1. Renkonnen, O. Statistish-Okologische Untersuchungen uber die terrestrische Kaferwelt der finnischen Bruchmoore / O. Renkonnen // Ann. Zool. – Bot. Soc. Fennicae – 1938. – № 6. – P. 1–30.

2. Володченко, А. Н. К экологии жуков-щелкунов Балашовского района / А. Н. Володченко // Структура, состояние и охрана экосистем Прихоперья : межвуз. сб. науч. тр. / под общ. ред. А. И. Золотухина. – Балашов : Николаев, 2007. – С. 29–32.

3 Шамраев, А. В. Влияние нефти и нефтепродуктов на различные компоненты окружающей среды / А. В. Шамраев, Т. С. Шорина // Вестник ОГУ. – 2009. – № 6 (100). – С. 642–645.

4. Галиновский, Н. Г. Оценка влияния обустройства нефтяных скважин на сообщества жесткокрылых (Ectognatha, Coleoptera) на примере Судовицкого нефтяного месторождения (Республика Беларусь) / Н. Г. Галиновский, О. М. Демиденко, Д. В. Потапов, В. С. Аверин // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2018. – № 3. – С. 24–29.

[1]Институт радиобиологии
НАН Беларуси

[2]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 14.05.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 636.033

Состояние территории радиоактивного загрязнения и о мерах её возрождения

А.Ф. Карпенко

В результате катастрофы на ЧАЭС радиоактивные выпадения загрязнили более 46 тыс. км2 территории Беларуси. Рассматриваются защитные мероприятия и программы, проводимые в послеаварийный период. В настоящее время на территории радиоактивного загрязнения Республики Беларусь имеются возможности для устойчивого развития природы и общества.
Ключевые слова: ЧАЭС, загрязнение, защитные меры.

As a result of the Chernobyl disaster, radioactive fallout contaminated more than 46 thousand km^2 of the territory of Belarus. The national post-Chernobyl recovery programs and protective measures are discussed. Today's contaminated areas of the Republic of Belarus show a strong potential and capabilities for sustainable environmental and social development.
Keywords: Chernobyl NPP, contamination, protective measures.

Введение. 26 апреля 2020 г. исполнилось 34 года после аварии на Чернобыльской АЭС, которая в той или иной мере затронула многие страны, что позволяет говорить об ее глобальном характере. Из многих стран в наибольшей степени пострадали Украина, Беларусь и Россия. Последствия Чернобыля в Беларуси более адекватно характеризуются терминами «катастрофа» или «национальное экологическое бедствие». В зоне радиоактивного загрязнения Беларуси оказались 23 % территории, где сформировался огромный малоподвижный запас радионуклидов, который в течение многих десятилетий (а в отношении ближней зоны чернобыльской станции – многих столетий) будет наносить значительный ущерб экологии и хозяйственной деятельности [1], [2].

В первые недели после катастрофы за счет короткоживущих изотопов, прежде всего йода-131-135, практически на всей территории Беларуси регистрировалось значительное повышение мощности дозы гамма-излучения. В некоторых населенных пунктах она достигала 500 мкЗв/час, что в несколько тысяч раз выше естественного радиационного фона.

Радиоактивному загрязнению цезием-137 с уровнем более 37 кБк/м^2 (1 Ки/км^2) подверглась территория страны в 46,45 тыс. км^2, в том числе 19 тыс. км^2 сельскохозяйственных и 20 тыс. км^2 лесных земель. За период с 1986 по 2018 гг., в связи с его естественным распадом, количество загрязненных сельскохозяйственных земель уменьшилась до 877,2 тыс. га и лесных земель – до 1356,3 тыс. га.

Выпадения стронция-90 более локальны, по сравнению с цезием-137. Загрязнение почвы этим радионуклидом выше 5,5 кБк/м^2 (0,15 Ки/км^2) обнаружены на площади 21,1 тыс. км^2, что составляет 10 % от общей территории. Трансурановые радионуклиды, такие как плутоний-238,-239,-240,-241 и америций-241 выпали преимущественно в ближней зоне к ЧАЭС. Загрязнение почвы изотопами плутония с плотностью более 0,37 кБк/м^2 охватывает около 4,0 тыс. км^2, или около 2 % площади республики [3], [4].

Цель работы – провести анализ эффективности защитных мероприятий и программ, проводимых в послеаварийный период.

Материал и методы исследований. Материалы работы – радиоэкологические защитные мероприятия и программы. Методы исследований – методы анализа и синтеза, индукции и дедукции, аналогии и моделирования, абстрагирования и конкретизации.

Результаты исследований и их обсуждение. С первых дней после аварии в Беларуси начались мероприятия, направленные на оценку радиационной обстановки и защиту населения. В это время было эвакуировано население с территории, где мощность экспозиционной дозы превышала 25 мР/ч (в радиусе 10 км от ЧАЭС). Затем было принято решение снизить

дозовый предел до 5 мР/ч, что примерно соответствовало зоне, описываемой радиусом 30 км. В итоге, в течение 1986 г., из белорусской зоны аварии эвакуировано 24,7 тысячи жителей 107 населенных пунктов [5].

Для устранения последствий аварии требовались не только срочные, но и долговременные научно обоснованные мероприятия. В первые годы после аварии были созданы специализированные научные учреждения и организована подготовка кадров. В это же время началась выполняться Программа комплексных исследований по проблемам ликвидации последствий чернобыльской катастрофы. Она предусматривала проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ по четырем основным направлениям:

– изучение радиоактивного загрязнения экологических систем, генетическая и физиолого-биохимическая оценка его возможных последствий;

– разработка технологии и способов ведения сельского хозяйства в условиях радионуклидного загрязнения окружающей среды;

– исследование влияния радиации на функциональные системы организма, возникновение и течение заболеваний человека, разработка методов диагностики и лечения;

– разработка технологий снижения радиоактивного загрязнения окружающей среды и отдельных объектов, методов и средств радиометрического и дозиметрического контроля.

Работа над Программой позволила дать комплексную оценку радиационно-экологической обстановке, определить формы нахождения радионуклидов в различных экосистемах и основные пути их миграции. Были получены результаты влияния сложившейся ситуации на функциональные системы организма, заболеваемость населения, установлена роль комплекса лечебных и профилактических мероприятий. Подготовлен ряд рекомендаций по ведению сельского хозяйства в условиях радиоактивного загрязнения, рациональному природопользованию, предложены способы дезактивации и очистки от радионуклидов объектов окружающей среды, дан прогноз динамики радиоактивного загрязнения территории Беларуси на ближайшие годы.

Характер и величина ущерба, нанесенного катастрофой на Чернобыльской АЭС, явились мощными дестабилизирующими факторами социально-экономического развития республики. В итоге все основные отрасли народного хозяйства в зонах радиоактивного загрязнения попали в исключительно тяжелое экономическое положение. В наибольшей степени пострадало сельское хозяйство. Из оборота было выведено 265 тыс. гектаров сельскохозяйственных земель. Резко сократились посевные площади и валовой сбор сельскохозяйственных культур, существенно уменьшилось поголовье скота [3]. Огромный урон нанесен лесному хозяйству. Около четверти лесного фонда Беларуси оказались загрязненными. В зоне радиоактивного загрязнения работало около 340 промышленных предприятий. В связи с отселением жителей из наиболее пострадавших районов деятельность ряда промышленных предприятий и объектов социальной сферы была прекращена.

Ущерб, нанесенный чернобыльской катастрофой экономике Беларуси, оценивается в 235 млрд. долларов США. Значительно уменьшились размеры пользования лесными, минерально-сырьевыми и другими ресурсами [6].

Для проведения защитных мер, разработки концепции проживания населения на загрязненных территориях, начиная с 1990 г., в Беларуси принимаются пятилетние Государственные программы ликвидации последствий катастрофы на Чернобыльской АЭС. Затраты на эти программы ежегодно составляют значительную часть республиканского бюджета. Вместе с тем они позволили решить ряд следующих важнейших проблем. Создать нормативную правовую базу по всем направлениям преодоления последствий аварии; обеспечить углубленное медицинское обследование около 1,5 миллиона человек, комплекс мер по повышению уровня медицинского обслуживания, программу санаторно-курортного лечения и оздоровления пострадавших ликвидаторов аварии и населения; завершить переселение из наиболее загрязненных районов около 138 тыс. человек и построить 4,6 млн. кв^2 жилья для переселенцев; создать систему социальной защиты всех категорий пострадавшего населения; проводить защитные меры в агропромышленном комплексе и лесном хозяйстве, обеспечиваю-

щие производство продукции, удовлетворяющей радиологическим нормативам; создать эффективно функционирующую систему радиационного контроля производимой продукции, мониторинга объектов окружающей среды; проводить необходимый комплекс работ по содержанию отчужденных территорий, в том числе в 30-километровой зоне ЧАЭС, на базе которой создан радиационно-экологический заповедник; развернуть систему подготовки и переподготовки кадров и информирования населения по проблемам радиационной безопасности; организовать и осуществлять научное обеспечение работ по преодолению последствий чернобыльской катастрофы; разработать и поставить на промышленное производство современную приборную базу для измерения и контроля ионизирующих излучений; предпринять значительные усилия по привлечению внимания мирового сообщества к проблемам последствий катастрофы на ЧАЭС.

В 2020 г. завершается шестая Государственные программы по преодолению последствий катастрофы на Чернобыльской АЭС на 2011–2015 гг. и на период до 2020 г. Целью программ является дальнейшее снижение риска неблагоприятных последствий для здоровья граждан, пострадавших от катастрофы на Чернобыльской АЭС, содействие переходу от реабилитации территорий к их устойчивому социально-экономическому развитию при безусловном обеспечении требований радиационной безопасности. Также в рамках Союзного государства Беларуси и России совместно решаются «чернобыльские» проблемы.

В Беларуси для реализации мероприятий по сохранению здоровья населения организована работа Государственного регистра лиц, подвергшихся воздействию радиации, проводится специальное диспансерное обследование данной категории граждан, внедрена в практику специальная система медицинского обеспечения населения, включающая внеочередное обслуживание в лечебно-профилактических учреждениях и аптеках, бесплатный отпуск лекарств по рецептам врача. Открыт Республиканский научно-практический центр радиационной медицины и экологии человека, позволивший существенно приблизить медицинскую помощь к наиболее пострадавшему от чернобыльской катастрофы региону Республики Беларусь – Гомельской области. Был открыт и начал подготовку кадров Гомельский медицинский университет. Кардинально реорганизована система научных и практических учреждений, занимающихся проблемой здоровья, совершенствованием организации санаторно-курортного лечения и оздоровления детей, проживающих на территории радиоактивного загрязнения.

К одному из наиболее тяжелых последствий Чернобыля относится загрязнение сельскохозяйственных земель долгоживущими радионуклидами. Здесь проблема снижения дозовых нагрузок на население решается в первую очередь комплексом сельскохозяйственных защитных мер. Для их проведения разработаны рекомендации по ведению агропромышленного производства в условиях радиоактивного загрязнения земель Республики Беларусь [7]. Благодаря применению контрмер, в послеаварийный период поступление цезия-137 в сельскохозяйственную продукцию снизилось в 10–12 раз. Поступление стронция-90 в пищевые продукты с 1986 г. снизилось в 3 раза [8]. Достигнуто это, в основном, за счет применения многих мер. Одной из них является оптимизация землепользования. На основе кадастровой оценки полей и участков по их плодородию, технологическим свойствам и местоположению малопродуктивные участки пашни с оценочным баллом менее 20 переведены в луговые угодья. Наименее плодородные песчаные и заболоченные почвы, с плотностью загрязнения цезием-137 более 555 кБк/м^2 и плотностью загрязнения стронцием-90 более 37 кБк/м^2 переданы под залесение.

Следующей мерой является оптимизация структуры посевов. Подбор культур и сортов с минимальным накоплением радионуклидов и прогноз загрязнения радионуклидами продукции растениеводства позволяют заблаговременно планировать набор культур для возделывания на загрязненных радионуклидами землях, размещать их по полям севооборотов и отдельным участкам с учетом различного использования получаемой продукции (продукты питания, фураж, промышленная переработка и др.).

На загрязненных землях к важным мерам относится повышение уровня плодородия почв достигаемого путем бездефицитного баланса гумуса, фосфора и калия, позволяющего получать доброкачественную продукцию с допустимым содержанием радионуклидов и

должную окупаемость затрат. Применение минеральных удобрений до 200–250 кг д.в. на 1 га сельскохозяйственных угодий является одним из обязательных условий производства самоокупаемой продукции [9].

Наряду с другими способами эффективной защитной мерой является создание культурных пастбищ и улучшенных сенокосов из расчета 1 га на корову в общественном и частном секторах с обязательным обновлением дернины раз в 4–5 лет и ежегодными подкормками луговых трав.

Уделяется внимание также коренному и поверхностному улучшение пастбищ и сенокосов. Эта мера в кормопроизводстве относится к наиболее эффективной, так как она обеспечивает снижение загрязнения трав до 2–6 раз. Подкормка сбалансированными дозами минеральных удобрений позволяет удвоить продуктивность и длительность использования луговых угодий, а себестоимость производства зеленых кормов снизить на одну треть [7].

В сельскохозяйственных организациях, где применяемый научно обоснованный комплекс специальных защитных мероприятий не позволил добиться устойчивого производства качественных в радиологическом отношении отдельных видов продукции, реализовывались программы переспециализации отраслей. В растениеводстве через совершенствование структур посевных площадей с выращиванием культур с наименьшим накоплением радионуклидов, развитие семеноводства зерновых культур и многолетних трав, увеличение объема производства кормов под полную потребность. В отрасли животноводства переспециализация была направлена на перевод молочной отрасли на мясное скотоводство, переход молочного скотоводства на беспривязное содержание скота с реконструкцией имеющихся животноводческих помещений [5].

Переход цезия-137 в животноводческую продукцию уменьшается в два и более раза при введении в рацион животных цезий связывающих в желудочно-кишечном тракте препаратов. С этой целью были организованы производство и поставка болюсов и специального комбикорма с добавкой ферроцина [10].

Если в 1986–1987 гг. в Беларуси производство зерна, непригодного для использования на продовольственные цели по содержанию цезия-137, доходило до 340 тыс. тонн, картофеля – до 89,5 тыс. тонн, то в настоящее время практически все зерно соответствует санитарно-гигиеническим нормативам, а картофель и овощи – как по цезию-137, так и по стронцию-90. Производство молока в общественном секторе с превышением допустимого содержания цезия-137, в 1986–1987 гг., достигало 524,6 тыс. тонн, то сейчас в молоке хозяйств Могилевской области не превышает 37 Бк/л, в Гомельской и Брестской – 65 Бк/л (при допустимом уровне 100 Бк/л).

Несмотря на то, что в Беларуси радиоактивному загрязнению подверглись значительные лесные массивы, в них не прекращается полностью лесохозяйственная деятельность. Основные ограничения по использованию лесов были введены на территориях зон отселения. За период с 2006 по 2014 гг. территории зон отселения уменьшились на 47 тыс. га (25 %), расширились возможности эффективного ведения лесного хозяйства. В лесах, отнесенных к зоне последующего отселения на площади 135,4 тыс. га, осуществляются уход за лесом, мероприятия по охране и защите лесов, освоению резервной расчетной лесосеки. Вся древесина, заготовленная на территории радиоактивного загрязнения лесного фонда лесхозов, подвергается радиационному контролю и реализуется потребителю.

В настоящее время в республике функционирует эффективный радиационный контроль и мониторинг объектов экологической сферы. Действующая система мониторинга окружающей среды, с введением созданных автоматизированных систем контроля, обеспечивает высокий уровень национальной системы реагирования в случае чрезвычайных ситуаций.

Заключение. Несмотря на значительные отрицательные последствия Чернобыля, в настоящее время на территории радиоактивного загрязнения Республики Беларусь используются все имеющиеся возможности для устойчивого развития природы и общества. По мере улучшения радиологической ситуации диапазон возможностей расширяется. Для решения кадрового вопроса системой высшего образования, в том числе и ГГУ им. Скорины, страны готовятся специалисты высшей квалификации для всех отраслей экономики региона.

Литература

1. Алексахин, Р. М. Радиоактивное загрязнение почв как тип их деградации / Р. М. Алексахин // Почвоведение. – 2009. – № 12. – С. 1487–1498.

2. Карпенко, А. Ф. Эколого-экономические проблемы агропроизводства Гомельской области после Чернобыльской катастрофы: монография / А. Ф. Карпенко. – Брянск : Дельта, 2012. – 258 с.

3. Подоляк, А. Г. Влияние агротехнических и агрохимических приемов улучшения основных типов лугов Белорусского Полесья на поступление в травостои 137Cs и 90Sr : дис. … канд. с.-х. наук : 05.02.01 / А. Г. Подоляк ; Ин-т почвоведения и агрохимии НАН Беларуси. – Минск, 2002. – 235 с.

4. Статистический ежегодник [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.belstat.gov.by. – Дата доступа : 10.09.2020.

5. Подоляк, А. Г. Научные аспекты сельскохозяйственного производства в постчернобыльских условиях / А. Г. Подоляк, В. В. Валетов, А. Ф. Карпенко. – Мозырь : МГПУ им. И.П. Шамякина, 2017. – 240 с.

6. 30 лет чернобыльской аварии : итоги и перспективы преодоления ее последствий. Национальный доклад Республики Беларусь. – Минск : Министерство по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь, 2016. – 116 с.

7. Рекомендации по ведению сельскохозяйственного производства в условиях радиоактивного загрязнения земель Республики Беларусь на 2012–2016 годы. – Минск : Институт радиологии, 2012. – 121 с.

8. Подоляк, А. Г. Экологизация растениеводства на территории радиоактивного загрязнения : монография / А. Г. Подоляк, А. В. Крук, А. Ф. Карпенко. – Гомель : ГГУ им. Скорины, 2020. – 334 с.

9. Ласько, Т. В. Накопление радионуклидов зерновыми культурами при использовании различных форм минеральных удобрений / Т. В. Ласько, Е. В. Каранкевич, А. Ф. Карпенко // Агроэкологические аспекты устойчивого развития АПК : матер. XVI Международной науч. конф., Брянск, 21 марта 2019 г. / Брянский гос. аграрный ун-т. – Брянск : Изд-во Брянского ГАУ, 2019. – С. 37–42.

10. Карпенко, А. Ф. Сорбенты цезия-137 для животноводства / А. Ф. Карпенко // Животноводство и ветеринарная медицина. – 2020. – № 1 (30). – С. 3–7.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 29.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 577.182.22/.24:57.085.23:581.144.4:582.632.1

Влияние бета-лактамных антибиотиков на органогенез в культуре тканей листовых эксплантов карельской березы

И.И. Концевая

Выявлен стимулирующий эффект ряда апробированных вариантов использования в составе питательной среды β-лактамных антибиотиков (карбенициллина и цефотаксима в концентрациях 100–1000 мг/л) на побегообразование в культуре тканей листьев карельской березы. Отмечено существенное влияние ориентации листового экспланта на поверхности питательной среды на органогенез в культуре in vitro. У обоих изученных генотипов карельской березы при помещении листа абаксильной стороной на среду усиливается побегообразующая способность экспланта.
Ключевые слова: культура in vitro, β-лактамные антибиотики, органогенез в культуре тканей, карельская береза.

The stimulating effect of a number of proven variants of using beta-lactam antibiotics (carbenicillin and cefotaxime in concentrations of 100–1000 mg/l) on the formation of shoots of Karelian birch leaves in tissue culture was revealed. A significant effect of the orientation of the leaf explant on the surface of the nutrient medium on organogenesis in vitro culture was noted. In both studied genotypes of Karelian birch, when a leaf is placed on the abaxial side on the medium, the shoot-forming ability of the explant is enhanced.
Keywords: in vitro culture, beta-lactam antibiotics, organogenesis in tissue culture, Karelian birch.

Введение. Биотехнологические методы широко используются во многих развитых странах в программах по селекции древесных лесных растений, в том числе и березы. Наиболее активно развиваются исследования по культуре ткани у березы повислой и ее разновидности – березы карельской [1]–[7]. Применение полученных данных на практике позволяет не только ускорить селекционный процесс, но сохранить и расширить генетическое разнообразие растений. Возможность регенерации растений из листьев и листовых дисков представляет интерес с точки зрения использования их в системах генетической трансформации, получения организмов с измененной плоидностью, сомаклональных вариантов, а также для клонального размножения.

Морфогенетические процессы в культуре листовых эксплантов изучены у многих видов растений. Установлено, что регенерация побегов на листьях зависит от различных факторов, в частности, от генотипа источника исходного материала, состава гормонов в питательной среде, возраста листьев, способ их нарезания, ориентация листа на среде и другие [2], [4], [5], [8].

В виду значительной контаминации эпифитными и эндофитными бактериями тканей древесных растений возможно активное применение антибиотиков в рамках антибактериальной терапии на разных этапах работы с культурой in vitro. Прежде всего это β-лактамные антибиотики, группа цефалоспориновые [9]. Они эффективны в относительно низких дозах, имеют широкий спектр противомикробного действия и низкую токсичность для эукариот. Биологический эффект β-лактамных антибиотиков различен – от бактериостатического до бактерицидного, литического [10]. Уникален механизм действия β-лактамных антибиотиков. Мишенями для них являются транспептидазы, которые завершают синтез пептидогликана клеточной стенки прокариот. Цефалоспорины высокоактивны в отношении многих грамотрицательных и грамположительных микроорганизмов, устойчивых к другим антибиотикам. Два из них, – карбенициллин и цефотаксим – оказывают неоднозначное действие на морфогенетические процессы у разных растений. В частности, в руководстве по культуре клеток [11] отмечено, что цефотаксим токсичен для микроорганизмов в концентрации 90 мг/л, а в культуре тканей растений – при концентрации более 100 мг/л.

У однодольных растений описано позитивное действие цефотаксима и карбенициллина на морфогенез in vitro. Было отмечено стимулирование роста каллуса и усиление органогенеза в культурах ячменя и мягкой пшеницы [12], [13]. Наблюдали повышение частоты образования эмбриогенного каллуса и регенерации растений у твердой пшеницы, причем, у низкоморфогенного сорта число регенерантов увеличивалось под действием антибиотика в 17 раз [14]. Реакция двудольных растений на цефалоспориновые антибиотики была неоднозначной. Например, у яблони цефотаксим в концентрации 200 мг/л улучшал регенерацию и развитие побегов из апикальных почек, в концентрации 500 мг/л вызывал уродства у образующихся побегов, а карбенициллин в дозе 500 мг/л ингибировал побегообразование и стимулировал рост каллуса [15]. У хлопчатника цефотаксим, в зависимости от сорта, либо стимулировал, либо ингибировал развитие побегов из изолированных зародышевых осей [16]. У табака цефотаксим слабо ингибировал образование побегов из семядольных эксплантов и укоренение растений-регенерантов, полученных из листовых дисков [17]. На березе чернокорой и повислой выявлено позитивное действие карбенициллина на побегообразующую способность листовых эксплантов [8], [18].

Целью исследования явилось изучение зависимости регенерационной способности листовых эксплантов карельской березы от присутствия в индукционной регенерационной среде антибиотиков карбенициллина и цефатаксима, ориентации листа на поверхности среды, клоновой принадлежности экспланта.

Материалы и методы исследования. Объектами исследования явились клоны 76 и 81 березы карельской. В качестве эксплантов использовали листья, вычлененные у одномесячных микрорастений вышеперечисленных клонов.

В асептических условиях отсекали листья, оставляя небольшой черешок длиной 1–2 мм. На листовых пластинках делали несколько насечек и затем листья помещали абаксильной (нижней) либо адаксильной (верхней) стороной на среду.

Приготовление питательной среды, ее основной состав, условия культивирования эксплантов аналогичны работе [18]. В опытных вариантах в качестве гормона применяли цитокинин 6-бензиламинопурин (6-БАП) в концентрации 2,0 мг/л. Тестировали следующие концентрации антибиотиков: цефотаксим – 100, 250, 500, 750 (мг/л), карбенициллин – 250, 500, 750, 1000 (мг/л), в различных комбинациях. Число повторностей в каждом варианте составляло 15–20.

Каждые 10 дней материал просматривали под микроскопом МБС–10, отмечая появление недифференцированной ткани и органогенных структур. Для определения регенерационной способности экспланты вместе с полученными структурами переносили на свежую безгормональную среду, на которой культивировали при оптимальных условиях в течение 3-х недель. Среднее число адвентивных почек подсчитывали с учетом всех эксплантов. Отмечали степень развития адвентивных почек и побегов, корней. Данные подвергали статистической обработке. Для определения достоверных различий между контрольным и опытными вариантами вычисляли критерий t-Стьюдента.

Результаты и их обсуждение. При культивировании листовых эксплантов формирование адвентивных органогенных структур de novo наблюдали как напрямую из ткани листьев, так и через стадию каллусогенеза. Аналогичные процессы при работе с березой повислой были выявлены и другими авторами [2], [4].

Спустя 10 дней культивирования на средах, содержащих 6-БАП, отмечали увеличение размеров листьев и индукцию каллуса на срезе черешка. При дальнейшем наблюдении было установлено, что процесс каллусогенеза на листьях карельской березы зависит, в первую очередь, от клоновой принадлежности эксплантов, во-вторых, от ориентации листа на питательной среде, а также зависит от присутствия в среде антибиотиков.

В первом пассаже при культивировании листьев на безгормональной среде у клона 76 отсутствовали какие-либо изменения, в то время как у клона 81 отмечали интенсивный процесс некротизации тканей. Индукцию каллуса отмечали спустя 2–3 недели на всех листьях клона 76, культивированных на средах, содержащих 6-БАП, независимо от присутствия или отсутствия антибиотиков. Также каллусогенез наблюдали на эксплантах, инкубированных на средах, содержащих карбенициллин. Причем, концентрация данного антибиотика в среде и

его комбинирование или отсутствие таковой с цефотаксимом не оказывало влияние на процесс каллусогенеза. В то же время при культивировании листьев на средах, дополненных только цефотаксимом, каллусогенез не отмечали. На средах с 6-БАП рост каллуса чаще оценивали как хороший, на средах в отсутствие цитокинина рост каллуса оценивали как плохой. По консистенции каллус был плотным, формировался по всему экспланту. Каллус был блестящим, кремово-зеленого, зеленого цвета.

Листья клона 81 развивались на апробированных средах значительно хуже. При отсутствии в составе культуральной среды цитокинина листья в 60–100 % некротизировали, что, тем не менее, не предотвращало формирование каллуса в 10–100 % случаях на средах, содержащих только карбенициллин. Практически во всех вариантах опыта рост каллуса оценивали как плохой. По консистенции и окраске листовой каллус клона 81 не отличался от недифференцированной ткани, сформировавшейся у клона 76.

Помимо каллусогенеза, на листьях спустя 3–4 недели культивирования отмечали появление органогенных структур: адвентивных корней и адвентивных почек. Обычно формирование новообразований наблюдали на черешке листа и у его основания. Возможно, по той причине, что здесь самые молодые ткани, которые, как известно, обладают высоким морфогенным потенциалом.

На листьях отмечали образование корней. Корни формировались в первую очередь из ткани черешка листа. На опытных средах отмечали также формирование корней из ткани листовой пластинки или каллусной ткани. Интенсивность ризогенеза выше у листьев клона 76, чем у клона 81. Выявлено, что присутствие 6-БАП в питательной среде снижало корнеобразование со 100 % до 6,7 %. Лучше формировались корни на листьях, помещенных на среду верхней стороной. Количество корней на средах без 6-БАП достигало 6–7, в присутствии цитокинина – 2–3. Также наличие в составе среды цитокинина сдерживало рост корней в длину, которая не превышала 1,0 см.

Клон 76 также характеризуется более высокой побегообразующей способностью по сравнению с клоном 81. Уже в первом пассаже на средах с 6-БАП, независимо от присутствия антибиотиков, у клона 76 насчитывали до 3–15 почек на экспланте. Формирование адвентивных почек происходило только на каллусной ткани. У клона 81 адвентивные почки формировались только на средах с 6-БАП, дополненных цефотаксимом, независимо от концентрации антибиотика.

Окончательную оценку органогенеза в культуре листовых эксплантов выполняли спустя 50 дней культивирования. Результаты исследований сведены в таблицы 1–2.

К концу культивирования во втором пассаже было выявлено появление некротических повреждений на эксплантах. В большей мере у клона 81 по сравнению с клоном 76. Также наблюдали побурение части каллусов, что, на наш взгляд, и является одной из возможных причин снижения эффективности органогенеза. Можно предположить, что апробированный состав питательных сред не является оптимальным для изученных генотипов карельской березы. Прежде всего для клона 81, поскольку у последнего во многих вариантах, как в контрольном, так и опытных, отмечали полный некроз первичных эксплантов в 10–100 %, а также частичный некроз каллусной ткани. Также, возможно, из-за своей кариотипической нестабильности клон 81 обладает слабой природной морфогенной и регенерационной активностью и узким спектром адаптивности в условиях in vitro.

Во втором пассаже возрастает процесс корнеобразования. Сформировавшиеся ранее корни растут в длину, образуются новые корешки. Клон 76 по-прежнему характеризуется высоким уровнем ризогенеза (таблица 1). Об этом свидетельствует и более высокий процент ризогенеза и большее количество корней на экспланте, и большая их длина по сравнению с клоном 81. На средах, дополненных только антибиотиками, среднее число корней на экспланте варьировало от 1 до 10 у клона 76 и от 1 до 4 у клона 81, хотя длина большинства корней не превышала 0,2–1,0 см, лишь единичные корешки достигали длины 2,5 см. Ориентация листа оказывала существенное влияние на ризогенез. Более интенсивно этот процесс происходил при помещении листа верхней стороной на среду, независимо от клоновой принадлежности эксплантов (таблица 1, 2).

Таблица 1 – Влияние антибиотиков на органогенез листьев клона 76

Гормоны, антибиотики, мг/л	Число эксплантов, %				Среднее число адвентивных почек	
	с корнями		с почками			
	н[1]	в[2]	н	в	н	в
–	100	100	–	–	–	–
6-БАП, 2	80	53	20	–	0,5 ± 0,29	–
цефотаксим, 100	100	100	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 100	67	53	100	87	5,8 ± 1,5*	3,7 ± 0,9***
цефотаксим, 250	100	100	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 250	87	47	92	93	7,4 ± 1,2***	3,1 ± 0,5***
цефотаксим, 500	100	87	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 500	73	60	87	87	5,6 ± 1,1***	6,3 ± 1,3***
цефотаксим, 750	93	93	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 750	60	87	80	87	5,7 ± 0,9***	4,4 ± 0,9***
карбенициллин, 250	100	100	–	–	–	–
6-БАП, 2, карбенициллин, 250	47	60	60	–	1,3 ± 0,5*	–
карбенициллин, 500	93	93	–	–	–	–
6-БАП, 2, карбенициллин, 500	92	47	60	20	1,7 ± 0,6**	0,4 ± 0,2
карбенициллин, 750	70	70	–	–	–	–
6-БАП, 2, карбенициллин, 750	73	40	40	13	1,2 ± 0,4**	0,3 ± 0,1
карбенициллин, 1000	100	100	–	–	–	–
6-БАП, 2, карбенициллин, 1000	93	60	80	47	3,7 ± 0,7***	1,0 ± 0,4*
цефотаксим 100, карбенициллин, 500	100	73	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 100 карбенициллин, 500	53	53	67	27	2,3 ± 0,6***	0,7 ± 0,4
цефотаксим, 250 карбенициллин, 500	100	93	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 250 карбенициллин, 500	60	47	60	33	1,9 ± 0,5**	0,5 ± 0,2*
цефотаксим, 500 карбенициллин, 500	87	100	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 500 карбенициллин, 500	40	27	67	40	1,7 ± 0,5**	0,9 ± 0,4*

Примечание: [1]нижней (абаксильной) стороной на среду, [2]верхней (адаксильной) стороной на среду; *$p<0,05$; **$p<0,01$; ***$p<0,001$.

В результате субкультивирования листовых эксплантов с новообразованиями на свежую безгормональную среду наблюдали активный рост и развитие адвентивных почек. Клон 76 характеризуется более интенсивным побегообразованием по сравнению с другим изученным клоном. На листьях клона 76, культивированных на средах, дополненных 6-БАП, отмечали побегообразование. Несомненно, выявлено стимулирующее влияние ряда апробированных вариантов использования антибиотиков на побегообразование. Возрастает как количество эксплантов с почками с 20 до 100 %, так и число адвентивных почек на одном экспланте с 2–3 до 5–20 (таблица 1). Использование только цефотаксима существенно усиливало побегообразование. В меньшей мере это сказалось на числе листьев с почками. В большей мере – на числе почек и побегов, которые формировались на экспланте. При оценке побегообразующей способности листьев клона 81 отмечена несколько иная реакция (таблица 2). Однозначно установлено негативное воздействие карбенициллина на побегообразование листьев. Только цефотаксим не подавлял образование адвентивных почек. У обоих генотипов наблюдали более интенсивный процесс побегообразования при помещении эксплантов нижней стороной на среду.

Таблица 2 – Влияние антибиотиков на органогенез листьев клона 81

Гормоны, антибиотики, мг/л	Число эксплантов, %				Среднее число адвентивных почек	
	с корнями		с почками			
	н[1]	в[2]	н	в	н	В
-	20	33	–	–	–	–
6-БАП, 2	20	20	60	–	1,7 ± 0,6*	–
цефотаксим, 100	27	27	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 100	–	13	40	13	0,7 ± 0,3	0,2 ± 0,1
цефотаксим, 250	30	10	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 250	27	10	40	20	0,9 ± 0,3*	0,4 ± 0,3
цефотаксим, 500	30	30	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 500	10	13	20	20	0,4 ± 0,3	0,3 ± 0,2
цефотаксим, 750	60	–	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 750	10	10	10	20	0,1 ± 0,09	0,3 ± 0,2
карбенициллин, 250	10	–	–	–	–	–
6-БАП, 2, карбенициллин, 250	47	20	–	–	–	–
карбенициллин, 500	–	–	–	–	–	–
6-БАП, 2, карбенициллин, 500	40	50	–	–	–	–
карбенициллин, 750	–	–	–	–	–	–
6-БАП, 2, карбенициллин, 750	50	20	–	–	–	–
карбенициллин, 1000	–	–	–	–	–	–
6-БАП, 2, карбенициллин, 1000	20	50	–	–	–	–
цефотаксим 100, карбенициллин, 500	7	13	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 100 карбенициллин, 500	20	10	–	–	–	–
цефотаксим, 250 карбенициллин, 500	–	10	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 250 карбенициллин, 500	20	13	–	–	–	–
цефотаксим, 500 карбенициллин, 500	27	20	–	–	–	–
6-БАП, 2, цефотаксим, 500 карбенициллин, 500	20	40	–	–	–	–

Примечание: [1]нижней (абаксильной) стороной на среду, [2]верхней (адаксильной) стороной на среду; *p<0,05; **p<0,01; ***p<0,001.

Влияние ориентации листа на среде и его целостности на морфогенетический потенциал было показано на каштане [19], яблоне [20], ежевике и малине [21], тополе [22]. Как предполагают, ориентация листа может оказывать воздействие на процесс поступления в эксплант определенных гормонов из среды, тем самым, в свою очередь, определяя появление новообразований. Так, при расположении листа абаксильной (нижней) стороной к среде происходит преимущественно образование почек, а при расположении адаксильной (верхней) стороной к среде, как правило, формируются корни. Это свидетельствует о поступлении различных веществ при разном расположении листьев, хотя, возможно, не последнюю роль здесь играет и полярность органогенеза. В целом, причины, вызывающие переход меристематических тканей к образованию корней или побегов, достаточно сложны и до конца не выяснены. Одной из возможных причин может являться различная гормональная регуляция этих процессов. Так, в первом случае (при расположении листовой пластинки нижней стороной к среде) в проводящую систему черешка из среды поступают цитокинины, ингибирующие корнеобразование и стимулирующие побегообразование. Во втором случае (листовая пластинка расположена верхней стороной к среде) поступление цитокининов затруднено, что способствует ризогенезу [23]. Однако, в целом, причины, влияющие на проявление морфогенетических реакций листа, достаточно сложны и до конца не выяснены.

Большинство из исследователей, работающих с дисками листьев [4] или с целыми листьями [2], помещали их на среду адаксильной (верхней) стороной на среду, либо случайным образом. На березе повислой ранее было показано, что при культивировании на свету лучшее побегообразование было при помещении целой либо поврежденной листовой пластинки адаксильной стороной к среде [5].

Положительное воздействие антибиотиков на рост культивируемых тканей и морфогенез показано на различных культурах многими исследователями [14]–[16]. Интерес к изучению такого влияния возрастает при проведении генетической трансформации. Выявлено, что для каждого генотипа растений требуется определение вида используемого антибиотика и его доза. Так, антибиотик канамицин стимулирует морфогенетические процессы у табака и моркови [17], в то же время у яблони он полностью подавляет морфогенез [20]. На березе также изучали воздействие разных типов антибиотиков в среде на процесс регенерации [4], [18]. На листьях *B. pendula* показано, что при добавлении оптимального количества цефотаксима (47,7 мг/л) в регенерационную среду, процент эксплантов с адвентивными побегами возрастал с 38 до 78 [4]. К сожалению, в указанной работе отсутствуют данные по влиянию цефотаксима на число регенерированных побегов на экспланте. На *B. platyphylla* var. *japonica* для получения регенерантов на листовых дисках использовали среду с 1 мг/л 6-БАП и 0,1 мг/л НУК (а-нафтилуксусной кислоты), дополненную смесью антибиотиков (цефотаксим, карбенициллин, канамицин) [24]. Ранее нами показано положительное влияние цефотаксима и карбенициллина в концентрации 300–500 мг/л на регенерационную способность узловых сегментов у березы повислой. Отмечали выживаемость у 100 % эксплантов, которые сохраняли способность к регенерации [1].

Заключение. В настоящем эксперименте выявлен стимулирующий эффект ряда апробированных вариантов использования в составе питательной среды бета-лактамных антибиотиков (карбенициллина и цефотаксима в концентрациях 100–1000 мг/л) на побегообразование в культуре тканей листьев карельской березы. Отмечено существенное влияние ориентации листового экспланта на поверхности питательной среды на органогенез в культуре in vitro. У обоих изученных генотипов карельской березы, независимо от их морфогенной активности, при помещении листа абаксильной стороной на среду усиливается побегообразующая способность экспланта. И, наоборот, при помещении листа адаксильной стороной на среду возрастает процесс ризогенеза.

Работа выполнена в рамках ГПНИ (№ темы М19-33).

Литература

1. Chalupa, V. In vitro propagarion of Birch (*Betula verrucosa* Ehrh.) / V. Chalupa // Biologia Plantarum (Praha). – 1981. – Vol. 23, № 6. – P. 472–474.

2. Srivastava, P. S. Plantlet differentiation in leaf and root cultures of birch *(Betula pendula* Roth.) / P. S. Srivastava, A. Steinhauer, H. Glock // Plant Sci. – 1985. – Vol. 42. – P. 209–214.

3. Perez, C. Micropropagation of *Betula celtiberica* / C. Perez, P. Postigo // Annals of Botany. – 1989. – Vol. 64. – P. 67–69.

4. Valobra, C. In vitro shoot regeneration from leaf disks of *Betula pendula* «Dalecarlica» EM 85 / C. Valobra, Piagnani, D.J. James // Plant cell, Tissue and Organ Cult. – 1990. – Vol. 21, № 1. – P. 51–54.

5. Концевая, И. И. Каллусообразование и органогенез на листовых эксплантах березы / И. И. Концевая, А. А. Яцына // Проблемы лесоведения и лесоводства. – 2000. – Вып. 51. – С. 193–201.

6. Рекомендации по сохранению и воспроизводству методами биотехнологии ценных генотипов карельской березы, осины, тополя белого и сереющего / сост. О. С. Машкина, Т. М. Табацкая. – Воронеж, 2005. – 29 с.

7. Табацкая, Т. М. Опыт долговременного хранения коллекции ценных генотипов березы с использованием безгормональных питательных сред / Т. М. Табацкая, О. С. Машкина // Лесоведение. – 2020. – № 2. – С. 147–161.

8. Концевая, И. И. Изучение морфогенеза в культуре тканей листьев *Betula obscura* Kotula ex Fiex. / И. И. Концевая, А. А. Яцына // Проблемы лесоведения и лесоводства : сб. научн. тр. – Гомель, 2005. – Вып. 64. – С. 219–227.

9. Яковлев, С. В. Краткий справочник по антимикробной химиотерапии / С. В. Яковлев, В. П. Яковлев. – М. : Медицина, 2002. – 127 с.

10. Госманов, Р. Г. Микробиология : уч. пособие / Р. Г. Госманов [и др.]. – М. : Изд-во Лань, 2019. – 496 с.

11. Cell Culture. Manual. 2011–2014 [Electronic resource]. – Access mode : https://www.sigmaaldrich.com/content/dam/sigma-aldrich/docs/Sigma-Aldrich/Brochure/1/cell-culture-manual.pdf. – Date of access : 08.09.2019.

12. Mathias, R. J. Cefotaxime Stimulats Callus Growth, Emryogenesis and Regeneration in Hexaploid Bread Wheat (*Triticum aestivum* L. Em. Thell) / R. J. Mathias, L. A. Boyd // Plant Sci. – 1986. – Vol. 46. – P. 217–223.

13. Mathias, R. J. The Effect of Cefotaxime on the Growth and Regeneration of Callus From Four Varieties of Barley (*Hordeum vulgare* L.) / R. J. Mathias, C. Mukasa // Plant Cell Rep. – 1987. – Vol. 6. – P. 454–457.

14. Borreli, G. M. Effect of Cefotaxime jn Callus Culture and Plant Regeneration in Durum Wheat / G. M. Borreli, N. Difonzo, E. Lupotto // J. Plant Physiol. – 1992. – Vol. 140. – P. 372–374.

15. Yepes, L. M. Factors that Affect Leaf Regeneration Efficiency in Apple, and Effect of Antibiotics in Morphogenesis / L. M. Yepes, H. S. Aldwinckle // Plant Cell. Tissue Organ Cult. – 1994. – Vol. 37. – P. 257–269.

16. Agrawal, D. C. Effect of Cefotaxime on the Growth of Excited Embryo-Axes of 6 Cultivars of Cotton (*Gossypium Hirsutum* L.) / D. C. Agrawal [et al.] // J. Plant Physiol. – 1998. – Vol. 152. – P. 580–582.

17. Nauerby, B. Influence of the Antibiotic Timentin on Plant Regeneration Compared to Carbenicillin and Cefotaxime in Concentration Suitable for Elimination of *Agrobacterium tumefaciens* / B. Nauerby, K. Billing, R. Wyndaele // Plant Sci. – 1997. – Vol. 123. – P. 169–177.

18. Концевая, И. И. Влияние антибиотика карбенициллина на процесс регенерации в культуре листьев березы / И. И. Концевая // Проблемы лесоведения и лесоводства : сб. научн. тр. – Гомель, 2005. – Вып. 63. – С. 152–153.

19. Wojuechowicz, M. K. Formation of adventitious buds on the leaves of *Aesculus hippocastanum* L. cultured in vitro / M. K. Wojuechowicz, R. Mol // Plant Cell, Nissue and Organ Cult. – 1994. – Vol. 37, № 3. – P. 256–269.

20. Welander, M. Plant regeneration from leaf and stem segments of shoot raised in vitro from mature apple trees / M. Welander // J.Plant Physiol. – 1988. – Vol. 132. – P. 97–103.

21. Высоцкий, В. А. Регенерация вегетативных органов листовыми дисками и другими эксплантами рода *Rubus* in vitro / В. А. Высоцкий, М. Т. Упадышев // Физиология растений. – 1992. – Т. 39, вып. 3. – С. 584–591.

22. Быченкова, Э. А. Каллусообразование и органогенез в тканях листа *Populus balsamifera* L., культивируемого in vitro / Э. А. Быченкова, А. Давид // Физиология растений. – 1978. – Т. 25, № 2. – С. 274–281.

23. Курсанов, А. Л. Транспорт ассимилятов в растениях / А. Л. Курсанов. – М. : Наука, 1976. – 646 с.

24. Mohri, T. *Agrobacterium tumefaciens* – mediated transformation of japanese white birch *(Betula platyphylla* var. *japonica)* / T. Mohri, Yu. Mukai, K. Shinohara // Plant Science. – 1997. – Vol. 127. – P. 53–60.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 08.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

*УДК 630*235.5*

Особенности формирования дубравы кисличной

М.С. Лазарева, Л.К. Климович, А.В. Климов

Смешанные дубравы характеризуются большим количеством древесных видов в составах насаждений, каждый из которых имеет свою стратегию роста и развития, биологические особенности, проявляющиеся неоднозначно в различные периоды жизни древостоя. В статье приведена возрастная динамика роста дуба и мягколиственных пород в дубраве кисличной.
Ключевые слова: дубравы, состав насаждений, возраст древостоя, тип леса, мягколиственные виды, продуктивность, рубки ухода.

The mixed oakeries are characterized by a large number of tree species in plantings, each of that has its own growth, development strategy and biological features showing up ambiguously in different periods of the stand's life. The age dynamics of growth of oak and soft-leaved species in the sour oak grove is analyzed.
Keywords: oak forests, plantings composition, stand age, forest type, soft-leaved species, productivity, felling.

Введение. Дубовые насаждения являются одними из наиболее ценных в Беларуси. На территории республики дубовые насаждения встречаются повсеместно, однако, как представитель неморальной флоры, дуб в большей степени приурочен к южной ее части. Более 46 % площади дубрав относятся к лесному фонду Гомельского ГПЛХО, 18 % – к Брестскому.

В последние десятилетия состояние коренных дубрав характеризуется упрощением их структуры и снижением уровня биоразнообразия и продуктивности. Площади, занятые дубом в настоящее время, ниже потенциально возможных.

Целью исследования является установление особенностей структуры в дубовых насаждениях кисличного типа леса.

Объекты и методика исследований. Исследования проводятся в рамках выполнения задания «Состояние и прогноз сукцессионной динамики дубовых и производных от них насаждений» ГПНИ «Природопользование и экология», подпрограмма 2 «Биоразнообразие, биоресурсы, экология».

Объектом исследований являются смешанные дубовые насаждения кисличного типа леса с характерными для них признаками формационного состава, структуры и продуктивности.

В основу исследований положены данные постоянных и временных пробных площадей, заложенных в соответствии с ОСТ 56-69–83 [1], ТКП 622-2018 [2], с учетом рекомендаций [3].

Результаты исследований и их обсуждение. Проведено обследование дубовых насаждений в Полесско-Приднепровском и Бугско-Полесском геоботанических округов подзоны широколиственно-сосновых лесов. В результате обследования подобрано и заложено 17 пробных площадей. Пробные площади заложены в дубовых насаждениях в ГЛХУ «Петриковский лесхоз», ГЛХУ «Хойникский лесхоз», ГЛХУ «Василевичский лесхоз», ГОЛХУ «Буда-Кошелевский опытный лесхоз», ГОЛХУ «Речицкий опытный лесхоз», ГОЛХУ «Мозырский опытный лесхоз», ГОЛХУ «Речицкий опытный лесхоз» в возрасте 5–150 лет. Насаждения на пробных площадях произрастают на дерново-подзолистых супесчаных, свежих почвах, по II классу бонитета, высокополнотные, напочвенный покров составляют: кислица, брусника, майник двулистный, копытень и др.

Особенностью дубрав подзоны широколиственно-сосновых лесов является наличие сосны в составах насаждений при отсутствии или редком участии ели, а также значимой ценотической роли мягколиственных древесных видов на фоне снижения участия, порой до полного исчезновения, традиционных спутников дуба – ясеня, вяза, ильмовых, липы. В качестве мягколиственной примеси к дубу в изучаемых насаждениях чаще встречается береза, ольха

черная, осина, ива древовидная и кустарниковая. Отмечается практически повсеместно участие в составе насаждения граба. В большом количестве присутствует лещина и другие подлесочные породы.

Дубовые насаждения с участием мягколиственных видов представлены, в основном, естественными древостоями. Площадь лесных культур не превышает 35 %, в основном, это культуры дуба с естественным возобновлением мягколиственных пород [4].

Преобладание мягколиственных пород по сравнению с участием в них дуба может свидетельствовать о низкой эффективности рубок ухода в связи с их нерегулярным или несвоевременным проведением, либо с отсутствием, что нередко приводит к нежелательной смене пород.

Одним из важнейших показателей, характеризующих состояние насаждений, является их возрастная структура.

Возрастная структура дубовых насаждений Беларуси не является оптимальной. Относительно равномерная структура дубовых фитоценозов отмечается в подзоне широколиственно-сосновых лесов, где молодняки составляют около 20 % лесопокрытой площади, средневозрастные 42 % (Гомельское ГПЛХО) и 51 % – Брестское, приспевающие – 14–16 % и спелые и перестойные – 13,7 % (Брестское ГПЛХО) и 24,2 % (Гомельское ГПЛХО).

В ближайшие десятилетия возможность относительно равномерного лесопользования по дубу возможна в южном регионе Беларуси (Гомельское и Брестское ГПЛХО).

Распределение дубовых древостоев по типам леса имеет зональную обусловленность. Наиболее продуктивные типы дубовых лесов – снытевые и кисличные увеличивают распространение (относительно площади дубрав региона) с юго-запада (Белорусское Полесье), где они занимают 6 % площади дубовой формации, к северу, где они представлены примерно на 1/3 площади дубовой формации региона (Белорусское Поозерье).

Дубравы кисличного и снытевого типов леса, потенциально высокопродуктивные, в настоящее время значительно деградированы. Им свойственен не высокий запас стволовой древесины дуба, малая полнота. В отдельных случаях происходит снижение класса бонитета. Следует отметить, что санитарное состояние дубрав, в т. ч. усыхание дуба в насаждениях, как правило, тесно связано с тем или иным антропогенным воздействием.

Такое распределение дубовых насаждений по типам леса в некоторой степени обусловливает их продуктивность. В среднем по республике площадь высокопродуктивных дубовых насаждений составляет 24,9 %. При продвижении к югу республики средняя продуктивность дубовых насаждений снижается. В лесном фонде Брестского ГПЛХО доля высокопродуктивных дубовых насаждений составляет 15 %, Гомельского ГПЛХО – 17 %.

Продуктивность насаждений зависит и от полноты. Средняя полнота дубовых насаждений республики составляет 0,66. В республике преобладают среднеполнотные дубовые насаждения – около 70 %, высокополнотные составляют 13 %, площадь низкополнотных насаждений – 17 %. Следует отметить, что приспевающие и спелые насаждения республики имеют среднюю полноту 0,5–0,6.

Средний возраст дубовых насаждений республики составляет 73 года, среднее изменение запаса – 2,5 $м^3$/га, запас спелых и перестойных дубовых насаждений составляет 250 $м^3$/га.

Лесоводы Беларуси большое внимание уделяют восстановлению дубовых насаждений. Площади несомкнувшихся культур дуба относительно площадей дубовой формации региона в Гомельском ГПЛХО составляют 5,2 %.

Особенностью дубовых насаждений Беларуси является их смешанный состав и сложная форма с большим разнообразием древесно-кустарниковой растительности. В составах дубрав в зависимости от зональной приуроченности может участвовать до 32 видов древесно-кустарниковых пород. Часть из них встречается редко и в малом количестве (яблоня, груша, тополь, ильм, вяз и др.), такие виды, как ивы, ясень, липа, ольха серая (в северной части республики) и рябина встречаются чаще, а сосна, ель, береза, осина, ольха черная, граб (в южной и центральной частях республики) и клен в разных соотношениях присутствуют практически всегда. Это обусловливает сложные ценотические взаимоотношения видов в насаждении, острую межвидовую конкуренцию, угрозу нежелательной смены пород и боль-

шую вариабельность лесоводственно-таксационных показателей, что создает ряд трудностей как при ведении хозяйства в них, в частности при формировании целевых составов рубками ухода, так и при исследовании этих древостоев.

Соотношение древесных видов варьирует в зависимости от возраста насаждений и доли дуба в составе. Современная структура и зональность лесной растительности Республики Беларусь обусловлены соотношением и взаимозамещением бореальных хвойных и неморальных лиственных лесов, а в лесных фитоценозах – взаимосвязями неморальных и бореальных элементов [5].

Возрастную динамику для каждого элемента леса (дуб, береза, осина, граб и др.) в кисличном типе леса проводили по следующим таксационным показателям: средним диаметру и высоте, сумме площадей сечений стволов, густоте и запасу.

Степень коррелированности между возрастом и другими таксационными параметрами в дубовых насаждениях приведена в таблице.

Таблица – Степень коррелированности основных таксационных показателей в дубовых насаждениях

	Возраст (A), лет	Число стволов (N), тыс. шт./га	Сумма площадей сечений (∑G), м^2/га	Средний диаметр (D ср), см	Средняя высота (H ср), м
Дубрава кисличная					
дубовая компонента насаждения					
A, лет	1,000				
N, тыс. шт./га	-0,577	1,000			
∑G, м^2/га	0,846	-0,588	1,000		
D ср, см	0,971	-0,659	0,867	1,000	
H ср, м	0,830	-0,787	0,851	0,922	1,000
березовая компонента насаждения					
A, лет	1,000				
N, тыс. шт./га	-0,454	1,000			
∑G, м^2/га	-0,061	-0,484	1,000		
D ср, см	0,761	-0,687	0,382	1,000	
H ср, м	0,606	-0,754	0,549	0,919	1,000
осиновая компонента насаждения					
A, лет	1,000				
N, тыс. шт./га	-0,332	1,000			
∑G, м^2/га	0,424	0,118	1,000		
D ср, см	0,949	-0,373	0,524	1,000	
H ср, м	0,820	-0,400	0,602	0,929	1,000
грабовая компонента насаждения					
A, лет	1,000				
N, тыс. шт./га	-0,380	1,000			
∑G, м^2/га	0,130	-0,219	1,000		
D ср, см	0,616	-0,686	0,739	1,000	
H ср, м	0,533	-0,747	0,720	0,710	1,000

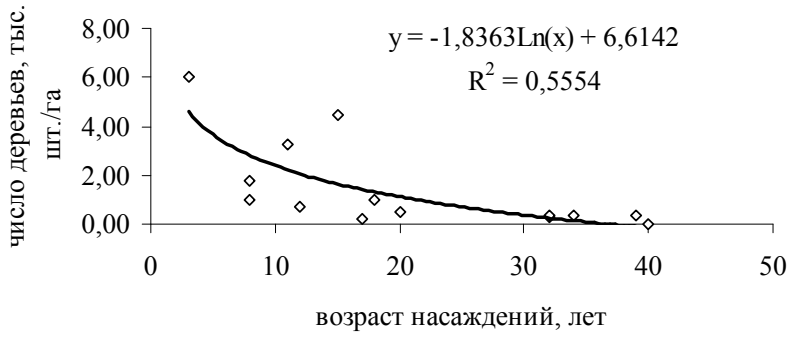
Полученные данные показывают, что высокая степень вариабельности признаков в смешанных насаждениях даже при большом объеме экспериментального материала не всегда позволяет выявить высокую степень коррелированности признаков. Однако, по таким показателям, как число деревьев на единице площади, площадь сечений стволов, а также их средние диаметр и высота, где выявлена коррелированность с возрастом (степень коэффициента более 0,6) сделана аппроксимация возрастных изменений математическими уравнениями.

По мере роста насаждений количество деревьев закономерно уменьшается. На рисунке 1 показано изменение числа деревьев с возрастом в дубраве кисличной.

Самым ответственным периодом формирования дубового древостоя является возраст молодняков, особенно I класс возраста. В период до 10–15 лет отмечается наибольшее количество отпада деревьев дуба. Это связано с периодом смыкания крон, интенсивным ростом быстрорастущих светолюбивых второстепенных пород, увеличением площади питания деревьев, что приводит к конкуренции за свет, влагу, питательные элементы.

Уменьшение количества деревьев березы в смешанном дубовом насаждении происходит за счет рубок ухода и частично отпада.

а

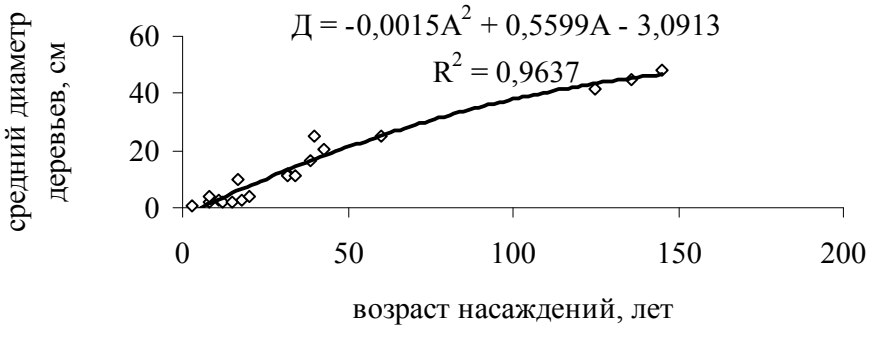


б

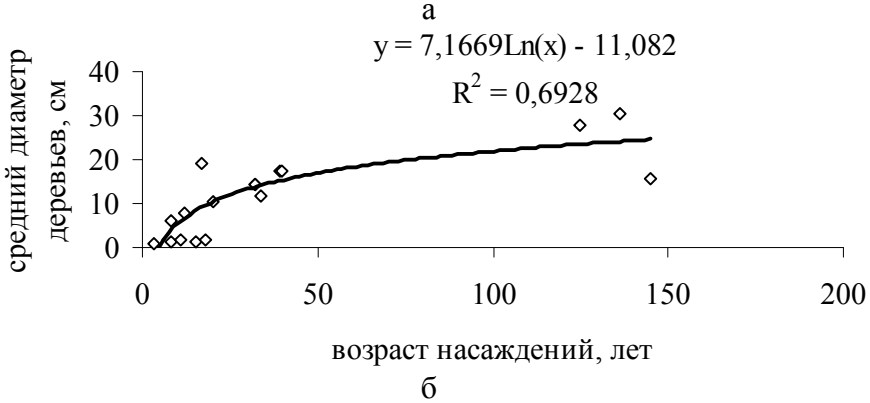
Рисунок 1 – Изменение количества деревьев в дубраве кисличной: а) дуба; б) березы

Закономерное уменьшение количества деревьев на единице площади в дубовых насаждениях в наибольшей степени отмечается в период 10–15 лет.

Изменение среднего диаметра дуба и березы в дубраве кисличной с возрастом показано на рисунке 2.



а



б

Рисунок 2 – Изменение среднего диаметра в дубраве кисличной: а) дуба; б) березы

Возрастная динамика средних диаметров дуба и мягколиственных пород (березы, осины) в дубравах кисличных представлена на рисунке 3.

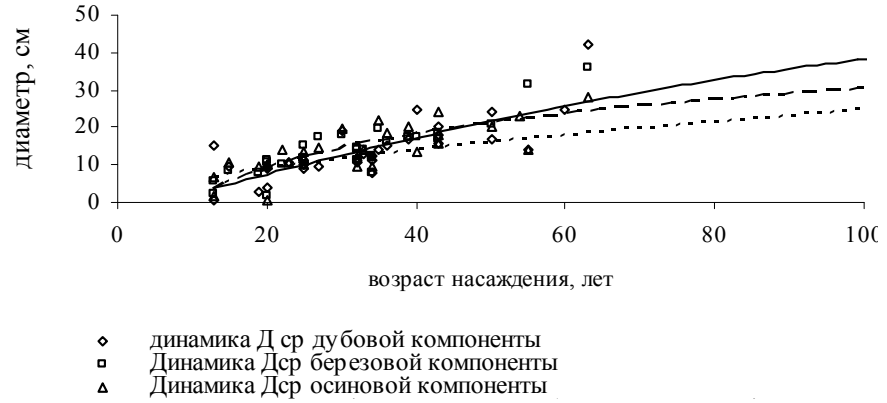


Рисунок 3 – Изменение средних диаметров с возрастом в дубраве кисличной

Установлено, что в дубравах кисличных дуб после 30 лет начинает превосходить по диаметру ствола осину и после 45–50 лет – березу в насаждениях с регулярными рубками ухода.

Изменение средней высоты дуба и березы в дубраве кисличной с возрастом показано на рисунке 4.

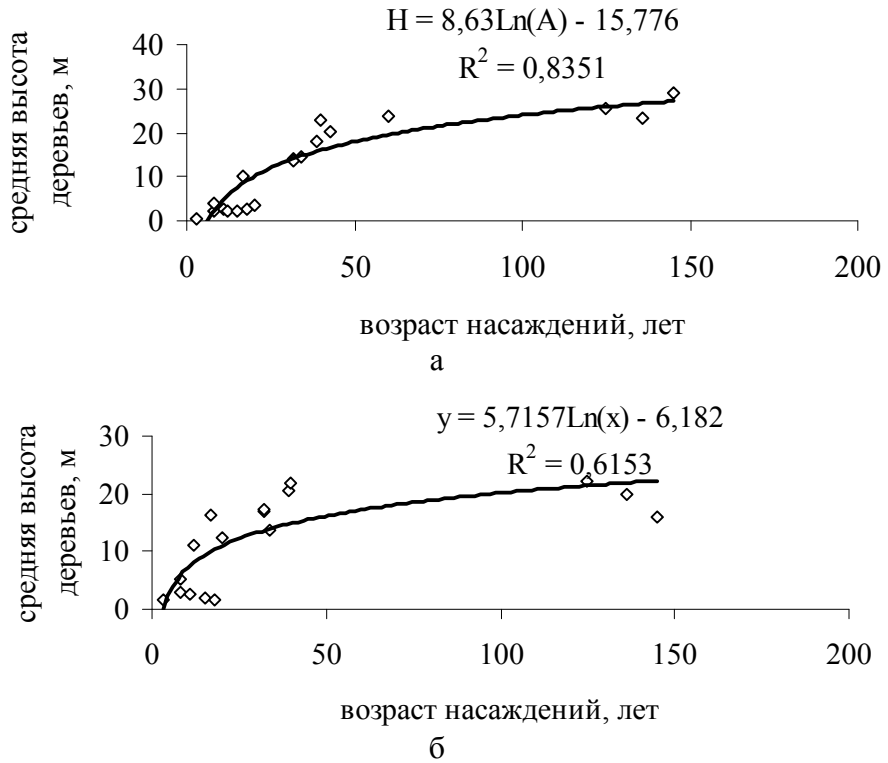


Рисунок 4 – Изменение средней высоты в дубраве кисличной с возрастом: а) дуба; б) березы

Формирование дубовых насаждений невозможно без проведения в них рубок ухода. Одним из основных критериев правильного назначения деревьев в рубку является соотношение высот дуба и мягколиственных пород, при котором будет сформировано боковое отенение каждому дереву дуба с одновременным осветлением его верхней части кроны.

В этой связи установление закономерностей изменения средних высот дуба и мягколиственных пород (граба) с возрастом при их совместном произрастании представляет научный и практический интерес.

На рисунке 5 представлена возрастная динамика средней высоты в разрезе пород в дубраве кисличной.

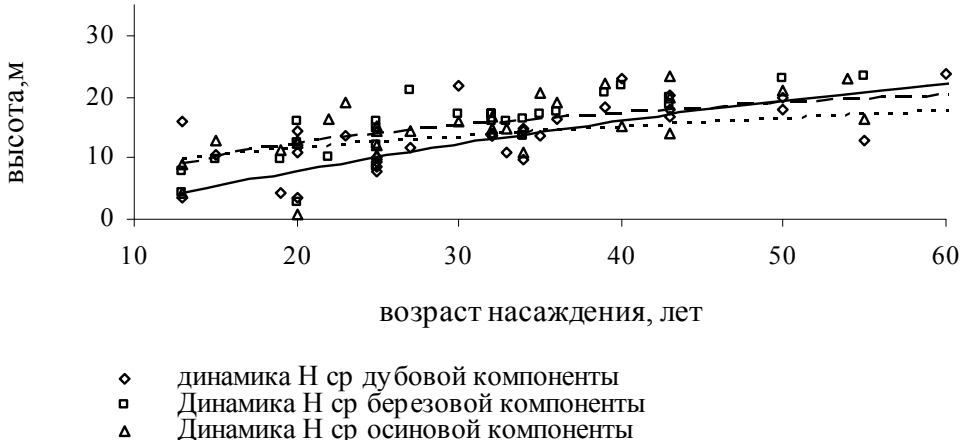


Рисунок 5 – Изменение средней высоты с возрастом в разрезе пород

При подборе пробных площадей отбирались насаждения с полнотой более 0,7 в зависимости от возраста. В молодняках полнота составляла более 0,8, т. е. все насаждения нуждались в проведении рубок ухода. Анализ соотношения высот показывает, что различия по высоте у дуба с березой и осиной в отдельные периоды достигает 3 и более раза, в условиях дубравы кисличной ($Д_2$) дуб до 45 лет отстает по высоте практически от всех древесных видов и особенно от березы и осины и лишь к 50, а иногда и к 60 годам дуб превосходит эти породы по высоте в условиях регулярных рубок ухода.

Заключение. Одни из наиболее продуктивных типов дубовых лесов – кисличные увеличивают распространение (относительно площади дубрав региона) с юго-запада (Белорусское Полесье) к северу, где они представлены примерно на 1/3 площади дубовой формации региона (Белорусское Поозерье).

Обследование дубовых насаждений в Полесско-Приднепровском геоботаническом округе подзоны широколиственно-сосновых лесов показало, что в условиях дубравы кисличной ($Д_2$) дуб до 45 лет отстает по высоте практически от всех древесных видов и особенно от березы и осины и лишь к 50, иногда и к 60 годам превосходит эти породы по высоте в условиях регулярных рубок ухода.

Литература

1. Площади пробные лесоустроительные. Метод закладки : ОСТ 56-69-83 ; введ. 23.05.1983. – М. : Изд-во стандартов, 1983. – 10 с.

2. Технические требования при лесоустройстве. Отвод и таксация лесосек в лесах Республики Беларусь : ТКП 622-2018 (33090). – Введ. 12.07.2018. – Минск : МЛХ РБ, 2018. – 96 с.

3. Уткин, А. И. Изучение лесных биогеоценозов / А. И. Уткин // Программа и методика биогеоценологических исследований. – М. : Наука, 1974. – С. 281–317.

4. Государственный лесной кадастр Республики Беларусь : по состоянию на 01.01.2019. – Минск : Белгослес, 2019. – 62 с.

5. Лазарева, М. С. Анализ распространения и состояния мягколиственно-дубовых насаждений Беларуси в разрезе лесорастительных районов / М. С. Лазарева, В. М. Ефименко, Л. К. Климович, Н. В. Мальцева // Проблемы лесоведения и лесоводства : сб. начн. тр. ИЛ НАНБ. – Гомель : ИЛ НАН Беларуси, 2009. – Вып. 69. – С. 68–81.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 06.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 576.895.771(476.2/.7)

Видовая структура имаго кровососущих комаров (Diptera, Culicidae) на территории Брестской и Гомельской областей Республики Беларусь

Д.Н. Логинов

В работе приведены результаты собственных исследований на территории Брестской и Гомельской областей, установлено распространение 17 видов имаго кровососущих комаров (Diptera, Culicidae), выявлены массовые виды, рассмотрены особенности видовой структуры комаров и их биотопической приуроченности. Кроме того, проведен анализ рангового распределения кровососущих комаров в исследуемых биотопах.
Ключевые слова: кровососущие комары, трансмиссивные заболевания, видовой состав, ранговое распределение видов.

The results of the research on the territory of the Brest and Gomel regions are analyzed. The distribution of 17 species of imago of blood-sucking mosquitoes (*Diptera, Culicidae*) is established, common species are identified, the features of the species structure of mosquitoes and their biotopic confinement are considered. In addition, the analysis of the rank distribution of blood-sucking mosquitoes in the studied biotopes was carried out.
Keywords: blood-sucking mosquitoes, vector-borne diseases, species composition, rank distribution of species.

Введение. В настоящее время изучение кровососущих комаров, как переносчиков возбудителей трансмиссивных заболеваний арбовирусной, протозойной, бактериальной и гельминтозной природы [1]–[9], с каждым годом приобретает все большую актуальность в связи с изменением климата. Климатические изменения в свою очередь ведут к изменению ареалов видов, росту численности и активности переносчиков, их зараженности различными возбудителями инфекций и инвазий, что способствует поддержанию и возникновению новых эндемичных очагов климатозависимых трансмиссивных инфекций и инвазий в Европейском регионе.

На территории Беларуси кровососущие комары являются специфическими переносчиками возбудителей заболеваний различной природы, таких как *Plasmodium (Laverarania) falciparum* William H. Welch, 1897*, P. (Plasmodium) vivax* Zeimann*,* 1915, *P. (P.) ovale* Stephens 1922*, P. (P.) malariae* Brumpt, 1939 [1]. Следует отметить, что малярия как массовое заболевание, она была ликвидирована в большинстве районов Беларуси к 1956 г. [2]. Доказано участие кровососущих комаров в трансмиссии возбудителей туляремии (*Francisella tullarensis* (McCoy and Chapin 1912)) [3], [4], дирофиляриоза (*Dirofilaria repens* Railliet & Henry 1911 и *Dirofilaria immitis* (Leidy, 1856)) [5], [6]. Кроме того, кровососущие комары известны как переносчики арбовирусных инфекций [7]–[11].

Территория Брестской и Гомельской областей является наиболее благоприятной для возникновения, развития, протекания и сохранения различных инфекций и инвазий по целому ряду причин. Данные территории относится к южной геоботанической подзоне Беларуси, которая имеет богатую речную сеть. Широкомасштабное проведение осушительной мелиорации в южном регионе привело к трансформации естественного ландшафта, в частности созданию мелиоративных каналов – дополнительных источников массового выплода преимагинальных стадий кулицид. Климатические параметры (температура, влажность, длительность вегетационного периода) на исследуемой территории создают благоприятные условия для высокой численности переносчика, количества генераций за сезон и способствуют поддержанию и возникновению новых эндемичных климатозависимых инфекций и инвазий с комариной трансмиссией.

С эпидемиологической точки зрения сочетание всех вышеперечисленных факторов, наличие национальных парков, заказников, территорий крупных миграционных скоплений

птиц, развитая речная и мелиоративная сети, климатические особенности региона обуславливают специфичность территорий по условиям сохранения природных очагов и циркуляции возбудителей трансмиссивных инфекций и инвазий на исследуемой территории.

В связи с вышесказанным изучение изменений, происходящих в структуре фаунистических комплексов кровососущих комаров на территории Брестской и Гомельской областей, а также выявление закономерностей формирования биологического разнообразия фауны кулицид является актуальной проблемой.

Целью настоящей работы являлось изучение особенностей видового состава кровососущих комаров на территории Берстской и Гомельской областей. В задачи исследования входило установление видового состава комаров, выявление особенностей в структуре доминирования, биотопической приуроченности, а также изучение особенностей видовой структуры на исследуемой территории.

Отдельно хотелось бы остановиться на ранговом распределении видового разнообразия кровососущих комаров. В настоящее время принято считать, что ранговое распределение является фундаментальным законом экологии сообществ и важным способом отражения его структуры. Если удается объяснить высокую степень различий вероятностей обнаружения разных видов, то появляется возможность делать важные выводы о механизмах, структурирующих сообщества, о взаимодействии видов в их случайном или не случайном размещении. Понимание распределения обилия видов является стартовой площадкой для понимания структуры сообществ [12].

Материалы и методы исследований. Сборы и учеты кровососущих комаров проведены в 2019 г. на территории Брестской (г. Кобрин, г. Пинск, д. Ловча Лунинецкого района, д. Юхновичи Ивановского района) и Гомельской областей (г. Житковичи, д. Красная Зорька Житковичского района) Республики Беларусь.

Объектом исследований являлись кровососущих комары (Diptera, Culicidae) на стадии имаго собранные в ольховых (черноольшанники) и сосновых (сосняк черничномшистый), а также в луговых биотопах (злаково-суходольные и пойменные луга). Всего проведено 108 учетов, собрано 5178 экземпляров кровососущих комаров. Видовая идентификация материала выполнена по руководствам А.В. Гуцевича и др. (1970), Р.М. Горностаевой и А.В. Данилова (1999), а также N. Becker (2010) [13], [14], [15].

Результаты. В ходе полевых исследований 2019 года по изучению кровососущих комаров на стадии имаго зарегистрировано 17 видов, принадлежащих к 2 родам, а именно *Aedes* Meigen, 1818 – 16 видов, *Culex* Linnaeus, 1758 – 1 вид, что составляет 42,5 % от видового разнообразия фауны кровососущих комаров Беларуси. Впервые за 5 лет проведенных исследований зарегистрирован вид *Aedes dorsalis* (Meigen, 1830).

Анализ распространения зоогеографических элементов на территории Брестской и Гомельской областей показал наличие видов с тремя типами ареалов: голарктические, транспалеарктические и западнопалеарктические. Большинство видов принадлежит к голарктической группе (11 видов), виды *Aedes rossicus* Dolbeshkin, Goritzkaja et Mitrofanova, 1930, *A. annulipes* (Meigen, 1830), *A. behningi* Martini, 1926, *Coquillettidia richiardii* (Ficalbi, 1889) относятся к западнопалеарктической группе, транспалеарктическая группа представлена двумя видами, а именно *A. cantans* (Meigen, 1818) и *A. dorsalis*. Также следует отметить, что 12 видов относятся к моноцикличным видам, и 5 видов являются полицикличными.

В результате проведения полевых исследований видовой состав имаго кровососущих комаров на территории Белорусского Полесья представлен 17 видами, из них доминантными видами являются *Aedes cantans* (ИД 43,32), *A. sticticus* (Meigen, 1838) (ИД 28,60), *A. cinereus* Meigen, 1818 (ИД 9,73), субдоминантные – *A. excrucians* (Walker, 1856) (ИД 4,13), *A. vexans* (Meigen, 1830) (ИД 3,01), *A. communis* (De Geer, 1776) (ИД 2,97), *A. annulipes* (ИД 2,22), *A. riparius* Dyar et Knab, 1907 (ИД 1,58), малочисленные – *A. punctor* (Kirby, 1837) (ИД 1,20), *A. intrudens* Dyar, 1919 (ИД 0,95), *Coquillettidia richiardii* (ИД 0,60), *A. behningi* (ИД 0,58), *A. diantaeus* Howard, Dyar et Knab, 1913 (ИД 0,52), редкие и локальные – *A. euedes* Howard, Dyar et Knab, 1913 (ИД 0,35), *A. rossicus* (ИД 0,12), *A. flavescens* (Muller, 1764) (ИД 0,10), *A. dorsalis* (ИД 0,05).

Самыми богатыми по численности (99,9 ± 69,13 экз/учет) и видовому составу (17 видов) являются ольховые леса. Промежуточное положение по численности и видовому составу занимают сосновые леса, где зарегистрировано 16 видов кровососущих комаров со средней численностью 75,67 ± 38,03 экз/учет. Наименьшей численность и видовой состав зарегистрированы в луговых биотопах, а именно 13 видов со средней численностью 44,47 ± 14,55 экз/учет, что в несколько раз меньше, чем в ольховых лесах.

Индекс видового сходства ($К_s$), вычисленный по формуле Серенсена, указывает, что видовой состав имаго кровососущих комаров сосновых лесов и луговых биотопов имеют наибольшую степень сходства ($К_s$ 0,89). Наименьшую степень общности видового состава нападающего комплекса комаров имеют ольховые леса и луговые биотопы ($К_s$ 0,78). Степень общности сосновых и ольховых лесов составила ($К_s$ 0,86).

Общими для сравниваемых биотопов являются 13 видов кровососущих комаров, из них массовыми видами являются *Aedes cantans*, *A. sticticus* и *A. cinereus*.

Для анализа рангового распределения видового разнообразия кровососущих комаров в исследуемых биотопах использованы три модели, а именно модель «разломанного стержня», предложенной Мак-Артуром, модель геометрического ряда или гипотезой преимущественного захвата ниши, предложенная Мотомурой, и гиперболическая модель, предложенная А.П. Левичем [16]. Ранговое распределение видов по этим моделям позволяет проанализировать экологические ниши видов и их изменение в исследуемых биотопах.

В результате проведения анализа было установлено, что общее распределение видов кровососущих комаров на стадии имаго в исследуемых биотопах описывается моделью геометрического ряда Мотомуры. Величина достоверности аппроксимации (R^2) для модели Мотомуры равна 96 % (рисунок 1).

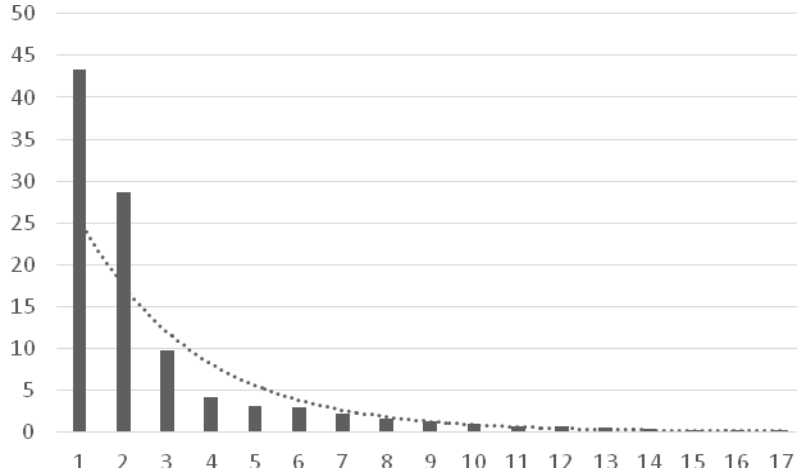


Рисунок 1 – Общее ранговое распределение кровососущих комаров на территории Брестской и Гомельской областей за 2019 г.

Однако наблюдаются ряд особенностей в распределении видов в некоторых типах биотопов, а именно в ольховых и сосновых лесах ранговое распределение видов кровососущих комаров описывается моделью геометрического ряда, предложенной Мотомурой. Данная модель подразумевает наличие нескольких доминирующих видов (в ольховых и сосновых лесах к таким видам относятся *Aedes cantans, A. sticticus* и *A. cinereus*), которые занимают половину и более доступного пространства экологических ниш, остальные же виды имеют сравнительно низкую численность и занимают оставшееся от массовых видов пространство экологических ниш [16]. Величина достоверности аппроксимации (R^2) для модели Мотомуры в ольховых лесах равна 95 %, в сосновых лесах – 94 %. В луговых биотопах Брестской и Гомельской областей (R^2 = 92 %) ранговое распределение видов описывается гиперболической моделью, предложенной А.П. Левичем, которая по сравнению с моделью Мотомуры,

описывает более неравномерное распределение видов, т. е. подразумевает наличие одного или нескольких сверхдоминантных видов (в нашем случае таким видом является *Aedes sticticus*) при очень низкой численности остальных видов [16].

Кроме того, следует отметить ряд особенностей в ранговом распределении видов кровососущих комаров в летний период, а именно в июне и июле. В июне распределение видов описывается моделью, предложенной Мотомурой ($R^2 = 91$ %), по-видимому, такое распределение видов в популяции комаров, объясняется высоким видовым разнообразием (17 видов), связанным с выплодом, как моноцикличных, так и полицикличных видов кровососущих комаров. Также в июне зарегистрированы 2 доминантных вида – *Aedes sticticus* (ИД 37,38) и *A. cantans* (ИД 33,59), а также 6 видов, которые относятся к категории многочисленных (рисунок 2).

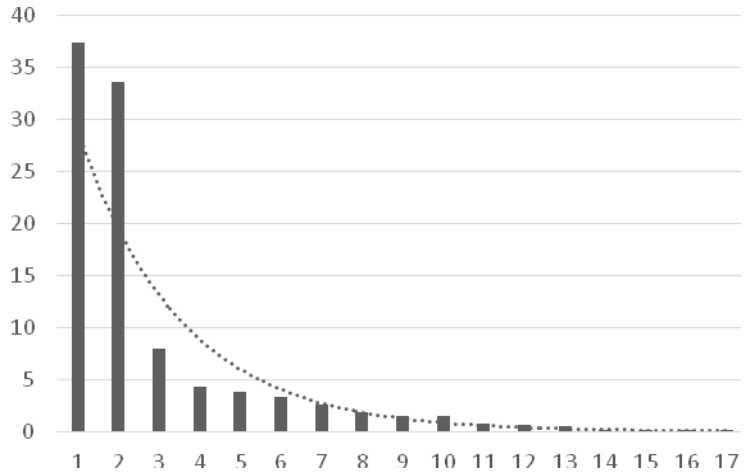


Рисунок 2 – Ранговое распределение кровососущих комаров в июле 2019 г. на территории Брестской и Гомельской областей

В июле ранговое распределение видов комаров описывается моделью, предложенной А.П. Левичем ($R^2 = 96$ %). Данные изменения в распределении кровососущих комаров связаны с обеднением видового состава (13 видов), исчезновением моноцикличных весенних видов кровососущих комаров (большинство видов группы *communis*). В структуре доминирования также имеются особенности, а именно вид *Aedes cantans* становиться сверхдоминантным видом (ИД 53,88), в тоже время снижается доля вида *A. sticticus* (ИД 21,01) (рисунок 3).

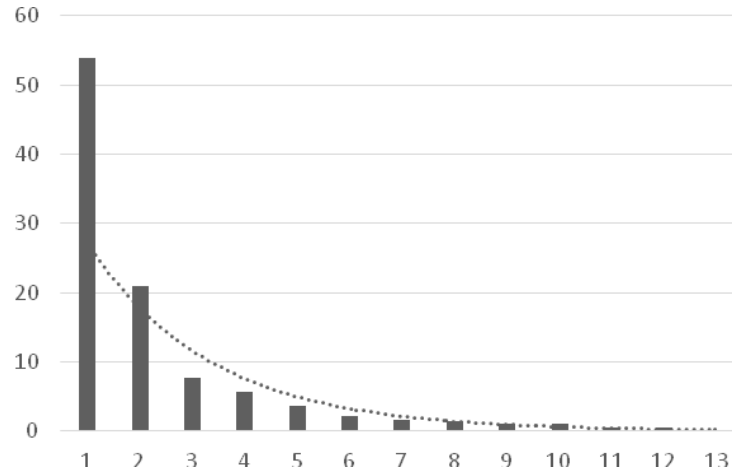


Рисунок 3 – Ранговое распределение кровососущих комаров в июле 2019 г. на территории Брестской и Гомельской областей

В августе, как и в июне распределение видов в популяциях кровососущих комаров описывается моделью, предложенной Мотомурой (R^2 = 98 %). Видовой состав насчитывает 8 видов комаров. Вид *Aedes cantans* остается сверхдоминантным видом (ИД 69,81), также увеличивается доля вида *A. cinereus* (ИД 22,27), в тоже время вид *A. sticticus* уже ко второй декаде августа в сборах встречался единично (ИД 1,05).

Также следует отметить отсутствие популяций кровососущих комаров, в которых ранговое распределение видов описывалось моделью «разломанного стержня», предложенной Мак-Артуром. Данная модель, в отличие от двух остальных, описывает распространение видов с максимально возможной в природе равномерностью [16].

Заключение. Таким образом, в результате проведения исследований 2019 г. видовой состав кровососущих комаров (имаго) на территории Брестской и Гомельской областей представлен 17 видами, которые относятся 2 родам, а именно *Aedes* и *Coquillettidia*. Наиболее массовыми видами являются *Aedes cantans*, *A. sticticus* и *A. cinereus*.

Согласно проведённому анализу биотопического распределения наибольший видовой состав (17 видов) и численность (99,9 ± 69,13 экз/учет) зарегистрированы в ольховых лесах, 16 видов со средней численностью 75,67 ± 38,03 экз/учет – в сосновых лесах, в луговых биотопах видовой состав представлен 13 видами с численностью 44,47 ± 14,55 экз/учет. Общая численность во всех исследованных биотопах в 2019 г. составила 73,35 ± 53,50 экз/учет.

Анализ рангового распределения видового разнообразия кровососущих комаров показал неравномерное распространение видов во всех типах исследованных биотопах, а именно в ольховых и сосновых лесах, а также в луговых биотопах наблюдается наличие чаще всего нескольких доминантных или сверхдоминантных видов, которые занимают большую часть пространства экологической ниши, остальные виды имеют относительно низкую численность и занимают оставшееся от массовых видов пространство экологических ниш. Следует отметить, что данные экологические ниши перекрываются между собой.

Полученные в результате исследований данные расширяют представление об ареалах, фауне, экологии и структуре популяций кровососущих комаров, которые являются потенциальными переносчиками возбудителей трансмиссивных инфекций и инвазий, и являются научной основой при проведении противоэпидемических мероприятий в случае развития вторичных от завозных и местных очагов малярии. Данные о фаунистическом составе и распространении видов, могут быть использованы для составления регионального кадастра животного мира, организации экологического мониторинга, при осуществлении программ по прогнозированию развития экосистем, а также в учебном процессе.

Литература

1. Иванова, М. А. Малярия : учеб.-метод. пособие / М. А. Иванова, И. А. Карпов. – 2-е изд., перераб. – Минск : БГМУ, 2013. – 40 с.

2. Богуцкий, М. И. Эколого-медицинские аспекты малярии в Гродненской области / М. И. Богуцкий, А. Н. Васильева, А. Р. Хутко // Журнал ГГМУ – 2003. – № 3. – С. 46–48.

3. Рубанова, Ф. Г. О природной очаговости туляремийной инфекции / Ф. Г. Рубанова // Сб. научн. труд. Белорус. ин-та эпидемиологии микробиологии и гигиены ; под ред. В. И. Вотякова, Д. Е. Зибицкера. – Минск, 1955. – С. 234–237.

4. Рубанова, Ф. Г. Некоторые особенности эпидемиологии туляремии в БССР / Ф. Г. Рубанова, Т. Т. Сенчук // Сб. науч. труд. Белорус. ин-та эпидемиологии микробиологии и гигиены ; под ред. В. И. Вотякова [и др.]. – Минск, 1957. – С. 224–229.

5. Яшкова, С. Е. Обнаружение ДНК микрофилярий Dirofilaria repens и Dirofilaria immitis в кровососущих комарах (Diptera, Culicidae) на территории Республики Беларусь / С. Е. Яшкова [и др.] // Актуальная инфектология. – 2016. – № 4 (13). – С. 118–119.

6. Логинов, Д. Н. Кровососущие комары (Diptera, Culicidae) – переносчики возбудителей трансмиссивных заболеваний на территории Брестской и Гомельской областей / Д. Н. Логинов, Т. В. Волкова, Л. М. Рустамова, А. Г. Красько // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (114). – С. 51–56.

7. Самойлова, Т. И. Арбовирусные инфекции в регионе Припятского Полесья / Т. И. Самойлова, Л. С. Цвирко // Вестник ПолессГУ. – 2011. – № 1. – С. 8–13.

8. Самойлова, Т. И. Арбовирусы в Республике Беларусь (полевые и экспериментальные исследования) : автореф. дисс. ... д-ра биол. наук : 03.00.06 ; 14.00.30 / Т. И. Самойлова ; ГУ НИИЭМ МЗ РБ. – Минск, 2003. – 41 с.

9. Самойлова, Т. И. Актуальные вопросы изучения арбовирусных инфекций в Беларуси / Т. И. Самойлова // Современные проблемы эпидемиологии и эпидемического надзора за инфекционными болезнями : материалы IX съезда работников профилактической медицины Республики Беларусь, Минск, 26–27 сентября 1996 г. / Мин-во здравоохранения РБ. – Минск, 1996. – С. 83–91.

10. Самолова, Т. И. Выявление антигенов вирусов Инко и Тягиня в кровососущих комарах и мошках на территории Беларуси / Т. И. Самолова [и др.]. – Минск : ФУАинформ, 2009. – С. 155–156.

11. Самойлова, Т. И. Новые арбовирусы, выявление на территории Республики Беларусь / Т. И. Самойлова, В. И. Вотяков, Л. П. Титов // Соврем. пробл. инфекц. патол. человека (эпидемиол., клиника, микроб., вирусол. и иммунол.) : статьи и тез. докл. 1 итог. науч.-практ конф., Минск, 8–9 апреля 1998 г. – Минск, 1998. – С. 84–92.

12. Пузаченко, Ю. Г. Ранговые распределения в экологии и неэкстенсивная статистическая механика / Ю. Г. Пузаченко // Сб. науч. труд. Зоологического музея МГУ им. М.В. Ломоносова ; под ред. М. В. Калякина [и др.]. – М., 2016. – С. 42–71.

13. Гуцевич, А. В. Фауна СССР. Насекомые двукрылые / А. В. Гуцевич, А. С. Мончадский, А. А. Штакельберг – Ленинград : НАУКА. 1970. – Т. 30. – 381 с.

14. Becker, N. Mosquitoes and Their Control / N. Becker, D. Petric, M. Zgomba [et al.]. – Second edition – Berlin : Springer, 2010. – 91 p.

15. Горностаева, Р. М. Комары (сем. Culicidae) Москвы и Московской области: руководство для практ. службы здравоохранения Московского региона / Р. М. Горностаева, А. В. Данилов – М. : КМК, 1999. – 341 с.

16. Мэгарран, Э. Экологическое разнообразие и его измерение / Э. Мэгарран – М. : «Мир», 1992. – 89 с.

Научно-практический центр
НАН Беларуси по биоресурсам

Поступила в редакцию 15.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 556.555.8; 551.332.26 (476-12)

Влияние природных сорбентов на накопление тяжелых металлов в донных отложениях водоемов

Т.В. Макаренко

Для большинства изученных элементов, в целом, характерна преимущественно прямая связь их содержания с различными природными сорбентами донных отложений. Среди изучаемых металлов наибольшие значения коэффициентов корреляции рассчитаны для цинка. Наиболее выраженная положительная линейная зависимость концентрации тяжелых металлов от химического состава донных отложений определена для таких параметров, как содержание органического вещества, оксидов магния, алюминия и марганца (II). Роль других сорбентов в накоплении тяжелых металлов в отложениях изученных водоемов и водотоков невелика. Обратная зависимость выявлена между содержанием элементов и оксидом кремния (IV).
Ключевые слова: тяжелые металлы, донные отложения, корреляционные связи, природные сорбенты.

In general for most of the researched elements, a predominantly direct relationship between their content and various natural sorbents of bottom sediments is typical. Among the researched metals, the largest values of the correlation coefficients have been calculated for zinc. The most pronounced positive linear dependence of the concentration of heavy metals on the chemical composition of bottom sediments has been determined for such parameters as the content of organic matter, oxides of magnesium, aluminum and manganese (II). The role of other sorbents in the accumulation of heavy metals in the sediments of the researched water bodies and streams is hardly significant. An inverse relationship has been found between the content of the elements and silicon oxide (IV).
Keywords: heavy metals, bottom sediments, correlations, natural sorbents.

Введение. Донные отложения – чрезвычайно сложная сорбционная система, поскольку включает большое количество минеральных и органических соединений, способных сорбировать разные ионы и соединения включая тяжелые металлы ионы и соединения тяжелых металлов, причем часто конкурирующих между собой за связывание металлов.

Цель работы – установить корреляционные зависимости между концентрацией тяжёлых металлов в донных отложениях водоёмов и содержанием природных сорбентов.

Материалы и методы. Объектами исследований являлись донные отложения водоемов и водотоков г. Гомеля и прилегающих территорий, а также р. Сож. Для исследований выбраны водоемы с существенным различием в степени и специфике хозяйственного освоения и гидрологическим режимом. Донные отложения отбирались в летнюю межень (июль–август) в период с 2000 по 2016 гг. с использованием дночерпателя Боруцкого и Петерсена. Каждый образец составлялся из 5 частных проб с однородного участка. Отобранные в полиэтиленовые емкости образцы в дальнейшем высушивались до воздушно-сухого состояния. Ситовым методом выделялась для исследования фракция менее 1 мм, и пробы озолялись при 450°С [1]. Содержание органического вещества оценивалось по потерям в массе после прокаливания (ППП) воздушно-сухих образцов при температуре 450°С в течение 8 часов. Состав макрокомпонентов донных отложений определялся рентгенофлюоресцентным методом на квантометре СРМ–18, содержание тяжёлых металлов – атомно-эмиссионным спектральным методом на спектрофотометре PGS-2. Исследования проводились на базе Республиканского унитарного предприятия «Белорусский научно-исследовательский геологоразведочный институт».

Результаты и их обсуждение. Для корреляционного анализа использовались усредненные данные, полученные в исследованиях в период с 2000 г. по 2016 г. Как показывают проведенные с помощью корреляционного анализа исследования (таблица 1), для большинства изученных элементов, в целом, характерна преимущественно прямая связь их количества с различными химическими показателями донных отложений ($p < 0,05$). Наибольшая степень сопряженности содержания металлов определена для таких параметров, как количество оксида магния, органического вещества, а также оксидов алюминия и марганца (II). На ри-

сунках 1–11 показаны наиболее четкие зависимости содержания металлов от количества макрокомпонентов. Каждая точка на графике представляет среднее содержание металлов и макрокомпонентов в донных отложениях водоемов.

Таблица 1 – Корреляционная связь содержания тяжелых металлов в донных отложениях с количеством макрокомпонентов

Вещество	Коэффициент корреляции *r*						
	Cu	Zn	Mn	Co	Cr	Ni	Pb
Органическое вещество	0,44	0,92	-0,04*	0,34	0,55	0,27*	0,38
Fe_2O_3	0,42	0,64	0,55	0,56	0,53	0,12*	0,41
MnO	0,26*	-0,26*	–	0,28*	0,06*	0,18*	0,39
MgO	0,64	0,64	0,57	0,56	0,83	0,34	0,69
Al_2O_3	0,29*	0,80	0,25*	0,59	0,54	0,03*	0,27*
TiO_2	0,33*	0,80	0,13*	0,61	0,52	0,04*	0,36*
SiO_2	-0,60	-0,50	-0,67	-0,60	-0,85	-0,48	-0,63

Примечание: * – Уровень значимости $p \geq 0,05$.

Поскольку органическое вещество является важной депонирующей фракцией донных отложений для большинства микроэлементов, то концентрация металлов в отложениях водоемов должна пропорционально изменяться в зависимости от содержания органического вещества. Однако в некоторых случаях роль органики в накоплении металлов бывает незначительной, так как органическое вещество может быть «лабильным», быстро разлагающимся, и его содержание в отложениях будет низким [2]. В литературе указывается, что зависимость содержания металлов в отложениях от количества органики может проявляться не для всех металлов [2], и коэффициент корреляции может иметь отрицательные значения [3]. Например, для донных отложений р. Обь накопление тяжелых металлов и органических веществ – это два параллельно протекающих независимых процесса [4]. Несмотря на низкое содержание органического вещества в отложениях изучаемых водоемов, существует связь между количеством органики и концентрацией отдельных металлов. Следует отметить, что при расчете коэффициента корреляции использовались обобщенные данные по всем изучаемым водоемам. Поэтому на низкие значения коэффициента корреляции между содержанием свинца и органического вещества может влиять аномально высокое содержание этого элемента в отложениях ряда водоемов.

Как видно на рисунке 7, в отложениях озер Волотовское и У-образное на протяжении всего периода исследования была определена высокая концентрация свинца. При исключении из расчета данных, полученных для вышеназванных озер, коэффициент корреляция увеличивается с 0,38 до 0,74 ($p < 0,05$). На отсутствие тесной связи содержания меди и органического вещества также может влиять аномально высокое количество металла в осадках некоторых водоемов (рисунки 2, 6, 9). Если не использовать в расчетах величины, определенные для донных отложений озер Волотовское и У-образное, значение коэффициента корреляции повышается до $r = 0,78$ ($p < 0,05$). Если рассчитывать зависимость концентрации цинка от количества органического вещества без данных, полученных для отложений озер Малое и Круглое (рисунок 4), то величина коэффициента корреляции приобретает значение $r = 0,98$ ($p < 0,05$). На отсутствие достоверной корреляции между количеством марганца и органическим веществом может влиять экстремально высокое содержание органики в отложениях оз. Малое. В случае расчетов с исключением данных по этому водоему коэффициент корреляции между концентрацией марганца и содержанием органического вещества для остальных водоемов будет указывать на более высокую степень их связи ($r = 0,46$, $p < 0,05$).

Максимальная взаимосвязь между количеством металла и содержанием органического вещества в донных отложениях, определена для цинка ($r = 0,92$, $p < 0,05$), о чем свидетельствуют и литературные данные [5]. Исследования показывают, что процесс поглощения цинка донными отложениями обусловлен его взаимодействием с органическим веществом в большей степени, чем с неорганическими веществами [5], что подтверждается опытами с прокаленным песком. Установлено, что основной механизм удаления цинка из водной толщи –

сорбция живым и мертвым органическим веществом, и только во вторую очередь – неорганической твердой фазой [5]. На втором месте по силе связи с органикой донных отложений располагается хром, недостоверная связь с количеством органического вещества характерна для никеля и марганца. По результатам исследований [6] кобальт и марганец относятся к группе элементов, накопление которых в донных отложениях происходит в основном вследствие механической аккумуляции твердого стока. Марганец обладает наименьшей способностью ассоциироваться с низко- и высокомолекулярными органическими соединениями [5]. Данный элемент отличается высокой мобильностью в водных экосистемах.

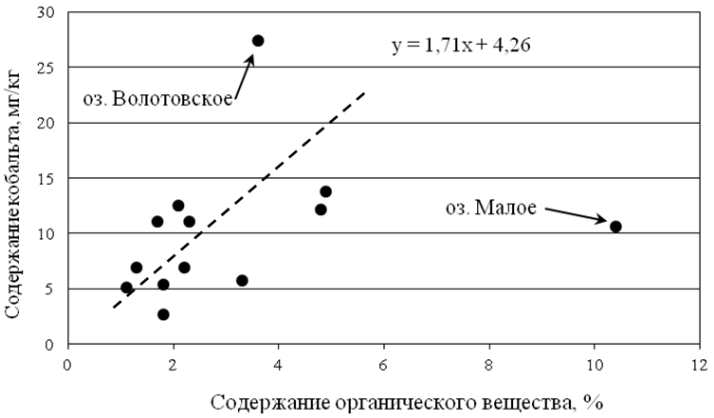


Рисунок 1 – Зависимость содержания кобальта в донных отложениях от количества органического вещества

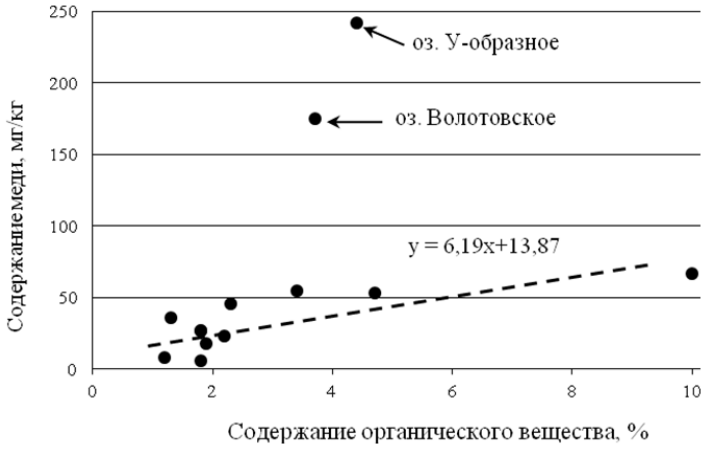


Рисунок 2 – Зависимость содержания меди в донных отложениях от количества органического вещества

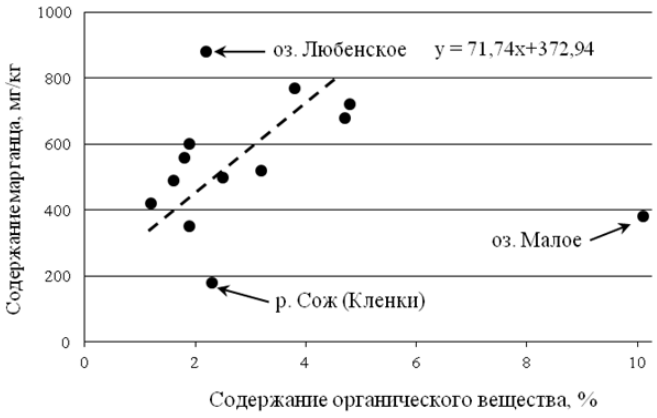


Рисунок 3– Зависимость содержания марганца в донных отложениях от количества органического вещества

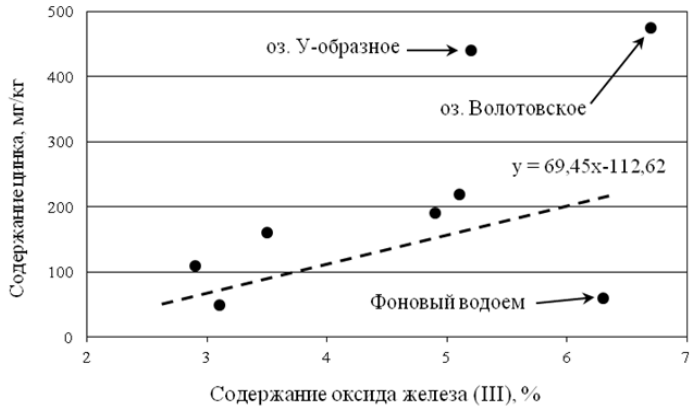


Рисунок 4 – Зависимость содержания цинка в донных отложениях от количества оксида железа (III)

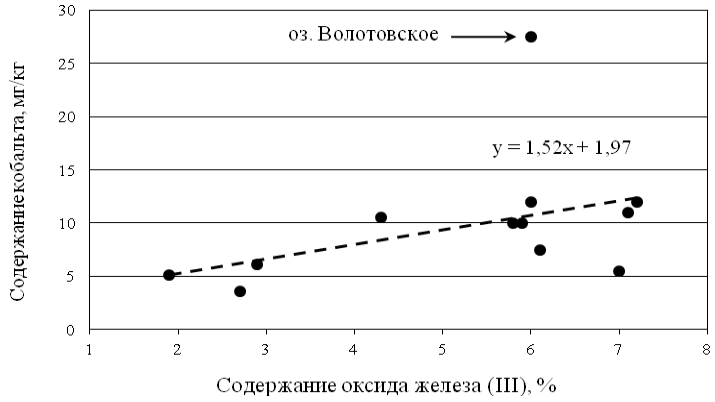


Рисунок 5 – Зависимость содержания кобальта в донных отложениях от количества оксида железа (III)

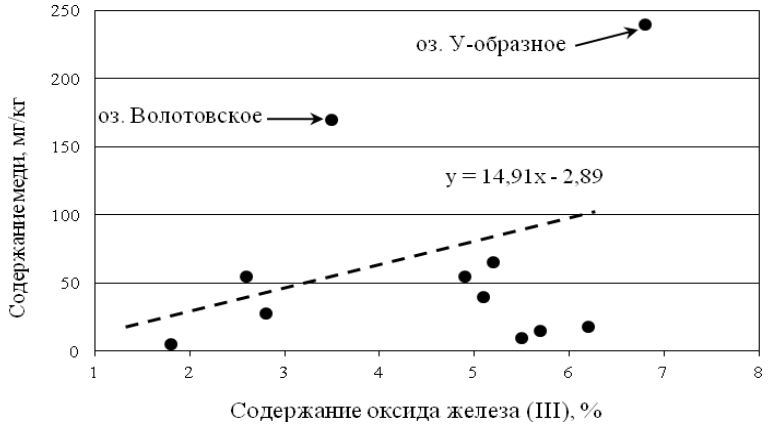


Рисунок 6 – Зависимость содержания меди в донных отложениях от количества оксида железа (III)

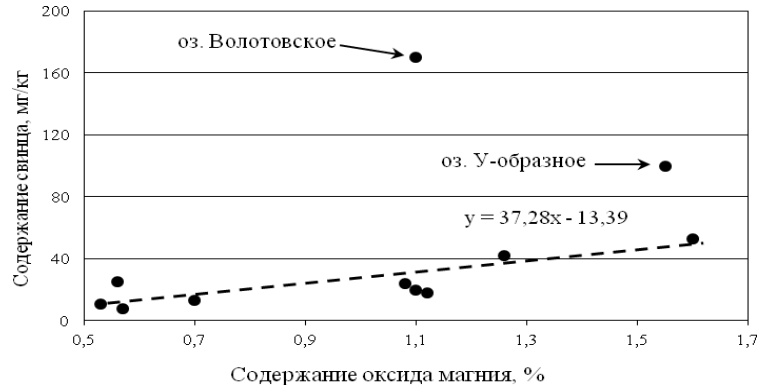


Рисунок 7 – Зависимость содержания свинца в донных отложениях от количества оксида магния

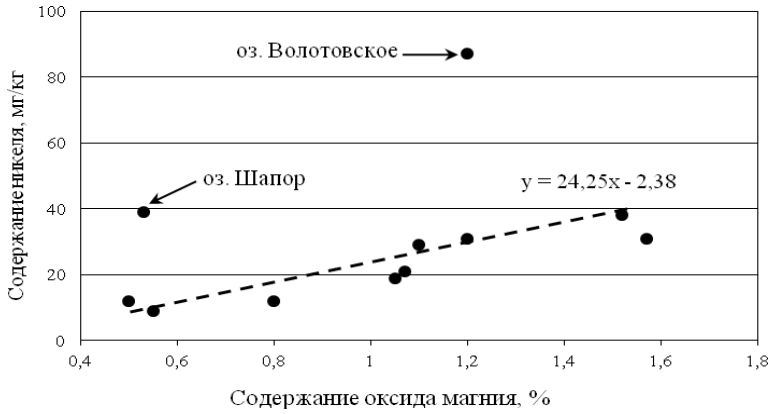


Рисунок 8– Зависимость содержание никеля в донных отложениях от количества оксида магния

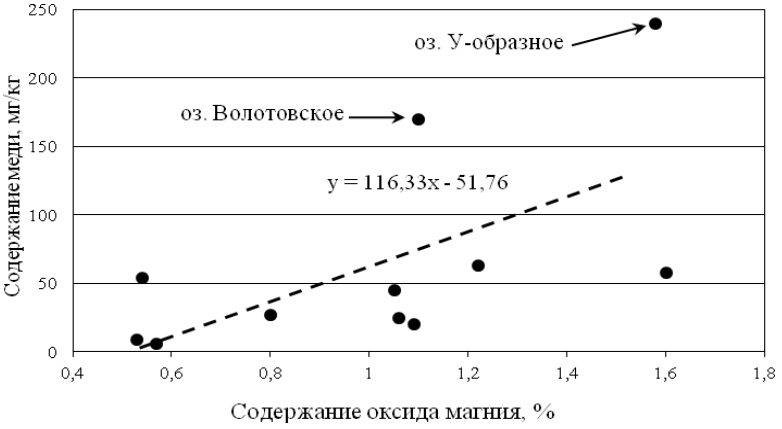


Рисунок 9 – Зависимость содержания меди в донных отложениях от количества оксида магния

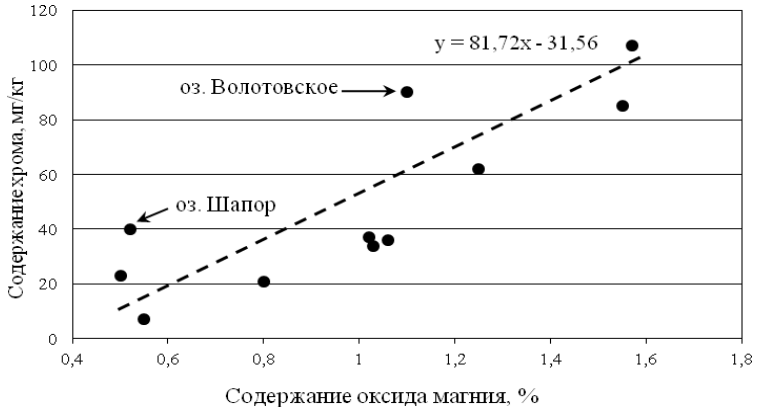


Рисунок 10 – Зависимость содержания хрома в донных отложениях от количества оксида магния

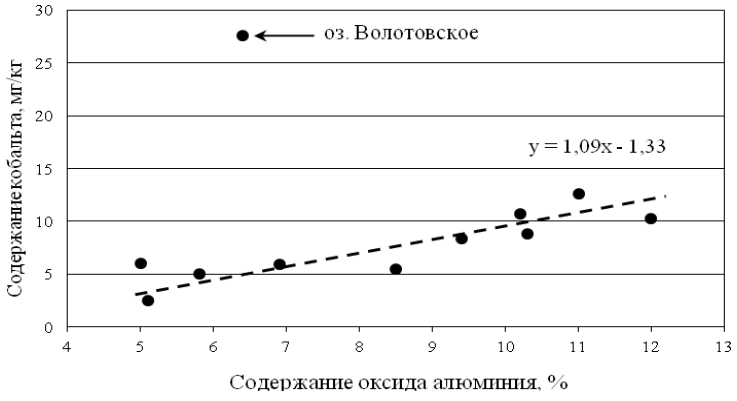


Рисунок 11 – Зависимость содержания кобальта в донных отложениях от количества оксида алюминия

Как видно из графиков, представленных на рисунках 2, 4, 6, 7 для отложений озер Волотовское и У-образное характерна аномально высокая концентрация меди, цинка, свинца не вписывающаяся в общую закономерность. Но в отложениях оз. Малое для кобальта (рисунок 1) и марганца (рисунок 3) характерно незначительное содержания металлов на протяжении практически всего периода исследований. Очевидно, высокое количество природных сорбентов в донных отложениях оз. Малое обуславливает недостаточный уровень насыщения всех сорбционных центров имеющимся количеством тяжелых металлов. Низкое содержание марганца в отложениях относительно количества органики на участке реки у д. Кленки при значительной концентрации металла в воде может быть следствием перехода соединений элемента из донных отложений в водные массы. Отклонения отдельных вариант от общей изученной тенденции накопления элементов в сторону увеличения, скорее всего, являются результатом поступления в отдельные водоемы загрязненных поверхностных стоков с прилегающей к водоему территории.

Как видно из таблицы 1, связь исследуемых элементов с содержанием в составе донных отложений оксидов железа (III) и марганца (II) менее выражена, чем в случае с органическим веществом. Возможно, в донных отложениях изучаемых водоемов сложившиеся окислительно-восстановительные условия препятствуют связи металлов и железомарганцевых оксидов. Можно также предположить, что идет постоянное обновление запасов элементов в поверхностном слое донных отложений, и не успевает произойти переход металлов во фракцию железомарганцевых оксидов, как указывают другие авторы [7]. На отсутствие тесной связи содержания никеля и оксидов алюминия и титана может влиять экстремально высокое содержание металла в отложениях озер Волотовское, и Шапор (рисунок 8). Если провести корреляционный анализ, исключив данные по этим водоемам, то коэффициент корреляции между концентрацией никеля и содержанием оксида алюминия и оксида титана (IV) будет указывать на достаточно высокую степень их связи (r = 0,86 и 0,69 соответственно, $p < 0,05$). Многие исследователи придерживаются концепции, согласно которой практически в каждом водоеме возможен свой механизм переноса металлов из воды в отложения и обратно [5], [7]. Отсутствие тесной корреляционной связи между оксидами железа и марганца и количеством металлов может свидетельствовать о влиянии других факторов на распределение элементов в донных отложениях изучаемых водоемов. Наиболее четкие зависимости концентрации металлов от количества оксида железа (III) представлены на рисунках 4–6.

В то же время, зависимость концентрации изучаемых металлов от количества оксида магния носит более выраженный характер. Для свинца, никеля, меди и хрома такие зависимости представлены на рисунках 7–10, где отмечаются непропорционально высокие концентрации металлов по отношению к количеству оксида магния в оз. Волотовское, для свинца и меди еще и в оз. У-образное. Причиной загрязнения оз. У-образное является сброс сточных вод НПО «Коралл», который проводился до 1999 г. в водоем. Как известно донные отложения накапливают информацию о потоках загрязняющих веществ в водоемы в историческом срезе, основная часть загрязняющих веществ водоемов концентрируется именно в донных отложениях, сохраняясь там длительный промежуток времени. Рынок «Прудкоский» и крупная автостоянка, находящаяся вдоль берегов оз. У-образное, являются еще одной причиной загрязнения водоема, так как значительное количество тяжелых металлов, как и других техногенных загрязнителей, накапливается с коммунальным и бытовым мусором [8]. Существовавшая ранее связь оз. У-образное и оз. Волотовское привело к значительному загрязнению отложений последнего. Характерно, что из общего тренда зависимости выделяется также оз. Шапор, которое испытывает значительную антропогенную нагрузку: принимающее поверхностный сток с территории таких предприятий, как «Гомельобои», ФСК и «Гомельдрев», а также на поверхность водоема осаждаются газо-пвлевые выбросы данных предприятий.

Обратная зависимость выявлена между содержанием элементов и оксидом кремния (IV). Последний является основной составляющей частью кварца, где по данным ряда авторов [5], [6] металлы накапливаются слабо.

Заключение. Для большинства изученных элементов, в целом, характерна преимущественно прямая связь их содержания с различными природными сорбентами донных отложений ($p < 0,05$). Среди изучаемых металлов наибольшие значения коэффициентов корреляции рассчитаны для цинка. Наиболее выраженная положительная линейная зависимость концентрации тяжелых металлов от химического состава донных отложений определена для таких параметров, как содержание органического вещества, оксидов магния, алюминия и марганца (II). Роль других сорбентов в накоплении тяжелых металлов в отложениях изучаемых водоемов и водотоков невелика. Обратная зависимость выявлена между содержанием элементов и оксидом кремния (IV). На низкие значения коэффициента корреляции между концентрацией отдельных металлов и природных сорбентов может влиять аномально высокое содержание данных металлов в отложениях ряда водоемов. Если провести корреляционный анализ, исключив данные по этим водоемам, то коэффициент корреляции между количеством металлов и содержанием сорбентов будет указывать на достаточно высокую степень их связи.

Литература

1. Формирования качества поверхностных вод и донных отложений в условиях антропогенных нагрузок на водоемы арктического бассейна (на примере Кольского Севера) / Т. И. Моисеенко [и др.] ; под общ. ред. Т. И. Моисеенко. – Апатиты : Изд-во Кольск. науч. центра РАН, 1996. – 263 с.

2. Тяжелые металлы в донных отложениях Верхней и Нижней Волги / В. Ф. Бреховских [и др.] // Водные ресурсы. – 2002. – Т.29, № 5. – С. 587–595.

3. Тах, И. П. Пространственное распределение и нормирование концентраций тяжелых металлов в водной экосистеме (река Белая, Северо-Западный Кавказ) : автореф. дис. …канд. биол. наук : 03.00.16 / И. П. Тах ; Кубан. гос. аграрн. ун-т. – Майкоп, 2007. – 22 с.

4. Папина, Т. С. Эколого-аналитическое исследование распределения тяжелых металлов в водных экосистемах Бассейна р. Обь : автореф. дисс. … д-ра хим. наук : 03.00.16 ; 02.00.02 / Т. С. Папина ; Российск. ун-т дружбы народов. – М., 2004. – 42 с.

5. Донные отложения водохранилищ и их влияние на качество воды / А. И. Денисова [и др.] ; под общ. ред. А. И. Денисовой. – Киев : Наук. Думка, 1987. – 164 с.

6. Савченко, В. В. Микроэлементы в илах водохранилищ р. Свислочь / В. В. Савченко // Водные ресурсы. – 1996. – Т. 23, № 4. – С. 444–447.

7. Нахшина, Е. П. Формы нахождения тяжелых металлов в донных отложениях водохранилищ Днепра. I. Марганец / Е. П. Нахшина, В. Н. Белоконь // Гидробиол. журнал. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 76–81.

8. Ладонин, Д. В. Изотопный состав свинца в почвах и уличной пыли Юго-восточного административного округа г. Москва / Д. В. Ладонин, О. В. Пляскина // Почвоведение. – 2009. – № 1. – С. 106–118.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 10.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК: 595.36

Определитель синантропных видов мокриц (Isopoda: Oniscidea) юго-востока Беларуси

А.М. Островский

Даются подробные сведения по морфологии мокриц, приводятся соответствующие рисунки. Рассматривается основной план строения наземных ракообразных. Приводится определительная таблица по наземным изоподам, включающая 8 видов мокриц: *Armadillidium vulgare, Cylisticus convexus, Porcellio scaber, P. spinicornis, Porcellionides pruinosus, Trachelipus rathkii, Oniscus asellus u Hyloniscus riparius*, обитающих в синантропной среде юго-востока Беларуси.
Ключевые слова: наземные изоподы, мокрицы, синантропия, морфология мокриц, экология мокриц, определитель, юго-восток Беларуси.

The detailed information on the morphology of woodlice is presented and the corresponding drawings are given. The main plan of the structure of terrestrial isopods is considered. A table for terrestrial isopods, including 8 species of woodlice which include 8 species of woodlice, inhabiting in synathropic environment of the South-Eastern Belarus: *Armadillidium vulgare, Cylisticus convexus, Porcellio scaber, P. spinicornis, Porcellionides pruinosus, Trachelipus rathkii, Oniscus asellus and Hyloniscus riparius*, is provided.
Keywords: terrestrial isopods, woodlice, synathropy, woodlice morphology, woodlice ecology, identification key, South-Eastern Belarus.

Введение. В настоящее время в связи с возросшей урбанизацией особое значение приобретает задача оптимизации городской среды обитания человека, необходимым условием которой является тщательное изучение всех ее компонентов, включая животное население [1]. В первую очередь необходима инвентаризация играющих важную роль в урбоценозах и обладающих индикационным значением синантропов, одной из наиболее ответственных и сложных задач при работе с которыми является их правильная видовая идентификация.

К сожалению, в Беларуси до сих пор нет определителей, специально посвященных этой группе, а широкое использование фундаментальных определителей как в практической работе, так и в образовательном процессе затруднено по ряду причин. Во-первых, синантропы составляют ничтожную долю всего массива животных, включенных в эти определители, и чтобы дойти до конкретного вида требуется, как правило, преодолеть чрезвычайно длинный определительный путь. Во-вторых, принадлежность синантропов к разным систематическим группам требует от пользователя фундаментальными определителями таких глубоких знаний морфологии, каких не дают даже специальные вузовские курсы зоологии. И наконец, в-третьих, упомянутые определители, издаваемые малыми тиражами, как правило, отсутствуют в региональных библиотеках, в том числе вузовских, и ограничены в свободном доступе.

Исходя из вышесказанного, очевидна потребность в определителях, доступных лицам с разным уровнем биологической подготовки. Данное обстоятельство убедило нас в необходимости разработки регионального определителя, посвященного одной систематической группе синантропов – мокрицам.

Мокрицы – это единственная группа ракообразных, приспособившихся к жизни на суше. Выступая в качестве редуцентов, они играют важную роль в экосистемах, перерабатывая растительный опад и формируя благоприятные условия для развития почвенной микрофлоры [2]. Не менее важна индикаторная роль этих беспозвоночных. Особенностью мокриц является склонность к синантропии, что делает их распространенным биоиндикатором и одним из популярнейших зоологических объектов в изучении урбоценозов [3]. Эти беспозвоночные обладают способностью аккумулировать тяжелые металлы, в связи с чем являются удобными тест-объектами в экологическом мониторинге состояния окружающей среды [4].

Однако, несмотря на научную и практическую значимость мокриц, изучению данной группы наземных беспозвоночных в городах Беларуси уделялось очень мало внимания. Основные сведения о видовом составе и распространении мокриц в населенных пунктах юго-востока Беларуси, и в частности города Гомеля, получены автором данной статьи на основе собственных исследований, начиная с 2013 г., в результате чего установлено обитание в этом регионе 8 видов наземных изопод: *Armadillidium vulgare*, *Cylisticus convexus*, *Porcellio scaber*, *P. spinicornis*, *Porcellionides pruinosus, Oniscus asellus*, *Trachelipus rathkii* и *Hyloniscus riparius* [5]–[9].

Морфология наземных изопод. Таксон Oniscidea является монофилетическим. Это подтверждается множеством морфологических апоморфных признаков наземных изопод. Древнейшие из известных на сегодняшний день ископаемых мокриц найдены в эоцено-олигоценовом балтийском янтаре [10].

Тело мокриц уплощено в спинно-брюшном направлении, покровы его чаще желтоватой или бурой окраски, под цвет субстрата, преимущественно гладкие, реже снабжены бугорками, шипами и иными подобными структурами.

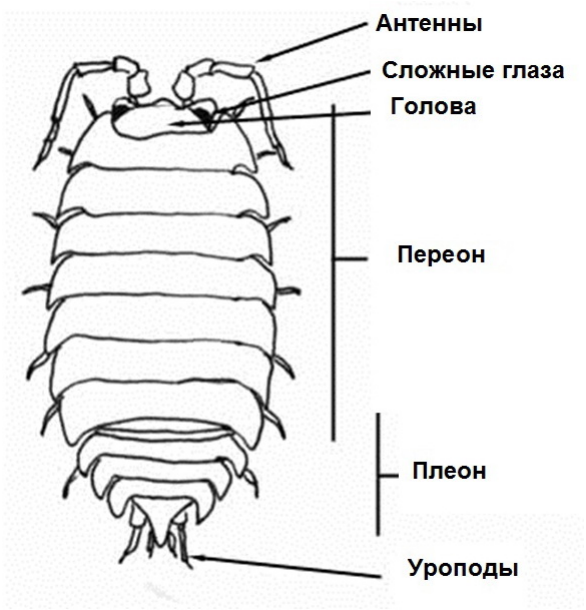
Цефалоторакс состоит из акрона, 5 головных сегментов и первого сегмента груди, конечности которых преобразованы в мандибулы, две пары максилл и ногочелюсти. На голове располагаются две пары антенн и глаза. Первая пара антенн, или антеннулы, короткие, одноветвистые, состоят из 2–3 члеников и принадлежат головной лопасти – акрону. Антенны второй пары представляют собой конечности первого головного сегмента, каждая из которых состоит из более массивного 5-членного стебелька и более тонкого жгутика. При этом следует отметить, что в разных группах мокриц количество члеников жгутика варьирует, что является важным таксономическим признаком.

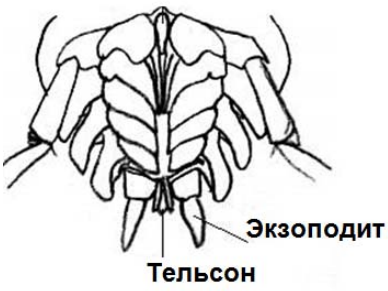
Далее за компактной и сложной головой следует грудной отдел, или переон, состоящий из 7 свободных сегментов, каждый из которых несет пару ходильных одноветвистых конечностей (переопод). Каждый грудной сегмент представляет собой экзоскелетное кольцо, состоящее из 2-х связанных по бокам плейритами склеритов. Ясно различимые, сильно склеротизованные и выгнутые в форме арки спинные склериты называются тергитами. Менее склеротизированные брюшные части каждого сегментированного экзоскелетного кольца называются стернитами. Сбоку каждый тергит несет боковую пластинку, или эпимер, частично окружающий вентральное пространство под переоном. Переоподы состоят из 5 члеников: базиподита, ишиоподита, мероподита, карпоподита, проподита и дактилоподита. У некоторых представителей наземных изопод перед основным члеником сохраняется коксоподит.

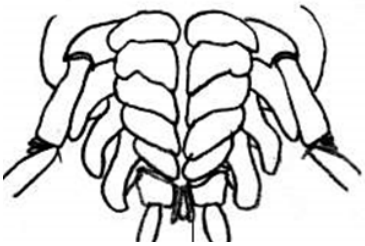
Брюшной отдел состоит из 6 сегментов, первые 5 из которых несут по паре видоизмененных конечностей (плеопод), образуя вместе плеон, а последний срастается с тельсоном, формируя плеотельсон. В основании плеопод располагается базальный протоподит, от которого отходят 2 ветви. Медиальная ветвь, или эндоподит (жабра), мягкая, с тонкой кутикулой и поверхностью для газообмена. Ее прикрывает плотная боковая ветвь, или экзоподит, который в большей степени склеротизован и выполняет защитную функцию. Экзоподиты перемещаются в стороны, освобождая для газообмена поверхность жабр. Тонкие и длинные эндоподиты первых 2-х пар плеопод самца преобразованы в гоноподы, форма и размер которых служит важным диагностическим критерием при определении отдельных видов наземных изопод. У самок плеоподы не видоизменены.

В дополнение к жабрам на передней части экзоподитов плеопод у обоих полов находится дыхательная система псевдотрахей. У живых особей она выглядит как большая белая масса на внешней границе передней части экзоподита плеопода. Псевдотрахеи развились у мокриц как приспособления к наземному образу жизни. Как и трахеи насекомых, псевдотрахеи – это мелкие трубочки, ведущие от внешнего дыхальца внутрь придатка. Однако, в отличие от насекомых, они доставляют кислород в кровь, которая затем распределяет его по тканям организма. Псевдотрахеи мокриц и трахеи насекомых являются примером конвергентной эволюции. Придатками 6-го брюшного сегмента являются двуветвистые и сильно склеротизированные уроподы. К протоподиту прикрепляются эндо- и экзоподиты. Тельсон не является истинным сегментом.

Общая схема строения мокрицы



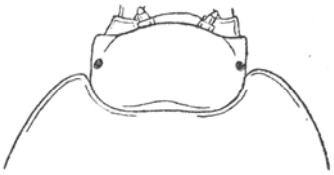




Определительная таблица синантропных видов мокриц (Isopoda: Oniscidea) юго-востока Беларуси

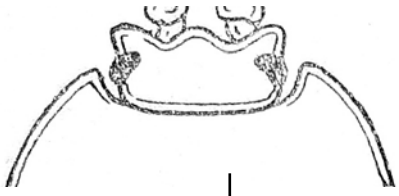
Глаза

Простые,
состоят из одного омматидия
Основание плеона уже переона.
Мелкие формы (4–6 мм).



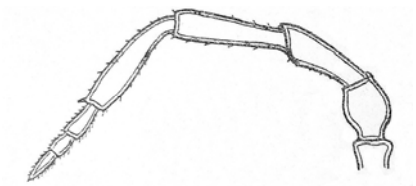
Hyloniscus riparius (C. Koch, 1838)

Сложные,
состоят из нескольких омматидиев
Переон плавно переходит в плеон.
Крупнее (6–18 мм)



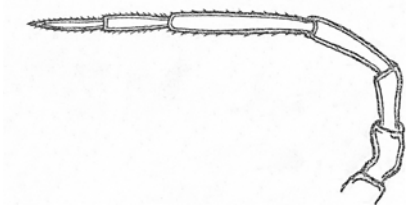
Жгутик антенн

Состоит из 3-х члеников



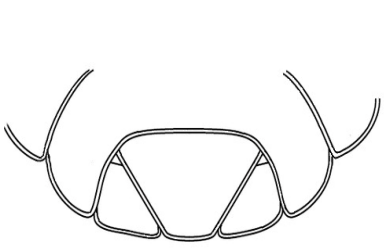
Oniscus asellus Linnaeus, 1758

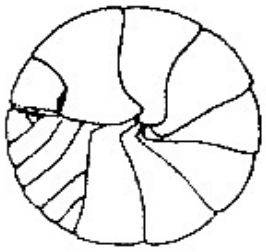
Состоит из 2-х члеников



Хвостовые придатки (уроподы)

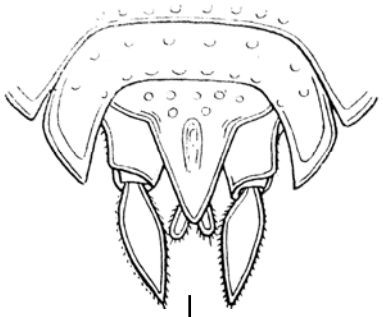
С округлым концом,
не выступающим за конец тельсона.
Эндоантеннальное сворачивание в шар





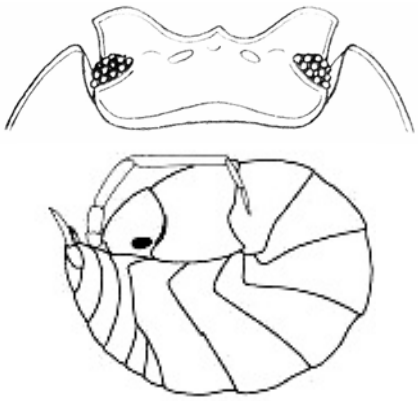
Armadillidium vulgare (Latreille, 1804)

Заостренные,
заметно выступающие
за конец тельсона



Срединная лопасть головы

Заостренная.
Экзоантеннальное сворачивание в шар

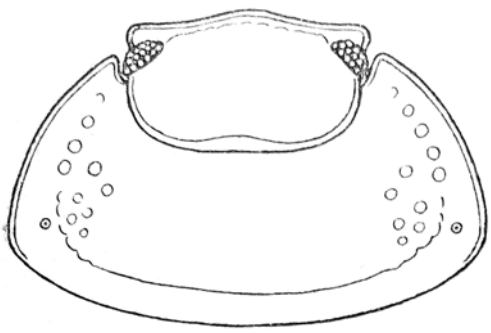


Cylisticus convexus (De Geer, 1778)

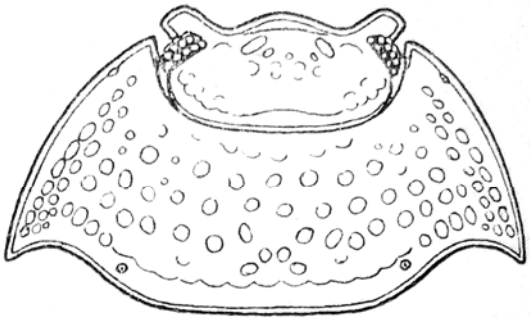
Более-менее закругленная или отсутствует.
Несворачивающиеся формы

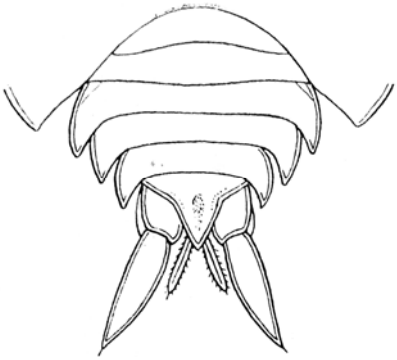
Задний край эпимера первого тергита переона

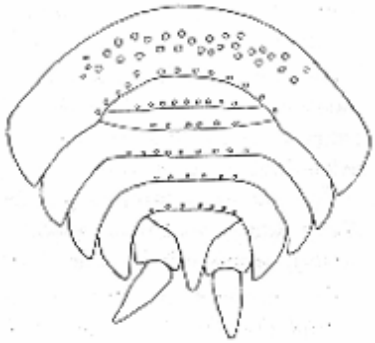
Округлый.
Основание плеона уже переона



Вогнутый.
Переон плавно переходит в плеон







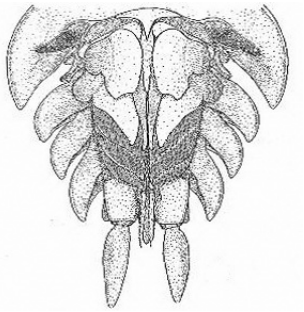
Porcellionides pruinosus (Brandt, 1833)

Количество пар псевдотрахей на экзоподитах плеопод

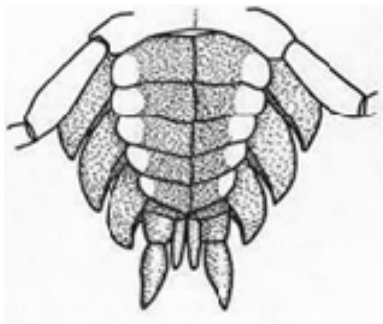
V

II

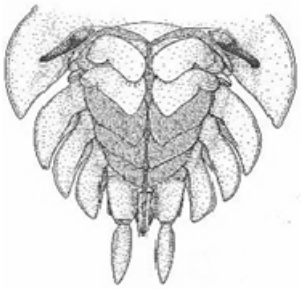
Самец



Самец



Самка

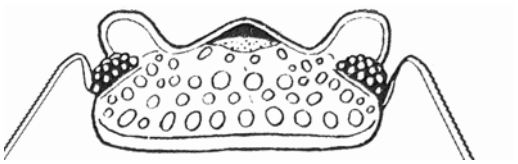


Самка

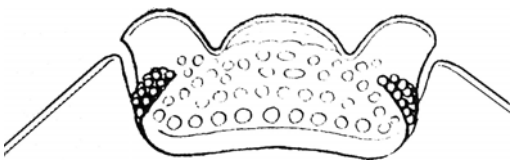
Trachelipus rathkii (Brandt, 1833)

Срединная лопасть головы развита, ее форма от округло-треугольной у крупных экземпляров до более-менее закругленной у молодых экземпляров. Обычно обладает однотонной темно-серой окраской тела и характеризуется хорошо развитой системой бугорков

Боковые лопасти головы трапециевидные, крупные, в 2 раза длиннее округлотреугольной срединной лопасти, между срединной лопастью и боковыми лопастями образуется острый угол. Окраска характерная: голова и плеон черные, переон коричневый со светлыми пятнышками, эпимеры, тельсон и основание уропод светлые



Porcellio scaber Latreille, 1804



Porcellio spinicornis Say, 1818

Заключение. Данный определитель составлен с использованием описаний и рисунков европейских и российских исследователей [11]–[14], а также собственных оригинальных данных и сочетает в себе достоинства как атласа, так и текстовых ключей. Это стало достижимо благодаря использованию редко применяемой в биологии методики разработки «рисуночных определителей», основанной на визуализации всех основных признаков непосредственно при их текстовом описании [15]. Как правило, такой определитель не требует для пользования им глубоких предварительных знаний морфологии и очень удобен в практической работе.

Литература

1. Клауснитцер, Б. Экология городской фауны / Б. Клауснитцер ; пер.с нем. – М. : Мир, 1990. – 246 с.

2. Боруцкий, Е. В. Роль мокриц в процессах почвообразования в разных географических зонах СССР / Е. В. Боруцкий // Тезисы докладов Всесоюзного совещания по почвенной зоологии. – М. : Изд-во АН СССР, 1958. – С. 17–19.

3. Paoletti, M. G. Woodlice (Isopoda: Oniscidea): their potential for assessing sustainability and use as bioindicators / M. G. Paoletti, M. Hassall // Agriculture, Ecosystems and Environment. – 1999. – № 74. – P. 157–165.

4. Bibič, A. Assimilation of zinc by *Porcellio scaber* (Isopoda, Crustacea) expozed to zinc / A. Bibič, D. Drobne, J. Štrus, A. R. Byrne // Bulletin of environmental contamination and toxicology. – 1997. – № 58 (5). – P. 814–821.

5. Островский, А. М. К фауне мокриц (Crustacea: Isopoda: Oniscidea) юго-востока Беларуси / А. М. Островский // Трансформация экосистем. – 2019. – Т 2, № 2 (4). – С. 69–78.

6. Островский, А. М. Фауна и распределение мокриц (Crustacea: Isopoda: Oniscidea) в городе Гомеле / А. М. Островский // Системы контроля окружающей среды. – 2019. – Вып. 2 (36). – С. 107–116.

7. Островский, А. М. Инвазия мокрицы *Hyloniscus riparius* (C. Koch, 1838) (Isopoda: Oniscidea: Trichoniscidae) в лесные экосистемы юго-востока Беларуси / А. М. Островский // Повышение эффективности лесного комплекса: материалы Пятой Всероссийской национальной научно-практической конференции с международным участием, Петрозаводск, 21 мая 2019 г. / М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования Петрозавод. гос. ун-т. ; редкол.: В. М. Костюкевич (науч. ред.) [и др.]. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2019. – С. 81–83.

8. Островский, А. М. Итоги и перспективы изучения мокриц (Oniscidea) на территории Беларуси / А. М. Островский // Актуальные проблемы экологии : сб. науч. ст. по материалам XIV Междунар. науч.-практ. конф., Гродно, 24–26 сент. 2019 г. / Гродн. гос. ун-т ; редкол.: О. В. Павлова (отв. ред.), Г. Г. Юхневич, И. М. Колесник. – Гродно : ЮрСаПринт, 2019. – С. 6–8.

9. Ostrovsky, A. M. *Porcellionides pruinosus* (Brandt, 1833) – a new woodlouse species (Isopoda: Oniscidea: Porcellionidae) in the fauna of Belarus / A. M. Ostrovsky // Acta Biologica Sibirica. – 2020. – Vol. 6. – P. 381–384.

10. Schmidt, C. Phylogeny of the terrestrial Isopoda (Oniscidea): a review / C. Schmidt // Arthropod Systematics and Phylogeny. – 2008. – № 66. – P. 191–226.

11. Хисаметдинова, Д. Д. Определитель мокриц (Isopoda: Oniscidea) Ростовской области / Д. Д. Хисаметдинова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. – 2014. – № 2(180). – С. 72–76.

12. Гонгальский, К. Б. Определение мокриц [Электронный ресурс] / К. Б. Гонгальский // III Полевая школа по почвенной зоологии и экологии для молодых ученых. – Режим доступа : https://www.slideserve.com/enrico/2831265. – Дата доступа : 27.11.2018.

13. Urbański, J. Klucz do oznaczania ważniejszych krajowych skorupiaków / J. Urbański. – Warsaw : Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1952. – 110 s.

14. Vandel, A. Isopodes terrestres (Première Partie) / A. Vandel // Faune de France. – Paris : Lechevalier, 1960. – Vol. 64. – 416 p.

15. Плешанова, Г. И. О целесообразности разработки рисуночных определителей / Г. И. Плешанова, А. С. Плешанов // Дендрологические исследования в Байкальской Сибири. – Иркутск : СИФИБР СО РАН, 2001. – С. 26–28.

Гомельский государственный
медицинский университет

Поступила в редакцию 06.11.2019

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

UDC 582.287.238:57.033

Milk-clotting enzymes of various origin: prospects for application in cheese making

V.V. SAKOVICH, D.D. ZHERNOSSEKOV

The results of the comparative characteristics of rennet preparations have been presented. As the object of the study enzyme preparations possessing milk-clotting activity that are available in the Republic of Belarus have been considered. Indicators having important influence on the formation of a cheese curd were determined.
Keywords: rennet, cheese curd, physical and chemical properties.

В работе представлены результаты сравнительной характеристики ферментных препаратов сычужного действия. В качестве объекта исследования рассматривались доступные в Республике Беларусь ферментные препараты, обладающие молокосвертывающей активностью. Определялись показатели, оказывающие важное влияние на образование сырного сгустка.
Ключевые слова: сычужный фермент, сырный сгусток, физико-химические свойства.

According to the main Department of the processing industry of the Ministry of Agriculture and Food of the Republic of Belarus, the cheese market in the Republic of Belarus is constantly growing and developing branch. New types of cheese are being mastered; capacities for their production are increasing. The volume of production is 5 times the volume of consumption. In 2019 the Republic of Belarus exported cheese to 19 countries. In the structure of milk and dairy products supplies to the external market, cheeses account for almost 40 % of export earnings. The growth rate of cheese exports in 2019 was 118 %. The success of Belarusian dairy companies in the market is a combination of two factors: continuous work to improve the quality of products and affordable price for consumers [1].

According to the Republican unitary enterprise (RUE) «National Center for Marketing and Price Study» the main part of cheese is produced with the rennet. These enzymes are supplied by the Moscow rennet plant. There are also some European milk-clotting enzymes (from Denmark, Holland, Italy and other countries) which are supplied to Belarus by various intermediary firms [2]. Therefore, it is important to produce a domestic milk-clotting enzyme that will reduce the cost of purchasing rennet abroad.

The most famous enzyme traditionally used for milk coagulation is the rennet rennin or chymosin (EC 3.4.23.4). The enzyme belongs to the class of aspartate proteinases [3, p. 156], it is found in the juice of the fourth stomach of calves [4, p. 50], [5 p. 153].

The rapid expansion of dairy production and the shortage of animal rennet contributed to the emergence of new coagulants for milk of microbial and plant origin. Preparations of milk clotting enzymes can be conditionally divided into two groups: first – rennet; the second is rennet substitutes. The second group includes substitutes of animal, plant, microbial origin and recombinant chymosin.

Milk clotting enzyme preparations must meet the following basic criteria:

– strict compliance with the declared clotting activity of milk to the norm and, as a result, optimal consumption of preparations;

– high stability during long-term storage;

– optimal ratio of proteolytic and milk-clotting activity – one of the main characteristics that affect the quality of cheese;

– minimal non-specific proteolytic activity, which allows avoiding protein losses during cheese production, as well as the appearance of unpleasant tastes and consistency defects during cheese ripening.

Optimal thermal stability, allowing to strictly adhering to the main technological parameters of cheese production; – high purity of preparations [6 p. 50].

Not all milk-clotting enzymes meet these requirements and are therefore unsuitable for cheese making.

All commercial milk clotting enzymes are aspartate proteases (EC 3.4.23.) They specifically cleave the Phe105 – Met106 bond of bovine kappa casein.

The steady growth in global cheese production keeps the search for suitable rennet substitutes as the actual problem of science.

Fungi are an attractive source of various biologically active compounds [7, p. 1020]. Fungal enzymes are often produced in submerged conditions, but solid phase fermentation has also been used successfully. The cultivation conditions and the composition of the nutrient media strongly influence the ratio of milk clotting activity to the proteolytic activity of the enzyme [8, p. 997].

For each type of cheese, the use of one of the enzyme preparations offered by manufacturers should be theoretically and experimentally justified. Since in the Belarusian market there is a range of milk – clotting preparations that have different technological characteristics, we have attempted to give a comparative characteristic of rennet proteases presented on the Belarusian market of enzyme preparations.

Materials and methods. The following enzyme preparations were used in the work: rennet calf enzyme Renco; natural lamb enzyme Rennet; calf rennet E160; microbial fluid enzyme Maysan; microbial enzyme Rennet; enzyme preparation from the culture fluid of *Pleurotus ostreatus*.

Protein concentration was determined spectrophotometrically [9 p. 356].

Milk-clotting activity was determined according to the modified Pyatnitsky method. The unit of milk-clotting activity (MCA) was defined as the amount of enzyme that clots 100 ml of milk in 40 min at 35 C [10 p. 80].

The total proteolytic activity (PA) was determined by the lysis of gelatin in a thin layer of agar gel [11 p. 103]. For 1 unit of activity (E) of the enzyme was taken such an activity that leads to hydrolysis of the substrate in the area of the gel size 1 cm^2.

pH optimum of enzymes possessing milk clotting activity was measured at different pH values (from 3,5 to 7,5), using 0,2 M acetate buffer and 0,2 M phosphate buffer.

Temperature optimum of the activity of milk-clotting enzymes was determined after incubating the reaction mixture at different temperatures in the range from 25 to 45°C

The total proteolytic activity (PA) was determined by the lysis of gelatin in a thin layer of agar gel. For 1 unit of activity (E) of the enzyme was taken such an activity that leads to hydrolysis of the substrate over a gel area of 1 cm^2.

The pH optimum of enzymes with milk clotting activity was measured at various pH values (from 3,5 to 7,5) using 0,2 M acetate buffer and 0,2 M phosphate buffer.

The temperature optimum for the activity of milk coagulation enzymes was determined after incubation of the reaction mixture at various temperatures in the range from 25 to 45°C.

The effect of $CaCl_2$ concentration on MCA: enzyme activity was measured adding in milk various concentrations of $CaCl_2$ (from 2,5 to 30 mM).

The cheese curd formation was carried out in accordance with GOST 92225.

Results and discussion. The aim of the work was to study the activity of milk-clotting enzymes of different origin, which are used for the cheese production. The following preparations were chosen:

1. Rennet calf enzyme Renco. Natural rennet calf enzyme, a liquid salt solution comprising at least 92 % chymosin as the active component. Made in New Zealand («Renco»).

2. Natural lamb enzyme Rennet. This product is used for the production of fresh and medium-ripening cheese with a sweet and spicy taste. It is also very suitable for hard cheeses with a long ripening period. Made in Italy (Caglio Bellucci s.lr.).

3. Calf rennet E160. (In the form of solution). The preparation is suitable for the production of any type of cheese – hard cheeses, semi-hard cheeses, soft and blue cheeses,as well as cottage cheese. Composition: Chymosin 80 %, Pepsin 20 %. Made in Italy (Caglio Bellucci s.lr.).

4. Microbial enzyme Rennet. Milk-clotting enzyme preparation is the microbial coagulant and is produced on the basis of Rhizomucor miehei. All ingredients used in every stage of the manufacturing process are not animal-based. It is used for the production of fresh and medium-ripening cheeses. Enzyme composition: *chymosin: 75 % – pepsin: 25 %.* % . Made in Italy ((Caglio Bellucci s.lr.).

5. Liquid microbial enzyme Mayasan. This food microbial enzyme is produced by controlled fermentation of Rhizomucor miehei. It is used for the preparation of soft cheeses, feta cheese, as well as semi-hard and hard cheese with a ripening period of 3–6 months. Made in Turkey (Istambul, MAYASAN GIDA SAN).

6. An enzyme preparation developed at the Department of Biotechnology of the EE «Polessky State University» on the basis of the culture fluid of *Pleurotus ostreatus*.

Each preparation has the declared clotting activity, these data were compared with the results determined experimentally, at standard conditions according to GOST10 288-2001 «Preparations of milk clotting enzymes. Technical conditions». The results of these studies are presented in table 1.

Table 1 – Milk-clotting activity of commercial enzyme preparations

Trade mark	Milk-clotting activity, arbitrary units	
	The declared	Installed
Renco	580	580
Rennet	280	260
Rennet rhizomucor	700	750
E160	150	280
Mayasan	10000	1000

However, the claimed MCA data do not always coincide with those obtained experimentally. The experimental data results are presented in table 2.

Table 2 – MCA data of the studied enzyme preparations

Enzyme prepation	Volume, ml	Protein, mg/ml	Activity, units		Specific activity, unit/mg protein		MCA/PA
			MCA	PA	MCA	PA	
Renco	10	10	580	497	58	49,7	1,17
Rennet	10	10	260	265	26	26,5	0,98
Rennet rhizomucor	10	10	750	430	75	43	1,7
E160	10	10	280	191	28	19,1	1,5
Mayasan	10	10	1000	418	100	41,8	2,4
Enzyme preparation from *P. ostreatus*	1	1,07	81,08	6,32	75,78	5,91	13,7

The highest specific MCA (100 units/mg protein) contains preparation Mayasan, however, this preparation has high proteolytic activity, which is undesirable for rennet. It is known that with a high proteolytic activity of an enzyme preparation, not only clot formation is observed, but also its further hydrolysis. This leads to the appearance of bitter peptides and makes such an enzyme preparation not very suitable for use in cheese making [12, p. 49].

The enzyme preparations from *P. ostreatus* and Rennet Rhizomucor have almost identical specific MCA (about 75 U / mg protein), however, the PA index in the case of Rennet Rhizomucor is significantly higher than that of the enzyme preparation from *P. ostreatus*.

The lowest MCA values are shown for Rennet and E160 preparations (26 and 28 U/ mg protein correspondingly), which can negatively affect the cheese quality and significantly increase the time for its formation.

Influence of temperature. In order to study the physicochemical properties of milk-clotting preparations, the effect of temperature on the MCA was investigated. The effect of temperature on the catalytic activity of enzymes possessing MCA showed a typical activity-temperature dependence of the studied enzymes. The increased milk clotting activity at a higher temperature can be explained by the aggregation of proteins and molecular rearrangements in the protein structure [13 p. 345]. As it is shown in figure 2, for all enzyme preparations MCA was observed in the entire investigated temperature range from 25 to 45^0 C. At the same time, the temperature optimum of the preparations is different.

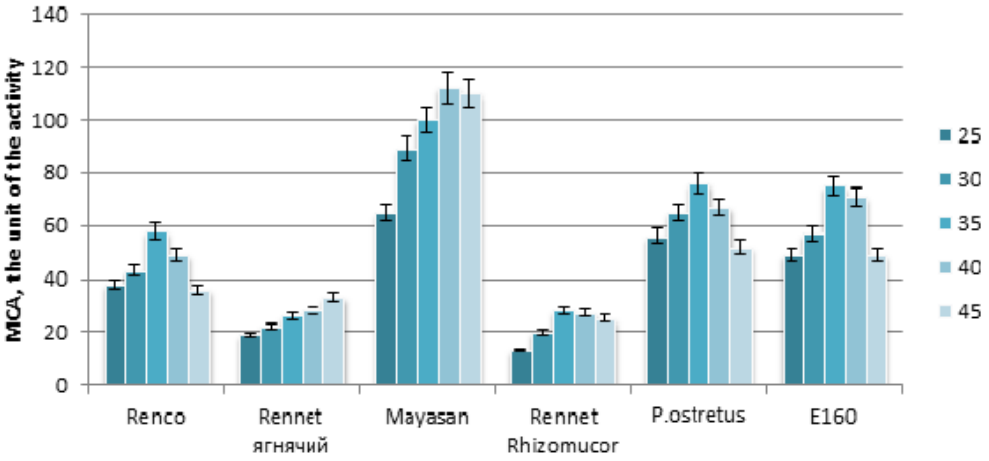


Figure 1 – Effect of temperature on enzyme preparations

It was shown the different temperature optima for the studied enzymes, mainly because of their structural peculiarities. Conformational changes in the protein structure at high temperatures can make it vulnerable to proteolysis, since unfolding of the protein can present new cleavage sites to enzymatic hydrolysis [14, p. 395], [15, p. 483], [16, p. 1902]. For enzyme preparations from Rennet Rhizomucor, *P. ostreatus*, E160 and Renco, the temperature optimum is at 35^0 C. This value is slightly lower than for the enzymes from Maysan and lamb Rennet. This is in accordance with literature data concerning temperature influence on the activity of enzyme preparations possessing MCA [17, p. 597].

Effect of pH. All enzyme preparations retained MCA in the pH range from 4 to 9. The pH optima of enzyme preparations from different origins are somewhat different (see figure 2).

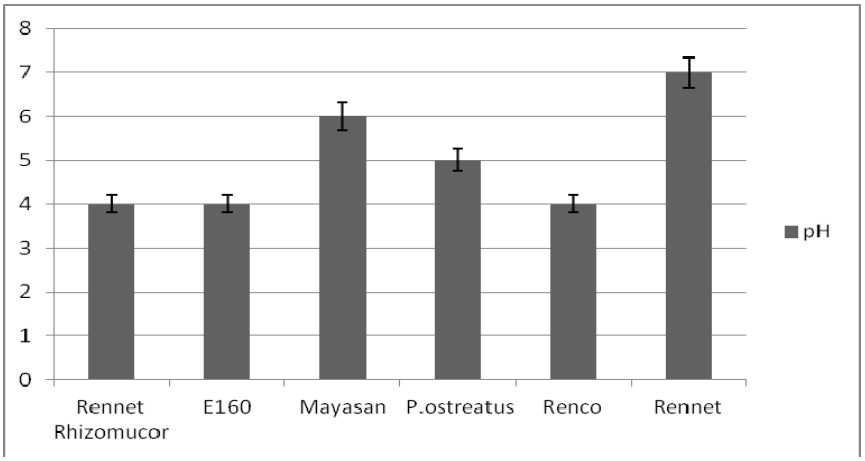


Figure 2 – pH optima of enzyme preparations from different origins

According to Demir [18, p. 286], enzymes with high pH optima are more profitable in food production, because the forming clots are bad and weak at a lower pH of milk. The range of stability of milk-clotting proteinases is in the pH range from 3,5 to 7,5 [19, p. 527]. These data are in accordance with our results.

The influence of calcium. There are numerous data that calcium at a sufficiently high concentration is an important component in the formation of milk clot. The hardness of the cheese can be increased up to 81 % by the addition of about 10 mM $CaCl_2$, but higher concentrations of calcium chloride may decrease the hardness of the final product [20, p. 1393]. The use of high concentrations of calcium chloride can have negative consequences in cheese production. High calcium concentrations change the cheese fusibility, which causes a number of problems in cheese production. As it is shown in figure 3, the maximum MCA of the enzyme from *P. ostreatus* in our study was the highest when calcium chloride was added to the substrate (milk) at a final concentration of 10 mM, which is consistent with the literature data.

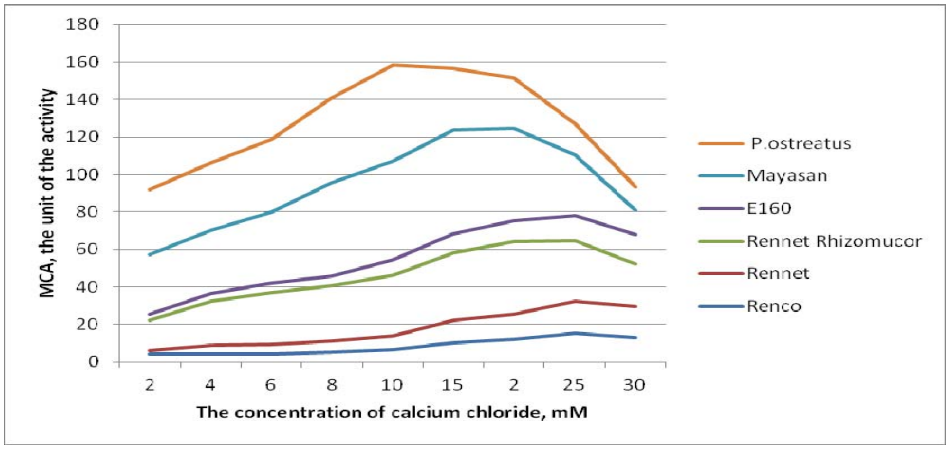


Figure 3 – Effect of calcium chloride concentration on enzyme preparations

For the Rennet Rhizomucor, E160, Rennet and Renco preparations, the highest MCA was obtained by adding 25 mM calcium chloride in final concentration that may have negative effect on cheese curd formation.

Cheese curd. According to GOST 92225, the quality of milk or enzyme suitability for cheese production are estimated by the nature of the formed cheese curd. The data of cheese curd quality with the studied enzyme preparations are presented in table 3.

Table 3 – Quality of the cheese curd

Enzyme preparation	Clot characteristic	Serum characteristics
Renco	The clot has a delicate, uniform consistency that meets the requirements for soft cheeses.	The serum does not have a bitter taste, it is transparent.
Rennet	The torn clot is soft to the touch with breaks. This clot is of satisfactory quality.	The serum is turbid.
Rennet rhizomucor	The clot has a delicate, uniform consistency that meets the requirements for soft cheeses.	The serum does not have a bitter taste, it is transparent.
E160	The torn clot is soft to the touch with breaks. This clot is of satisfactory quality.	The serum is turbid.
Mayasan	The clot is elastic to the touch, without eyes in the longitudinal section	The serum has a slightly bitter taste
Enzyme preparation from *P. ostreatus*	The clot has a creamy hue, uniform throughout the mass. The clot was elastic to the touch, without eyes in the longitudinal section. It has a light mushroom aroma.	The serum does not have a bitter taste, it is transparent.

Thus, the best cheese curd was obtained using the enzyme preparations of Renco, Rennet Rhizomucor, Mayasan and the enzyme preparation *P. ostreatus*. However, when using the Mayasan preparation, on serum had a slightly bitter taste, which was associated with the high proteolytic activity of the preparation.

Conclusion. This study was carried out to assess the competitiveness of milk-clotting enzymes of different origins. We have previously developed a scheme for the isolation and purification of the milk clotting enzyme from the culture liquid of *Pleurotus ostreatus*. This preparation has similar characteristics with these ones which are available in the market of Republic of Belarus: high milk clotting activity, the similar value of pH optimum (5,0) and temperature optimum (35^{o}C), similar effect of 10 mM calcium chloride. The enzyme from *Pleurotus ostreatus* forms the cheese curd of high quality. This preparation also has its own peculiarities: a high ratio of milk-clotting and proteolytic activity, which is a good indicator for the formation of a cheese curd. Also, the cheese curd formed with the enzyme from *Pleurotus ostreatus* has a slight mushroom aroma.

Thus, it is possible to propose the enzyme preparation from the culture liquid of *Pleurotus ostreatus* for use in the dairy industry at the stage of cheese curd formation.

Literature

1. ProductBY [Electronic resource] : Belarusian food trade and industrial portal. – Mode of access : https://produkt.by/news/mariya-klimova-belorusskoe-syrodelie-vchera-segodnya-zavtra. – Date of access : 20.10.2020.

2. Infobase.BY [Electronic resource] : Transport, agriculture, industry in Belarus. – Mode of access : https://www.infobaza.by/article/agro/obzorsyrov/. – Date of access : 20.10.2020.

3. Starovoitova, V. V. Study of functional properties of calf chymosin and its recombinant forms : dis. ... cand. of chem. sciences : 02.00.10 / V. V. Starovoitova. – Moscow, 2001. – 157 p.

4. Kolesnikova, S. S. Enzymes for milk coagulation in cheese making / S. S. Kolesnikova // Dairy business. – 2006. – № 8. – P. 50–51.

5. Ayhan, F. The effect of fermentation parameters on the production of Mucor miehei acid protease in a chemically defined medium / F. Ayhan, S. S. Celebi, A. Tanyolac // J. Chem. Technol. Biotechnol. – 2001. – № 76. – P. 153–160.

6. Gorina, T. A. Innovations in the field of milk-converting enzymes / T. A. Gorina // Cheese and butter making. – 2009. – № 3. – P. 50–51.

7. Chopra, A. K. Factors affecting protease production by Bacillus stearothermophilus RM-67 / A. K. Chopra, D. K. Mathur // J. Food Protect. – 1983. – V. 46. – P. 1020–1025.

8. Vairo Cavalli, S. Hydrolysis of caprine and ovine milk proteins, brought about by aspartic peptidases from Silybum marianum flowers / S. Vairo Cavalli, S. V. Silva, C. Cimino, F. X. Malcata, N. Priolo // Food Chemistry. – 2008. – V.106. – P. 997–1003.

9. Kim, J.H. Characterization of a metalloenzyme from a wild mushroom, Tricholoma saponaceum / J. H. Kim, Y. S. Kim // Biosci. Biotechnol. Biochem. – 2001. – V. 65 (2). – P. 356–62.

10. Pyatnitsky, N. P. Determination of the activity of chymotrypsin at a speed of milk has been curdled and strained-acetate mixtures / N. P. Pyatnitsky, M. T. Proskuryakov // 17th century. Conf. physiologists of the South of Russia. – Stavropol, 1969. – T. 2. – P. 80.

11. Leighton, T. J. The relationship of serine protease activity to RNA polymerase modification and sporulation in Bacillus subtilis / T. J. Leighton, R. H. Doi, R. A. J. Warren, R.A. Kelln // J. Mol. Biol. – 1973. – V. 76. – P. 103–122.

12. Neveen M. Purification and characterization of Milk -Clotting Enzyme from the edible mushroom Pleurotus albidus / M. Neveen, N. Mohamed [et al.] // Research Journal of Pharmaceutical, Biological and Chemical Sciences. – 2018. – V. 9(5). – P. 49.

13. Najera, A. I. Effects of pH, temperature, CaCl2 and enzyme concentrations on the rennetclotting properties of milk: a multifactorial study / A. I. Najera, M. De renobales, L. J. R. Barron // Food Chemistry. – 2003. – V. 80. – P. 345–352.

14. Mohamed Ahmed, I. A. Characterization of partially purified milk-clotting enzyme from Solanum dubium Fresen seeds / I. A. Mohamed Ahmed, I. Morishima, E. E. Babiker, N. Mori // Food Chemistry. – 2009. – V. 116 (2). – P. 395–400.

15. Mohamed Ahmed, I. A. Dubiumin, a chymotrypsin-like serine protease from the seeds of Solanum dubium Fresen / I. A. Mohamed Ahmed, I. Morishima, E. E. Babiker, N. Mori // Phytochemistry. – 2009. – V. 70 (4). – P. 483–491.

16. Mazorra-Manzano, M. A. Comparison of the milk-clotting properties of three plant extracts / M. A. Mazorra-Manzano, T. C. Perea-Gutiérrez [et al.] // Food Chemistry. – 2013. – V. 141. – P. 1902–1907.

17. Rao, M. B. Molecular and biotechnological aspects of microbial proteases / M. B. Rao, A. M. Tanksale, M. S. Ghatge, V. V. Despande // Microbiology and Molecular Biology Reviews. – 1998. – V. 62. – P. 597–635.

18. Demir, Y. Cysteine protease (capparin) from capsules of caper (Capparis spinosa) / Y. Demir, A. Güngör, E. D. Duran, N. Demir // Food Technol. Biotechnol. – 2008. – V. 46. – P. 286–291.

19. Preetha, S. Influence of culture conditions on the production of milk-clotting enzyme from Rhizomucor / S. Preetha, R. Boopathy // World Journal of Microbiology & Biotechnology. – 1994. – V. 10. – P. 527–530.

20. Chazarra, S. Characterization of the milk-clotting properties of extracts from artichoke (Cynara scolymus, L) flowers / S. Chazarra, L. Sidrach, D. López-Molina, J. N. Rodríguez-López // Int Dairy J. – 2007. – V. 17. – P. 1393–1400.

Полесский государственный университет Поступила в редакцию 21.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 911.5:504.54 (476)

Оценка ландшафтной репрезентативности системы особо охраняемых природных территорий Белорусской Возвышенной провинции

А.С. Соколов

В статье предлагается методика оценки ландшафтной репрезентативности системы особо охраняемых природных территорий, основанная на соотношении площадей ландшафтов определённого уровня классификации к общей площади оцениваемой территории и ООПТ, с учётом экологического состояния ландшафтов и минимально допустимой доли площади ООПТ. В соответствии с методикой была определена репрезентативность родов и подродов ландшафтов Белорусской Возвышенной ландшафтной провинции. Результаты позволили выявить некоторые аспекты несовершенства существующей системы ООПТ региона.
Ключевые слова: ландшафты, ландшафтная репрезентативность, Белорусская Возвышенная ландшафтная провинция, экологическое состояние ландшафтов, роды и подроды ландшафтов.

A methodology for landscape representativeness of protected areas system assessing is considered. It is based on the ratio of landscapes areas of certain classification level to the total area of the assessed territory and its protected areas with due regard for ecological state of landscapes and the minimum permissible share of protected areas. In accordance with the methodology, the representativeness of the genera and subgenera of the landscapes of Belarusian Upland Landscape Province was determined. The results revealed some aspects of the imperfection of the existing system of protected areas in the region.
Keywords: landscapes, landscape representativeness, Belarusian Upland Landscape Province, ecological state of landscapes, genera and subgenera of landscapes.

При организации системы особо охраняемых природных территорий (ООПТ) необходимо стремиться к наиболее полному охвату ими разнообразия всех компонентов природной среды, включая ландшафты. Оптимальным вариантом будет достаточная представленность в ней ландшафтов, всех уровней классификации ландшафтов и ландшафтного районирования. На региональном уровне основной классификационной единицей, учитываемой при оценке эффективности охраны ландшафтного разнообразия, является род ландшафтов, объединяющих ландшафты одного генезиса.

Кроме родов ландшафтов при оценке состояния экологического ландшафтов, ландшафтного разнообразия и репрезентативности в системе ООПТ обязательно необходимо учитывать и подроды, так как исследование антропогенной трансформации ландшафтов Белорусской Возвышенной провинции показало, что фактор, являющийся основанием для выделения подродов ландшафтов, – литология поверхностных отложений – определяет и характер хозяйственной деятельности человека в границах ландшафта [1].

Целью настоящей работы являются определение с помощью предложенной автором методики [2] уровень ландшафтной репрезентативности системы ООПТ Белорусской Возвышенной ландшафтной провинции. Задачи исследования:

– определить экологическое состояние ландшафтов провинции;

– выявить уровень представленности родов и подродов ландшафтов в системе ООПТ провинции;

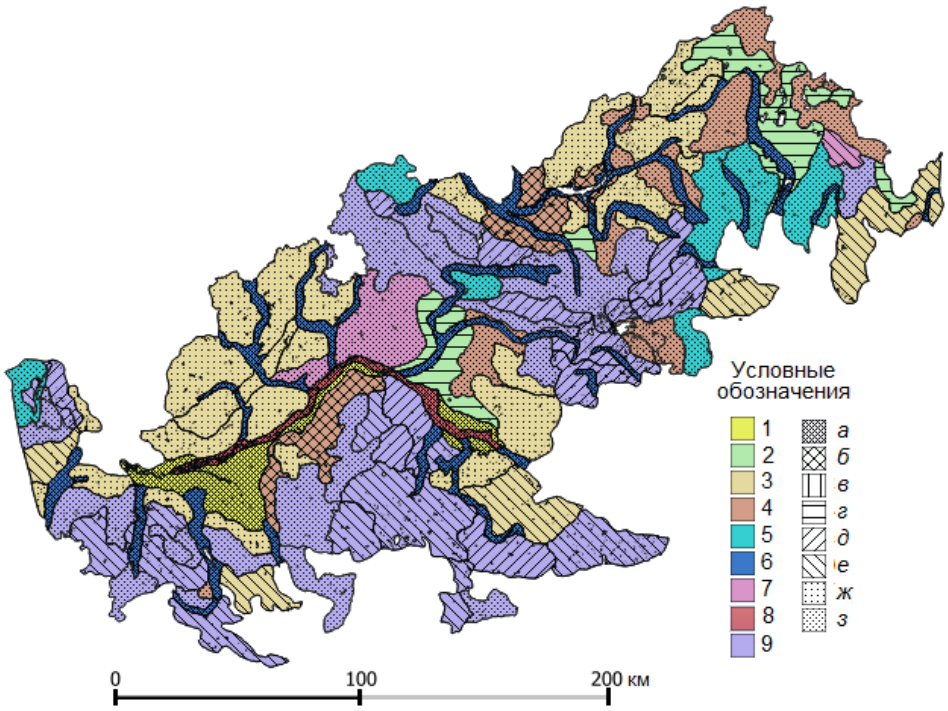
– рассчитать коэффициенты ландшафтной репрезентативности ООПТ с учётом экологического состояния, представленности и доли ландшафтов в общей площади региона для родов и подродов ландшафтов и для всей провинции в целом.

Белорусская возвышенная провинция холмисто-моренно-эрозионных и вторично-моренных ландшафтов занимает 20,4 % территории Беларуси. Рельеф провинции, сформированный сожским ледником, позднее переработан процессами эрозии и денудации и приобрел черты, характеризующие его зрелость. Центральное положение в рельефе занимает Белорусская гряда с абсолютными отметками более 200 м, распадающаяся на более мелкие возвы-

шенности. Отличительной особенностью провинции является сложная ландшафтная структура с господством возвышенных и средневысотных ПТК. Ландшафтами-доминантами в этом регионе выступают холмисто-моренно-эрозионные и вторичноморенные [3] (рисунок 1).

Картографические и картометрические операции выполнялись с помощью ГИС QGIS. Исходными материалами являлись ландшафтная карта Беларуси [4], общегеографические атласы регионов масштаба 1:200 000 с обозначением границ ООПТ, а также слой «Растительность» (vegetation-polygon) в формате shape-файла из набора слоев проекта OpenStreetMap для Беларуси.

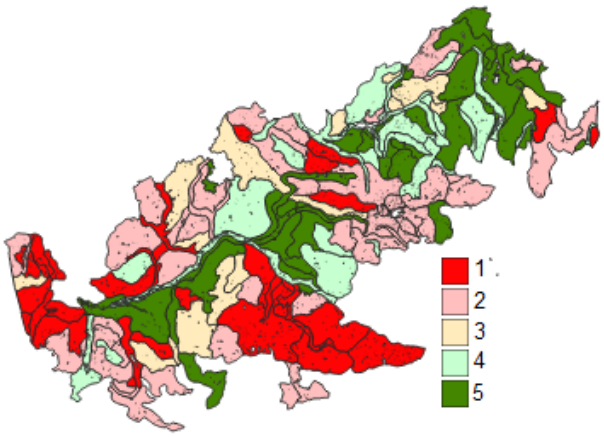
Для определения экологического состояния ландшафтов для каждого из них рассчитывался геоэкологический коэффициент И.С. Аитова ($K_Г$) [5], представляющий собой отношение доли площади лесных геосистем с пределах ландшафта к их предельно минимальной площади, которая для зоны смешанных и широколиственных лесов определена в 30 %. По значениям $K_Г$ оценивается состояние ландшафта в следующих градациях: удовлетворительное – более 1,5; напряженное – 1,1–1,5; критическое – 0,9–1,1; кризисное – 0,5–0,9; катастрофическое – < 0,50.



Роды ландшафтов: 1 – аллювиально-террасированные, 2 – болотные, 3 – вторичноморенные, 4 – вторичные водно-ледниковые, 5 – камово-моренно-эрозионные, 6 – ландшафты речных долин, 7 – моренно-зандровые, 8 – пойменные, 9 – холмисто-моренно-эрозионные.
Подроды ландшафтов: *а* – с поверхностным залеганием аллювиальных песков, *б* – с поверхностным залеганием водно-ледниковых песков, *в* – с поверхностным залеганием супесчано-суглинистой морены, *г* – с поверхностным залеганием торфа и песком, *д* – с покровом лёссовидных суглинков, *е* – с покровом водно-ледниковых суглинков, *ж* – с покровом водно-ледниковых супесей, *з* – с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей

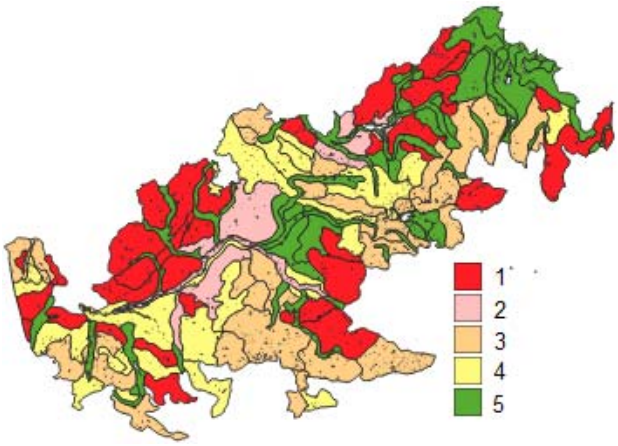
Рисунок 1 – Ландшафтная структура Белорусской Возвышенной ландшафтной провинции

Расчёт геоэкологического коэффициента показал, что состояние обоих доминирующих родов ландшафтов – холмисто-моренно-эрозионных и вторичноморенных – оценивается как кризисное, эти роды являются максимально нарушенными. Экологическое состояние каждого ландшафтного выдела показано на рисунке 2. В удовлетворительном состоянии находятся ландшафты, занимающие 22,2 % площади провинции, в напряжённом – 17,1 %, в критическом – 11,2 %, в кризисном – 29,0 %, в катастрофическом – 20,5 %.



$K_Г$: 1 – менее 0,5, 2 – от 0,5 до 0,9, 3 – от 0,9 до 1,1, 4 – от 1,1 до 1,5, 5 – более 1,5

Рисунок 2 – Экологическое состояние ландшафтов по геоэкологическому коэффициенту И.С. Аитова



$R_{ДС}$ или $R_Р$: 1 – менее 0,1, 2 – от 0,1 до 0,5, 3 – от 0,5 до 0,7, 4 – от 0,7 до 1,0, 5 – более 1,0

Рисунок 3 – Коэффициент ландшафтной репрезентативности (уровень подродов ландшафтов)

При количественной оценке степени ландшафтной репрезентативности системы ООПТ целесообразно рассматривать отдельно доминантные и субдоминантные ландшафты (занимающие более 5 % площади) и редкие ландшафты (менее 5 % площади). Если для первых основным критерием репрезентативности в системе ООПТ является отношение доли в общей площади ООПТ к доле в общей площади региона (k / s), то для последних – доля площади в составе ООПТ от общей площади в пределах региона (c / S, %). Эти показатели представлены в таблице 1. Оценка репрезентативности должна учитывать и экологическое состояние ландшафта, так как более трансформированные ландшафты должны подвергаться охране в большей степени для сохранения их оставшихся ненарушенных эталонов. Отсюда следует необходимость введения коэффициентов, зависящих от значения $K_Г$.

Таблица 1 – Экологическое состояние и представленность в ландшафтной структуре области и системе ООПТ родов ландшафтов

Род, *подрод*	*s**	$K_Г$	*k* / *s*	*r*	$R_{ДС}$	*c* / *S*	*a*	$R_Р$
Аллювиальные террасированные (*с поверхностным залеганием аллювиальных песков*)	3,4	1,79				8,8		0,9
Болотные *(с поверхностным залеганием торфа и песком)*	4,9	2,00	7,7		7,7			
Вторичноморенные	24,7	0,77	0,1	0,6	0,1			
с покровом водно-ледниковых суглинков	4,5	0,48				0,9	1,3	0,1
с покровом водно-ледниковых супесей	20,2	0,84	0,1	0,6	0,1			
Вторичные водно-ледниковые	9,5	1,84	2,2		2,2			
с поверхностным залеганием водно-ледниковых песков	3,6	1,54				2,1		0,2
с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей	5,9	2,02	3,2		3,2			
Камово-моренно-эрозионные (*с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей*)	6,5	1,47	0,7		0,7			
Ландшафты речных долин (*с поверхностным залеганием аллювиальных песков*)	9,3	1,02	1,8	0,8	1,4			
Моренно-зандровые	3,9	1,08				1,4		0,1
с покровом водно-ледниковых суглинков	0,4	1,03				0,0		0,0
с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей	3,5	1,08				1,6		0,2
Пойменные (*с поверхностным залеганием аллювиальных песков*)	1,3	1,13				5,3		0,5
Холмисто-моренно-эрозионные	36,5	0,74	0,39	0,6	0,2			
с покровом водно-ледниковых суглинков	10,5	0,54	3,5	0,6	2,1			
с покровом лёссовидных суглинков	9,8	0,55	0,2	0,6	0,1			
с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей	16,9	0,96	0,9	0,8	0,7			

Примечание: * – обозначения расшифровываются в тексте.

Для доминантных и субдоминантных ландшафтов это коэффициент *r*, равный 1,0, если $K_Г$ более 1,1; 0,8, если $K_Г$ = 1,1–0,9; 0,6, если $K_Г$ = 0,9–0,5; 0,4, если $K_Г$ = 0,5 и ниже. Итоговое значение репрезентативности для данного рода (подрода) ландшафтов $R_{ДС}$ будет вычисляться произведением отношения k / s на коэффициент r. Для редких ландшафтов это коэффициент *a*, равный 1,2, если $K_Г$ = 0,8–0,6); 1,3, если $K_Г$ = 0,6–0,4; 1,4, если $K_Г$ = 0,4–0,2; 1,5, если $K_Г$ = 0,2 и ниже. Итоговое значение репрезентативности для данного рода (подрода) ландшафтов R_P будет определяться делением отношения *c / S* на значение 10*a*. Множитель 10 введён в формулу для того, чтобы оптимальным показателем репрезентативности для редких ландшафтов (при котором R_P = 1) являлось значение доли их площади системе ООПТ не менее 10 % от общей площади данных ландшафтов в регионе.

На основе описанной методики были рассчитаны индексы репрезентативности родов и подродов ландшафтов Белорусской Возвышенной ландшафтной провинции, для уровня подродов результаты представлены в виде карты (рисунок 3). Из рисунка и таблицы 1 видно, что в значительной степени максимальной степенью охраны отличаются ландшафты, экологическое состояние которых удовлетворительное, наиболее нарушенные ландшафты, находящиеся в кризисном и катастрофическом состоянии, представлены в системе ООПТ недостаточно.

Для перехода от оценки репрезентативности ландшафтов отдельных уровней классификации к оценке репрезентативности всего региона в целом, предлагается формула:

$$LRL = 0,5 \cdot (\sum_{i=1}^{n} R_{ДС_i} \cdot b + \sum_{k=1}^{m} R_{P_k}),$$

где *LRI* – индекс ландшафтной репрезентативности региона, *b* – отношение доли площади ООПТ в регионе к минимальной предельной площади, определяемой многими авторами в 10 %. Если для отдельных родов (подродов) $R_{ДС}$ или R_P: превышает 1, то в данную формулу для данного рода (подрода) записывается 1.

Таким образом, *LRI* может принимать значения от 0 до 1. Для Белорусской Возвышенной провинции рассчитанных индекс ландшафтной репрезентативности равен 0,49 для уровня родов и 0,28 для уровня подродов, что говорит о несовершенстве существующей системы ООПТ и необходимости её оптимизации путём расширения в ней доли ландшафтов, относящихся к наиболее трансформированных родам и подродам.

Литература

1. Скачкова, А. С. Природно-антропогенные ландшафты Белорусской возвышенной провинции: классификация, пространственная структура, районирование / А. С. Скачкова, Д. М. Курлович // Журн. Белорус. гос. ун-та. География. Геология. – 2017. – № 1. – С. 3–13.

2. Соколов, А. С. Оценка ландшафтной репрезентативности системы особо охраняемых природных территорий Белоруссии / А. С. Соколов // Актуальные проблемы биоразнообразия и природопользования : матер. II Нац. науч.-пр. конф., посвящ. 20-летию кафедры экологии моря ФГБОУ ВО «КГМТУ», Керчь, 15–17 мая 2019 г. – Симферополь : Ариал, 2019. – С. 632–638.

3. Марцинкевич, Г. И. Ландшафтоведение: учеб. пособие / Г. И. Марцинкевич, И. И. Счастная. – Минск : ИВЦ Минфина, 2014. – 252 с.

4. Ландшафтная карта Белорусской ССР / под ред. А. Г. Исаченко. – М. : ГУГК, 1984.

5. Аитов, И. С. Геоэкологический анализ для регионального планирования и системной экспертизы территории (на примере Нижневартовского региона) : автореф. дис. ... канд. геогр. наук : 25.00.36 / И. С. Аитов ; Нижневартовский гос. гуман. ун-т. – Барнаул, 2006. – 18 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

*УДК: 539.163(546.36+546.42):630*182.47+630*228.8(630*176.321.5)*

Загрязнение ^{137}Cs и ^{90}Sr доминантных видов живого напочвенного покрова в черноольшаниках зоны отчуждения Чернобыльской АЭС

А.В. Углянец, Д.К. Гарбарук

В лесных насаждениях живой напочвенный покров наиболее интенсивно аккумулирует радионуклиды. В преобладающих типах леса черноольшаников зоны отчуждения Чернобыльской АЭС изучены особенности накопления ^{137}Cs и ^{90}Sr доминантными видами травянистых растений. Выявлено, что коэффициенты перехода радионуклидов в их части индивидуальны для каждого типа леса. Надземная фитомасса загрязнена ^{137}Cs выше, чем подземная во всех типах леса, а ^{90}Sr – только на полугидроморфных почвах. С повышением влажности почвы переход ^{137}Cs в фоновые травянистые виды увеличивается, а накопление ими ^{90}Sr от этого фактора не зависит.
Ключевые слова: черноольшаник, тип леса, живой напочвенный покров, доминантный вид, ^{137}Cs, ^{90}Sr, коэффициент переход.

In forest plantations, the living ground cover accumulates radionuclides most intensively. In the prevailing types of black alder forest in the exclusion zone of the Chernobyl NPP, the features of ^{137}Cs and ^{90}Sr accumulation by dominant herbaceous plant species were studied. It was revealed that the transfer coefficients of radionuclides in their part are individual for each type of forest. The aboveground phytomass is contaminated with ^{137}Cs higher than the underground one in all types of forests, and ^{90}Sr - only on semi-hydromorphic soils. With an increase in soil moisture, the transition of ^{137}Cs to background herbaceous species increases, and their accumulation of ^{90}Sr does not depend on this factor.
Keywords: black alder stand, forest type, living ground cover, dominant species, ^{137}Cs, ^{90}Sr, transition coefficient.

Введение. В 2019 г. в целях организации радиационно-экологического мониторинга лесных экосистем в зоне отчуждения Чернобыльской АЭС (ЧАЭС) были заложены три постоянных пункта наблюдения (ППН) в черноольшаниках снытевом, папоротниковом и осоковом. На эти типы леса приходится 63 % площади черноольховой формации [1]. Одной из задач радиационно-экологического мониторинга является оценка накопления радионуклидов растениями живого напочвенного покрова (ЖНП).

Черноольховые леса в зоне отчуждения ЧАЭС, расположенной в границах Полесского государственного радиационно-экологического заповедника, произрастают преимущественно на гидроморфных (ольс папоротниковый, ольс осоковый) и полугидроморфных (ольс снытевый) почвах [1]. В таких условиях интенсивность перехода ^{137}Cs в древесную растительность по сравнению с автоморфными почвами повышается, в то же время гидрологический фактор не оказывает сильного влияния на накопление ^{90}Sr древесными породами [2], [3]. Среди элементов лесного фитоценоза наибольшей способностью накапливать радионуклиды отличаются растения ЖНП [4]. В этом процессе весьма важную роль играют условия местопроизрастания [5].

Согласно [6], в Белорусском Полесье в ЖНП черноольшаника снытевого преобладают сныть обыкновенная, кислица обыкновенная, зеленчук желтый, гравилат речной, крапива двудомная, обильны таволга вязолистная, недотрога обыкновенная, лютик ползучий, звездчатка лесная, селезеночник обыкновенный, встречаются кочедыжник женский, щитовники мужской и игольчатый, копытень европейский, осоки и другие виды. Доминантными видами ЖНП черноольшаника папоротникового являются кочедыжник женский, щитовник игольчатый, кондоминантными – крапива двудомная и таволга вязолистная, часто встречаются вербейник обыкновенный, зюзник европейский, паслен сладко-горький, недотрога обыкновенная, белокрыльник болотный, лютик ползучий, калужница болотная, тростник обыкновенный, осоки. В черноольшанике осоковом более трети почвы покрывают осоки, постоянно присутствуют телиптерис болотный, паслен сладко-горький, подмаренник болотный, щитов-

ник игольчатый, наумбургия кистецветная, вербейник обыкновенный, обычны зеленые мхи, местами произрастают лютик ползучий, белокрыльник болотный, хвощ болотный, вейник ланцетный, иногда – сфагновые мхи.

Сведения об аккумуляции радионуклидов растениями ЖНП в черноольшаниках немногочисленны. В первые годы после аварии на ЧАЭС содержание гамма-активных радионуклидов и ^{90}Sr в растениях ЖНП черноольшаника крапивного (в зоне отчуждения) и черноольшаника таволгового (за ее пределами) были высокими. По уровням их концентрации травянистые растения существенно различались между собой. За 1987–1993 гг. накопление гамма-содержащих радионуклидов видами ЖНП в черноольшаниках снизилось на 10–30 % за счет распада короткоживущих радионуклидов, а ^{90}Sr – выросло [5]. В черноольшанике крапивном на фоне общего уменьшения удельной активности и коэффициентов перехода гамма-активных радионуклидов в растения ЖНП за 1986–1997 гг. каждому виду была свойственна индивидуальная динамика этих показателей. У крапивы двудомной они снижались на протяжении всего периода наблюдений, у кочедыжника женского их падение замедлилось с 1989 г, у чистотела большого – с 1993 г., а у таволги вязолистной и осоки удлиненной они повышались с 1993 г. [7].

Цель настоящей работы – выявить современные уровни загрязнения ^{137}Cs и ^{90}Sr доминантных видов ЖНП в наиболее распространенных типах черноольховых лесов зоны отчуждения ЧАЭС.

Объекты и методика исследований. Закладку ППН осуществляли в соответствии с требованиями [8]. Типы леса черноольшаников определяли по [9], видовой состав ЖНП на ППН – с использованием источника [10], обилие видов растений – по шкале Друде [11].

Объектами исследований являлись по шесть наиболее распространенных видов травянистых растений создающих фон растительного покрова в каждом типе леса. В черноольшанике снытевом это – звездчатка ланцетолистная, зеленчук желтый, обилие которых по шкале Друде оценивалось величиной cop_3, и сныть обыкновенная (sp); в черноольшаниках папортниковом и осоковом – герань Роберта (sp–cop_2), череда олиственная (sp–cop_1), окопник лекарственный (sp), а также общие для всех типов леса виды – крапива двудомная (sp–cop_2), осока ложносытевая (sp–cop_2) и щитовник игольчатый (sol–cop_1).

Отбор проб надземной и подземной фитомассы у растений ЖНП производили равномерно по всей площади ППН в количестве необходимом для репрезентативной навески. Для определения плотности загрязнения почвы ($A_{пов}$) ^{137}Cs и ^{90}Sr на ППН по углам и диагонали в девяти контрольных точках отбирали пробы почвы стандартным пробоотборником диаметром 4 см на глубину 20 см.

Подготовку проб (измельчение образцов растений, высушивание образцов почвы и растений) выполнили в лабораторных условиях. Корни отмывали от частиц почвы. Удельную активность (A_y) ^{137}Cs и ^{90}Sr в пробах определяли в лаборатории спектрометрии и радиохимии заповедника на сцинтилляционном гамма-бета-спектрометре МКС-АТ1315 с погрешностью измерений не более 20 %.

Коэффициенты перехода ($K_п$) ^{137}Cs и ^{90}Sr из почвы в компоненты фитомассы растений ЖНП рассчитывали как частное от A_y (Бк/кг) к $A_{пов}$ (кБк/м^2).

Математико-статистическая обработка экспериментального материала осуществлялись на персональном компьютере с использованием программного пакета Microsoft Excel. Для оценки уровня статистической значимости различий средних $K_п$ радионуклидов в части фитомассы ЖНП рассчитывали t-критерий Стьюдента для малых выборок.

Результаты исследований. Плотность загрязнения почв ^{137}Cs в ольсе снытевом составляет 655,8 кБк/м^2, в ольсе папоротниковом – 357,6 кБк/м^2, в ольсе осоковом – 364,3 кБк/м^2, ^{90}Sr – 94,5, 88,9 и 219,9 кБк/м^2 соответственно.

Известно [5], что накопление радионуклидов растениями ЖНП зависит, главным образом, от их видовой принадлежности, условий местопроизрастания и плотности загрязнения почвы. Оно индивидуально для каждого вида, имеет определенную общность для близкородственных систематических групп, а существенные различия, как правило, выражены между

семействами. Специфичность депонирования радионуклидов видами и частями растений определяется их морфологическим строением и физиологическими особенностями, видовым разнообразием (взаимным влиянием) растений в фитоценозе, индивидуальной площадью питания, условиями произрастания, селективностью поглощения отдельных химических элементов, включая радионуклиды, доступным количеством радионуклидов в корнеобитаемом слое почвы и рядом других факторов [2]–[5], [12]. Следовательно, виды ЖНП сильно различаются по уровням концентрации радионуклидов в различных частях фитомассы.

В черноольшаниках в надземных частях преобладающих видов растений ЖНП A_y ^{137}Cs изменяется от 4922 Бк/кг до 97411 Бк/кг, $К_п$ – от $13,5*10^{-3}$ м^2/кг до $267,4*10^{-3}$ м^2/кг, или в 19,8 раза; в подземной – от 6615 Бк/кг до 51000 Бк/кг и от 18,2 $*10^{-3}$ м^2/кг до $140,0*10^{-3}$ м^2/кг (в 7,7 раза) соответственно.

Индивидуальность накопления ^{137}Cs компонентами фитомассы каждым видом в разных условиях местопроизрастания (типах леса) показана в таблице 1. В восьми случаях из семнадцати $К_п$ ^{137}Cs в надземной части доминантных видов ЖНП выше, чем в подземной, в четырех – они выше в подземной фитомассе, в пяти – в надземной и подземной фитомассе близки. Эти соотношения различаются по типам леса.

Таблица 1 – $К_п$ ^{137}Cs и ^{90}Sr в фитомассу доминантных видов ЖНП, $n*10^{-3}$ м^2/кг

Тип леса	Вид растения	$К_п$ ^{137}Cs		$К_п$ ^{90}Sr	
		надземная	подземная	надземная	подземная
Черноольшаник снытевый	Щитовник игольчатый	71,5	29,1	3,9	8,6
	Звездчатка ланцетолистная	52,2	–	11,1	–
	Зеленчук желтый	45,7	36,9	15,0	7,6
	Крапива двудомная	21,8	19,1	20,0	7,7
	Осока ложносытевая	20,6	23,6	1,7	2,0
	Сныть обыкновенная	27,4	29,7	12,3	6,1
Черноольшаник папоротниковый	Щитовник игольчатый	88,3	19,6	3,1	8,1
	Герань Роберта	95,4	38,2	15,5	6,4
	Крапива двудомная	34,2	41,0	9,8	4,3
	Окопник лекарственный	61,1	38,3	3,2	4,2
	Осока ложносытевая	24,7	37,9	1,4	9,2
	Череда олиственная	16,0	19,1	2,1	6,3
Черноольшаник осоковый	Щитовник игольчатый	143,6	33,6	2,9	5,2
	Герань Роберта	267,4	140,0	22,7	14,5
	Крапива двудомная	46,8	45,0	12,8	9,7
	Окопник лекарственный	95,4	75,6	8,0	6,3
	Осока ложносытевая	53,6	48,2	2,6	6,3
	Череда олиственная	13,5	18,2	4,8	5,3

Несмотря на высокие коэффициенты вариации, в каждом типе леса, а также суммарно на всех ППН средние $К_п$ ^{137}Cs в надземную фитомассу фоновых видов ЖНП на достаточно высоком доверительном уровне превышают средние $К_п$ радионуклида в подземные части растений (таблица 2).

Таблица 2 – Статистическая характеристика средних $К_п$ ^{137}Cs в фитомассу доминантных видов ЖНП

Статистики	Черноольшаник снытевый		Черноольшаник папоротниковый		Черноольшаник осоковый		Все типы леса	
	надземная	подземная	надземная	подземная	надземная	подземная	надземная	подземная
n	6	5	6	6	6	6	18	17
min–max	20,6–71,5	19,1–36,9	16,0–95,4	19,1–41,0	13,5–267,4	18,2–140,0	13,5–267,4	18,2–140,0
M ± m	39,9 ± 9,0	27,7 ± 3,4	53,3 ± 15,0	32,4 ± 4,5	103,4 ± 41,2	60,1 ± 19,5	65,5 ± 14,8	40,8 ± 7,3
σ	20,2	6,7	33,6	10,1	92,0	43,5	61,1	29,2
V/p	50,7/22,7	24,3/12,2	63,0/28,2	31,3/14,0	89,0/39,8	72,4/32,4	93,3/22,6	71,7/17,9
t	3,060		3,270		2,331		6,320	
$t_{таб.}$	$t_{таб.\ (0,02)} = 2,821$		$t_{таб.\ (0,01)} = 3,169$		$t_{таб.\ (0,05)} = 2,228$		$t_{таб.\ (0,001)} = 4,587$	

С повышением индекса увлажнения почвы в типологическом ряду черноольшаник снытевый-черноольшаник папоротниковый-черноольшаник осоковый у произрастающих во всех типах леса крапивы двудомной, осоки ложносытевой и щитовника игольчатого увеличиваются $К_п$ ^{137}Cs в надземную часть фитомассы, а также в подземную часть первых двух видов (таблица 1). В этом направлении растет интенсивность перехода радионуклида в обе части фитомассы всех фоновых видов ЖНП в среднем (таблица 2). Достоверные различия (на 95–99 % уровне значимости) средних $К_п$ ^{137}Cs в надземную и подземную фитомассу доминантных видов ЖНП наблюдаются между черноольшаником осоковым с одной стороны и черноольшаниками снытевым и папоротниковым с другой (таблица 3).

Таблица 3 – Достоверность различий средних $К_п$ ^{137}Cs в фитомассу доминантных видов ЖНП по типам леса

Тип леса	Черноольшаник снытевый		Черноольшаник папоротниковый	
	надземная	подземная	надземная	подземная
Черноольшаник папоротниковый	1,876	1,958	–	–
Черноольшаник осоковый	2,801*	4,005**	3,693**	3,398**

Примечание. Различия достоверны: * – на 95 %, ** – на 99 % уровнях значимости.

Видоспецифичность накопления ^{137}Cs фитомассой доминантных видов ЖНП по типам черноольховых лесов отражают ранжированные ряды (таблица 4). Просматриваются общие черты распределения уровней загрязнения ^{137}Cs надземных частей растений в разных типах леса. Общие для ППН виды по величинам $К_п$ ^{137}Cs в надземную фитомассу в черноольшаниках снытевом и папоротниковом располагаются в ряду осока ложносытевая<крапива двудомная<щитовник игольчатый, в черноольшанике осоковом – крапива двудомная<осока ложносытевая<щитовник игольчатый. Ранжирование доминантных видов по $К_п$ ^{137}Cs в подземные их части индивидуально для каждого типа леса.

Таблица 4 – Ранжированные ряды доминантных видов ЖНП по $К_п$ ^{137}Cs в фитомассу

Тип леса	Надземная часть	Подземная часть
Черноольшаник снытевый	осока ложносытевая<крапива двудомная<сныть обыкновенная<зеленчук желтый<звездчатка ланцетолистная<щитовник игольчатый	крапива двудомная<осока ложносытевая<сныть обыкновенная≈щитовник игольчатый<зеленчук желтый
Черноольшаник папоротниковый	череда олиственная<осока ложносытевая< крапива двудомная<окопник лекарственный< щитовник игольчатый<герань Роберта	череда олиственная≈щитовник игольчатый< осока ложносытевая≈герань Роберта≈окопник лекарственный≤крапива двудомная
Черноольшаник осоковый	череда олиственная<крапива двудомная<осока ложносытевая<окопник лекарственный< щитовник игольчатый<герань Роберта	череда олиственная<щитовник игольчатый< крапива двудомная≤осока ложносытевая< окопник лекарственный<герань Роберта

В 1997 г. в черноольшанике крапивном ($Д_4$) зоны отчуждения ЧАЭС $К_п$ гамма-активных радионуклидов в шесть видов ЖНП колебались в пределах 14,5–90,0*10^{-3} $м^2$/кг, в том числе в крапиву двудомную – 14,5*10^{-3} $м^2$/кг, в кочедыжник женский – 90*10^{-3} $м^2$/кг, в осоку удлиненную – 60*10^{-3} $м^2$/кг [7]. Так как в 1996 г. парциальный вклад ^{137}Cs в $А_{пов}$ составлял 95,5–98,2 % [13], то приведенные выше величины фактически являлись $К_п$ этого радионуклида в указанные виды растений. В условиях аналогичного увлажнения почвы (черноольшаник папоротниковый, $С_4$) в 2019 г. $К_п$ ^{137}Cs в надземную фитомассу доминантных видов ЖНП составляли 16,0–95,4*10^{-3} $м^2$/кг, в том числе в фитомассу крапивы двудомной – 34,2*10^{-3} $м^2$/кг, щитовника игольчатого – 88,3*10^{-3} $м^2$/кг, осоки ложносытевой – 37,2*10^{-3} $м^2$/кг (таблица 1). Следовательно, в черноольшаниках со сходной влагообеспеченностью почв загрязнение ^{137}Cs как близкородственных, так и доминантных видов ЖНП в целом за последние 22 года изменилось слабо и через 33 года после аварии на ЧАЭС продолжает оставаться высоким.

В надземной части преобладающих видов растений ЖНП в черноольшаниках $А_у$ ^{90}Sr варьировала в диапазоне 121–4992 Бк/кг (максимальное значение превышало минимальное в

41,2 раза), в подземной – 192–3191 Бк/кг (в 16,6 раз). Диапазон варьирования $К_п$ ^{90}Sr в надземных частях фитомассы между отдельными видами составлял 1,4–22,7*10^{-3} $м^2$/кг (16,2 раза), в подземных – 2,0–14,5*10^{-3} $м^2$/кг (7,2 раза).

Накопление ^{90}Sr доминантными видами травянистых растений в ольсах приведено в таблице 1. Поступление его в надземную и подземную фитомассу ЖНП различается по видам растений и типам леса. В семи случаях $К_п$ радионуклида выше в надземных частях растений, в шести – в подземных, в четырех случаях значения близки. В черноольшанике снытевом $К_п$ ^{90}Sr выше в надземных частях растений, в папоротниковом – в подземных, в осоковом соотношение равное.

Средние $К_п$ ^{90}Sr для доминантных видов ЖНП в надземную и подземную фитомассу наиболее существенно (на 99 % уровне значимости) различаются между собой только в черноольшанике снытевом, приуроченном к полугидроморфным почвам. В черноольшаниках папортниковых и осоковых (гидроморфные почвы) они близки. Суммарно в трех типах черноольшаников преобладающие виды ЖНП достоверно (на 99,9 % уровне значимости) интенсивнее аккумулируют ^{90}Sr в надземных частях по сравнению с подземными (таблица 5).

Таблица 5 – Статистическая характеристика средних $К_п$ ^{90}Sr в фитомассу доминантных видов ЖНП

Статистики	Черноольшаник снытевый		Черноольшаник папоротниковый		Черноольшаник осоковый		Все типы леса	
	надземная	подземная	надземная	подземная	надземная	подземная	надземная	подземная
n	6	5	6	6	6	6	18	17
min–max	1,7–20,0	2,0–8,6	1,4–15,5	4,2–9,2	2,6–22,7	5,2–14,5	1,4–22,7	2,0–14,5
M ± m	11,5 ± 2,7	6,4 ± 1,3	5,9 ± 2,5	6,4 ± 0,9	9,0 ± 3,5	7,9 ± 1,6	8,8 ± 1,6	6,9 ± 0,7
σ	6,1	2,6	5,6	2,0	7,7	3,6	6,6	2,8
V/p	53,4/23,9	40,9/20,5	95,8/42,9	31,2/13,9	86,2/38,6	46,1/20,6	75,3/18,3	39,7/9,9
t	4,022*		1,085		0,694		4,440**	

Примечание. Различия достоверны: * – на 99 %, ** – на 99,9 % уровнях значимости.

С ростом влажности почв в типологическом ряду черноольшаник снытевый–черноольшаник папоротниковый–черноольшаник осоковый тенденция снижения $К_п$ ^{90}Sr в надземную и подземную фитомассу наблюдается только у щитовника игольчатого (таблица 1). Изменение средних $К_п$ ^{90}Sr в надземных частях доминантных видов ЖНП не синхронизируется с влагообеспеченностью почв, в подземных этот показатель несколько повышен в черноольшанике осоковом (таблица 5).

Достоверные (на 99 % уровне значимости) различия средних $К_п$ ^{90}Sr для шести фоновых видов ЖНП установлены только для надземной фитомассы между черноольшаником снытевым и черноольшаником папоротниковым (таблица 6).

Таблица 6 – Достоверность различий средних $К_п$ ^{90}Sr фитомассу доминантных видов ЖНП по типам леса

Тип леса	Черноольшаник снытевый		Черноольшаник папоротниковый	
	надземная	подземная	надземная	подземная
Черноольшаник папоротниковый	3,712*	0,048	–	–
Черноольшаник осоковый	1,396	1,677	1,787	1,920

Примечание. * Различия достоверны на 99 % уровне значимости.

Ранжированные ряды доминантных видов растений ЖНП по $К_п$ ^{90}Sr в части их фитомассы различаются по типам леса (таблица 7), но для надземных частей растений наблюдается общая тенденция чередования видов в разных типах леса в ряду повышения $К_п$ ^{90}Sr. Более близки между собой ряды на гидроморфных почвах. В частности у произрастающих на всех ППН видов ЖНП характерно повышение $К_п$ ^{90}Sr в надземную часть фитомассы в ряду осока ложносытевая<щитовник игольчатый<крапива двудомная.

Таблица 7 – Ранжированные ряды доминантных видов ЖНП по $К_п$ ^{90}Sr в фитомассу

Тип леса	Надземная часть	Подземная часть
Черноольшаник снытевый	осока ложносытевая<щитовник игольчатый< сныть обыкновенная≈звездчатка ланцетолистная< зеленчук желтый<крапива двудомная	осока ложносытевая<сныть обыкновенная< зеленчук желтый≈крапива двудомная< щитовник игольчатый
Черноольшаник папоротниковый	осока ложносытевая<череда олиственная< щитовник игольчатый≈окопник лекарственный< крапива двудомная<герань Роберта	окопник лекарственный≈крапива двудомная< череда олиственная≈герань Роберта< щитовник игольчатый<осока ложносытевая
Черноольшаник осоковый	осока ложносытевая≤щитовник игольчатый< череда олиственная<окопник лекарственный< крапива двудомная<герань Роберта	щитовник игольчатый≈череда олиственная< осока ложносытевая≈окопник лекарственный< крапива двудомная<герань Роберта

Благодаря высокой подвижности ^{137}Cs в полугидроморфных и гидроморфных почвах [3], доминантные растения ЖНП черноольшаников поглощают ^{137}Cs более интенсивно, чем ^{90}Sr, что подтверждают величины соотношений коэффициентов перехода этих радионуклидов. В надземной фитомассе всех фоновых травянистых растений соотношение $К_п$ $^{137}Cs/К_п$ ^{90}Sr составляет 1,1–49,5, в подземной – 2,4–12,0, в том числе в черноольшанике снытевом – 1,1–18,3 и 2,5–11,8, в черноольшанике папоротниковом – 3,5–28,5 и 2,4–9,5, в черноольшанике осоковом – 2,8–49,5 и 3,4–12,0 соответственно. Средние превышения $К_п$ ^{137}Cs над $К_п$ ^{90}Sr в надземной фитомассе для преобладающих видов ЖНП увеличиваются от черноольшаника снытевого (в 4,6 раза) до черноольшаников папоротникового (в 13,8) и осокового (в 16,7). В подземной фитомассе этот рост выражен слабее – в 5,5, в 5,7 и в 7,3 раза соответственно.

Заключение. В 2019 г. доминантные виды ЖНП в преобладающих типах леса черноольховых лесов зоны отчуждения ЧАЭС характеризовались высокой степенью загрязнения ^{137}Cs и ^{90}Sr.

В силу специфичности поглощения радионуклидов и неоднородности условий произрастания, главным образом увлажнения почв, наблюдались значительные различия в накоплении радионуклидов видами ЖНП и частями их фитомассы.

Ранжированные ряды преобладающих видов ЖНП по $К_п$ ^{137}Cs и $К_п$ ^{90}Sr в фитомассу индивидуальны для каждого типа леса. Однако в надземной ее части просматриваются общие черты расположения травянистых видов по величинам этих показателей. Наиболее сходны эти ряды в типах леса, приуроченных к гидроморфным почвам.

Средние $К_п$ ^{137}Cs в надземную фитомассу доминантных видов ЖНП достоверно выше, чем в подземную в черноольшаниках снытевом, папоротниковом и осоковом, $К_п$ ^{90}Sr – в черноольшанике снытевом, $К_п$ обоих радионуклидов – в черноольховой формации в целом.

С повышением влажности почвы интенсивность перехода ^{137}Cs в части фоновых видов ЖНП увеличивается. Переход ^{90}Sr в фитомассу травянистых растений, за исключением щитовника игольчатого, с влагообеспеченностью почв практически не связан.

Установлены различия средних $К_п$ ^{137}Cs в фитомассу всех доминантных видов ЖНП черноольшаника осокового с черноольшаниками снытевым и папоротниковым, а также среднего $К_п$ ^{90}Sr в надземную фитомассу черноольшаников снытевого и папоротникового.

В черноольшаниках $К_п$ ^{137}Cs в фитомассу доминантных видов ЖНП выше, чем $К_п$ ^{90}Sr, а разница между ними растет с повышением гидроморфизма почв.

Литература

1. Гарбарук, Д. К. Структура черноольховых лесов Полесского государственного радиационно-экологического заповедника / Д. К. Гарбарук, А. В. Углянец // Особо охраняемые природные территории Беларуси. Исследования : сб. науч. ст. Березинского биосферного заповедника. – 2017. – Вып. 12. – С. 32–49.

2. Переволоцкий, А. Н. Распределение ^{137}Cs и ^{90}Sr в лесных биогеоценозах / А. Н. Переволоцкий. – Гомель : Институт радиологии, 2006. – 255 с.

3. Щеглов, А. И. Биогеохимия техногенных радионуклидов в лесных экосистемах: по материалам 10-летних исследований в зоне влияния аварии на ЧАЭС / А. И. Щеглов. – М. : Наука, 2000. – 268 с.

4. Радиоэкологические последствия Чернобыльской аварии / В. С. Аверин [и др.] // 20 лет после чернобыльской катастрофы : последствия в Республике Беларусь и их преодоление. Национальный доклад ; под ред. В. Е. Шевчука, В. Л. Гурачевского. – Минск : Комитет по проблемам последствий катастрофы на Чернобыльской АЭС при Совете Министров Респ. Беларусь, 2007. – С. 13–35.

5. Радиоактивное загрязнение растительности Беларуси / В. И. Парфенов [и др.] ; под общ. ред. В. И. Парфенова, Б. И. Якушева. – Минск : Навука і тэхніка, 1995. – 578 с.

6. Юркевич, И. Д. Леса Белорусского Полесья (геоботанические исследования) / И. Д. Юркевич, Н. Ф. Ловчий, В. С. Гельтман. – Минск : Наука и техника, 1977. – 288 с.

7. Динамика радиоактивного загрязнения почв и растений природно-растительных комплексов в зоне отселения ЧАЭС на территории Беларуси / Б. И. Якушев [и др.] // 10 лет Полесскому государственному радиационно-экологическому заповеднику : сб. ст. Полесского государственного радиационно-экологического заповедника ; сост.: Т. М. Одинцова, К. М. Киреенко ; под общ. ред. В. И. Парфенова. – Минск, 1998. – С. 15–23.

8. Радиационный мониторинг лесного фонда. Закладка постоянного пункта наблюдения. Порядок проведения = Радыяцыйны маніторынг лясного фонда. Закладка пастаяннага пункта назірання. Парадак правядзення : ТКП 498-2013 (02080). – Введ. 03.10.13. – Минск : Министерство лесного хозяйства Респ. Беларусь, 2013. – 28 с.

9. Юркевич, И. Д. Выделение типов леса при лесоустроительных работах / И. Д. Юркевич – Минск : Наука и техника, 1980. – 120 с.

10. Определитель высших растений Беларуси / Под ред. В. И. Парфенова. – Минск : Дизайн ПРО, 1999. – 472 с.

11. Учебная полевая практика по геоботанике: учебно-методическое пособие / сост.: Г.А. Сорокина [и др.]. – Красноярск : СФУ, 2012. – 30 с.

12. Лес. Человек. Чернобыль. Лесные экосистемы после аварии на Чернобыльской АЭС : состояние, прогноз, реакция населения, пути реабилитации / В. А. Ипатьев [и др.] ; под общ. ред. В. А. Ипатьева. – Гомель : Речицкая укрупненная типография, 1999. – 454 с.

13. Булавик, И. М. Динамика радиационной обстановки в лесных экосистемах / И. М. Булавик, А. Н. Переволоцкий // 10 лет Полесскому государственному радиационно-экологическому заповеднику : сб. ст. Полесского государственного радиационно-экологического заповедника ; сост.: Т. М. Одинцова, К. М. Киреенко ; под общ. ред. В. И. Парфенова. – Минск, 1998. – С. 45–53.

Полесский государственный
радиационно-экологический заповедник

Поступила в редакцию 10.07.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 576.6:577.34:661.721:661.727.4:582.29

Цитотоксические и фотомодифицирующие свойства метанольных и ацетоновых экстрактов пяти видов лишайников

О.М. Храмченкова[1], М.В. Матвеенков[2]

Оценивали цитотоксические и фотомодифицирующие свойства метанольных и ацетоновых экстрактов лишайников *Cladonia arbuscula, Evernia prunastri, Hypogymnia physodes, Ramalina pollinaria* и *Xanthoria parietina* в отношении культур кератиноцитов человека (HACaT). Метанольные экстракты лишайников проявляли фотопротекторные свойства; ацетоновые – фотосенсибилизационные и фотопротекторные. Максимальный фотозащитный эффект вызывали метанольные экстракты *R. pollinaria*, *E. prunastri* и *H. physodes* – токсическое действие ультрафиолета снижалось в 1,5–2,6 раза. Ацетоновый экстракт *X. parietina* увеличивал повреждающее действие ультрафиолета в 2–10 раз (фотосенсибилизатор). При наращивании дозы облучения культур кератиноцитов ультрафиолетом метанольные экстраты *R. pollinaria* и *E. prunastri* были фотопротекторами, ацетоновый экстракт *X. parietina* – фотосенсибилизатором.
Ключевые слова: экстракты лишайников, культуры кератиноцитов человека (HACaT), цитотоксичность, модификация фоточувствительности, доза ультрафиолета, фотопротекция, фотосенсибилизация.

The cytotoxic and photomodifying effects of methanol and acetone extracts of *Cladonia arbuscula, Evernia prunastri, Hypogymnia physodes, Ramalina pollinaria*, and *Xanthoria parietina* lichens on human keratinocyte cultures (HACaT) were evaluated. The lichen methanol extracts showed photoprotective properties; acetone – photosensitization and photoprotective. The maximum photoprotective effect was caused by methanol extracts of R. pollinaria, E. prunastri and H. physodes – the toxic effect of ultraviolet radiation decreased by 1,5–2,6 times. The methanol extracts of *R. pollinaria*, *E. prunastri*, and *H. physodes* were photoprotectors – they reduced the toxic effect of ultraviolet radiation and decreased by 1,5–2,6 times. *X. parietina* acetone extract was a photosensitizer – it increased the damaging effect of ultraviolet radiation by 2–10 times. With an increase in the dose of irradiation of keratinocyte cultures with ultraviolet, methanol extracts of *R. pollinaria* and *E. prunastri* were photoprotectors, and acetone extract of *X. parietina* was a photosensitizer. With increasing ultraviolet dose of keratinocytes, the *R. pollinaria* and *E. prunastri* methanol extracts were photoprotectors, and the acetone extract of *X. parietina* was a photosensitizer.
Keywords: lichen extracts, human keratinocyte cultures (HACaT), cytotoxicity, photosensitivity modification, ultraviolet radiation dose, photoprotection, photosensitization.

Введение. Поиск новых солнцезащитных средств составляет важнейшую часть общей стратегии снижения последствий избыточной инсоляции. В данной сфере достигнут большой прогресс: предложены экранирующие и фильтрующие ультрафиолет соединения неорганической и органической природы (оксиды цинка и титана, октокрилен, авобензон, п-аминобензойная кислота и другие), а также принципиально новые фотодинамические соединения, способные менять свои фотозащитные свойства в зависимости от поглощенной дозы излучения [1].

В настоящее время актуальной является задача коррекции биологических эффектов ультрафиолетового излучения. Перспективными являются биологически активные соединения, способные проявлять эндогенные защитные эффекты [2]: ингибировать воспалительные процессы и активность металопротеиназ, модулировать системы репарации ДНК/апоптоза, проявлять антиокислительные эффекты и многие другие. К таковым относятся: аналоги меланоцитстимулирующего гормона (MSH-a), инкапсулированный в липосоме фермент фотолиаза, ретиноиды, D-изомеры аминокислот, различные антиоксиданты [2], [3]. Широко изучаются также комплексы веществ и различные экстракты растительного происхождения, показавших способность ингибировать УФ-индуцированные каскадные реакции (апоптоз, воспаление, окислительный стресс) [4], [5].

Экстракты некоторых видов лишайников и их отдельные вторичные метаболиты показали способность эффективно снижать поступающую на кожу дозу ультрафиолета, ослаблять его токсическое действие в моделях клеточных культур [6], [7]. Поэтому широкий скрининг фотозащитных свойств экстрактов лишайников составляет актуальную научную задачу. Поскольку речь идет о коже человека, крайне важна оценка цитотоксичности экстрактов.

Целью настоящего исследования была *in vitro* оценка цитотоксических и фотомодифицирующих свойств метанольных и ацетоновых экстрактов пяти видов лишайников, распространенных на юго-востоке Беларуси.

Методы исследований. *Получение экстрактов лишайников.* Биомассу лишайников *Cladonia arbuscula* (Wallr.) Flot., *Evernia prunastri* (L.) Ach., *Hypogymnia physodes* (L.) Nyl., *Ramalina pollinaria* (Westr.) Ach. и *Xanthoria parietina* (L.) Th. Fr. отбирали на типичных для каждого вида субстратах, высушивали до воздушно-сухого состояния, измельчали, экстрагировали метанолом и ацетоном в аппарате Сокслета. Растворитель удаляли, экстракты высушивали до порошкообразного состояния, после чего использовали для исследований.

Цитотоксичность экстрактов в отношении клеток человека линии HaCAT, их модифицирующее действие при облучении культур клеток ультрафиолетом выполняли по методикам, описанным в [8], [9].

Анализ результатов исследования производили с помощью программных продуктов Graph Pad Prism Trial (Version 5.02) и Microsoft Excel.

Результаты и их обсуждение. Определяли концентрации экстрактов, на 10 %, 50 % и 90 % снижающих метаболическую активность клеток – IC_{10}, IC_{50} и IC_{90}, соответственно. Общетоксический потенциал экстрактов оценивали по величине (IC_{50}) [10]; диапазон цитотоксического действия – по IC_{10} и IC_{90}. Результаты представлены в таблице.

Таблица – Цитотоксичность экстрактов лишайников в отношении клеток линии HaCAT

В микрограммах на миллилитр

Виды лишайников	Виды экстрактов	Показатели цитотоксичности		
		IC_{10}*	IC_{50}	IC_{90}*
Cladonia arbuscula	метанольный	15,8	79,3 ± 10,57	> 200
	ацетоновый	< 1,0	11,2 ± 1,11	20,4
Evernia prunastri	метанольный	45,8	116,6 ± 12,22	> 200
	ацетоновый	9,2	20,2 ± 0,93	31,6
Hypogymnia physodes	метанольный	26,2	73,1 ± 5,42	> 200
	ацетоновый	18,6	19,7 ± 4,52	20,8
Ramalina pollinaria	метанольный	60,8	106,3 ± 13,24	188,4
	ацетоновый	36,3	66,9 ± 5,43	132,5
Xanthoria parietina	метанольный	2,3	> 200	> 200
	ацетоновый	62,1	121,5 ± 7,62	> 200

* – значения IC_{10} и IC_{90} вычислены по уравнениям аппроксимации зависимостей жизнеспособность культур кератиноцитов от концентрации экстрактов лишайников

Ранее была показана цитотоксичность ацетоновых экстрактов лишайников кладонии лесной, эвернии сливовой и гипогимнии вздутой в отношении клеток линии HACaT [8]. Среди метанольных экстрактов изучаемых видов лишайников цитотоксичных не обнаружено. Ацетоновые экстракты были токсичнее метанольных в 2–8 раз; цитотоксичность ацетоновых и метанольных экстрактов лишайников образует ряд убывания: *C. arbuscula* > *H. physodes* > *E. prunastri* > *R. pollinaria* > *X. parietina*.

По критерию 10-процентного ингибирования культур кератиноцитов можно выделить экстракты лишайников, к которым данные клетки наиболее чувствительны: ацетоновые экстракты *C. arbuscula* и *E. prunastri*, а также метанольный экстракт *X. parietina*.

По критерию IC_{90} можно утверждать, что наиболее токсичными для культур кератиноцитов человека являются ацетоновые экстракты *C. arbuscula*, *E. prunastri* и *H. physodes*. С помощью уравнений аппроксимации зависимостей жизнеспособность клеток от концентрации экстрактов лишайников определили диапазоны их нетоксического действия до 10-процентного

ингибирования жизнеспособности кератиноцитов. Данные диапазоны весьма вариабельны, что указывает на специфичность действия экстрактов лишайников на кератиноциты. Для дальнейших исследований выбрали концентрации экстрактов лишайников, равные 2,5, 5,0 и 10,0 мкг/мл, нетоксичные в отношении кератиноцитов для большинства экстрактов.

Для оценки модифицирующего действия экстрактов лишайников культуры клеток кератиноцитов облучали градиентом доз ультрафиолетового излучения в присутствии экстрактов выбранных концентраций, после чего на основании аппроксимации кривых «доза-эффект» определяли величину ID_{50}. В качестве контроля использовались аналогичные дозы ультрафиолета для построения кривой без внесения экстрактов в питательную среду. Для определения вклада антиоксидантой активности экстрактов лишайников в их модифицирующее действие использовалось построение аналогичных зависимостей, с предварительным внесением классического модельного антиоксиданта Тролокс. Дизайн эксперимента предполагал оценку модифицирующего действия экстрактов лишайников только за счет их биологических свойств (антиоксидантная активность, активация систем репарации ДНК и др.), но не за счет способности к фотозащите.

Отношение равноэффектных доз ультрафиолета (фактор изменения цитотоксичности, ФИЦ) служило мерой модифицирующего действия экстрактов лишайников при облучении культур кератиноцитов: $\text{ФИЦ} = \dfrac{ID_{50}(\text{опыт})}{ID_{50}(\text{контроль})}$, где ID_{50} (опыт) – величина полулетальной дозы облучения кератиноцитов при добавлении в питательную среду экстрактов лишайников; ID_{50} (контроль) – то же без добавления экстрактов лишайников – рисунок 1.

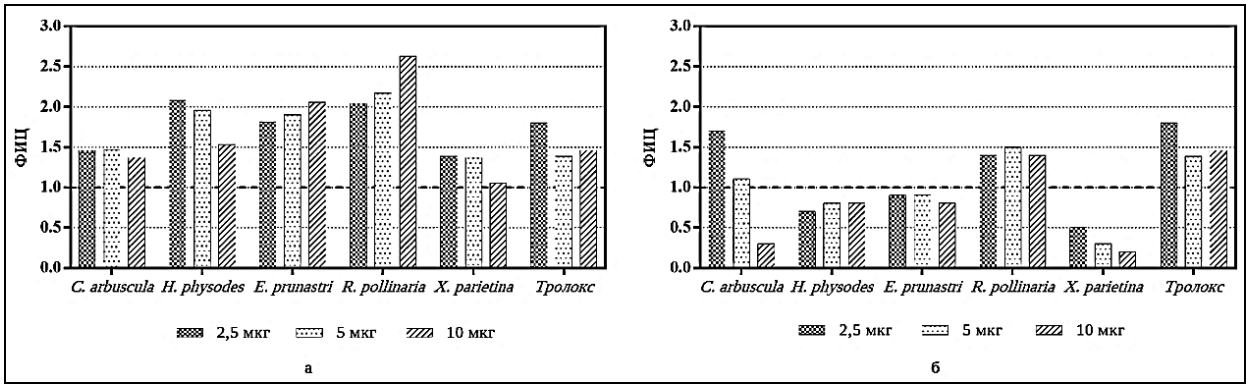


Рисунок 1 – Модификация цитотоксичности ультрафиолета в отношении культур кератиноцитов человека (HaCAT): а – метанольными экстрактами; б – ацетоновыми экстрактами лишайников

Метанольные экстракты изучаемых видов лишайников в основном проявляли фотопротекторные свойства; ацетоновые – фотосенсибилизационные и фотопротекторные. Максимальный фотозащитный эффект проявили метанольные экстракты *R. pollinaria*, *E. prunastri* и *H. physodes* – токсическое действие ультрафиолета снижалось в 1,5–2,6 раза. Можно предположить, что фотопротекторные свойства данных экстрактов (2,5–10,0 мкг/мл) связаны не только с их антиоксидантыми свойствами – величины ФИЦ достоверно превышают таковые для Тролокса. Ацетоновый экстракт *X. parietina* можно охарактеризовать как выраженный фотосенсибилизирующий агент, способный увеличивать повреждающее действие ультрафиолета в 2–10 раз. Метанольные экстракты *C. arbuscula* и *X. parietina*, а также ацетоновый экстракт *R. pollinaria* оказывали умеренное фотозащитное действие; ацетоновые экстракты *E. prunastri* и *H. physodes* – умеренное фотосенсибилизирующее действие. Фотопротекторное действие экстрактов лишайников: повышалась с увеличением концентрации (метанольные экстракты *E. prunastri* и *R. pollinaria*); понижалось с увеличением концентрации (метанольные экстракты *H. physodes X. parietina*; ацетоновый экстракт *C. arbuscula*); практически не зависело от концентрации (метанольный экстракт *C. arbuscula* и ацетоновый экстракт *R. pollinaria*). Фотосенсибилизирующее действие ацетонового экстракта *X. parietina* усиливалось с повышением его концентрации в среде инкубирования кератиноцитов.

Модифицирующее действие экстрактов лишайников, внесенных в среду инкубирования кератиноцитов в концентрациях 2,5, 5,0 и 10,0 мкг/мл, на повреждающее действие ультрафиолета проявлялось при наращивании дозы облучения клеточных культур – рисунок 2.

При облучении культур кератиноцитов, инкубированных в присутствии 2,5 мкг/мл метанольных экстрактов лишайников, в диапазоне доз 1–5 мДж/см^2 отмечено протекторное действие для экстрактов *H. physodes, E. prunastri, R. pollinaria* и *X. parietina*, тогда как экстракт *C. arbuscula* показал умеренное фотосенсибилизирующее действие в диапазоне 1–3 мДж/см^2. Присутствие 2,5 мкг/мл ацетоновых экстрактов в среде инкубирования кератиноцитов приводило к снижению их жизнеспособности экстрактами *E. prunastri*, *H. physodes* и *X. parietina* по всему диапазону облучения. Экстракты *C. arbuscula* и *R. pollinaria* повышали устойчивость кератиноцитов преимущественно в области высоких доз 2–10 мДж/см^2.

Увеличение концентрации экстрактов лишайников в среде культивирования кератиноцитов до 5,0 мкг/мл позволило выявить усиление защитного действия метанольных и ацетоновых экстрактов *R. pollinaria*, а также снижение этого эффекта для метанольного экстракта *H. physodes* и ацетонового *C. arbuscula*. Увеличение защитного действия экстрактов *R. pollinaria* проявлялось в виде повышения жизнеспособности кератиноцитов в области высоких доз ультрафиолета (3–10 мДж/см^2). Снижение защитного действия экстрактов *H. physodes* и *C. arbuscula* выглядело как уменьшение жизнеспособности кератиноцитов в области низких доз 1–3 мДж/см^2. Повышение концентрации ацетонового экстракта *X. parietina* до 5,0 мкг/мл усилило его фотосенсибилизирующее действие по всему диапазону облучения клеток.

Дальнейшее увеличение концентрации экстрактов в питательной среде до 10 мкг/мл также изменило характер модификации токсического действия ультрафиолета. Фотозащитные свойства метанольных экстрактов *R. pollinaria* и *E. prunastri* усилились в виде увеличения жизнеспособности кератиноцитов в области доз 3–10 мДж/см^2.

В случае с аналогичными экстрактами *H. physodes* и *X. parietina* жизнеспособность клеток понижалась в области доз 1–3 мДж/см^2. Ацетоновый экстракт *C. arbuscula* проявлял выраженное фотосенсибилизирующее действие в области доз 1–3 мДж/см^2, сохраняя фотозащитность в области высоких доз 4–10 мДж/см^2. Повышение концентрации ацетонового экстракта *X. parietina* до 10,0 мкг/мл еще больше усилило его фотосенсибилизирующее действие по всему диапазону облучения клеток.

Зависимости «доза-эффект» при внесении в инкубационную среду метанольных экстрактов из *Hypogimnia physodes* и *Xanthoria parietina*, а также ацетонового из *Ramalina pollinaria* – практически совпадают с таковой при введении Тролокса. Это позволяет предположить наличие антиоксидантного механизма в фотопротекторном действии данных экстрактов.

Таким образом, характер модификации экстрактами лишайников действия ультрафиолета на культуры кератиноцитов человека зависит как от концентрации экстрактов, так и от дозы облучения.

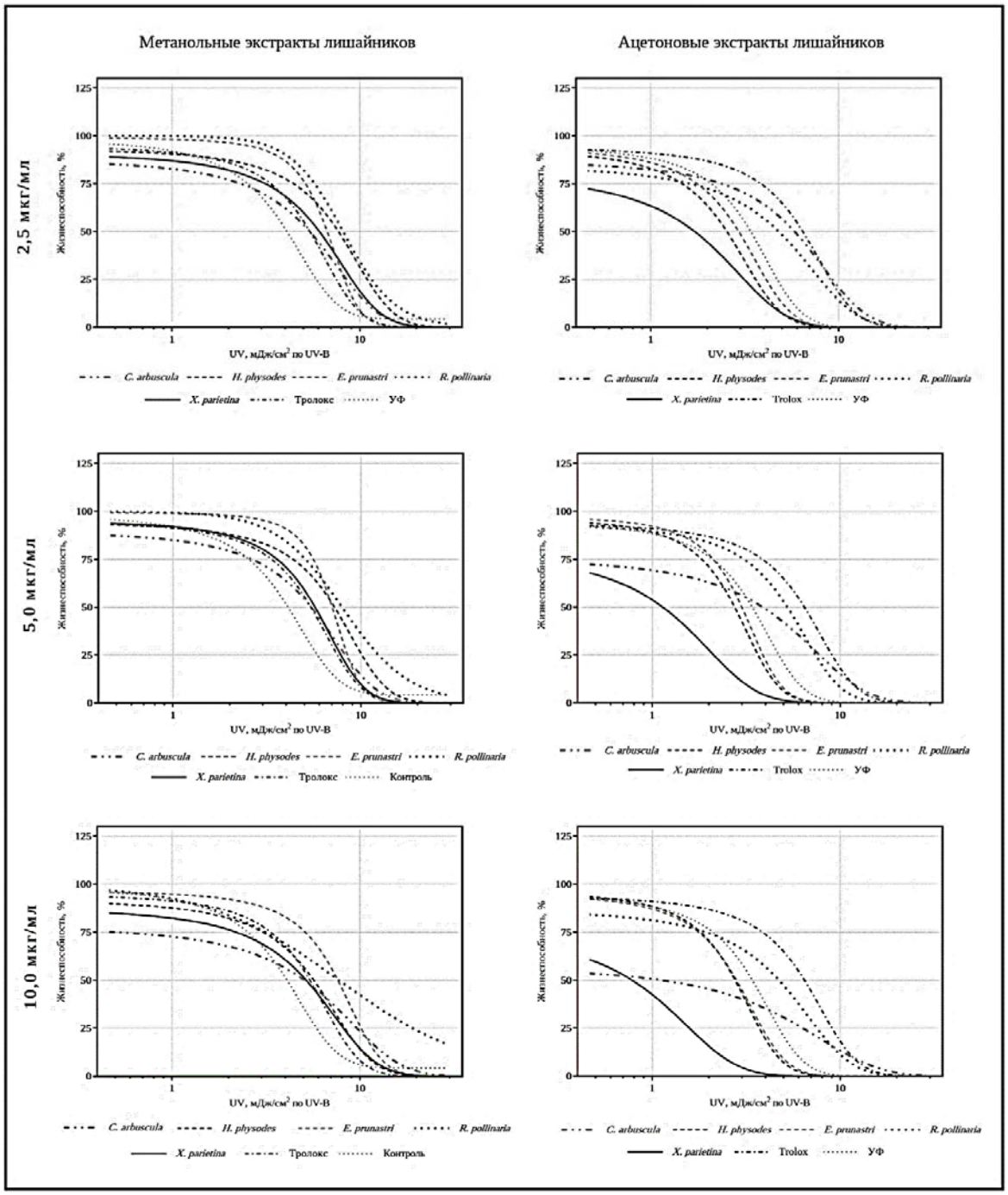


Рисунок 2 – Влияние доз ультрафиолета и экстрактов лишайников на жизнеспособность кератиноцитов человека (HaCAT)

Способ получения экстрактов лишайников может влиять на состав извлекаемых вторичных метаболитов, или на их долевое соотношение в субстанции. Влияние состава извлеченных из лишайника вторичных метаболитов, по-видимому, проявлялось в экспериментах с экстрактами *Ramalina pollinaria*: метанольный экстракт при концентрациях 2,5–5 мкг/мл проявлял защитные свойства в области низких доз УФ, чего не было отмечено у ацетоновых экстрактов. В данном свете также примечательно действие экстрактов из *Xanthoria parietina*, *Hypogimnia physodes* и *Evernia prunastri*, наборы вторичных метаболитов которых, извлеченные метанолом, оказались фотозащитными, а извлеченные ацетоном – фотосенсибилизирующими.

Действие других экстрактов не зависело от концентрации, но проявлялось количественно в тех или иных областях доз ультрафиолета. Это позволяет предположить наличие в экстрактах веществ, либо одинаковых по химической структуре, либо сходных по биологи-

ческому действию. В свою очередь количественные различия в модификации могут быть обусловлены различным долевым содержанием ключевых биологически активных веществ как в экстрактах, так и в различных градиентах их концентрации.

Зависимость характера модификации от дозы излучения позволила выявить экстракты, обладающие способностью изменять воздействие УФ в области высоких доз (метанольные экстракты *H. physodes* и *X. parietina* и ацетоновый *R. pollinaria*), а также изменяющие воздействие излучения на клетки на протяжении всего диапазона доз (ацетоновые экстракты *H. physodes*, *E. prunastri* и *X. parietina*). Отдельного упоминания заслуживают метанольные экстракты *R. pollinaria* и *E. prunastri*, способные в зависимости от концентрации менять действие малых и больших доз УФ, а также экстракты *C. arbuscula*, снижающие жизнеспособность кератиноцитов в области малых доз и увеличивающие в области больших. Ранее нами были описаны похожие эффекты этанольных экстрактов *R. pollinaria* и *C. arbuscula* [9].

Данные особенности, по-видимому, обусловлены различной биологической активностью экстрактов лишайников. Наиболее очевидным механизмом модификации действия ультрафиолета является снижение или увеличение образования токсических продуктов фотореакций, главным образом, свободных радикалов. Существуют данные об антиоксидантных свойствах экстрактов и отдельных вторичных метаболитов *H. physodes* [11]. Реализация фототоксического действия ацетонового экстракта этого же вида, а также аналогичных экстрактов *R. pollinaria* и *X parietina* остается открытым вопросом. Необычные модифицирующие свойства экстрактов *C. arbuscula* могут быть объяснены наличием в них цитостатических веществ, снижающих пролиферативную активность клеточной популяции, тем самым делающих их более нечувствительными к воздействию проапоптических стимулов ультрафиолета.

Наиболее интересным представляется действие метанольных экстрактов *R. pollinaria* и *E. prunastri* в диапазоне конецнтраций 2,5–5,0 мкг/мл. До определенного предела клетки как бы «индифферентны» к воздействию ультрафиолета, причем их общий пролиферативный потенциал остается на уровне интактных клеток. Можно предположить наличие этом случае иного, не цитотостатического эффекта, обусловленного полной инактивацией некоторых механизмов токсического воздействия ультрафиолета. Это могут быть антивоспалительные и антиапоптические эффекты (усиление репарации, снижение экспрессии проапотических генов и др.), а также инактивация внутриклеточных фотосенсибилизаторов.

Заключение. In vitro оценивали цитотоксическое действие метанольных и ацетоновых экстрактов лишайников *C. arbuscula, H. physodes, E. prunastri, R. pollinaria* и *X. parietina* на культуры кератиноцитов человека (HACaT). Среди метанольных экстрактов изучаемых видов лишайников цитотоксичных не обнаружено. Ацетоновые экстракты лишайников токсичнее метанольных в 2–8 раз. Метанольные экстракты изучаемых видов лишайников в основном проявляли фотопротекторные свойства; ацетоновые – фотосенсибилизационные и фотопротекторные. Максимальный фотозащитный эффект проявили метанольные экстракты *R. pollinaria*, *E. prunastri* и *H. physodes* – токсическое действие ультрафиолета снижалось в 1,5–2,6 раза. Ацетоновый экстракт *X. parietina* является фотосенсибилизатором, увеличивающим повреждающее действие ультрафиолета в 2–10 раз. При наращивании дозы облучения культур кератиноцитов ультрафиолетом характер модификации экстрактами лишайников действия излучения на клетки зависел как от концентрации экстрактов, так и от дозы облучения и проявлялся в виде фотопротекции (метанольные экстраты *R. pollinaria* и *E. prunastri*) и фотосенсибилизации (ацетоновый экстракт *X. parietina*).

Литература

1. Dose-dependent Progressive Sunscreens. A New Strategy for Photoprotection? / A. Gallardo [et al.] // Photochem Photobiol Sci. – 2010. – Iss. 9 (4). – P. 530–534.

2. New strategies of photoprotection / L. Verschooten [et al.] // Photochemistry and Photobiology. – 2006. – Vol. 82 (4). – P. 1016–1023.

3. Yeager, D. G. What's New in Photoprotection: A Review of New Concepts and Controversies / D. G. Yeager, H. W. Lim // Dermatologic clinics. – 2019. – Vol. 37(2). – P. 149–157.

4. Takshak, S. Defense potential of secondary metabolites in medicinal plants under UV-B stress / S. Takshak, S. B. Agrawal // Journal of Photochemistry and Photobiology B: Biology. – 2019. – Vol. 193. – P. 51–88.

5. Herbal extracts, lichens and biomolecules as natural photo-protection alternatives to synthetic UV filters. A systematic review / M. Radice [et al.] // Fitoterapia. – 2016. – Vol. 114. – P. 144–162.

6. Photoprotective capacities of lichen metabolites: a joint theoretical and experimental study / M. Millot [et al.] // Journal of Photochemistry and Photobiology B: Biology. – 2012. – Vol. 111(8). – P. 17–26.

7. Lichenic extracts and metabolites as UV filters / F. Lohézic-Le Dévéhat [et al.] // Journal of Photochemistry and Photobiology. B: Biology. – 2013. – Vol. 120. – P. 17–28.

8. Храмченкова, О. М. Цитотоксическая активность ацетоновых экстрактов из лишайников в отношении линии кератиноцитов человека HaCAT / О. М. Храмченкова, М. В. Матвеенков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2018. – № 3 (108). – С. 81–86.

9. Храмченкова, О. М. Фотозащитная активность экстрактов из пяти видов лишайников в отношении кератиноцитов человека (HaCAT) / О. М. Храмченкова, М. В. Матвеенков // Журнал Бел. гос. ун-та. Экология. – 2018. – № 4. – С. 52–62.

10. In vitro cytotoxic activity of Thai medicinal plants used traditionally to treat cancer / A. Itharat [et al] // Journal of ethnopharmacology. – 2004. – Vol. 90(1). – P. 33–38.

11. Antioxidant, antimicrobial and antiproliferative activities of five lichen species / T. Mitrović [et al.] // International Journal of Molecular Sciences. – 2011. – Vol. 12(8). – P. 5428–5448.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Институт радиобиологии
НАН Беларуси

Поступила в редакцию 10.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

Информатика

УДК 004.41:004.054:004.7

Построение рабочего места для тестирования виртуальной сетевой инфраструктуры

А.В. Воруев, И.О. Демиденко, С.М. Колаиб, Д.В. Домасканов

В статье рассматривается подход к реализации рабочего места специалиста по тестированию виртуальной сетевой инфраструктуры. Предлагаются решения по оперативному контролю расхода ресурсов, устранения конфликтов и программных ограничений по сложности моделируемых систем.
Ключевые слова: HyperV, EVE-NG, виртуальная сеть, WorldSkills.

The article contains an approach to the implementation of a virtual network infrastructure testing specialist's workplace. Solutions for operational control of resource consumption, elimination of conflicts and software restrictions on the complexity of simulated systems are described.
Keywords: HyperV, EVE-NG, virtual network, WorldSkills.

Введение. Разработка и внедрение решений по оптимизации сетевой инфраструктуры – процедура, включающая в себя многоитеративный подход, содержащий тестирование новой или обновленной сетевой топологии на работоспособность, совместимость с задействованными протоколами и типами рабочей нагрузки в граничных условиях эксплуатации при кратковременных пиках загрузки и на длительные периоды бессбойной работы.

Например, летом 2018 г., в рамках проекта Natick, группа исследователей из Microsoft успешно запустила экспериментальный подводный дата-центр у берегов Шотландии. Летом 2020 г. компания извлекла подводный ЦОД в начале лета, после чего эксперты занялись изучением техники и воздуха внутри. Подводные серверные фермы продемонстрировали хорошую производительность и оказались в восемь раз надёжнее, чем их наземные аналоги. Эксперты отметили повышенную энергоэффективность подводных дата-центров. Их месторасположение позволяет сэкономить энергию на искусственном охлаждении серверов. Это особенно важно для регионов со слабой энергетической инфраструктурой.

Подобные эксперименты дорогостоящи и занимают много времени. Масштабирование практики в качестве промышленной предполагает использование виртуальной инфраструктуры, что позволяет снизить стоимость и сжать сроки до получения результатов.

1. Платформы построения виртуальных сетевых топологий. В данной статье не производится сравнение разных типов гипервизоров и балансировка ресурсов в кластере из нескольких вычислительных систем. Предполагается работа специалиста в режиме локального взаимодействия с виртуальными машинами, часть из которых будет выполнять нагрузку узлов виртуальной сетевой инфраструктуры.

Для демонстрации примера в качестве операционной системы (носителя) гипервизора будет использована Windows Server 2012/2016, в качестве платформы гипервизора HyperV, который входит в ее состав (рисунок 1).

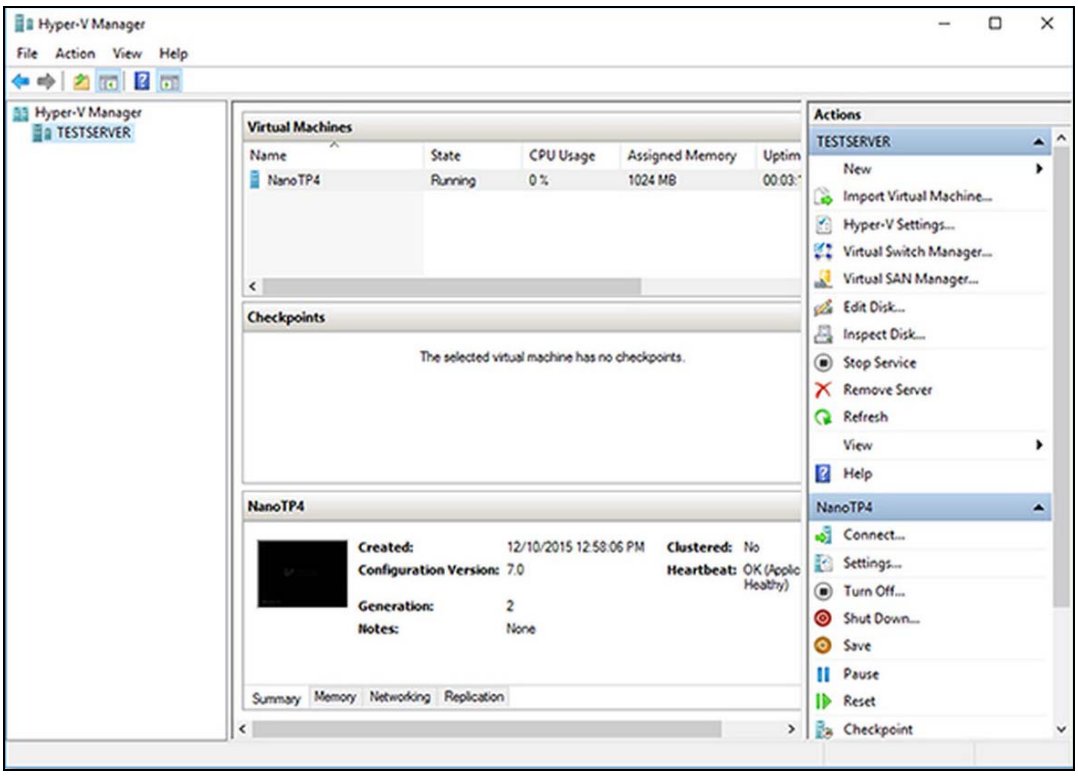


Рисунок 1 – Интерфейс менеджера виртуальных машин HyperV

Для учета нагрузки на ресурсную модель операционной системы следует использовать систему оперативного мониторинга. В нашем случае задействуется Rainmeter-4.3.1 (рисунок 2), который отображает загрузку CPU, RAM и дисковой памяти. Мониторинг загрузки сетевых каналов на стороне гипервизора в этом пакете сервисов не обязателен, поскольку это исследование более эффективно при внутреннем мониторинге самой сети.

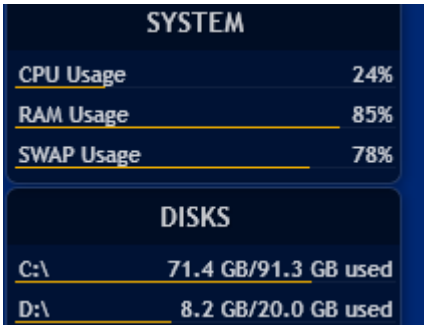


Рисунок 2 – Мониторинг ресурсов системы средствами Rainmeter

Виртуальные сервера и рабочие станции, каждая из которых должна быть подключена к смоделированному порту виртуальной сетевой инфраструктуры, являющейся, в свою очередь, тоже виртуальным сервером.

Решением данного типа, которое отвечает требованиям L2/L3-моделирования сетевого трафика с использованием эмуляции реальных образов сетевых операционных систем, является среда Cisco Modeling Labs (развитие проекта VIRL), показанная на рисунке 3.

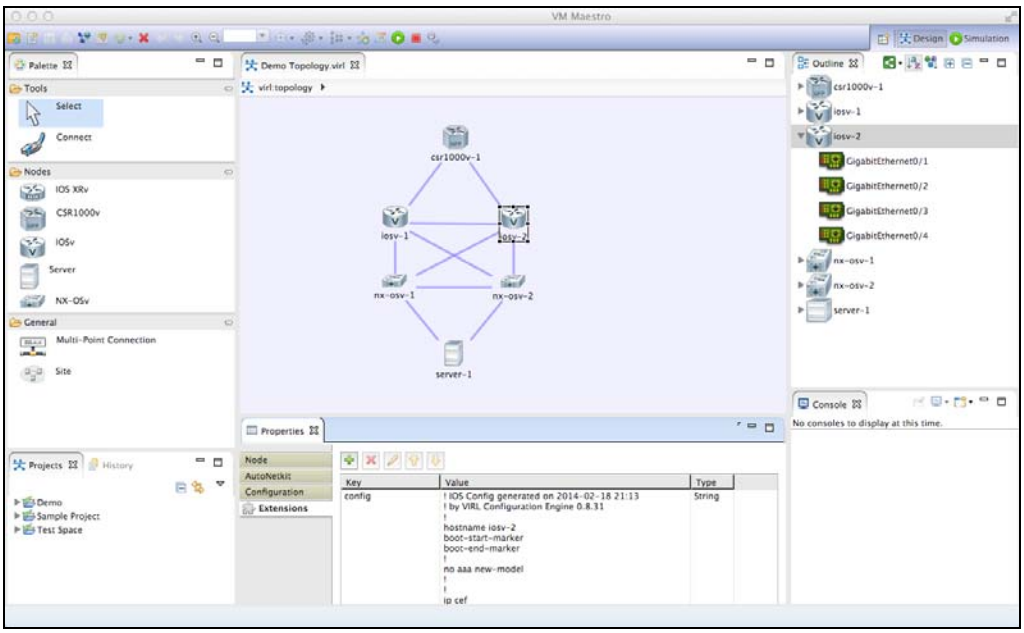


Рисунок 3 – Интерфейс Cisco Modeling Labs

Недостатком платформы CML являются проприетарные решения моделируемых инфраструктур, ориентированные на применение устройств компании Cisco. Вторая рассматриваемая платформа EVE-NG лишена подобного недостатка, поэтому на дальнейших этапах построения рабочего места для тестирования виртуальной сетевой инфраструктуры используется EVE-NG Learning Center Version.

2. Ограничения выбранной платформы. Одним из недостатков использования гипервизора HyperV является отсутствие гибких настроек виртуального коммутатора при трансляции трафика между виртуальными операционными системами, сетевыми узлами, внешней сетевой инфраструктурой и другими элементами среды.

В нашем случае данный недостаток является малозначительным, поскольку функции коммутации выполняет виртуальная модель сетевого устройства, а на долю виртуальных коммутаторов HyperV остается подключение виртуальных машин к EVE-NG без управления сетевым трафиком. Для разблокирования множественных подключений с нескольких виртуальных MAC-адресов, сгенерированных для виртуальных машин, к порту виртуального сетевого устройства следует изменить настройку Mac address spoofing (рисунок 4) каждого сетевого интерфейса виртуальной машины EVE-NG.

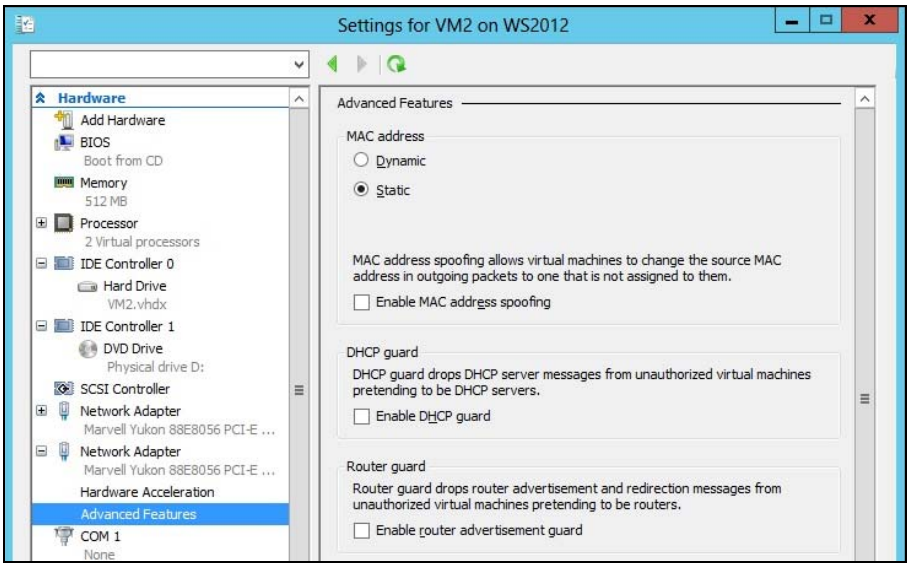


Рисунок 4 – Опции настройки Advanced Features сетевого адаптера виртуальной машины в HyperV

Конфликт параметра Mac address spoofing приведет к блокировке некоторых типов сетевого трафика. Например, DHCP-request. Также вероятно возникновение эффекта «Jitter» при подключении нескольких виртуальных машин к общему интерфейсу виртуального узла коммутации или маршрутизации.

Другим недостатком, который придется учитывать при использовании EVE-NG, является ограничение на число магистральных интерфейсов для подключения виртуальной машины управления топологией моделируемой сети к коммутаторам HyperV, которое может быть изменено за счет операционной системы носителя, либо обойдено за счет деления топологии на независимые сегменты, управляемые отдельными экземплярами виртуальных машин HyperV.

3. Создание примера сетевой инфраструктуры. Необходимо создать логическую сетевую топологию, в которой к внутренней сети головного офиса HEADQUARTER подключается внешний сетевой сегмент Head of VPN, регламентирующий взаимодействие сети с внешними абонентами и являющийся центром топологии Hub and Spoke VPN в данной логической топологии (рисунок 5).

В качестве моделей сетевых устройств EVE-NG рекомендуются следующие:

- маршрутизаторы csr1000v-universalk9-15.4-3S;
- коммутаторы viosl2-15.2.4.55e.

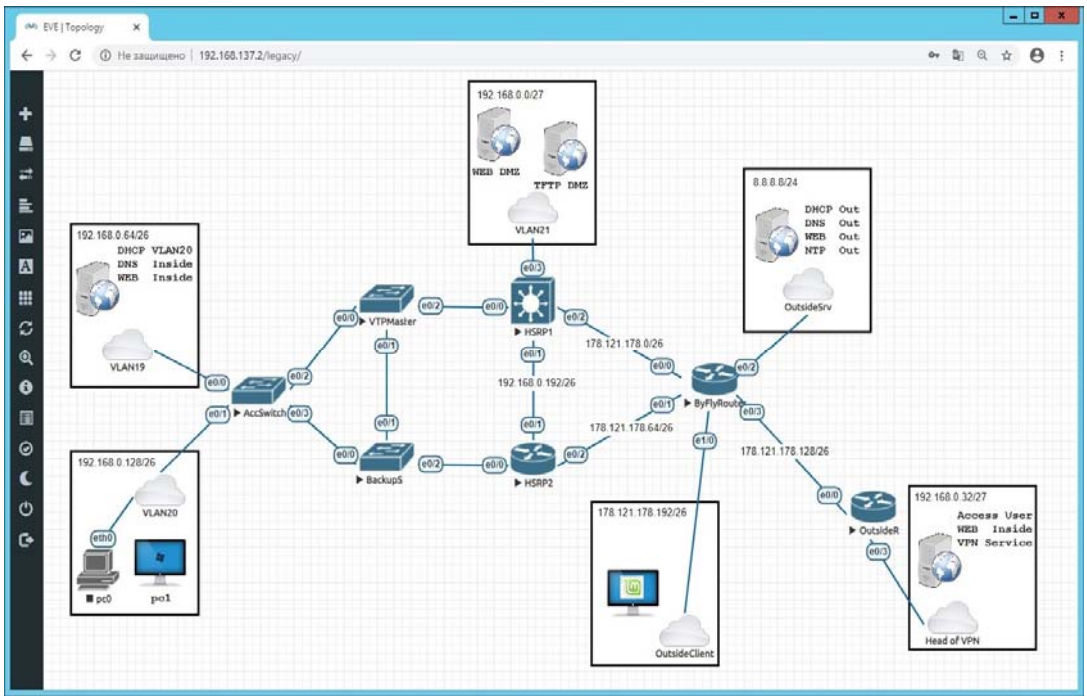


Рисунок 5 – Топология тестовой сети HEADQUARTER

Последовательность настройки:

Шаг 1.

В группу коммутации входит три устройства Cisco Catalist 2960. Избыточная структура физического уровня предполагает использование протокола семейства STP.

В сети запланировано использование VLAN 19, VLAN 20 и VLAN 21. Для автоматизации настроек роль VTP сервера назначается устройству VTPM. Устройства BackupS и AccSwitch подключаются в роли клиента.

Требуемые параметры:

Имя домена VTP – WSB2020. Пароль – tp39itnsa. Версия VTP 2.

Шаг 2.

Настройка по умолчанию Cisco Catalist 2960 для согласования портов использует протокол Per-VLAN Spanning Tree (PVST), который не обеспечивает достаточной скорости восстановления топологии. Необходимо переключить все устройства коммутации в режим Rapid PVST+.

Требуемые параметры:

Устройство VTPM должно иметь статус Root Bridge для VLAN 20 и 21 и Secondary Root Bridge для VLAN 19. Устройство BackupS должно иметь статус Root Bridge для VLAN 19 и Secondary Root Bridge для VLAN 20 и 21.

Шаг 3.

Группа маршрутизации топологии включает в себя четыре маршрутизатора Cisco различных моделей. Устройство ByFlyR является центром. На его интерфейсах преднастроены IP-адреса соответствующих сетей.

Сеть HEADQUARTER работает с внутренним адресным пространством 192.168.0.0/24. Сетевой диапазон разделен на сегменты для решения различных задач. В сетях 192.168.0.0/27, 192.168.0.64/26 и 192.168.0.128/26 устройству Virtual Router назначается первый разрешенный адрес, устройству H1 – второй, устройству H2 – третий. IP адреса серверов преднастроены, но необходимо скорректировать настройки сетевой маски и шлюза по умолчанию.

Требуемые параметры:

Пограничным устройством сети считается Virtual Router, роль которого распределена между устройствами HR1 и HR2 по технологии HSRP или VRRP или GLBP. Для трафика VLAN 19 мастером маршрутизации должен служить маршрутизатор HR2, для VLAN 20 и 21 – маршрутизатор HR1. В случае отключения любого из этих устройств сетевой трафик должен обслуживаться вторым устройством, если сеть назначения остается доступной.

Например, если отключить маршрутизатор H1, сеть 192.168.0.0/27 станет недостижимой.

Шаг 4.

Сеть провайдера ByFly реализована на протоколе динамической маршрутизации OSPFv2. Внутренняя сеть HEADQUARTER на данном этапе не обслуживается динамическими протоколами маршрутизации.

Требуемые параметры:

Номер процесса OSPF 2020, area 0, пароль доступа к аутентификации HR1 – first, HR2 – second, OutsideR – outside.

Клиент Outside Client подключается к сетевому диапазону 178.121.178.192/26 и получает DHCP-сервис от устройства ByFlyR.

Устройства Host1 и Host2 должны получить DHCP-сервис от узла 192.168.0.126.

На данном этапе успешным решением считается движение трафика между Outside Client и узлом 8.8.8.8, а также между Host1 и Host2 и узлами 192.168.0.30, 192.168.0.29 и 192.168.0.126.

Шаг 5.

Настройте статический NAT Outside Client для к серверам WEB DMZ и TFTP DMZ.

Средствами ACL ограничьте доступ любому типу трафика из сети DMZ SRV, кроме запрошенного извне.

Настройте динамический NAT для остальных компьютеров и других сетевых узлов внутренней сети офиса к узлу 8.8.8.8.

Для узла Host2 ограничьте взаимодействие за пределами VLAN 20 только разрешением доступа к веб-страницам.

Шаг 6.

Настройте DNS-сервис на узлах 192.168.0.126 (Таблица 1) и 8.8.8.8 (Таблица 2).

Таблица 1 – DNS соответствие в локальном сегменте сети

IP адрес	DNS узла
8.8.8.8	google.com
192.168.0.126	headquarter.by
192.168.0.30	web.headquarter.by
192.168.0.29	tftp.headquarter.by
192.168.0.62	web.remoute.by

Таблица 2 – DNS соответствие во внешнем сегменте сети

IP адрес	DNS узла
8.8.8.8	google.com
178.121.178.62:80	web.headquarter.by
178.121.178.62:69	tftp.headquarter.by
178.121.178.62:8080	web.remoute.by

Шаг 7.

Настройте NTP-синхронизацию сетевых устройств.

Для устройства ByFlyR источником синхронизации должен быть узел 8.8.8.8.

Для остальных коммутирующих и маршрутизирующих устройств топологии источником синхронизации должно быть назначено устройство ByFlyR.

Шаг 8.

Настройте VPN-туннель между HR1, HR2, OutsideR. Вершиной этой логической структуры Hub and Spoke назначьте устройство OutsideR.

На данном этапе успешным решением считается движение трафика между Outside Client и узлом 8.8.8.8, а также web.headquarter.by и tftp.headquarter.by (по назначенным адресам NAT).

Узлы Host1 и Host2 должны получать предписанный ограничениями шага 5 доступ к узлам google.com, headquarter.by, web.headquarter.by, tftp.headquarter.by, web.remoute.by.

Шаг 9.

На устройстве web.remoute.by настройте сервис авторизации удаленных клиентов User1 и User2 с правами доступа, аналогичными Host1 и Host2. Проверьте работу пользовательских политик с сетевого узла Outside Client.

Заключение. При составлении статьи описана практика разработки рабочего места для конкурсанта компетенции «Сетевое и системное администрирование» национального финала РБ чемпионата WorldSkills Belarus 2020.

Литература

1. Воруев, А. В. Инкапсуляция магистрального трафика центра обработки данных / А. В. Воруев, О. М. Демиденко, В. Д. Левчук, П. Л. Чечет // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 88–93.

2. Воруев, А. В. Программируемое управление доступом к сети с адаптивной настройкой физических интерфейсов / А. В. Воруев, И. О. Демиденко, А. И. Чернышев, С. Ю. Михневич // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2018.– № 6 (111). – С. 55–62.

3. Воруев, А. В. Решение задач по реализации Dual Stack в IP-сетях / А. В. Воруев, И. О. Демиденко, С. М. Колаиб // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2020. – № 3 (120). – С. 105–111.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 22.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 681.32.001

Автоматизация подбора персонифицированных предложений на примере задачи поиска фильма

Н.Б. Осипенко, В.М. Мироненко

Автоматизация экспертного оценивания в задаче адресного подбора информационных ресурсов решена на примере подбора наиболее и наименее подходящих человеку фильмов. Основной акцент в работе сделан на описании используемого алгоритмического инструментария. Предложенный в статье прототип рекомендательной системы основан на разработанной авторами концепции принятия решений с учетом индивидуального предназначения человека и его текущего состояния на базе результатов тестирования.
Ключевые слова: рекомендательная система, автоматизация индивидуального подхода, предназначение человека, психологические тесты, темы человеческой деятельности.

Automation of expert assessment in the task of targeted selection of information resources is solved on the example of selecting the most and least suitable films for a person. The main emphasis in the work is made on the description of the algorithmic tools used. The prototype of the recommendation system proposed in the article is based on the decision-making concept developed by the authors, taking into account the individual purpose of the person and his current state based on the test results.
Keywords: recommendation system, automation of an individual approach, human purpose, psychological tests, topics of human activity.

Введение. В настоящей статье предлагается реализация описанной в [1] концепции рекомендательной системы с учетом индивидуального предназначения человека на примере задачи поиска пользователем подходящих к просмотру фильмов.

За последние годы на рынке услуг увеличилась популярность систем по подбору информационного контента, основываясь на личностных качествах человека. Существуют разные способы персонализации подбора контента, основываясь на поведении человека, на истории его запросов или покупок. Для корректной работы подобным алгоритмам требуется огромное количество собранной информации, что в большинстве своем делает невозможным использование этого подхода в организациях, не владеющих соответствующими данными. Такие гиганты как Google или Facebook, сервисы которых участвуют практически в любой из сфер жизни человека, активно пользующегося интернет-технологиями, успели нарастить огромную базу знаний относительно практически каждого человека, основываясь на поведении и предпочтениях, в частности, при покупке определённого товара. Благодаря таким данным эти компании могут обучать нейронные сети, которые способны предлагать контент, наиболее подходящий человеку. Такой подход не всегда верен, так как каждый день человека может значительно отличаться от предыдущего. Кроме того, этот подход опирается на апостериорную информацию от достигнутого, консервируя сложившиеся предпочтения, и не учитывает подсознательные априорные интересы человека, связанные с его саморазвитием.

Подход, разработанный в рамках данной работы, предлагает иной взгляд на взаимодействие с пользователем. Алгоритмы анализируют не просто случайные и незначимые данные о действиях пользователя, а взаимодействие с информацией, которую пользователь непосредственно предоставляет ресурсу, причем разными способами: начиная от введения личной информации и заканчивая оценкой пройденных тестов.

Таким образом, описываемый в работе прототип созданной рекомендательной системы опирается на концепцию [1] и ориентирован на оценку личностных характеристик испытуемого с учетом его индивидуального предназначения и текущего состояния с использованием результатов тестирования с целью подбора наиболее и наименее подходящего информационного ресурса на примере фильмов.

Идея диагностики потенциальных качеств человека при выборе подходящего контента. Для минимизации времени отвлечения пользователя воспользуемся традиционной информацией в виде даты рождения. Существует гипотеза, что дата рождения отражает генетический потенциал человека, а многие практикующие психологи с успехом используют алгоритм квадрата Пифагора по выявлению потенциально наиболее характерных личностных качеств. Еще одним таким инструментом считается диагностика по психологическим особенностям. Нами использованы результаты тестирования по предпочтениям цветовой палитры, которая также не обременительна для пользователя. В предложенном здесь алгоритме сделана попытка синтезировать оба подхода на основе специально разработанной систематизации тем деятельностей (ТД) человека, приведенной в таблице 1, и увязки ее элементов с диагностическими альтернативами психологических тестов, в частности с соответствующими цифровыми кодами квадрата Пифагора [1].

Таблица 1 – Смысл тем деятельности и соответствующие им цифровые коды квадрата Пифагора

	1	2	3	4	5
7	1,3 охранение	1,2 рождение и развитие	1,6 волеизъявление	1,4 обеспечение надежности в отношениях	8,9 постижение богатства красоты
6	1,7 мотивация	5,8 творение	4,6 преобразование в труде	1,9 настроенность на благодать мира и природы	2,6 интеграция деятельностей
5	3,9 обдумывание	2,8 обучение	4,8 намерения самоактуализации	3,4 совет	7,8 постижение жизни силой интеллекта
4	6,9 информирование по новой ситуации	6,7 освоение перспектив внешней деятельности	3,6 поддержка себя и людей	4,5 выражение признательности	4,9 создание впечатления от общения
3	3,8 самоосознание	2,3 порождение речи	3.5 заинтересованность жизнью	2,7 логичное мышление	5,9 отражение жизни в памяти
2	4,7 формирование мировосприятия в системе родного языка	6,8 обеспечение настроения гармоничного развития	2,5 интуитивное влечение друг к другу	2,4 принятие себя и близких	7,9 удовлетворение потребности в непосредственном общении
1	5,6 излучение просветляющей кротости	1,5 эволюционное изменение жизнедеятельности	2,9 проявление состояния бодрости	3,7 циркуляция взаимодействий	5,7 синтез всех составляющих жизнедеятельности

Основная идея подхода схематично показана на рисунке 1. Разрабатываемый прототип рекомендательной системы для подбора фильмов позволяет адаптироваться к особенностям субъекта и предлагать ему ту информацию, в которой он нуждается на текущий момент. В качестве первой версии реализации такого подхода являлась рекомендательная система в виде сайта подбора профессии [1].

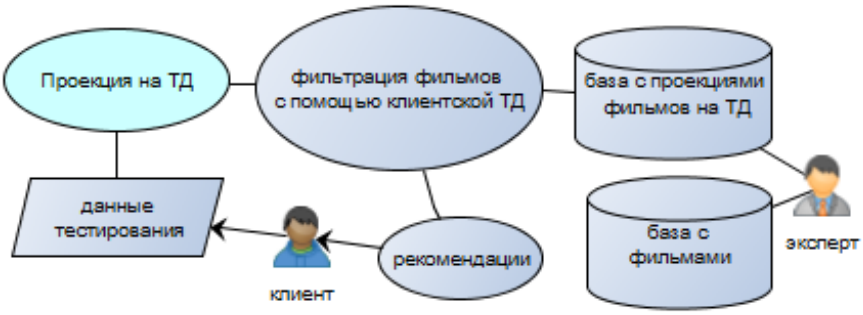


Рисунок 1 – Схема адресного подбора фильмов

Алгоритм диагностики потенциальных качеств человека при выборе подходящего контента. Настоящий алгоритм подбора, являющийся модификацией алгоритма [2], представлен в виде пяти этапов. Первые этапы основаны на использовании цифрового, получаемого по алгоритму квадрата Пифагора, последний – предназначен для фильтрации полученных результатов на предыдущих шагах.

Этап 1. Построение квадрата Пифагора и его корректировка с учетом особенностей распределения цифр и смены тысячелетия.

Этап 2. Формирование весов ячеек деятельностей $KK(\circ,\circ)$. Для этого воспользуемся функцией соответствия адреса ячейки деятельностей $(j.i)$ паре цифр цифрового кода квадрата Пифагора $Q(j.i), j=\overline{1,7}, i=\overline{1,5}$, значения которого приведены в таблице 1. Положим для управляющей 36-й темы $Q(8.1)=(1,8)$.

Этап 3. Нормировка весов ячеек деятельностей. Для нормировки $KK(\circ,\circ)$ сформируем одномерный вектор $K(\circ)$ из $KK(\circ,\circ)$: $K((j-1)\times 5+i)=KK(j,i), j=\overline{1,7}, i=\overline{1,5}, K(36)=KK(8,1)$. Отсортируем вектор $K(\circ)$ по убыванию и получим вектор $Korder(\circ)$ и вектор $Index(\circ)$ – исходные номера вектора $K(\circ)$ в $Korder(\circ)$. Получим среднее медианное $K_{med}=Korder(18)$, минимальное $K_{\min}=Korder(36)$, максимальное $K_{\max}=Korder(1)$.

Если $K_{med}=0$, в качестве K_{med} берем первое ненулевое значение $Korder(k), k=\overline{17,1}$, которые рассчитываются по формулам:

$$Korder(l)=(Korder(l)-K_{med})/(K_{\max}-K_{med}), l=\overline{1,18};$$
$$Korder(l)=(Korder(l)-K_{med})/(K_{med}-K_{\min}), l=\overline{19,36}.$$

Перейдем к двумерной матрице $SS(\circ,\circ)$, являющейся результатом нормирования матрицы $KK(\circ,\circ)$. В цикле $l=\overline{1,36}$ определим для индексов $j=\left[Index(l)/5\right]+1$ (где $\left[A\right]$ – целая часть A) и $i=Index(l)-5\cdot(j-1)$ значения матрицы $SS(j,i)=Korder(l)$.

Этап 4. Построение весов наиболее и наименее рекомендуемых продуктов (фильмов).

Цикл по фильмам. Пусть $m=\overline{1,M}$ – набор оцениваемых экспертами фильмов. Пусть $n=\overline{1,N}$ – набор экспертов, оценивающих фильмы. Пусть для каждого m-го фильма имеется поднабор $n_m=\overline{1,N_m}$ экспертов, оценивших его. Пусть $W^m(j,i)=0, j=\overline{1,7}, i=\overline{1,5}, W^m(8,1)=0$ – начальные значения весов ячеек деятельностей для m-го фильма.

Цикл по экспертам. Для m-го фильма $n_m=\overline{1,N_m}$. Эксперт выбирает $K_{ps}^{n_m}$ позитивных ячеек деятельностей для m-го фильма ($3\le K_{ps}^{n_m}\le 6$) с помощью смыслов деятельностей и $K_{pc}^{n_m}$ – позитивных ячеек по таблице цветов.

Предполагается, что n_m-й эксперт выбирает $K_{ps}^{n_m}$ позитивных по смыслу тем деятельности ячеек $(j_{ps}^{n_m}(l), i_{ps}^{n_m}(l)), j_{ps}^{n_m}(l)\in\{1,...,8\}, i_{ps}^{n_m}(l)\in\{1,...,5\}$ с весами $V_{ps}^{n_m}(l)$. Эти веса формируются из экспертных показаний степени представленности (выраженности) выбранной темы деятельности в *m*-м продукте (фильме). Для этого эксперту предъявляется таблица с описанием смыслов тем деятельностей в ячейках и соответствующие слайдеры (ползунки) со шкалой от 0% до 100%. В качестве позитивных ячеек эксперту предлагается отметить $K_{pc}^{n_m}$ ячеек с наибольшими степенями представленности. При занесении в буфер памяти значения весов в векторе $V_{ps}^{n_m}(l)$, $l=\overline{1,K_{ps}^{n_m}}$ упорядочиваются по убыванию в шкале [0,1]: $V_{ps}^{n_m}(l)=(K_{ps}^{n_m}-l+1)\Big/K_{ps}^{n_m}, l=\overline{1,K_{ps}^{n_m}}$.

Затем определяются позитивные ячейки деятельностей $(j_{pc}^{n_m}(l), i_{pc}^{n_m}(l))$ и их веса $V_{pc}^{n_m}(l)$ на основе последовательного выделения экспертом тех цветов в таблице цветов, которые по

его ощущениям в наибольшей степени подходят этому фильму. При этом в буфер памяти номера ячеек и их веса $V_{pc}^{n_m}(l)=(K_{pc}^{n_m}-l+1)\Big/K_{pc}^{n_m}, l=\overline{1,K_{pc}^{n_m}}$ заносятся согласно очередности их выбора экспертом. Далее эти веса проецируются на матрицу весов $W^m(\circ,\circ)$ для m-го фильма для позитивных по смыслу ячеек

$$W^m(j_{ps}^{n_m}(l),i_{ps}^{n_m}(l))=W^m(j_{ps}^{n_m}(l),i_{ps}^{n_m}(l))+B_{ps}^{n_m}\cdot V_{ps}^{n_m}(l), l=\overline{1,K_{ps}^{n_m}},$$

где $B_{ps}^{n_m}$ – вес n_m-го эксперта для m-го фильма в аспекте оценки высокой представленности тем деятельностей.

Начальные значения весов $B_{ps}^{n_m}=1/N_m, n_m=\overline{1,N_m}$.

Предполагается, что в процессе эксплуатации сайта подбора фильмов можно будет со временем добавить процедуру ранжирования этих весов в зависимости от оценки квалификации экспертов, а также степени схожести экспертов с пользователем сайта по их индивидуальным матрицам $SS(\circ,\circ)$. Для выраженных по цвету ячеек $W^m(j_{pc}^{n_m}(l),i_{pc}^{n_m}(l))=W^m(j_{pc}^{n_m}(l),i_{pc}^{n_m}(l))+B_{pc}^{n_m}\cdot V_{pc}^{n_m}(l), l=\overline{1,K_{pc}^{n_m}}$, где $B_{pc}^{n_m}=1/(4\cdot N_m), n_m=\overline{1,N_m}$.

Для невыраженных ячеек по смыслам и цветам формулы аналогичны, за исключением того, что веса выбираемых ячеек отрицательны.

Здесь n_m-й эксперт выбирает $K_{ns}^{n_m}$ негативных по степени представленности темы деятельности ячейки в продукте (фильме) $(j_{ns}^{n_m}(l),i_{ns}^{n_m}(l)), j_{ns}^{n_m}(l)\in\{1,...,8\}, i_{ns}^{n_m}(l)\in\{1,...,5\}$ с весами $V_{ns}^{n_m}(l)$. Вектор весов $V_{ns}^{n_m}$ для негативных ячеек формируется так же, как и вектор весов для позитивных ячеек, с помощью слайдеров, показывающих степень представленности темы деятельности в продукте (фильме). Однако здесь эксперт в первую очередь выбирает те темы, которые в этом фильме отражены меньше всего. После снятия $K_{ns}^{n_m}$ показателей слайдеров под ячейками их значения отображаются на шкалу [0,1] и заносятся в буфер весов $V_{ns}^{n_m}(l)$, $l=\overline{1,K_{ns}^{n_m}}$ в порядке их возрастания (одновременно с занесением в буфер адресов $(j_{ns}^{n_m}(l),i_{ns}^{n_m}(l))$), а затем преобразуется по формуле:

$$V_{ns}^{n_m}(l)=1-V_{ns}^{n_m}(l),\ \ l=\overline{1,K_{ns}^{n_m}}.$$

Далее определяем негативные ячейки деятельностей $(j_{nc}^{n_m}(l),i_{nc}^{n_m}(l))$ и их веса по таблице цветов: $V_{nc}^{n_m}(l)=(K_{nc}^{n_m}-l+1)\Big/K_{nc}^{n_m}, l=\overline{1,K_{nc}^{n_m}}$.

Затем эти веса проецируются на матрицу весов $W^m(\circ,\circ)$ для m-го фильма для ячеек деятельности с низкой представленностью в фильме: $W^m(j_{ns}^{n_m}(l),i_{ns}^{n_m}(l))=W^m(j_{ns}^{n_m}(l),i_{ns}^{n_m}(l))-B_{ns}^{n_m}\cdot V_{ns}^{n_m}(l), l=\overline{1,K_{ns}^{n_m}}$, где $B_{ns}^{n_m}$ – вес n_m-го эксперта для m-го фильма в аспекте оценки низкой представленности тем деятельностей.

Начальные значения весов $B_{ns}^{n_m}=1/N_m, n_m=\overline{1,N_m}$.

Для негативных по цвету ячеек $W^m(j_{nc}^{n_m}(l),i_{nc}^{n_m}(l))=W^m(j_{nc}^{n_m}(l),i_{nc}^{n_m}(l))-B_{nc}^{n_m}\cdot V_{nc}^{n_m}(l), l=\overline{1,K_{nc}^{n_m}}$, где $B_{nc}^{n_m}=1/(4\cdot N_m), n_m=\overline{1,N_m}$.

Конец цикла по экспертам $n_m=\overline{1,N_m}$.

Сборка для m-го фильма l_p позитивных и l_n негативных ячеек деятельностей и их весов. Положим $l_p=0, l_n=0$.

Цикл $j=\overline{1,7}, i=\overline{1,5}$. Если $W^m(j,i)>0$, то $l_p=l_p+1$, $Addr_p^m(l_p)=(j,i)$, $V_p^m(l_p)=W^m(j,i)$, иначе $l_n=l_n+1$, $Addr_n^m(l_n)=(j,i)$, $V_n^m(l_n)=W^m(j,i)$. Конец цикла.

Если $W^m(8,1)>0$, то $l_p=l_p+1$, $Addr_p^m(l_p)=(8,1)$, $V_p^m(l_p)=W^m(8,1)$, иначе $l_n=l_n+1$, $Addr_n^m(l_n)=(8,1)$, $V_n^m(l_n)=W^m(8,1)$.

$K_p^m=l_p$, $K_n^m=l_n$.

Конец цикла по фильмам $m=\overline{1,M}$.

Этап 5. Фильтрация набора продуктов (фильмов) с помощью матрицы весов ячеек деятельностей для конкретного пользователя. Произведем фильтрацию набора продуктов «сквозь сито» рабочей структуры – индивидуальной матрицы весов 36-ти тем деятельностей для пользователя сайта. Кратко опишем входные, выходные данные и алгоритм самого процесса фильтрации.

Описание входных данных. Рабочая структура в виде матрицы весов: $SS(j,i)$, $j=\overline{1,7}, i=\overline{1,5}$ с 36-ой ячейкой $SS(8,1)$, алгоритм получения которой приведен в этапе 3. Таблица (список) продуктов с четырьмя группами атрибутов:

– наименование m-го продукта $m=\overline{1,M}$;

– текстовое описание m-го продукта $m=\overline{1,M}$ со ссылкой на интернет-ресурсы;

– набор из K_p^m позитивных пар для m-го продукта $m=\overline{1,M}$ вида (адрес ячейки, вес ячейки), где адрес ячейки: $Addr_p^m(l)=(j_p^m(l),i_p^m(l)), j_p^m(l)\in\{1,...,8\}, i_p^m(l)\in\{1,...,5\}, l=\overline{1,K_p^m}$ и вес ячейки: $(j_p^m(l),i_p^m(l)):\ V_p^m(l),\ l=\overline{1,K_p^m}$;

– аналогичный набор из K_N^m негативных пар вида (адрес ячейки, вес ячейки), где адрес ячейки: $Addr_n^m(l)=(j_n^m(l),i_n^m(l)), j_n^m(l)\in\{1,...,8\}, i_n^m(l)\in\{1,...,5\}, l=\overline{1,K_n^m}$ и вес ячейки $(j_n^m(l),i_n^m(l)):\ V_n^m(l),\ l=\overline{1,K_n^m}$. Описание алгоритма получения весов наиболее и наименее рекомендуемых продуктов (фильмов) приведено в этапе 4.

Описание выходных данных: отсортированный по убыванию критерия целесообразности набор продуктов, в котором L_p верхних в списке – наиболее подходящие, а L_N нижних – наименее подходящие продукты.

Описание алгоритма фильтрации в виде пяти шагов.

Шаг 1. Расчет для каждого m-го продукта $m=\overline{1,M}$ ($M>20$) критерия его целесообразности $G(m)$:

$$G(m)=\sum_{l=1}^{K_p^m}(V_p^m(l)\cdot SS(j_p^m(l),i_p^m(l)))-\sum_{l=1}^{K_n^m}(V_n^m(l)\cdot SS(j_n^m(l),i_n^m(l))).$$

Шаг 2. Сортировка вектора критерия целесообразности $G(m)$, $m=\overline{1,M}$ по убыванию. Пусть $Sorder(m),\ m=\overline{1,M}$ – отсортированный вектор $G(.)$ по убыванию, т. е. $Sorder(1)=\max\{G(.)\}, Sorder(M)=\min\{G(.)\}$. Пусть $Index(k), k=\overline{1,M}$ – соответствующие номера исходного вектора $G(.)$ в отсортированном векторе $Sorder(.)$.

Шаг 3. Выбор позитивных продуктов. Положим $Status(l)=0, l=\overline{1,M}$ – вектор статусов продукта. Отметим, что для значимых ячеек статус равен +1, для незначимых – -1, для нейтральных – 0. Пусть $k=1$. Пока $k\le 6$ и $Sorder(k)\ge 0$ определим $\{Status(Index(k))=Status(Index(k))+1$ и $k=k+1\}$.

Если $Sorder(k)<0{,}5\cdot Sorder(k-1)$, то $Status(Index(k))=0$ и переход на 4, иначе пока $((k\le 9$ или $(Sorder(k+1)\ge 0{,}99\cdot Sorder(k))$ и $(Sorder(k+1)\ge 0{,}85\cdot Sorder(k))$, выполним: $k=k+1$ и $Status(Index(k))=Status(Index(k))+1$.

Шаг 4. Выбор негативных продуктов. Пусть $k = 1$. Пока $k \le 6$ и $Sorder(M - k + 1) \le 0$ определим $Status(Index(M + 1\text{-}k)) = Status(Index(M + 1\text{-}k))\text{-}1$ и $k = k + 1$.

Если $(Sorder(M - k + 1) > 0{,}5 \cdot Sorder(M\text{-}k + 2))$, то $Status(Index(M - k + 1)) = 0$ и переход на 5, иначе пока $((k \le 9$ или $(Sorder(M\text{-}k) \le 0{,}99 \cdot Sorder(M + 1\text{-}k))$ и $(Sorder(M\text{-}k) \le 0{,}85 \cdot Sorder(M + 1\text{-}k))$, выполним:

$$k = k + 1 \text{ и } Status(Index(M + 1 - k)) = Status(Index(M + 1 - k)) - 1.$$

Шаг 5. Вывод полученных результатов (наименования продукта-фильма, его статуса $Status(l), l = Index(k)$ и веса $Sorder(k)$ для всех продуктов).

Результаты апробации. Разработанный прототип рекомендательной системы подбора фильмов доступен в Интернете по ссылке http://13.59.205.2/login. После построения списка подходящих и не подходящих категорий фильмов пользователь может оценить каждый из предложенных вариантов путем указания адекватности результата. Приложение протестировано с использованием 30 фильмов, каждый из которых был оценен двумя экспертами. Результаты оценки персонифицированных предложений на примере задачи поиска фильма бета-тестировщиками показали работоспособность выбранного подхода. Релевантность подборов фильмов будет расти по мере увеличения тестов, добавления подвергшихся экспертизе фильмов, увеличения количества экспертов и получения обратной связи с пользователем (накопления отзывов о рекомендациях и их оценке) и использования ее в настройке параметров и корректировке алгоритма разрабатываемой рекомендательной системы.

Заключение. Разработанный прототип рекомендательной системы предназначен для подбора наиболее и наименее подходящего информационного ресурса в виде группы фильмов, основываясь на личностных характеристиках испытуемого и текущем его состоянии с использованием результатов тестирования. Метод создания такой рекомендательной системы и ее алгоритм могут быть легко адаптированы на подбор другого информационного ресурса.

Литература

1. Осипенко, Н. Б. Концепция рекомендательной системы «Подбор решений, отвечающих предназначению человека» / Н. Б. Осипенко, А. Н. Осипенко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2019. – № 6 (117). – С. 108–112.

2. Осипенко, А. Н. Автоматизация диагностики потенциальных качеств человека при выборе профессии / А. Н. Осипенко, Н. Б. Осипенко, Ю. А. Слепенок // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 88–96.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 02.06.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

Математика

УДК 512.542

О пересечении не $\mathfrak{F}$-подгрупп, выделяемых подгрупповым функтором

Р.В. Бородич, М.В. Селькин

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер ненильпотентных максимальных A-допустимых θ-подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга. Установлено влияние соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини на строение самой группы.
Ключевые слова: конечная группа, абнормальная подгруппа, подгруппа Фиттинга.

The structure of a subgroup equal to the intersection of kernels Non-nilpotent Maximal A-admissible θ-subgroups that do not contain a subgroup Fitting is analyzed. The influence of the corresponding generalized subgroup Frattini on the structure of the group itself was established.
Keywords: finite group, abnormal subgroup, Fitting subgroup.

1. Введение. Все рассматриваемые нами группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп является классической задачей. Начало этой теории восходит к работе Фраттини [1] 1885 г. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографию М.В. Селькина [2]). Одной из задач этого направления является исследование пересечений максимальных подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп. Эта задача рассматривалась в работах М.В. Селькина [2], Л.И. Шидова [3], В.В. Шлыка [4], А. Гилотти и У. Тиберио [5]–[6]. К данному направлению относится и настоящая работа.

2. Определения и обозначения. Максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

В дальнейшем для каждой группы G будем фиксировать некоторую ее группу операторов. Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [5] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-

функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

В случае, когда θ тривиальный функтор, то подгруппа $\Phi_\theta(G, A)$ совпадает с подгруппой $\Phi(G, A)$, некоторые свойства которой были описаны Л.Я. Поляковым в [6]. Если функтор θ абнормальный, то подгруппу $\Phi_\theta(G, A)$ будем обозначать $\Delta(G, A)$ (операторный аналог подгруппы Гашюца $\Delta(G)$, введенной в [2]). Напомним, что подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют подгруппу, равную пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп группы G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

Пусть θ – некоторый подгрупповой функтор и $\mathfrak{X}$ – класс групп. Для любой группы G положим $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G, A)$ совпадает с пересечением ядер A-допустимых θ-подгрупп, не принадлежащих классу $\mathfrak{X}$. Если в группе G нет максимальных подгрупп M с отмеченным выше свойством, то полагаем $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G, A) = G$. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G, A) = \Phi_\theta(G, A)$ для любой группы G. Если $\theta(G)$ содержит все максимальные подгруппы группы G, не принадлежащие $\mathfrak{X}$, то положим $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G, A) = \Phi^{\mathfrak{X}}(G, A)$.

3. Вспомогательные результаты.

3.1 Лемма [6]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если G обладает свойством C_π, то G содержит A-допустимую S_π-подгруппу.*

3.2 Лемма [7]. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Если K – A-допустимая подгруппа группы G, то $N_G(K)$ является A-допустимой подгруппой группы G.*

3.3. Лемма [2]. *Если подгруппа H пронормальна в G, то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G.*

3.4 Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа $\Phi_\theta(G, A)$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(\Phi_\theta(G, A))$. По лемме 3.1 в $\Phi_\theta(G, A)$ существует A-допустимая p-силовская подгруппа P. По лемме Фраттини

$$G = N_G(P)\Phi_\theta(G, A).$$

По лемме 3.2 подгруппа $N_G(P)$ A-допустима. Если $N_G(P) = G$, то P нормальна в G, а значит, нормальна и в $\Phi_\theta(G, A)$. Пусть $N_G(P) \neq G$, тогда по лемме 3.3 $N_G(P)$ является абнормальной подгруппой. Следовательно, $N_G(P)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой θ-подгруппе M. Из леммы Фраттини и определения $\Phi_\theta(G, A)$ следует, что $\Phi_\theta(G, A) \subseteq M$, а значит, $M = G$. Получили противоречие с предположением. Итак, любая силовская подгруппа из $\Phi_\theta(G, A)$ нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа $\Phi_\theta(G, A)$ нильпотентна. Лемма доказана.

3.5 Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$, N и K – A-допустимые подгруппы группы G и $K \subseteq \Phi_\theta(G,A)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$;

2) $F(N/K) = F(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную p-подгруппу H/K. Так как $K \subseteq \Phi_\theta(G,A)$, то по лемме 3.4 K нильпотентна. Нетрудно заметить, что p'-подгруппа R из K является p'-подгруппой в H. По теореме Силова H содержит p-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем, $G = N_G(S)R$. Так как S есть p-подгруппа в N, а подгруппа N A-допустима, то S A-допустима. Тогда по лемме 3.2 подгруппа $N_G(S)$ A-допустима и по лемме 3.3 является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой максимальной A-допустимой θ-подгруппе M из G. Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Phi_\theta(G,A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G.

3.6 Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор и $\Phi_\theta(G,A) \neq G$, Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $\Phi_\theta(G,A) \subseteq F(G)$;

2. если G – разрешимая неединичная группа, то $\Phi_\theta(G,A) \subset F(G)$.

Доказательство. Из леммы 3.3 следует, что $\Phi_\theta(G,A)$ является нильпотентной подгруппой. Следовательно, $\Phi_\theta(G,A) \subseteq F(G)$. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда $G/\Phi_\theta(G,A)$ разрешима и неединична. Пусть $B/\Phi_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi_\theta(G,A)$. Так как $B/\Phi_\theta(G,A)$ – p-группа для некоторого простого p, то по лемме 3.5 B является нильпотентной, а это значит, что $B \subseteq F(G)$. Следовательно, $\Phi_\theta(G,A) \subset F(G)$.

3.7. Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – подгрупповой функтор, $\mathfrak{X}$ – гомоморф. Если $N \lhd G$, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)N/N \subseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G/N,A)$.*

Доказательство. Если M/N – максимальная A-допустимая подгруппа из $\theta(G/N)$, не принадлежащая $\mathfrak{X}$, то из регулярности функтора θ следует, что M – максимальная A-допустимая θ-подгруппа группы G, не принадлежащая гомоморфу $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)N/N \subseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G/N,A)$. Лемма доказана.

3.8. Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{X}$ – гомоморф, θ – подгрупповой функтор. Если $\Phi_\theta(G) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)$, то выполняются следующие утверждения:*

1) $G = \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)M$, где M – A-допустимая θ-подгруппа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}$;

2) если G разрешима и θ – абнормально полный подгрупповой функтор, то $G = QM$, где Q – A-допустимая нормальная q-подгруппа группы G, q – простое число и M A-допустимая θ-подгруппа группы G, принадлежащая классу $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Так как $\Phi_\theta(G) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)$, то найдётся максимальная A-допустимая подгруппа M из $\theta(G)$, принадлежащая $\mathfrak{X}$ такая, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)$ не содержится в M. Следовательно, $G = M\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)$.

Докажем второе утверждение. Пусть G разрешима. Рассмотрим $G/\Phi_\theta(G,A)$. Применяя лемму 3.7, так как $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ разрешима, то в $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ найдётся неединичная характеристическая q-подгруппа $Q/\Phi_\theta(G,A)$ для некоторого простого $q \in \pi(\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A))$. Если предположить, что $Q/\Phi_\theta(G,A)$ содержится во всех максимальных A-допустимых θ-подгруппах, принадлежащих $\mathfrak{X}$, то $Q/\Phi_\theta(G,A) \subseteq \Phi_\theta(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$. Получили противоречие. Значит, найдется максимальная A-допустимая θ-подгруппа $M/\Phi_\theta(G,A)$, принадлежащая $\mathfrak{X}$ такая, что $M/\Phi_\theta(G,A)\cdot Q/\Phi_\theta(G,A) = G/\Phi_\theta(G,A)$. Отсюда получаем, что $G = MQ$. Из регулярности функтора θ следует, что $M \in \theta(G)$. Если предположить, что $M \notin \mathfrak{X}$, то $M \supseteq Q$ и $G = M$, значит, $M \in \mathfrak{X}$. Далее $Q = Q_1\Phi_\theta(G,A)$, где Q_1 – A-допустимая силовская q-подгруппа в Q.

По лемме Фраттини $G = QN_G(Q_1) = Q_1\Phi_\theta(G,A)N_G(Q_1) = \Phi_\theta(G,A)N_G(Q_1)$. Предположим, что $N_G(Q_1) \neq G$, тогда $N_G(Q_1)$ содержится в некоторой максимальной A-допустимой абнормальной подгруппе K группы G. Ввиду того, что θ – абнормально полный подгрупповой функтор, имеем $G = \Phi_\theta(G,A)K = K$. Получили противоречие. Следовательно, Q_1 – A-допустимая нормальная q-подгруппа группы G. Лемма доказана.

3.9. Лемма [9]. *Пусть p – простое нечётное число. Группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P, характеристической в некоторой силовской p-подгруппе группы G, $N_G(P)/C_G(P)$ p-подгруппа.*

3.10. Теорема [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N\cap\Phi_\theta(G,A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2)\cap\pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G,A)$.

3.11. Теорема [11]. *Suppose that G has a group of operators A such that $(|G|,|A|)=1$ and $p>2$, θ is an abnormal complete functor. Then either G has no p-nilpotent maximal A-admissible θ-subgroups and $\overline{\Phi}_\theta^p(G,A) = \Phi_\theta(G,A)$ or G is p-solvable.*

4. Основные результаты.

4.1 Теорема. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – гомоморф, θ – абнормально полный регулярный m-функтор и G – разрешимая группа такая, что $\Phi_\theta(G,A) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \subset G$. Если все максимальные подгруппы из $\theta(G)$ принадлежащие $\mathfrak{F}$, сопряжены, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) = QN$, где Q – A-допустимая нормальная q-подгруппа, q – простое число, а N – A-допустимая нильпотентная подгруппа.*

Доказательство. По лемме 3.8, $G = QM$, где M – A-допустимая θ-подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$, Q – A-допустимая нормальная q-подгруппа (q – некоторое простое число) группы G, содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$.

Пусть M_0 – добавление к Q в G. Тогда по лемме 11.1 из [8] $Q\cap M_0 \subseteq \Phi(M_0)$. По тождеству Дедекинда получаем, что

$$\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap QM_0 = Q(\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap M_0).$$

Если T = $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \cap \mathrm{M}_0$ не содержится в $\Delta(\mathrm{M}_0)$ то найдётся абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа H в M_0 такая, что $M_0 = TH$. Покажем, что QH – A-допустимая максимальная подгруппа группы G. Предположим противное. Пусть в G имеется A-допустимая максимальная подгруппа S такая, что $QH \subset S \subset G$. Тогда $S = QM_0 \cap S = Q(M_0 \cap S)$. Так как $M_0 \cap S \supseteq H$ и H – A-допустимая максимальная подгруппа группы M_0, получаем, что $M_0 \cap S = H$ или $M_0 \cap S = M_0$. В первом случае $S = QH$, во втором $S = G$. Противоречие с выбором S. Следовательно, QH – A-допустимая максимальная подгруппа в G. Так как H абнормальна в M_0, то QH абнормальна в G, а значит, $QH \in \theta(G)$. Из того, что Q не содержится в M по теореме Ope следует, что QH не сопряжена с M. Поэтому $QH \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, $QH \supseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \supseteq T$. Поэтому $G = QM_0 = QTH = QH$, получили противоречие. Значит, $T \subseteq \Delta(M_0, A)$. По лемме 3.4 T нильпотентна. Теорема доказана.

В случае, когда $\theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, получаем следующее:

4.1.1 Следствие. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – гомоморф, G – разрешимая группа такая, что $\Phi(G,A) \subset \Phi^{\mathfrak{F}}(G,A) \subset G$. Если все максимальные A-допустимые подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, сопряжены, то $\Phi^{\mathfrak{F}}(G,A) = QN$, где Q – A-допустимая нормальная q-подгруппа, q – простое число, а N – A-допустимая нильпотентная подгруппа.*

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех сверхразрешимых групп, а группа операторов A тривиальна, то получаем теорему 2 из [6].

Если в теореме 4.1 $\theta(G) \setminus \{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных максимальных подгрупп, то имеет место следующее:

4.1.2 Следствие. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – гомоморф, G – разрешимая группа такая, что $\Delta(G,A) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \subset G$. Если все абнормальные A-допустимые максимальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, сопряжены, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) = QN$, где Q – нормальная q-подгруппа, а N – A-допустимая нильпотентная подгруппа.*

4.2 Теорема. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если G – разрешимая группа и $\Phi_\theta(G,A) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq F(G) \subset G$, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ – главный фактор группы G, дополняемый A-допустимой максимальной подгруппой, принадлежащей формации $\mathfrak{F}$. В частности, $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) = G^{\mathfrak{F}}\Phi_\theta(G,A)$.*

Доказательство. Пусть разрешимая группа G удовлетворяет условиям теоремы. Если $G \in \mathfrak{F}$, то нетрудно видеть, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) = G$, что противоречит $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq F(G) \subset G$. Будем считать, что G не принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $H/\Phi_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная A-допустимая подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G,A)$, содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$. Тогда найдется A-допустимая максимальная подгруппа M в группе G такая, что $M \in \theta(G)$, $G = HM$ и $H \cap M = \Phi_\theta(G,A)$. Так как $G = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)M$, $M \in \mathfrak{F}$, то $G/H = MH/H \simeq M/(M \cap N) \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K/\Phi_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная A-допустимая подгруппа в $G/\Phi_\theta(G,A)$, также содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$, и отличная от $H/\Phi_\theta(G,A)$. Рассуждая, как и выше, получаем, что $G/K \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G/(K \cap H) = G/\Phi_\theta(G,A) \in \mathfrak{F}$. Из теоремы 3.10 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $H/\Phi_\theta(G,A)$ – единственная минимальная A-допустимая нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G,A)$, содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$. Учитывая согласно лемму 3.6 и то, что $\Phi(G)\subseteq\Phi_\theta(G,A)$ и $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq F(G)$, получаем, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ – абелева p-группа для некоторого простого числа p.

Несложно заметить, что $(\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A))\cap(M/\Phi_\theta(G,A))=(\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap M)/\Phi_\theta(G,A)$ – нормальная подгруппа в $G/\Phi_\theta(G,A)$.

Так как H не содержится в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap$M, то $\Phi_\theta(G,A)^{\mathfrak{F}}\cap M=\Phi_\theta(G,A)$. Следовательно, $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)=H$.

Из предыдущих рассуждений следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $(G/\Phi_\theta(G,A))^{\mathfrak{F}}=G^{\mathfrak{F}}\Phi_\theta(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ совпадает с $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$, то есть $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)=G^{\mathfrak{F}}\Phi_\theta(G,A)$. Теорема доказана.

Если $\theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, группа операторов A тривиальна и $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех сверхразрешимых групп, то из теоремы 4.2 вытекает теорема 4 из [6].

В случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп, будем вместо $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$ использовать обозначение $\Phi_\theta^p(G)$.

4.3 Теорема. *Пусть θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если $\Phi_\theta^p(G,A)$ не является p-нильпотентной группой для некоторого нечётного $p\in\pi(G)$, то $G=O_p(\Phi_\theta^p(G,A))M$, где M – максимальная A-допустимая p-нильпотентная θ-подгруппа.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.11, нетрудно видеть, что G является p-разрешимой группой. Пусть $D=\Phi_\theta^p(G,A)$. Так как D не p-нильпотентна, то по лемме 3.9 существует характеристическая подгруппа P^* в силовской p-подгруппе P группы D такая, что $N_D(P)/C_D(P)$ не является p-группой. Можно считать, что P^* – максимальная подгруппа с указанными выше свойствами.

Учитывая, что подгрупповой функтор θ является абнормально полным и $N_G(P^*)$ – абнормальная подгруппа в G, то $N_G(P^*)=G$. Отсюда следует, что $P^*\subseteq O_p(D)$. Предположим, что $P^*\subset O_p(D)$, тогда $N_D(O_p(D))/C_D(O_p(D))$ – p-группа, а значит, $D/C_D(O_p(D))$ – p-группа. Из $C_D(O_p(D))\subseteq O_p(D)$ получаем, что $D/O_p(G)$ – p-группа, значит D – p-группа, противоречие. Следовательно, $P^*=O_p(D)$.

Если $D/O_p(D)$ – p-нильпотентна, то в $D/O_p(D)$ имеется нормальная холловская p'-подгруппа $K/O_p(D)$. Тогда K нормальна в G и $O_p(D)$ нормальна в K. По теореме Шура-Цассенхауза существует холловская p'-подгруппа T из K такая, что $K=O_p(D)A$. По лемме Фраттини $G=KN_G(A)$.

Если $O_p(D)\subseteq\Phi_\theta^p(G,A)$, то $G=KN_G(A)=O_p(D)TN_G(T)=N_G(T)$. Следовательно, T нормальна в G. Но T – холловская p'-подгруппа из D, значит D – p-нильпотентна, противоречие. Следовательно, $O_p(G)$ не содержится в $\Phi^p(G,A)$ и получаем $G=O_p(D)M$, где M – A-допустимая максимальная p-нильпотентная θ-подгруппа группы G. Теорема доказана.

Если $\theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, то из теоремы 4.3 получаем:

4.3.1 Следствие. *Если* $\Phi^p(G,A)$ *не является* p*-нильпотентной группой для некоторого нечётного* $p \in \pi(G)$, *то* $G = O_p(\Phi^p(G,A))M$, *где* M *– максимальная* A*-допустимая* p*-нильпотентная подгруппа.*

Если $\theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, а группа операторов A является тривиальной, то из теоремы 4.3 получаем теорему 2 из [5].

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск :Беларуская навука, 1997. – 144 с.

3. Шидов, Л. И. О максимальных подгруппах конечных групп / Л. И. Шидов // Сиб. матем. журнал. – 1971. – Т. 12, № 3. – С. 682–683.

4. Шлык, В. В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В. В. Шлык // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.

5. Gilotti, A. On the intersection of certain class of maximal subgroups of a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Arch. Math. – 1998. –№ 71. – P. 89–94.

6. Gilotti, A. On the intersection of maximal non-supersoluble subgroups in a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Bollettino U.M.I. – 2000. – Serie 8, Vol. 3-B. – P. 691–698.

7. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

8. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. :Наука, 1978. – 272 с.

9. Thompson, J. G. Normal p-complements for finite groups / J. G. Thompson // J. Algebra. – 1964. – V. 1. – P. 43–46.

10. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. . Бородич // Укр. мат. журнал. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.

11. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2020. – DOI: 10.1142 / S1793557121500261.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 19.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 512.548

Косые элементы в полиадических группах специального вида нечётной арности. II

А.М. Гальмак[1], М.В. Селькин[2]

В статье продолжается изучение косых элементов в полиадических группах специального вида, имеющих нечётную арность, то есть в полиадических группах с (2s + 1)-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k тернарной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, и n-арной операции η. Основные результаты сформулированы для цикла $\sigma = (12 \ldots d)$, где $d \le k$, d делит 2s.
Ключевые слова: полиадическая операция, тернарная группа, косой элемент, подстановка.

The article proceeds with the studies on the skew elements in polyadic groups of special form having odd arity, that is in polyadic groups with (2s + 1)-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$ that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power A^k of ternary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ satisfying the condition $\sigma^{2s+1} = \sigma$, and n-ary operation η. The main results were formulated for a cycle $\sigma = (12 \ldots k)$, were $d \le k$, d divides 2s.
Keywords: polyadic operation, ternary group, skew element, substitution.

1. Введение. В данной статье продолжается начатое в [1] изучение косых элементов в $(2s + 1)$-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с $(2s + 1)$-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется для любых $k \ge 2$, $s \ge 1$ и любой подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ на k-ой декартовой степени A^k произвольной n-арной полугруппы $< A, \eta >$ следующим образом:

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{2s+1}) =$$
$$= \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{(2s+1)1}, \ldots, x_{(2s+1)k})) = (y_1, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(2s+1)\sigma^{2s}(j)}), j = 1, \ldots, k.$$

В [2] доказано, что если $< A, \eta >$ – тернарная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – $(2s + 1)$-арная группа.

Информацию о тернарных группах, приведённую в этом разделе, можно найти в книгах [3]–[6]. Там же имеется аналогичная информация для полиадических групп произвольной арности.

2. Предварительные сведения. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема из [1] и некоторые следствия из неё.

Теорема 2.1 [1]. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $s \ge 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}} \underbrace{\overline{a_j}\, \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j}\, \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}}_{t-1}), \qquad (2.1)$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Следующее следствие вытекает из теоремы 2.1, если в ней положить σ – цикл длины k.

Следствие 2.1 [1]. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $2s = tk$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma^{k-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}} \underbrace{\overline{a_j}\, \overline{a_{\sigma^{k-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j}\, \overline{a_{\sigma^{k-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}}_{t-1})$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Следующее следствие вытекает из теоремы 2.1, если в ней положить, $d = 2$.

Следствие 2.2 [1]. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* 2, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma(j)}}\ \underbrace{\overline{a_j}\,\overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j}\,\overline{a_{\sigma(j)}}}_{s-1})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma(1)}}\ \underbrace{\overline{a_1}\,\overline{a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1}\,\overline{a_{\sigma(1)}}}_{s-1}), \ldots, \eta(\overline{a_{\sigma(k)}}\ \underbrace{\overline{a_k}\,\overline{a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k}\,\overline{a_{\sigma(k)}}}_{s-1})).$$

Предложение 2.1 [1]. *Если в условиях теоремы* 2.1 *подстановка* σ *оставляет неподвижным символ* m, *то*

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{2s-1}).$$

Следующее следствие вытекает из следствия 2.2, если в нём положить, σ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$ и учесть предложение 2.1.

Следствие 2.3 [1]. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $\sigma = (ij)$ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_i}\ \underbrace{\overline{a_j}\,\overline{a_i} \ldots \overline{a_j}\,\overline{a_i}}_{s-1}),\ b_i = \eta(\overline{a_j}\ \underbrace{\overline{a_i}\,\overline{a_j} \ldots \overline{a_i}\,\overline{a_j}}_{s-1}),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{2s-1}),\ m \neq i,\ m \neq j$$

является косым для $\mathbf{a}$.

3. Случай цикла $(12 \ldots d)$. Конкретизируем результаты из предыдущего радела для цикла $\sigma = (12 \ldots d) \in \mathbf{S}_k$.

Теорема 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $(12 \ldots d) \in \mathbf{S}_k$, $d \leq k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots d),k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_{j+1}}\ \underbrace{\overline{a_j}\ \overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_{j+1}} \ldots \overline{a_j}\ \overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_{j+1}}}_{t-1}) \qquad (3.1)$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Доказательство. Так как порядок подстановки $(12 \ldots d)$ равен d, то по теореме 2.1 компонента b_j может быть представлена в виде (2.1). А так как $\sigma = (12 \ldots d)$, то

$$\sigma(j) = j + 1,$$
$$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(j + 1) = j + 2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma^{d-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-1-j}(j)) = \sigma(d - 1) = d,$$
$$\sigma^{d+1-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-j}(j)) = \sigma(d) = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma^{d-1}(j) = \sigma(\sigma^{d-2}(j)) = \sigma(j - 2) = j - 1,$$
$$\sigma^{d}(j) = \sigma(\sigma^{d-1}(j)) = \sigma(j - 1) = j.$$

Поэтому правая часть равенства (2.1) совпадает с правой частью равенства (3.1) Теорема доказана.

Замечание 3.1. Выпишем все компоненты b_j косого элемента из теоремы 3.1, учитывая предложение 2.1:

$$\overline{\mathbf{a}} = (b_1 = \eta(\overline{a_d} \ldots \overline{a_2}\ \underbrace{\overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_2} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_2}}_{t-1}),$$

$$b_2 = \eta(\overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_3}\ \underbrace{\overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_3} \ldots \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_3}}_{t-1}),$$

$$b_3 = \eta(\overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_4}\ \underbrace{\overline{a_3}\ \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_4} \ldots \overline{a_3}\ \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_4}}_{t-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{d-1} = \eta(\overline{a_{d-2}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_d}\ \underbrace{\overline{a_{d-1}}\ \overline{a_{d-2}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_{d-1}}\ \overline{a_{d-2}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_d}}_{t-1}),$$

$$b_d = \eta(\overline{a_{d-1}} \ldots \overline{a_1}\ \underbrace{\overline{a_d}\ \overline{a_{d-1}} \ldots \overline{a_1} \ldots \overline{a_d}\ \overline{a_{d-1}} \ldots \overline{a_1}}_{t-1}),$$

$$b_{d+1} = \eta(\underbrace{\overline{a_{d+1}} \ldots \overline{a_{d+1}}}_{2s-1}),\ \ldots,\ b_k = \eta(\underbrace{\overline{a_k} \ldots \overline{a_k}}_{2s-1})).$$

Следующее следствие вытекает из теоремы 3.1, если в ней положить $d = k$.

Следствие 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\,(12\,\ldots\,k),\,k} >$, $2s = tk$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_{j+1}}\ \underbrace{\overline{a_j}\ \overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_{j+1}} \ldots \overline{a_j}\ \overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_{j+1}}}_{t-1})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_k} \ldots \overline{a_2}\ \underbrace{\overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_2} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_2}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_3}\ \underbrace{\overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_3} \ldots \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_3}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_4}\ \underbrace{\overline{a_3}\ \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_4} \ldots \overline{a_3}\ \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_4}}_{t-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta(\overline{a_{k-2}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_k}\ \underbrace{\overline{a_{k-1}}\ \overline{a_{k-2}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_{k-1}}\ \overline{a_{k-2}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_k}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{a_{k-1}} \ldots \overline{a_1}\ \underbrace{\overline{a_k}\ \overline{a_{k-1}} \ldots \overline{a_1} \ldots \overline{a_k}\ \overline{a_{k-1}} \ldots \overline{a_1}}_{t-1})).$$

Сформулируем следствия, которые вытекают из следствия 3.1, если в нём положить $k = 2$ и $k = 3$.

Следствие 3.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^2, \eta_{s,\,(12),\,2} >$. *Тогда элемент*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_2}\ \underbrace{\overline{a_1}\ \overline{a_2} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_2}}_{s-1}),\ \eta(\overline{a_1}\ \underbrace{\overline{a_2}\ \overline{a_1} \ldots \overline{a_2}\ \overline{a_1}}_{s-1}))$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Следствие 3.3. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^3, \eta_{s,\,(123),\,3} >$, $2s = 3t$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_3}\ \overline{a_2}\ \underbrace{\overline{a_1}\ \overline{a_3}\ \overline{a_2} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_3}\ \overline{a_2}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{a_1}\ \overline{a_3}\ \underbrace{\overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_3} \ldots \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_3}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \underbrace{\overline{a_3}\ \overline{a_2}\ \overline{a_1} \ldots \overline{a_3}\ \overline{a_2}\ \overline{a_1}}_{t-1}))$$

является косым для $\mathbf{a}$.

При $s = 3$ из следствия 3.3 вытекает

Следствие 3.4. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *– произвольный элемент 7-арной группы* $< A^3, \eta_{3,(123),3} >$. *Тогда элемент*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_3}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_3}\,\overline{a_2}), \eta(\overline{a_1}\,\overline{a_3}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_3}), \eta(\overline{a_2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_3}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}))$$

является косым для $\mathbf{a}$.

4. Случай подстановки чётного порядка. Нам понадобится следующая лемма, которая является следствием соответствующей леммы из [7].

Лемма 4.1. [7, лемма 2.3]. *Если* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* r *– нечётное,* $r \geq 3$, $a_1, \ldots, a_r$ *– произвольные элементы из* A, *то*

$$\overline{\eta(a_1 \ldots a_r)} = \eta(\overline{a_r}\, \ldots\, \overline{a_1}).$$

Замечание 4.1. Если в теореме 2.1 d – чётное, то последовательность

$$\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}}\, \ldots\, \overline{a_{\sigma(j)}}$$

имеет нечётную длину $d - 1$, откуда, ввиду леммы 4.1, для $d \geq 4$ имеем

$$\eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}) = \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}.$$

Поэтому для чётного $d \geq 4$ теорему 2.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *чётного порядка* $d \geq 4$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}\, \underbrace{\overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})} \ldots \overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}}_{t-1})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{\eta(a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(1)})}\, \underbrace{\overline{a_1}\, \overline{\eta(a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(1)})} \ldots \overline{a_1}\, \overline{\eta(a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(1)})}}_{t-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta(\overline{\eta(a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(k)})}\, \underbrace{\overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(k)})} \ldots \overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(k)})}}_{t-1})).$$

Следующее следствие вытекает из теоремы 4.1, если в ней положить σ – цикл чётной длины $k \geq 4$. Оно же является переформулировкой следствия 2.1 для указанного k.

Следствие 4.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– цикл из* $\mathbf{S}_k$ *чётной длины* $k \geq 4$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $2s = tk$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(j)})}\, \underbrace{\overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(j)})} \ldots \overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(j)})}}_{t-1})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{\eta(a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(1)})}\, \underbrace{\overline{a_1}\, \overline{\eta(a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(1)})} \ldots \overline{a_1}\, \overline{\eta(a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(1)})}}_{t-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta(\overline{\eta(a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(k)})}\, \underbrace{\overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(k)})} \ldots \overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(k)})}}_{t-1})).$$

Для чётного $d \geq 4$ теорему 3.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $(12 \ldots d) \in \mathbf{S}_k$, d *– чётное,* $d \geq 4$, $d \leq k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots d),k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{\eta(a_{j+1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{j-1})}\, \underbrace{\overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{j+1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{j-1})} \ldots \overline{a_j}\, \overline{\eta(a_{j+1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{j-1})}}_{t-1})$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Замечание 4.2. Выпишем все компоненты b_j косого элемента из теоремы 4.2, учитывая предложение 2.1:

$$\bar{\mathbf{a}} = (b_1 = \eta(\overline{\eta(a_2 \ldots a_d)}\ \underbrace{\bar{a}_1\ \overline{\eta(a_2 \ldots a_d)} \ldots \bar{a}_1\ \overline{\eta(a_2 \ldots a_d)}}_{t-1}),$$

$$b_2 = \eta(\overline{\eta(a_3 \ldots a_d a_1)}\ \underbrace{\bar{a}_2\ \overline{\eta(a_3 \ldots a_d a_1)} \ldots \bar{a}_2\ \overline{\eta(a_3 \ldots a_d a_1)}}_{t-1}),$$

$$b_3 = \eta(\overline{\eta(a_4 \ldots a_d a_1 a_2)}\ \underbrace{\bar{a}_3\ \overline{\eta(a_4 \ldots a_d a_1 a_2)} \ldots \bar{a}_3\ \overline{\eta(a_4 \ldots a_d a_1 a_2)}}_{t-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{d-1} = \eta(\overline{\eta(a_d a_1 \ldots a_{d-2})}\ \underbrace{\bar{a}_{d-1}\ \overline{\eta(a_d a_1 \ldots a_{d-2})} \ldots \bar{a}_{d-1}\ \overline{\eta(a_d a_1 \ldots a_{d-2})}}_{t-1}),$$

$$b_d = \eta(\overline{\eta(a_1 \ldots a_{d-1})}\ \underbrace{\bar{a}_d\ \overline{\eta(a_1 \ldots a_{d-1})} \ldots \bar{a}_d\ \overline{\eta(a_1 \ldots a_{d-1})}}_{t-1}),$$

$$b_{d+1} = \overline{\underbrace{\eta(a_{d+1} \ldots a_{d+1})}_{2s-1}}, \ldots, b_k = \overline{\underbrace{\eta(a_k \ldots a_k)}_{2s-1}}.$$

Следующее следствие вытекает из теоремы 4.2, если в ней положить $d = k$. Оно же является переформулировкой следствия 3.1 для чётного $k \geq 4$.

Следствие 4.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* k *– чётное,* $k \geq 4$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots k),k} >$, $2s = tk$ *для некоторого натурального t. Тогда элемент* $\bar{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{\eta(a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1})}\ \underbrace{\bar{a}_j\ \overline{\eta(a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1})} \ldots\ \ldots \bar{a}_j\ \overline{\eta(a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1})}}_{t-1})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\bar{\mathbf{a}} = \eta((\overline{\eta(a_2 \ldots a_k)}\ \underbrace{\bar{a}_1\ \overline{\eta(a_2 \ldots a_k)} \ldots \bar{a}_1\ \overline{\eta(a_2 \ldots a_k)}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{\eta(a_3 \ldots a_k a_1)}\ \underbrace{\bar{a}_2\ \overline{\eta(a_3 \ldots a_k a_1)} \ldots \bar{a}_2\ \overline{\eta(a_3 \ldots a_k a_1)}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{\eta(a_4 \ldots a_k a_1 a_2)}\ \underbrace{\bar{a}_3\ \overline{\eta(a_4 \ldots a_k a_1 a_2)} \ldots \bar{a}_3\ \overline{\eta(a_4 \ldots a_k a_1 a_2)}}_{t-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta(\overline{\eta(a_k a_1 \ldots a_{k-2})}\ \underbrace{\bar{a}_{k-1}\ \overline{\eta(a_k a_1 \ldots a_{k-2})} \ldots \bar{a}_{k-1}\ \overline{\eta(a_k a_1 \ldots a_{k-2})}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{\eta(a_1 \ldots a_{k-1})}\ \underbrace{\bar{a}_k\ \overline{\eta(a_1 \ldots a_{k-1})} \ldots \bar{a}_k\ \overline{\eta(a_1 \ldots a_{k-1})}}_{t-1})).$$

Сформулируем следствие, которое вытекает из следствия 4.2, если в нём положить $k = 4$.

Следствие 4.3. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^4, \eta_{s,(1234),4} >$, $s = 2t$ *для некоторого натурального t. Тогда элемент*

$$\bar{\mathbf{a}} = \eta((\overline{\eta(a_2 a_3 a_4)}\ \underbrace{\bar{a}_1\ \overline{\eta(a_2 a_3 a_4)} \ldots \bar{a}_1\ \overline{\eta(a_2 a_3 a_4)}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{\eta(a_3 a_4 a_1)}\ \underbrace{\bar{a}_2\ \overline{\eta(a_3 a_4 a_1)} \ldots \bar{a}_2\ \overline{\eta(a_3 a_4 a_1)}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{\eta(a_4 a_1 a_2)}\ \underbrace{\bar{a}_3\ \overline{\eta(a_4 a_1 a_2)} \ldots \bar{a}_3\ \overline{\eta(a_4 a_1 a_2)}}_{t-1}),$$

$$\eta(\overline{\eta(a_1 a_2 a_3)}\ \underbrace{\bar{a}_4\ \overline{\eta(a_1 a_2 a_3)} \ldots \bar{a}_4\ \overline{\eta(a_1 a_2 a_3)}}_{t-1}))$$

является косым для $\mathbf{a}$.

5. Случай подстановки нечётного порядка. Для нечётного d теорема 2.1 принимает следующий вид.

Теорема 5.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *нечётного порядка* d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $d(t-1) \geq 3$. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(j)}} \ \overline{\eta(\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{t-1})}) \tag{5.1}$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(1)}} \ \overline{\eta(\underbrace{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(1)} a_1 \ldots a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(1)} a_1}_{t-1})}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(k)}} \ \overline{\eta(\underbrace{a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(k)} a_k \ldots a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(k)} a_k}_{t-1})}).$$

Доказательство. Согласно теореме 2.1,

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(j)}} \ \underbrace{\overline{a_j} \ \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j} \ \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}}_{t-1}). \tag{5.2}$$

Так как d – нечётное, то $d-1$ – чётное. Кроме того, из нечётности d и условия $2s = td$ следует чётность t, соответственно – нечётность $t-1$. А так как, последовательность

$$\overline{a_j} \ \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(j)}}$$

имеет нечётную длину d, то последовательность

$$\underbrace{\overline{a_j} \ \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j} \ \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}}_{t-1}$$

имеет нечётную длину $d(t-1)$. Следовательно, для $d(t-1) \geq 3$ к этой последовательности применима тернарная операция η. Таким образом, равенство (5.2) может быть переписано в виде

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(j)}} \ \eta(\underbrace{\overline{a_j} \ \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j} \ \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}}_{t-1})),$$

откуда, ввиду леммы 3.1, следует (5.1). Теорема доказана.

Следующее следствие вытекает из теоремы 5.1, если в ней положить σ – цикл длины k.

Следствие 5.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, σ *– цикл нечётной длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $2s = tk$ *для некоторого натурального* t, $k(t-1) \geq 3$. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma^{k-1}(j)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(j)}} \ \overline{\eta(\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(j)} a_j}_{t-1})})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = \eta(\overline{a_{\sigma^{k-1}(1)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(1)}} \ \overline{\eta(\underbrace{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(1)} a_1 \ldots a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(1)} a_1}_{t-1})}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta(\overline{a_{\sigma^{k-1}(k)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(k)}} \ \overline{\eta(\underbrace{a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(k)} a_k \ldots a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{k-1}(k)} a_k}_{t-1})}).$$

Теореме 3.1 для нечётного d соответствует следующая

Теорема 5.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, d – нечётное, $(12 \ldots d) \in \mathbf{S}_k$, $d \leq k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots d),k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $d(t-1) \geq 3$. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1} \ \overline{a_d} \ \ldots \overline{a_{j+1}} \ \overline{\eta(\underbrace{a_{j+1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{j-1} a_j \ \ldots a_{j+1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{j-1} a_j}_{t-1})})$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Следующее следствие вытекает из теоремы 5.2, если в ней положить $d = k$. Оно же является переформулировкой следствия 3.1 для нечётного k.

Следствие 5.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, k *– нечётное*, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(12\ldots k),k} >$, $2s = tk$ *для некоторого натурального* t, $k(t-1) \geq 3$. *Тогда элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_k} \ldots \overline{a_{j+1}}\ \overline{\eta(\underbrace{a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1} a_j \ldots a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1} a_j}_{t-1})})$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Сформулируем следствие, которое вытекает из следствия 5.2, если в нём положить $k = 3$.

Следствие 5.3. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^3, \eta_{s,(123),3} >$, $2s = 3t$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_3}\ \overline{a_2}\ \overline{\eta(\underbrace{a_2 a_3 a_1 \ldots a_2 a_3 a_1}_{t-1})}),$$
$$\eta(\overline{a_1}\ \overline{a_3}\ \overline{\eta(\underbrace{a_3 a_1 a_2 \ldots a_3 a_1 a_2}_{t-1})}),$$
$$\eta(\overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{\eta(\underbrace{a_1 a_2 a_3 \ldots a_1 a_2 a_3}_{t-1})}))$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Литература

1. Гальмак, А. М. Косые элементы в полиадических группах специального вида нечётной арности. I / А. М. Гальмак, М. В. Селькин / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2020. – № 3. – С. 35–40.

2. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

3. Русаков, С. А. Алгебраические *n*-арные системы / С. А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

4. Гальмак, А. М. Тернарные группы отражений / А. М. Гальмак, Г. Н. Воробьев. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 128 с.

5. Гальмак, А. М. *n*-Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

6. Гальмак, А. М. *n*-Арные группы. Часть 2 / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

7. Гальмак, А. М. Конгруэнции полиадических групп / А. М. Гальмак. – Минск : Беларуская навука, 1999. – 182 с.

[1]Могилевский государственный
университет продовольствия

[2]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 18.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 519.2

Критерий эргодичности для одного класса цепей Маркова с непрерывным временем

Ю.В. Малинковский

Статья посвящена доказательству эргодической теоремы для одного класса цепей Маркова с достаточно общим инфинитезимальным оператором. Цепи такого вида встречаются при исследовании систем массового обслуживания. Например, можно рассмотреть цепь, описывающую состояния однолинейной системы с групповым поступлением отрицательных заявок с возможностью вычеркивания целой группы.
Ключевые слова: цепь Маркова, эргодичность, стационарное распределение, консервативная цепь, неприводимая цепь.

The paper deals with prove of ergodic theorem for Markov chain class with very total infinitesimal generator. Such chains appear in queueing system studies. For example we can consider the chain which describes the one-line queueing system with negative customer batch arrivals. All quality of customers can be deleted.
Keywords: Markov chain, ergodicity, stationary distribution, conservative chain, irreducible chain.

Во многих приложениях, в частности, в теории массового обслуживания крайне важно выяснить при каких условиях цепи Маркова определенного вида являются эргодическими [1]–[6]. Происхождение рассматриваемого класса цепей тесно связано с системами массового обслуживания, представляющими изолированные узлы сети из статьи [5]. Пусть $\lambda^+, \mu, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \ldots, \lambda_T^-$ – строго положительные постоянные, T – натуральное число. Рассмотрим консервативную цепь Маркова $n(t)$ с непрерывным временем и счетным фазовым пространством $Z_+ = \{0,1,\ldots\}$. Интенсивности ее переходов для $m, n \in Z_+$ зададим следующим образом:

$$q(n,n+1) = \lambda^+,\ q(n,m) = 0 \quad \text{для} \quad m > .n+1,$$

$$q(n,n-1) = \mu + \lambda_1^-,\ q(n,n-2) = \lambda_2^-, q(n,n-3) = \lambda_3^-, \ldots, q(n,n-T) = \lambda_T^- \quad \text{для} \quad \mathrm{n} \geq T,$$

$$q(n,n-1) = \mu + \lambda_1^-,\ q(n,n-2) = \lambda_2^-, q(n,n-3) = \lambda_3^-, \ldots, q(n,n-T+1) = \lambda_{T-1}^-,,$$

$$q(n,0) = \lambda_n^- + \lambda_{n+1}^- + \ldots + \lambda_T^- \quad \text{для} \quad \mathrm{n} < T.$$

Если стационарное распределение $\{p(n), n \in Z_+\}$ цепи Маркова $n(t)$ существует, то оно удовлетворяет системе уравнений равновесия

$$p(0)\ \lambda^+ = (\mu + \lambda_1^- + \ldots + \lambda_T^-)p(1) + (\lambda_2^- + \ldots + \lambda_T^-)p(2) + (\lambda_3^- + \ldots + \lambda_T^-)p(3) + \lambda_1^- p(T),$$

$$p(n)(\lambda^+ + \mu + \lambda_1^- + \lambda_2^- + \ldots + \lambda_T^-) = p(n-1)\lambda^+ + p(n+1)(\mu + \lambda_1^-) + p(n+2)\lambda_2^- +$$

$$+ \ldots + p(n+T)\lambda_T^-, \quad n = 1,2,\ldots \quad .$$

Она эквивалентна системе уравнений равновесия для вертикальных сечений графа переходов

$$\lambda^+ p(n) = (\mu + \lambda_1^- + \ldots + \lambda_T^-)p(n+1) + (\lambda_2^- + \ldots + \lambda_T^-)p(n+2) + (\lambda_3^- + \ldots + \lambda_T^-)p(n+3) +$$

$$+ \ldots + \lambda_T^- p(n+T), \quad n \in Z_+. \qquad (1)$$

Это однородное линейное разностное уравнение порядка T. Частное решение (1) ищем в виде $p(n) = z^n$. Подставляя его в (1), получим характеристическое уравнение

$$g(z) = \sum_{l=1}^{T} z^l \sum_{s=l}^{T} \lambda_s^- + \mu z - \lambda^+ = \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{t=1}^{s} z^l + \mu z - \lambda^+ = 0. \qquad (2)$$

В силу ограниченности интенсивностей выхода цепи Маркова из состояний она является регулярной.

Эргодическая теорема. *Цепь Маркова* $n(t)$ *регулярна. Для ее эргодичности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\rho = \frac{\lambda^+}{\mu + \rho\sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-} < 1. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем достаточность (3) для эргодичности цепи $n(t)$. Используем теорему Декарта [7]. В уравнении (2) ровно одна перемена знака при переходе от первой степени к нулевой. При этом $g(0) = -\lambda^+ < 0$ и, в силу (3), $g(1) > 0$. Поэтому этот корень $z_0 \in (0,1)$. Следовательно, уравнения (1) имеет решение $p(n) = Cz_0^n,$, причем из условия нормировки $C = 1 - z_0,$ т. е. совпадает с геометрическим распределением:

$$p(n) = (1 - z_0)z_0^n, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{4}$$

Далее используем следующий вариант эргодической теоремы Фостера [8]. Для того, чтобы неприводимая консервативная регулярная цепь Маркова была эргодична, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений равновесия имела нетривиальное решение такое, что $\sum_{n=0}^{\infty} | p(n) | < \infty.$ Неприводимость цепи очевидна. Консервативность выполнена по постановке задачи. Регулярность также выполнена. При выполнении условия (3) уравнение (2), как мы убедились, имеет корень $z_0 \in (0,1)$. Следовательно, (4) – нетривиальное решение системы уравнений равновесия, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} | p(n) |$ сходится как сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $z_0 \in (0,1)$. Значит, условие (3) достаточно для эргодичности цепи Маркова $n(t)$.

Для доказательства необходимости неравенства (3) для эргодичности цепи фактически надо показать, что если $\rho \geq 1$, т. е. $\lambda^+ \geq \mu + \rho\sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-,$ то цепь $n(t)$ не является эргодической. Сначала покажем, что при выполнении последнего неравенства все корни характеристического уравнения (2) не попадают в круг $| z | < 1$.

Лемма 1. 1. *Если* $\rho > 1,$ *то все корни характеристического уравнения* (2) *по модулю строго больше единицы.*

2. *Если* $\rho = 1,$ *то на окружности* $| z | = 1$ *характеристическое уравнение)* (2) *имеет единственный корень* $z = 1,$ *причем простой, а остальные корни* (2) *по модулю строго больше единицы.*

Доказательство. Введем функции комплексной переменной

$$h(z) = \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} z^l + \mu z, \quad f(z) = -\lambda^+,$$

тогда характеристическое уравнение (2) запишется как $g(z) = h(z) + f(z) = 0.$

1. В случае $\rho > 1$, т. е. $\lambda^+ > \mu + \rho\sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-$ введенные функции $h(z)$ и $f(z)$ аналитичны в замкнутом круге $| z | \leq 1,$ причем на его границе $| z | = 1$ выполняется неравенство

$$| h(z) | \leq \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^- + \mu < \lambda^+ = | f(z) |.$$

По теореме Руше функции $h(z) + f(z)$ и $f(z)$ имеют одинаковое число нулей в открытом круге $| z | < 1$, значит, $g(z) = h(z) + f(z)$ не имеет нулей в круге $| z | < 1$. На границе $| z | = 1$ характеристическое уравнение (2) также не имеет корней, поскольку, предположив, что $z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$ – корень уравнения (2), получим

$$\operatorname{Re} g(z) = \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} \cos l\varphi + \mu \cos\varphi - \lambda^+ = 0.$$

Но

$$\left| \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} \cos l\varphi + \mu \cos\varphi \right| \le \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^- + \mu < \lambda^+ ,$$

что противоречит предыдущему равенству. Поэтому все корни (2) по модулю строго больше единицы.

2. Остается рассмотреть более сложный случай $\rho = 1$, т. е. $\lambda^+ = \mu + \rho \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-$, для которого можно воспользоваться следующей модификацией теоремы Руше, предложенной В.И. Клименок [9] и весьма полезной для исследования условий эргодичности процессов массового обслуживания.

Пусть функции $h(z)$ и $f(z)$ аналитичны в открытом круге $|z| < 1$, непрерывны на границе $|z| = 1$ и выполнены следующие условия:

$$|f(z)|_{|z|=1,\, z\neq 1} > |h(z)|_{|z|=1,\, z\neq 1}, \tag{5}$$

$$f(1) = -h(1) \neq 0. \tag{6}$$

Пусть также функции $f(z)$ и $h(z)$ имеют производные в точке $z = 1$ и

$$\frac{f'(1) + h'(1)}{f(1)} < 0. \tag{7}$$

Тогда функции $f + h$ и f имеют одинаковое число нулей в круге $|z| < 1$.

В рассматриваемом случае $z = 1$ – корень характеристического уравнения (2). Этот корень простой, поскольку $g'(1) \ge \mu > 0$. Покажем, что других корней, равных по модулю единице, нет. Так как $g(-1) \le -\mu - \lambda^+ < 0$ то $z = -1$ не является корнем (2). Пусть $z = e^{i\varphi}$ – корень (2). Тогда

$$\operatorname{Re} g(z) = \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{t=1}^{s} \cos l\phi + \mu \cos\phi - \lambda^+ = 0. \tag{8}$$

Так как на полном обороте $0 \le \varphi < 2\pi$ для $\varphi \neq 0, \varphi \neq \pi$

$$\left| \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} \cos l\varphi + \mu \cos\varphi \right| \le \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} |\cos l\varphi| + \mu |\cos\varphi| < \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^- + \mu = \lambda^+,$$

то (8) нарушается. Итак, $z = 1$ является единственным, притом простым корнем характеристического уравнения (2) на окружности $|z| = 1$.

При $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \neq 0$, (т. е. $|z| = 1, \quad z \neq 1$)

$$|h(z)| = \left| \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} e^{il\phi} + \mu e^{i\phi} \right| < \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^- + \mu = \lambda^+ = |f(z)|,$$

поскольку модуль суммы комплексных чисел с аргументами, кратными $\varphi \neq 0$, строго меньше их модулей. Следовательно, (5) выполняется. Далее,

$$f(1) = -\lambda^+ = -\sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^- - \mu = -h(1) < 0,$$

т. е. справедливо (6). Наконец, выполняется (7), так как

$$\frac{f'(1) + h'(1)}{f(1)} = \frac{h'(1)}{f(1)} = -\frac{1}{\lambda^+} \left(\sum_{s=1}^{T} \frac{s(s+1)}{2} \lambda_s^- + \mu \right) < 0.$$

Таким образом, выполнены все условия модифицированной В.И. Клименок теоремы Руше. Поэтому характеристическое уравнение (2) имеет единственный притом простой корень $z = 1$ на границе $|z| = 1$, остальные корни (2) по модулю строго больше единицы. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $Q_j(n)$ *– некоторые многочлены от* n, $0 \le \varphi < 2\pi$, *причем* $\varphi_j \ne \varphi_m$ *при* $j \ne m (j,m = 1,2,\ldots,k)$ *и*

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j(n) e^{in\varphi_j} \to 0 \quad при \quad n \to \infty,$$

то $Q_j(n) \equiv 0 \quad (j = 1,2,\ldots,k)$.

Доказательство. Обозначим $A = \max\limits_{1 \le j \le k} \deg Q_j(n),$

тогда

$$n^A \sum_{j=1}^{k} \frac{Q_j(n)}{n^A} e^{in\varphi_j} \to 0 \quad при \quad n \to \infty.$$

Найдется постоянная C_j такая, что

$$\frac{Q_j(n)}{n^A} \to C_j, \quad j = 1,2,\ldots,k. \tag{9}$$

Тогда, $n^A \left(\sum\limits_{j=1}^{k} C_j e^{in\varphi_j} + o(1) \right) \to 0$, а так как $A \ge 0$, то тем более $\sum\limits_{j=1}^{k} C_j e^{in\varphi_j} + o(1) \to 0$, откуда $\varepsilon_n = \sum\limits_{j=1}^{k} C_j e^{in\varphi_j} + o(1) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N_\varepsilon$ такой, что для всех $n \ge N$ будет $|\varepsilon_n| < \varepsilon$. По введенному выше обозначению для ε_n имеем

$$\begin{cases} \varepsilon_N = \sum\limits_{j=1}^{k} C_j e^{iN\phi_j} \\ \varepsilon_{N+1} = \sum\limits_{j=1}^{k} C_j e^{i(N+1)\phi_j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{N+k-1} = \sum\limits_{j=1}^{k} C_j e^{i(N+k-1)\phi_j} \end{cases}.$$

Модуль определителя этой системы линейных относительно $C_1, C_2, \ldots, C_k$ уравнений, являющегося определителем Вандермонда,

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} e^{iN\varphi_1} & e^{iN\varphi_2} & \cdots & e^{iN\varphi_k} \\ e^{i(N+1)\varphi_1} & e^{i(N+1)\varphi_2} & \cdots & e^{i(N+1)\varphi_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i(N+k-1)\varphi_1} & e^{i(N+k-1)\varphi_2} & \cdots & e^{i(N+k-1)\varphi_k} \end{vmatrix} = \left| \prod_{j<k} (e^{i\varphi_j} - e^{i\varphi_k}) \right| \ne 0,$$

поскольку $\varphi_j \ne \varphi_k$ при $k \ne j$. Раскладывая определитель

$$|\Delta_m| = \begin{vmatrix} e^{iN\phi_1} & e^{iN\phi_2} & \cdots & \varepsilon_N & \cdots & e^{iN\phi_k} \\ e^{i(N+1)\phi_1} & e^{i(N+1)\phi_2} & \cdots & \varepsilon_{N+1} & \cdots & e^{i(N+1)\phi_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i(N+k-1)\phi_1} & e^{i(N+k-1)\phi_2} & \cdots & \varepsilon_{N+k-1} & \cdots & e^{i(N+k-1)\phi_k} \end{vmatrix},$$

по столбцу свободных членов системы линейных уравнений $(\varepsilon_N, \varepsilon_{N+1}, \ldots, \varepsilon_{N+k-1})^T$, получим $|\Delta_m| \le \max\limits_{N \le l \le N+k-1} \varepsilon_l \cdot C < C\varepsilon,$ где C – некоторая константа, не зависящая от ε. По правилу Крамера

$$|C_m| = \frac{|\Delta_m|}{|\Delta|} < \frac{C}{|\Delta|}\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует, что $C_m = 0, \quad m = 1,2,\ldots,k.$ Теперь из (9) следует, что $Q_j(n) \to 0,$ при $n \to \infty$, а так как $Q_j(n)$ – многочлен от n, то $Q_j(n) \equiv 0, \quad j = 1,2,\ldots,k.$ Лемма 2 доказана.

1. Пусть $\lambda^+ > \mu + \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-.$ По лемме 1 все корни характеристического уравнения по модулю строго больше единицы. Покажем, что в этом случае не существует стационарного распределения, следовательно, цепь Маркова $n(t)$ не является эргодической. Общее решение разностного уравнения (1) имеет вид

$$p(n) = \sum_{j=1}^{l} Q_j(n) z_j^n, \tag{10}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_l$ – все различные корни характеристического уравнения (2), $Q_1(n), Q_2(n), \ldots, Q_l(n)$ – многочлены от n степеней, на единицу меньших кратностей корней $z_1, z_2, \ldots, z_l$ соответственно. Не ограничивая общности, можно считать $1 < |z_1| \le |z_2| \le \ldots \le |z_l|$. Разобьем все корни на группы корней с равными модулями:

$$|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_{l_1}| = r_1 < |z_{l_1+1}| = |z_{l_1+2}| = \ldots = |z_{l_2}| = r_2 < |z_{l_2+1}| = |z_{l_{12}+2}| = \ldots = |z_{l_3}| = r_3 < \ldots <$$
$$< \ldots < |z_{l_p+1}| = |z_{l_p+2}| = \ldots = |z_l| = r_{p+1}.$$

Тогда (10) запишется как

$$p(n) = \sum_{j=1}^{l_1} Q_j(n) z_j^n + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} Q_j(n) z_j^n + \ldots + \sum_{j=l_p+1}^{l} Q_j(n) z_j^n. \tag{11}$$

Представляя корни характеристического уравнения в показательной форме $z_k = |z_k| e^{i\varphi_k}$, $0 \le \varphi_k < 2\pi,$ запишем (11) как

$$p(n) = r_1^n \sum_{j=1}^{l_1} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + r_1^n \sum_{j=l_1+1}^{l_2} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + \ldots + r_1^n \sum_{j=l_p+1}^{l} Q_j(n) e^{in\varphi_j} = r_{p+1}^n \left[\left(\frac{r_1}{r_{p+1}} \right)^n \sum_{j=1}^{l_1} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{r_1}{r_{p+1}} \right)^n \sum_{j=l_1+1}^{l_2} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + \ldots + \left(\frac{r_1}{r_{p+1}} \right)^n \sum_{j=l_{p-1}+1}^{l_p} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + \left(\frac{r_1}{r_{p+1}} \right)^n \sum_{j=l_p+1}^{l} Q_j(n) e^{in\varphi_j} \right], \tag{12}$$

причем $1 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{p+1}$. Если предположить, что стационарное распределение существует, то $p(n) \to 0$ при $n \to \infty.$ Так как $r_{p+1} > 1,$ то выражение в квадратных скобках (12) тем более будет стремиться к нулю. Все члены (12), кроме, быть может, последнего, стремятся к $0,$ поскольку $|e^{in\varphi_j}| = 1,$ а многочлены $Q_j(n),$ если они не нулевой степени, стремятся к бесконечности гораздо медленнее, чем $\left(\frac{r_j}{r_{p+1}} \right)^n \to 0,$ когда $n \to \infty$ (если $Q_j(n)$ – многочлен нулевой степени, то это утверждение очевидно). Следовательно, последний член в квадратных скобках (12) также стремится к нулю, т. е. $\sum_{j=l_p+1}^{l} Q_j(n) e^{in\varphi_j} \to 0$ при $n \to \infty.$

Без ограничения общности считаем, что все $\varphi_j \in [0,2\pi)$ и что $\varphi_j \ne \varphi_m$ при $j \ne m.$ По лемме 2 отсюда следует, что $Q_j(n) \equiv 0$ при $l_p + 1 \le j \le l.$

Таким образом (11) принимает форму

$$p(n) = \sum_{j=1}^{l_1} Q_j(n) z_j^n + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} Q_j(n) z_j^n + \ldots + \sum_{j=l_{p-1}+1}^{l_p} Q_j(n) z_j^n. \tag{13}$$

Вынося теперь в этом выражении за скобку r_p^n, аналогичным способом докажем, что в последней сумме формулы (13) все $Q_j(n) \equiv 0$ (т. е. для $l_{p-1}+1 \le j \le l_p$). По индукции отсюда вытекает, что во всех суммах в (13) $Q_j(n) \equiv 0,$ т. е. что $p(n) \equiv 0$. Значит, не существует нетривиального решения уравнений равновесия (1) такого, что $p(n) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. не существует стационарного распределения. Поэтому цепь Маркова $n(t)$ не эргодична.

2. Пусть теперь $\lambda^+ = \mu + \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-$. По лемме 1 характеристическое уравнение (2) имеет один простой корень $z = 1$, остальные корни по модулю строго больше единицы. Общее решение разностного уравнения (1) будет отличаться от (10) наличием дополнительного постоянного члена:

$$p(n) = C + \sum_{j=1}^{l} Q_j(n) z_j^n,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_l$ – все различные корни характеристического уравнения (2) кроме простого корня $z = 1$, $Q_1(n), Q_2(n), \ldots, Q_l(n)$ – многочлены от n степеней, на единицу меньших кратностей корней $z_1, z_2, \ldots, z_l$ соответственно. Доказательство того, что если $p(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то $p(n) \equiv 0,$ полностью повторяет доказательство пункта 1 за исключением того, что доказывая последовательно равенство нулю многочленов $Q_j(n),$ в конце концов придем к тому, что $p(n) \equiv C.$ Следовательно, $p(n) \equiv 0$. Поэтому и в этом случае не существует стационарного распределения, значит, цепь Маркова $n(t)$ не является эргодичной.

Литература

1. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М. : ЛКИ, 2013. – Изд. 6. – 400 с.

2. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : РУДН, 1995. – 529 с.

3. Malinkovski, Yu. Stationary Distribution of the Queueing Networks with Batch Negative Customer Arrivals / Yu. Malinkovski // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. – Switzerland : Springer Internetional Publishing, 2015. – V. 564. – P. 53–63.

4. Malinkovski, Yu. Stationary Distribution of the Exponential Queueing Networks with Countable Set of Types of Batch Negative Customer Arrival Flows / Yu. Malinkovski // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. – Switzerland : Springer International Publishing, 2016. – V. 638. – P. 447–455.

5. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания / Ю. В. Малинковский, Н. Н. Бородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 64–68.

6. Gelenbe, E. Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – V. 28. – P. 656–663.

7. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1965. – 431 с.

8. Foster, F. G. On Stochastic Matrices Assosiated with Certain Queueing Process / F. G. Foster // Ann.Math.Statist. – 1953. – V. 24, № 2. – P. 355–360.

9. Klimenok, V. On the Modification of Rouche's Theorem for the Queueing Theory Problems / V. Klimenok // Queueing Systems. – 2001. – V. 38. – P. 431–434.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 11.06.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 514.765.12

Эквиаффинные связности нулевой кривизны на однородных пространствах с разрешимой группой преобразований

Н.П. Можей

В работе изучаются трехмерные однородные пространства, допускающие связности только нулевой кривизны. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная (локально эквиаффинная) связность. Рассмотрены пространства, на которых действует разрешимая группа преобразований. Приведено описание эквиаффинных (локально эквиаффинных) связностей на указанных пространствах. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них.
Ключевые слова: эквиаффинная связность, группа преобразований, однородное пространство, тензор кривизны, тензор кручения.

In this article we study three-dimensional homogeneous spaces allowing connections of zero curvature only. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine (locally equiaffine) connection are defined. We have concerned the case of the solvable Lie group of transformations. We describe the equiaffine (locally equiaffine) connections on those spaces. The features of the methods presented in the work are the application of a purely algebraic approach to the description of manifolds and structures on them.
Keywords: equiaffine connection, transformation group, homogeneous space, curvature tensor, torsion tensor.

Введение. Важнейшими структурами в дифференциальной геометрии многообразий являются структуры связностей, имеющие широкое применение в математике и физике. Еще Феликс Клейн [1] утверждал, что наиболее полезным способом изучения геометрических структур является изучение симметрий, т. е. групп преобразований, сохраняющих особенности структуры. Большой вклад в развитие теории связностей внесли работы Э. Картана, А.П. Нордена, П.К. Рашевского, М. Куриты, А.П. Широкова, Э.Б. Винберга, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [2] и др. Понятие эквиаффинной кривизны первоначально встречается у В. Бляшке [3], альтернативный подход приведен в [4]. Вопрос о существовании связности нулевой кривизны является одной из нерешенных проблем, такие связности позволяют дать геометрическую интерпретацию некоторым понятиям математики и физики, например, понятие связности, определяющей представление нулевой кривизны, играет важную роль в теории солитонов. Трехмерные однородные пространства с разрешимой группой преобразований изучались в [5], причем внимание сосредоточено на пространствах, допускающих аффинные связности только нулевой кривизны. В данной работе приведено описание эквиаффинных (локально эквиаффинных) связностей на таких пространствах; при изложении сохранены обозначения, введенные в работе [5], в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$, $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\overline{G}$ эффективна на $\overline{G}/G$. Аффинной связностью на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Тензоры кручения и кривизны имеют вид: $T \in Inv T_2^1(\mathfrak{m})$,

$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \overline{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. Определим тензор Риччи $Ric \in InvT_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \overline{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна. Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Описание эквиаффинных связностей на однородных пространствах разрешимых групп Ли. Будем описывать пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\overline{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\overline{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \overline{\mathfrak{g}}$), $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$; нумерация соответствует приведенной в [5]. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{g}}$. Тривиальная пара типа $d.n$ обозначается $d.n.1$.

Теорема 1. А) Все трехмерные *тривиальные* однородные пространства, допускающие аффинные связности только нулевой кривизны, такие, что $\overline{\mathfrak{g}}$ разрешима, локально имеют вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{a}$ – коммутативный идеал в $\overline{\mathfrak{g}}$, а $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из следующих подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$:

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 1}$

2. $\begin{pmatrix} x & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu x \end{pmatrix}$ $\lambda \le \mu \le 1, \lambda\mu > 0,$ $(\lambda, \mu) \neq (-2, -1),$ $(\lambda, \mu) \neq (1/4, 1/2)$; 4. $\begin{pmatrix} \lambda x & x & \\ -x & \lambda x & \\ & & \mu x \end{pmatrix}$ $\mu > 0$; 7. $\begin{pmatrix} x & & x \\ & \lambda x & \\ & & x \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$; 9. $\begin{pmatrix} x & x & \\ & x & x \\ & & x \end{pmatrix}$.

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 2}$

1. $\begin{pmatrix} x & & \\ & \lambda x & \\ & & y \end{pmatrix}$ $|\lambda| \le 1, \lambda \neq 0$; 2. $\begin{pmatrix} x+y & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu y \end{pmatrix}$ $-1 \le \mu \le \lambda, \lambda\mu > 0$; 3. $\begin{pmatrix} \lambda x & x & \\ -x & \lambda x & \\ & & y \end{pmatrix}$ $\lambda \ge 0$; 4. $\begin{pmatrix} y & x & \\ -x & y & \\ & & \lambda x + \mu y \end{pmatrix}$ $\lambda \ge 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$; 5. $\begin{pmatrix} y & x + \lambda y & \\ & x & \\ & & y \end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix} y & y & \\ & x & \\ & & y \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} & x & \\ & y & \\ & & \lambda y \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$; 9. $\begin{pmatrix} y & x & \\ & \lambda y & \\ & & \mu y \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu) \neq (1/2, -1/2),$ $(\lambda, \mu) \neq (1/2, 1/4),$ $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$; 10. $\begin{pmatrix} x & y & x \\ & x & y \\ & & x \end{pmatrix}$; 11. $\begin{pmatrix} x & y & -x \\ & x & y \\ & & x \end{pmatrix}$; 12. $\begin{pmatrix} x & y & \\ & x & y \\ & & x \end{pmatrix}$;

14. $\begin{pmatrix} y & y & x \\ & y & y \\ & & y \end{pmatrix}$; 15. $\begin{pmatrix} & x & \\ & y & y \\ & & y \end{pmatrix}$; 16. $\begin{pmatrix} y & x & \\ & \lambda y & \\ & & \lambda y \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$; 19. $\begin{pmatrix} y & y & x \\ & y & \\ & & \lambda y \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$; 21. $\begin{pmatrix} x & y & \\ & \lambda x & y \\ & & (2\lambda - 1)x \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 1, 0, 1/2$; 22. $\begin{pmatrix} & y & \\ & x & y \\ & & 2x \end{pmatrix}$.

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 3}$

1. $\begin{pmatrix} x & & \\ & y & \\ & & z \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} y & x & \\ -x & y & \\ & & z \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} & x & \\ & y & \\ & & z \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} y & x & \\ & \lambda y & \\ & & z \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$; 8. $\begin{pmatrix} y & x & \\ & z & \\ & & \lambda y + \mu z \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$,

9. $\begin{pmatrix} x & y & z \\ & x & y \\ & & x \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} x & & z \\ & y & \lambda x + y \\ & & y \end{pmatrix}$; 11. $\begin{pmatrix} x & & z \\ & y & x \\ & & y \end{pmatrix}$; 12. $\begin{pmatrix} & & z \\ & y & \\ & & x \end{pmatrix}$; 13. $\begin{pmatrix} x & & z \\ & \lambda x & y \\ & & \mu x \end{pmatrix}$ $-1 < \lambda \le 1, \mu \neq 0$; 14. $\begin{pmatrix} x & & z \\ & -x & y \\ & & \mu x \end{pmatrix}$ $\mu > 0$;

16. $\begin{pmatrix}\lambda x & x & z\\ -x & \lambda x & y\\ & & \mu x\end{pmatrix}$ $\mu>0$; 17. $\begin{pmatrix}x & \lambda x+y & z\\ & x & \\ & & y\end{pmatrix}$; 18. $\begin{pmatrix}x & x & z\\ & x & \\ & & y\end{pmatrix}$; 19. $\begin{pmatrix} & y & z\\ & x & \\ & & \lambda x\end{pmatrix}$ $|\lambda|\le 1$, $\lambda\neq 0$; 20. $\begin{pmatrix}x & y & z\\ & \lambda x & \\ & & \mu x\end{pmatrix}$ $\lambda\le\mu$, $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$;

21. $\begin{pmatrix} & y & z\\ & \lambda x & x\\ & -x & \lambda x\end{pmatrix}$ $\lambda\le 0$; 22. $\begin{pmatrix}\lambda x & y & z\\ & \mu x & x\\ & -x & \mu x\end{pmatrix}$ $\lambda>0$; 23. $\begin{pmatrix}x & y & z\\ & \lambda x & y\\ & & (2\lambda-1)x\end{pmatrix}$ $\lambda\neq 1, \frac{1}{2}$; 24. $\begin{pmatrix} & y & z\\ & x & y\\ & & 2x\end{pmatrix}$; 26. $\begin{pmatrix} & x & z\\ & y & y\\ & & y\end{pmatrix}$;

27. $\begin{pmatrix}y & x & z\\ & \lambda y & y\\ & & \lambda y\end{pmatrix}$ $\lambda\neq 0$; 28. $\begin{pmatrix} & x & z\\ & & y\\ & & x\end{pmatrix}$; 29. $\begin{pmatrix} & x & z\\ & x & y\\ & & \mu x\end{pmatrix}$ $\mu\neq 0$; 30. $\begin{pmatrix} & x & z\\ & x & x+y\\ & & x\end{pmatrix}$; 31. $\begin{pmatrix}x+y & z & \\ & x & z\\ & & x-y\end{pmatrix}$

$\underline{\dim\mathfrak{g}=4}$

4. $\begin{pmatrix}x & u & \\ & y & \\ & & z\end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix}x & u & \\ & \lambda x & z\\ & & y\end{pmatrix}$ $-1\le\lambda\le 1$; 7. $\begin{pmatrix}\lambda x & x & u\\ -x & \lambda x & z\\ & & y\end{pmatrix}$ $\lambda\ge 0$; 8. $\begin{pmatrix}x & u & \\ & y & z\\ & & \lambda x+\mu y\end{pmatrix}$ $\lambda\le\mu$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$; 9. $\begin{pmatrix}y & x & u\\ -x & y & z\\ & & \lambda x+\mu y\end{pmatrix}$ $\lambda\ge 0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$;

10. $\begin{pmatrix} & z & u\\ & x & \\ & & y\end{pmatrix}$; 11. $\begin{pmatrix}x & z & u\\ & y & \\ & & \lambda x+\mu y\end{pmatrix}$ $-1\le\mu<1$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$; 12. $\begin{pmatrix}x & z & u\\ & y & \\ & & \lambda x+y\end{pmatrix}$ $\lambda\ge 0$; 13. $\begin{pmatrix}x & z & u\\ & \lambda y & y\\ & -y & \lambda y\end{pmatrix}$ $\lambda\ge 0$;

14. $\begin{pmatrix}\lambda x+\mu y & z & u\\ & y & x\\ & -x & y\end{pmatrix}$ $\lambda\ge 0$; 15. $\begin{pmatrix}x & z & u\\ & y & \lambda x+y\\ & & y\end{pmatrix}$ $\lambda\ge 0$; 16. $\begin{pmatrix}x & z & u\\ & y & x\\ & & y\end{pmatrix}$; 17. $\begin{pmatrix}x & \lambda x+y & u\\ & x & z\\ & & y\end{pmatrix}$;

18. $\begin{pmatrix}x & x & u\\ & x & z\\ & & y\end{pmatrix}$; 19. $\begin{pmatrix} & y & u\\ & & z\\ & & x\end{pmatrix}$; 20. $\begin{pmatrix} & y & u\\ & x & z\\ & & \lambda x\end{pmatrix}$ $\lambda\neq 0$; 21. $\begin{pmatrix}x & y & u\\ & \lambda x & z\\ & & \mu x\end{pmatrix}$ $\mu\neq 0$; 22. $\begin{pmatrix}x+y & z & u\\ & x & z\\ & & x-y\end{pmatrix}$.

$\underline{\dim\mathfrak{g}=5}$ $\underline{\dim\mathfrak{g}=6}$

4. $\begin{pmatrix}x & & v\\ & y & u\\ & & z\end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix}x & y & v\\ -y & x & u\\ & & z\end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix}x & u & v\\ & y & \\ & & z\end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix}x & u & v\\ & y & z\\ & -z & y\end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix}x & u & w\\ & y & v\\ & & z\end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} & z & v\\ & x & u\\ & & y\end{pmatrix}$; 9. $\begin{pmatrix}x & z & v\\ & \lambda x & u\\ & & y\end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix}x & z & v\\ & y & u\\ & & \lambda x+\mu y\end{pmatrix}$ $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.

Параметры обозначены греческими буквами, подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметров, не сопряжены друг другу; переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$, базис подалгебры выбираем, придав одной из переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов по алфавиту.

Б) [5]. Все трехмерные *нетривиальные* однородные пространства, допускающие аффинные связности только нулевой кривизны, такие, что $\overline{\mathfrak{g}}$ разрешима, локально имеют вид 1.2.2, 1.2.3, 1.4.2, 1.7.3, 2.2.2, 2.4.2, 2.8.5, 2.9.2 ($\mu\neq 0,-1,-1/2$), 2.15.2, 2.16.3, 2.19.5, 3.8.7, 3.13.3 ($\mu\neq 0$), 3.13.5, 3.14.3, 3.19.17, 3.20.25 ($\mu\neq 0$), 3.20.26 ($\lambda\neq 1/4$), 4.8.9, 4.11.5, где

1.2.2, $\mu=\lambda+1$, $\lambda<-1$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	λu_2	$(\lambda+1)u_3$
u_1	$-u_1$	0	u_3	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_3$	0	0
u_3	$-(\lambda+1)u_3$	0	0	0

,

1.2.3, $\mu=1-\lambda$, $0<\lambda\le 1/2$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	λu_2	$(1-\lambda)u_3$
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	0	0	u_1
u_3	$(\lambda-1)u_3$	0	$-u_1$	0

,

1.4.2, $\mu=2\lambda$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	λu_1-u_2	$u_1+\lambda u_2$	$2\lambda u_3$
u_1	$-\lambda u_1+u_2$	0	u_3	0
u_2	$-\lambda u_2-u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	0	0

, $\lambda>0$,

1.7.3, $\lambda = 2$

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$2u_2$	u_1+u_3
u_1	$-u_1$	0	0	u_2
u_2	$-2u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.2.2, $\lambda = \mu = 1$

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2	0
e_2	0	0	u_1	0	u_3
u_1	$-u_1$	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	u_1
u_3	0	$-u_3$	0	$-u_1$	0

,

2.4.2, $\lambda=0,\mu=2$

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2	$2u_3$
e_2	0	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	$-u_1$	u_2	0	u_3	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	$-2u_3$	0	0	0	0

,

2.9.2, $\lambda = \mu + 1$

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	$(\mu+1)u_2$	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu+1)u_2$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

2.8.5, $\lambda = 1$

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_2	u_3
u_1	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.15.2

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_2	u_2+u_3
u_1	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_2-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.16.3, $\lambda = 1/2$

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_1$	0	0	u_1
e_2	$(1/2)e_1$	0	u_1	$(1/2)u_2$	$u_2+(1/2)u_3$
u_1	0	$-u_1$	0	0	0
u_2	0	$-(1/2)\,u_2$	0	0	u_1
u_3	$-u_1$	$-u_2-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0

,

2.19.5, $\lambda = 1/2$

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_1$	0	0	u_1
e_2	$(1/2)e_1$	0	u_1	u_1+u_2	$e_1+(1/2)u_3$
u_1	0	$-u_1$	0	0	0
u_2	0	$-u_1-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-e_1-(1/2)u_3$	0	0	0

,

3.8.7, $\lambda = 1$, $\mu = -1$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

3.13.3, $\lambda = 1-\mu$, $0 \le \mu < 2$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1-\mu)u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$(\mu-1)u_2$	0	0	0	0	u_1
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

,

3.13.5, $\lambda=1+\mu$, $-2 < \mu < 0$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1+\mu)u_2$	μu_3
e_2	$-e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu+1)u_2$	0	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

3.14.3, $\mu = 2$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-3e_2$	$-e_3$	u_1	$-u_2$	$2u_3$
e_2	$3e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0	0	u_1
u_3	$-2u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

,

3.19.17, $\lambda = 1/2$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-2e_2$	$-e_3$	0	$2u_2$	u_3
e_2	$2e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	0	0
u_2	$-2u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

,

3.20.25, $\lambda = 2\mu$, $\mu \le 0$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$2\mu u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-2\mu u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

,

3.20.26, $\lambda > 0$, $\mu = 2\lambda$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\lambda)e_2$	$(1-2\lambda)e_3$	u_1	λu_2	$2\lambda u_3$
e_2	$(\lambda-1)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$(2\lambda-1)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	$-u_1$	0	0	0

,

4.8.9, λ=–1, μ=1	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	e_4	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	0	u_1
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_2$	0	0

,

4.11.5, λ=0, μ=1/2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	$-(1/2)e_4$	0	u_2	$(1/2)u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	e_4
e_4	$-e_4$	$(1/2)e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	0	$-(1/2)u_3$	$-e_4$	$-u_1$	0	0	0

.

Теорема 2. Пусть $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – трехмерное однородное пространство, допускающее аффинные связности только нулевой кривизны, такое, что $\overline{\mathfrak{g}}$ разрешима, приведенное в теореме 1. А) Локально эквиаффинные связности имеют вид, указанный в следующей таблице:

Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения), тензор кручения произвольной аффинной связности всегда нулевой, ($p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j}\in\mathbb{R}$, $i, j=\overline{1,3}$)
4.11.1 $\lambda=1/2$, $\mu=0$, 2.21.1 $\lambda=3/4$	$\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.8.1 $\lambda=0$, $\mu=1/2$, 3.8.1 $\lambda=1/2$, $\mu=0$, 2.8.1 $\lambda=1/2$, 2.9.1 $\lambda=2\mu$ ($\mu\neq 0,1/4,1/3,1/2$), 1.2.1 $\mu=\lambda/2$ ($\lambda\neq -2$).	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.11.5, 3.19.17, 3.20.25 $\mu\neq 0$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.7.1 $\lambda=1/2$, 2.1.1 $\lambda=1/2$, 1.2.1 $\lambda=1/2$ ($\mu\neq 1/2,1$), 1.7.1 $\lambda=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.14.1 $\mu\neq 0,2$, 2.9.1 $\lambda=1$, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda=1/2$ ($\mu\neq 0,-1/2,1/4,1/2$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.20.26 $\lambda\neq 1/3,1/4$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.19.5	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.2.1 $\mu=2\lambda$ ($\lambda\neq 1/3,1/4$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&q_{3,2}&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы

1.2.1 $\lambda = 1/2,\ \mu = 1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&q_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения), тензор кручения произвольной аффинной связности может быть ненулевым
3.13.3 $\mu \neq 0$, 3.14.3	$\Lambda(u_1) = 0,\ \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix}0&0&1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix}0&-1/2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.8.9, 3.8.7, 3.13.5, 2.8.5, 2.9.2 $\lambda \neq 1/2$ ($\mu \neq 0, 1, -1, -1/2$), 2.15.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1/2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-1/2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.11.1 $\mu = -1, \lambda = 1$, 3.8.1 $\lambda = -1, \mu = 1$, 3.19.1 $\lambda = -1$, 3.20.1 $\mu = 1 - \lambda$ ($\lambda \neq 0$), 2.2.1 $\lambda = \mu = 1$, 2.8.1 $\lambda = -1$, 2.9.1 $\lambda = 1 - \mu$ ($\mu \neq 0, 1, 1/3, 1/2$), 1.2.1 $\mu = 1 - \lambda$ ($\lambda \neq 1/3, 1/2$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.2.2, 1.2.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.14.1 $\lambda = 0, \mu = 2$, 3.21.1 $\lambda = 0$, 3.22.1 $\lambda = 2\mu$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.21.1 $\mu = 1 - \lambda$ ($\lambda \neq 1$), 3.27.1 $\lambda = 1/2$, 2.16.1 $\lambda = 1/2$	совпадает со случаем 4.11.1 $\lambda = 1/2,\ \mu = 0$
2.16.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1/2&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = \mu = 1/2$, 1.2.1 $\lambda = \mu = 1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.20.26 $\lambda = 1/3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.23.1 $\lambda = 2/3$, 2.21.1 $\lambda = 2/3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&2q_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.4.1 $\lambda = 0, \mu = 2$, 1.4.1 $\mu = 2\lambda$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\p_{3,1}&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&p_{3,1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.4.2, 1.4.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\p_{3,1}&1/2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&p_{3,1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = 2/3,\ \mu = 1/3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = 2, \mu = 1$, 1.7.1 $\lambda = 2$	совпадает со случаем 4.8.1 $\lambda = 0, \mu = 1/2$

Окончание таблицы

2.9.2 $\mu = 1$, 1.7.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.2 $\lambda = 1/2$ ($\mu \neq 0, 1, -1, -1/2$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1 $\mu = \lambda + 1$ ($\lambda \neq -2$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{3,2} - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1 $\lambda = 1/3$, $\mu = 2/3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Для остальных трехмерных однородных пространств, приведенных в теореме 1, локально эквиаффинная связность существует и тривиальна (т. е. $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$).

Б) Эквиаффинные связности в случаях 3.20.25 ($\mu = -1/3$) и 3.13.5 ($\mu = -1$) совпадают с локально эквиаффинными. В случаях 1.2.1 ($\mu + \lambda = -1$), 1.4.1 ($\mu = -2\lambda$), 1.7.1 ($\lambda = -2$), 2.2.1 (λ, μ) = (–1,–1), 2.4.1 (λ, μ) = (0,–2), 2.8.1 ($\lambda = -1$), 2.9.1 ($\lambda + \mu = -1$), 2.16.1 ($\lambda = -1/2$), 2.19.1 ($\lambda = -2$), 3.8.1 (λ, μ) = (–1,–1), 3.13.1 ($\mu + \lambda = -1$), 3.16.1 ($\mu = -2\lambda$), 3.19.1 ($\lambda = -1$), 3.20.1 ($\mu + \lambda = -1$), 3.21.1 ($\lambda = 0$), 3.22.1 ($\lambda = -2\mu$), 3.23.1 ($\lambda = 0$), 3.27.1 ($\lambda = -1/2$), 3.29.1 ($\mu = -2$), 4.8.1 (λ, μ) = (–1,–1), 4.9.1 (λ, μ) = (0,–2), 4.11.1 (λ, μ) = (–1,–1), 4.14.1 (λ, μ) = (0,–2), 4.20.1 ($\lambda = -1$), 4.21.1 ($\mu + \lambda = -1$), 5.10.1 (λ, μ) = (–1,–1) эквиаффинная связность тривиальна. В других случаях пара не допускает эквиаффинных связностей.

Для доказательства заметим, что у пространств, указанных в теореме 1, связность имеет нулевую кривизну, тензор Риччи также нулевой (т. е. симметрический), следовательно при равенстве нулю тензора кручения аффинная связность является локально эквиафинной. Находим афинные связности и тензоры кручения. Проверяя, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной), получаем искомый результат.

Заключение. Таким образом, найдено и приведено в явном виде полное описание эквиаффинных (локально эквиаффинных) связностей на трехмерных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований (допускающих аффинные связности только нулевой кривизны). Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них.

Литература

1. Klein, F. A comparative review of recent researches in geometry / F. Klein // Bull. Amer. Math. Soc. – 1893. – V. 2, № 10. – P. 215–249.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2-х т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т. – 428 с.

3. Blaschke, W. Vorlesungen ¨uber Differentialgeometrie / W. Blaschke. – Berlin, 1923. – V. 2. – 272 s.

4. Olver, P. Recursive moving frames / P. Olver // Results Math. – 2011. – V. 60. – P. 423–452.

5. Можей, Н. П. Связности нулевой кривизны на однородных пространствах разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2017. – № 6 (105). – С. 104–111.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 02.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 519.21

Стационарное распределение сетей с положительными и отрицательными заявками и двумя типами узлов

В.А. Немилостивая

Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания, содержащая узлы двух типов – однолинейные и многолинейные. Аналогично сетям Геленбе в однолинейные узлы поступают положительные и отрицательные пуассоновские потоки. Положительные заявки требуют обслуживания, в то время как отрицательные уничтожают по одной положительной заявке. В многолинейные узлы могут поступать только положительные требования. Устанавливается достаточное условие эргодичности и находится стационарное распределение.
Ключевые слова: открытая сеть массового обслуживания, однолинейные и многолинейные узлы, положительные и отрицательные заявки, условие эргодичности, стационарное распределение.

An exponential queuing network containing nodes of two types – single-line and multi-line is considered. Similar to Gelenbe nets, positive and negative Poisson flows arrive at single-line nodes. Positive orders require servicing, while negative orders consume one positive order. Only positive requirements can come in multi-line nodes. A sufficient ergodicity condition is established and a stationary distribution is found.
Keywords: open queuing network, single-line and multi-line nodes, positive and negative customers, ergodicity condition, stationary distribution.

Введение. В работе [1] впервые рассматривались однолинейные сети массового обслуживания с положительными и отрицательными требованиями, для них через решение нелинейных уравнений трафика было найдено стационарное распределение в мультипликативной форме. С помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке в [2] доказано существование положительного решения уравнений трафика. В работах [3]–[5] также рассматривались сети с различными типами заявок и ограниченным временем пребывания в узлах. Сети с двумя типами узлов исследовались в работе [6]. В настоящей работе мы обобщили ранее полученные результаты для сетей Джексона и Геленбе на сети с двумя типами узлов – однолинейные и многолинейные.

Постановка задачи. В сеть массового обслуживания, содержащую N узлов, поступают $N+M$ независимых пуассоновских потоков. Поток может быть потоком положительных заявок (обычных, требующих обслуживания) $i=\overline{1,N}$ и потоком отрицательных заявок $i=\overline{1,M}$. При поступлении в i-ый узел отрицательная заявка мгновенно покидает сеть и в последствии не оказывает никакого влияния. Однако, если в момент поступления отрицательной заявки в узле имеются положительные, то одна из них (для определённости предположим последняя в очереди) мгновенно исчезает из сети. Если же в момент поступления в узле отсутствуют положительные заявки, то поступающая в узел отрицательная заявка пропадает, не оказывая в дальнейшем никакого влияния на поведение сети. Число мест для ожидания заявок в каждом из узлов бесконечное. Также будем полагать, что положительные заявки обслуживаются в порядке их поступления.

В сети имеются два типа узлов – однолинейные и многолинейные (на самом деле многолинейные системы можно считать однолинейными с переменной условной интенсивностью обслуживания $\mu(n)=\mu\cdot \mathrm{I}_{\{n\neq 0\}}$, где n – число заявок в системе, I_A – индикатор события A, равный 1, если A происходит, и равный 0, если A не происходит).

В однолинейные узлы поступают два вида заявок – положительные и отрицательные. Пусть Λ_i и λ_i – соответственно интенсивности потоков положительных и отрицательных заявок, поступающих в i-ый узел извне, $\Lambda_i>0, \lambda_i>0,\ i=\overline{1,M}$. В узлы $i=\overline{M+1,N}$ посту-

пают только потоки положительных заявок с интенсивностью Λ_i, $\Lambda_i > 0$. После обслуживания положительной заявки в i-ом узле ($i = \overline{1,N}$) эта заявка независимо от всех других заявок мгновенно с вероятностью p_{ij}^+ переходит в j-ый узел ($j = \overline{1,N}$), оставаясь положительной, и с вероятностью p_{ij}^- переходит в j-ый узел ($j = \overline{1,M}$), превращаясь в отрицательную, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть. Для удобства для $j = \overline{M+1,N}$ введём $p_{ij}^- = 0$. Тогда если обозначим $p_{ij} = p_{ij}^+ + p_{ij}^-$ $\left(i, j = \overline{1,N}\right)$, то

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij} = p_{i0} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = p_{i0} + \sum_{j=1}^{N}\left(p_{ij}^+ + p_{ij}^-\right) = 1,\ i = \overline{1,N}.$$

Состояние сети в момент времени t будем описывать случайным векторным процессом $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число положительных заявок в i-ом узле в момент времени t.

В силу предположения, что входящие потоки простейшие, а обслуживание экспоненциальное, $\vec{n}(t)$ является многомерной цепью Маркова с непрерывным временем и фазовым пространством $\mathrm{X} = \mathrm{Z}_+^N$, $\mathrm{Z}_+ = \{0,1,\ldots\}$.

Изолированный узел. Рассмотрим систему массового обслуживания, представляющую собой изолированный от сети i-ый узел ($i = \overline{1,M}$), состоящий из единственного экспоненциального прибора с интенсивностью обслуживания μ_i. В эту систему поступают два независимых между собой простейших потока заявок. Первый – поток обычных (положительных) заявок, требующих обслуживания, с интенсивностью поступления λ_i^+, второй – поток отрицательных заявок, действующих точно также, как и отрицательные заявки, поступающие в i-ый узел сети, с интенсивностью поступления λ_i^-. Позже мы подберём λ_i^+ и λ_i^- так, чтобы эти интенсивности совпадали с интенсивностями потоков положительных и отрицательных заявок соответственно, проходящих через i-ый узел исследуемой сети. Изолированный узел ведёт себя точно также, как и узел сети. Отличие только в том, что в него поступают пуассоновские потоки, а суммарные поступающие потоки в узел сети (извне и из других узлов) не являются простейшими.

Состоянием системы в момент времени t назовём число заявок $\tilde{n}_i(t)$ в системе в момент времени t. Очевидно, что $\tilde{n}_i(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $\mathrm{X}_i = \mathrm{Z}_+ = \{0,1,\ldots\}$, хотя вообще говоря $n_i(t)$ не будет марковской цепью. Легко заметить, что конечномерные распределения цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$ и цепи Маркова $\tilde{\tilde{n}}_i(t)$, выражающей число заявок в момент времени t в системе $M|M|1$ с интенсивностью входящего потока λ_i^+ и интенсивностью обслуживания $\mu_i + \lambda_i^-$, при одном и том же начальном распределении совпадают. Обе цепи консервативны, регулярны и имеют совпадающие уравнения Колмогорова. Поэтому вероятности перехода для этих цепей совпадают.

Лемма 1. Цепь Маркова $\tilde{n}_i(t)$ консервативна и регулярна. Для её эргодичности необходимо и достаточно чтобы загрузка системы

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \lambda_i^-} < 1, \quad i = \overline{1,M}.$$

Стационарные вероятности её состояний удовлетворяют следующему уравнению равновесия для так называемых вертикальных сечений:

$$\lambda_i^+ p_i(n_i - 1) = \left(\mu_i + \lambda_i^-\right) p_i(n_i), \quad n_i = 1,2,\ldots.$$

и имеют вид

$$p_i(n_i) = \rho_i^{n_i}(1 - \rho_i), \quad n_i = 0,1,\ldots. \tag{1}$$

Загрузку ρ_i можем понимать как вероятность занятости прибора в стационарном режиме.

Теперь изолируем от сети i-ый узел, где $i = \overline{M+1, N}$. Получим систему массового обслуживания с поступающим пуассоновским потоком обычных положительных заявок с интенсивностью поступления λ_i^+ и интенсивностью обслуживания $\mu_i(n_i)$, зависящей от n_i. Состоянием системы в момент времени t назовём число заявок $\tilde{n}_i(t)$ в системе в момент времени t. Очевидно, что $\tilde{n}_i(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $\mathrm{X}_i = \mathrm{Z}_+ = \{0,1,\ldots\}$. Очевидно, что эта цепь Маркова консервативна и регулярна.

Стационарные вероятности её состояний удовлетворяют следующему уравнению равновесия для вертикальных сечений:

$$\lambda_i^+ p_i(n_i - 1) = \mu_i(n_i) p_i(n_i), \quad n_i = 1,2,\ldots, i = \overline{M+1, N}.$$

Стационарное распределение цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$:

$$p_i(n_i) = p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)}, \qquad p_i(0) = \left(\sum_{n_i=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)} \right)^{-1}, \quad n_i = 1,2,\ldots, i = \overline{M+1, N}. \tag{2}$$

Необходимым и достаточным условием эргодичности цепи $\tilde{n}_i(t)$, описывающей изолированный узел, будет сходимость ряда $\sum_{n_i=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)} < \infty$.

Основной результат. Подберём теперь λ_i^+ и λ_i^- так, чтобы эти интенсивности совпадали с интенсивностями потоков положительных и отрицательных заявок соответственно, проходящих через i-ый узел исследуемой сети. Поскольку заявки не рождаются и не теряются при прохождении узлов, то в стационарном режиме выполняется следующий закон сохранения интенсивностей потоков при прохождении узлов:

$$\lambda_i^+ = \Lambda_i + \sum_{j=1}^{M} \frac{\mu_j \lambda_j^+}{\mu_j + \lambda_j^-} p_{ji}^+ + \sum_{j=M+1}^{N} \lambda_j^+ p_{ji}^+, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\lambda_i^- = \lambda_i + \sum_{j=1}^{M} \frac{\mu_j \lambda_j^+}{\mu_j + \lambda_j^-} p_{ji}^-, \quad i = \overline{1, M}. \tag{3}$$

Эти уравнения также называют уравнениями трафика. Нетрудно видеть, что так как $\Lambda_i > 0, \lambda_i > 0, \ i = \overline{1, N}$ любое решение $(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_N^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \ldots, \lambda_M^-)$ является строго положительным и цепь Маркова $\vec{n}(t)$ неприводима [7].

Если стационарное распределение $\{p(\vec{n}), \vec{n} \in \mathrm{Z}_+^N\}$ цепи Маркова $\vec{n}(t)$ существует, то стационарные вероятности её состояний удовлетворяют уравнениям глобального равновесия:

$$p(\vec{n}) \left[\sum_{i=1}^{M} \left[\Lambda_i + (\mu_i + \lambda_i) \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} \right] + \sum_{i=M+1}^{N} \left[\Lambda_i + \mu_i(n_i) \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} \right] \right] = \sum_{i=1}^{M} \left[p(\vec{n} + e_i)(\mu_i p_{i0} + \lambda_i) + p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \left(p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} + p(\vec{n} + e_j + e_i) \mu_j p_{ji}^- + p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- \mathrm{I}_{\{n_i = 0\}} \right) +$$

$$\left. + \sum_{j=M+1}^{N} \left(p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} \right) \right] + \sum_{i=M+1}^{N} \left[p(\vec{n} + e_i) \mu_i (n_i + 1) p_{i0} + p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=M+1}^{N} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} + \sum_{j=1}^{M} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} \right]. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть* $\Lambda_i > 0, \lambda_i > 0, \ i = \overline{1, N}$. *Случайный процесс* $\vec{n}(t)$ *консервативен, регулярен и неприводим. Если*

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \lambda_i^-} < 1, \quad i = \overline{1, M},$$

$$\sum_{n_i=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)} < \infty, \; i = \overline{M+1, N}, \tag{5}$$

то он эргодичен, а его стационарное распределение имеет вид

$$\{p(\vec{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N), \quad \vec{n} \in \mathrm{Z}_+^N\}, \tag{6}$$

где $\{p_i(n_i), n_i \in \mathrm{Z}_+\}$, $i = \overline{1, N}$ *– стационарное распределение изолированного узла, задаваемое с помощью (1) и (2).*

Доказательство. Консервативность цепи Маркова $\vec{n}(t)$ очевидна, неприводимость ранее нами уже была доказана. Регулярность цепи следует из того, что интенсивность выхода из любого состояния ограничена, $q(\vec{n}) \le \sum_{i=1}^{N} (\Lambda_i + \mu_i + \lambda_i)$. Для доказательства эргодичности воспользуемся следующим вариантом теоремы Фостера [8]. Для того, чтобы неприводимая консервативная, регулярная цепь Маркова с непрерывным временем была эргодичной, необходимо и достаточно, чтобы существовало нетривиальное решение системы уравнений равновесия $\{p(\vec{n}), n \in \mathrm{X}\}$, для которого ряд $\sum_{n \in \mathrm{X}} |p(\vec{n})| < \infty$. Если выполняются условия (5), то для $\{p(\vec{n})\}$, задаваемого с помощью (6) $\sum_{n \in \mathrm{X}} |p(\vec{n})| = \sum_{n \in \mathrm{X}} \prod_{i=1}^{M} \rho_i^{n_i} (1 - \rho_i) \prod_{i=M+1}^{N} p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)} < \infty$. Остается проверить, что (6) является решением уравнений глобального равновесия (4). Для начала подставим $\mathrm{I}_{\{n_i=0\}} = 1 - \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}}$ в (4). Тогда получим

$$\begin{aligned}
p(\vec{n}) \Bigg[\sum_{i=1}^{M} \big[\Lambda_i + (\mu_i + \lambda_i) \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}}\big] + \sum_{i=M+1}^{N} \big[\Lambda_i + \mu_i(n_i) \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}}\big] \Bigg] = \sum_{i=1}^{M} \big[p(\vec{n} + e_i)(\mu_i p_{i0} + \lambda_i) + p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} + \\
+ \sum_{j=1}^{M} \big(p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} + p(\vec{n} + e_j + e_i) \mu_j p_{ji}^- + p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- - p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} \big) + \\
+ \sum_{j=M+1}^{N} \big(p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} \big) \big] + \sum_{i=M+1}^{N} \big[p(\vec{n} + e_i) \mu_i (n_i + 1) p_{i0} + p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} + \\
+ \sum_{j=M+1}^{N} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} + \sum_{j=1}^{M} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} \big].
\end{aligned} \tag{7}$$

Разобьём теперь это уравнение на уравнения локального равновесия:

$$\begin{aligned}
p(\vec{n}) \Bigg[\sum_{i=1}^{M} \Lambda_i + \sum_{i=M+1}^{N} \Lambda_i \Bigg] = \sum_{i=1}^{M} \Bigg[p(\vec{n} + e_i)(\mu_i p_{i0} + \lambda_i) + \sum_{j=1}^{M} \big(p(\vec{n} + e_j + e_i) \mu_j p_{ji}^- + p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- \big) \Bigg] + \\
+ \sum_{i=M+1}^{N} p(\vec{n} + e_i) \mu_i (n_i + 1) p_{i0} \,,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
p(\vec{n}) \Bigg[\sum_{i=1}^{M} (\mu_i + \lambda_i) \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} + \sum_{i=M+1}^{N} \mu_i(n_i) \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} \Bigg] = \sum_{i=1}^{M} \big[p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} + \sum_{j=1}^{M} \big(p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} - \\
- p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} \big) + \sum_{j=M+1}^{N} \big(p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} \big) \big] + \sum_{i=M+1}^{N} \big[p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} + \\
+ \sum_{j=M+1}^{N} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} + \sum_{j=1}^{M} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ \mathrm{I}_{\{n_i \ne 0\}} \big].
\end{aligned} \tag{9}$$

Последнее уравнение разобьём более детально, приравнивая между собой в суммах отдельные слагаемые. Для $i = \overline{1, M}$:

$$p(\vec{n})(\mu_i+\lambda_i)=p(\vec{n}-e_i)\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\left(p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j p_{ji}^{+}-p(\vec{n}+e_j)\mu_j p_{ji}^{-}\right)+\sum_{j=M+1}^{N}p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+},\quad(10)$$

и для $i=\overline{M+1,N}$:

$$p(\vec{n})\mu_i(n_i)=p(\vec{n}-e_i)\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}.\qquad(11)$$

Уравнения глобального равновесия (4) это следствие уравнений локального равновесия (8), (10), (11). Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно показать, что (6) удовлетворяют (8), (10) и (11).

Разделим (8) на $p(\vec{n})$ и подставим в него (6). Используя уравнения трафика, получим

$$\sum_{i=1}^{M}\Lambda_i+\sum_{i=M+1}^{N}\Lambda_i=\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)}(\mu_i p_{i0}+\lambda_i)+\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)}\mu_j p_{ji}^{-}+\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\mu_j p_{ji}^{-}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{N}\frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)}\mu_i(n_i+1)p_{i0}=\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}(\mu_i p_{i0}+\lambda_i)+\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\cdot\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}+\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{N}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i(n_i+1)}\mu_i(n_i+1)p_{i0}=\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_i-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_i p_{ij}^{+}-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_i p_{ij}^{-}$$

$$+\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\left(\lambda_i^{-}-\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}\right)+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{N}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i(n_i+1)}\mu_i(n_i+1)\left(1-\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}(\mu_i+\lambda_i^{-})-\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\sum_{j=1}^{N}\mu_i p_{ij}^{+}+\sum_{i=M+1}^{N}\left(\lambda_i^{+}-\sum_{j=1}^{N}\lambda_i^{+}p_{ij}^{+}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{M}\Lambda_i+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\lambda_j p_{ji}^{+}-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_i p_{ij}^{+}+\sum_{i=M+1}^{N}\Lambda_i+\sum_{i=M+1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_j p_{ji}^{+}+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{N}\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_j^{+}p_{ji}^{+}-\sum_{i=M+1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\lambda_i^{+}p_{ij}^{+}-\sum_{i=M+1}^{N}\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_i^{+}p_{ij}^{+}=\sum_{i=1}^{M}\Lambda_i+\sum_{i=M+1}^{N}\Lambda_i.$$

То есть (6) удовлетворяет (8). Теперь разделим (10) на $p(\vec{n})$ и подставим в него (6).

$$\mu_i+\lambda_i=\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\mu_j p_{ji}^{+}-\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\mu_j p_{ji}^{-}\right)+\sum_{j=M+1}^{N}\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}=$$

$$=\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\mu_j p_{ji}^{+}-\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}\right)+\sum_{j=M+1}^{N}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j(n_j+1)}\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}=$$

$$=\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\left(\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_j^{+}p_{ji}^{+}\right)-\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}=\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\lambda_i^{+}-\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}=$$

$$=\mu_i+\lambda_i^{-}+\lambda_i-\lambda_i^{-}=\mu_i+\lambda_i.$$

Теперь проверим, что (6) удовлетворяет (11). Разделим (11) на $p(\vec{n})$ и подставим в него (6).

$$\mu_i(n_i)=\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}=$$

$$=\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j(n_j+1)}\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}=$$

$$=\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\left[\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_j^{+}p_{ji}^{+}\right]=\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\lambda_i^{+}=\mu_i(n_i),$$

т. е. (6) удовлетворяет (11). Теорема доказана.

Заключение. Поскольку стационарное распределение найдено, то можно найти различные показатели эффективности функционирования сети в стационарном режиме. Например, легко находится среднее число заявок в узлах $i = \overline{1, M}$ по формуле

$$\overline{n_i} = \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i p_i(n_i) = (1-\rho_i)\sum_{n_i=0}^{\infty} n_i \rho_i^{n_i} = \frac{\rho_i}{(1-\rho_i)}.$$

Для нахождения средних времён пребывания или ожидания заявок в узлах можно воспользоваться формулами Литтла.

Полученные результаты могут быть применены при проектировании новых и модернизации уже существующих сетей передачи данных и информационно-вычислительных сетей.

Литература

1. Gelenbe, E. Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – V. 28. – P. 656–663.

2. Gelenbe, E. Stability of G-networks / E. Gelenbe, R. Schassberger // Probability in the Engineering and Informational Sciences.– 1992. – V. 6. – P. 271–276.

3. Якубович, О. В. Стационарное распределение сети массового обслуживания с различными типами сигналов и положительных заявок и ограничением на время пребывания / О. В. Якубович // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – Ч. 2. – С. 207–211.

4. Якубович, О. В. Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания положительных, отрицательных заявок и сигналов / О. В. Якубович, В. Е. Евдокимович// Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 63–67.

5. Малинковский, Ю. В. Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания / Ю. В. Малинковский // АВТ. – 2017. – № 10. – С. 155–167.

6. Малинковский, Ю. В. Стационарное распределение сетей Джексона с экспоненциальным ограничением на время пребывания заявок / Ю. В. Малинковский, В. А. Немилостивая // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 73–77.

7. Гихман, И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – М. : Наука, 1997. – 658 с.

8. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : РУДН, 1995. – 529 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 29.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 519.85

Двухкритериальные задачи потокового программирования

Л.А. Пилипчук, А.С. Пилипчук, Е.Н. Полячок

Рассматривается три типа двухкритериальных задач: нахождение кратчайшего пути во множестве путей максимальной ширины, путей максимальной ширины среди множества кратчайших путей и задача о максимальном потоке минимальной стоимости. Построены специальные графы, необходимые для доказательства основных свойств исследуемых моделей. Приведены конструктивные доказательства теорем об оптимальных решениях задач с учетом двух критериев оптимизации. Построены структурные и алгоритмические решения двухкритериальных задач потокового программирования.
Ключевые слова: математическое программирование, двухкритериальная задача оптимизации, допустимое решение, кратчайший путь в множестве путей максимальной ширины, максимальной ширины путь в множестве кратчайших путей, максимальный поток минимальной стоимости.

Three types of two-criteria problems are considered: finding the shortest path in the set of paths of maximum width, the paths of maximum width among the set of shortest paths and the problem of the maximum flow of minimum cost. The special graphs are constructed that are necessary to prove the basic properties of the models under study. Constructive proofs of theorems on optimal solutions to problems are given taking into account two optimization criteria. Structural and algorithmic solutions of two-criteria flow programming problems are constructed.
Keywords: mathematical programming, two-criteria problem of optimization, feasible solution, shortest path of maximum width, path of maximum width in shortest paths set, maximum flow of minimum cost.

Введение. Двухкритериальные задачи потокового программирования представляют собой класс сетевых моделей, в которых разработка математического аппарата, алгоритмических, структурных и технологических решений выполняется с учетом двух критериев оптимизации. Конструктивная теория, алгоритмические, структурные и технологические решения экстремальных сетевых задач, основанные на концепциях симплекс-метода [1]–[3] и опорного метода [4], [5] с использованием сетевых реализаций основных операций, теоретико-графовых свойств опоры (базиса) в синтезе с современными достижениями в области теоретической информатики применяются для создания эффективных вычислительных методов в различных технических, экономических, информационных, экологических, транспортных и других системах. При исследовании и создании методов решения двухкритериальных сетевых задач применяется конструктивная теория, эффективные вычислительные методы, алгоритмы и технологии, разработанные для решения сетевых задач поиска кратчайших путей [6], максимального потока и потока минимальной стоимости [7]–[9].

1. Двухкритериальные задачи. Задан конечный ориентированный связный граф $G=(I,U)$ с множеством узлов I и множеством дуг U, $|I|<\infty$, $|U|<\infty$. Каждая дуга $(i,j)\in U$ характеризуется следующими параметрами: $x_{i,j}$ – величина дугового потока, $c_{i,j}$ – стоимость перемещения единицы дугового потока $x_{i,j}$ по дуге (i,j), $d_{i,j}$ – пропускная способность (ширина) дуги (i,j). Обозначим $x=\left(x_{i,j},(i,j)\in U\right)$ – вектор дуговых потоков. Определим соответственно ширину $d\left(L_{s,t}\right)$ и стоимость $c\left(L_{s,t}\right)$ пути $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t следующим образом:

$$d\left(L_{s,t}\right)\overset{def}{=}\min\left\{d_{i,j},(i,j)\in L_{s,t}\right\},\ c\left(L_{s,t}\right)\overset{def}{=}\sum_{(i,j)\in L_{s,t}}c_{i,j}x_{i,j}\ .$$

Для графа G рассмотрим следующие задачи оптимизации по двум критериям:

Задача 1. Среди всех путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t графа G найти путь минимальной стоимости (кратчайший путь).

Задача 2. Среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G найти путь максимальной ширины.

Задача 3. Найти максимальный поток минимальной стоимости из узла s в достижимый узел t графа G.

2. Кратчайший путь в множестве путей максимальной ширины. Рассмотрим *задачу 1* определения в графе G среди всех путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t кратчайшего пути.

Математическая модель задачи поиска кратчайшего пути в графе $G=\{I,U\}$ между двумя узлами s и t имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{i,j}x_{i,j} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} 1, & i=s, \\ -1, & i=t, \\ 0, & i\in I\setminus\{s,t\}, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_{i,j}\in\{0,1\},(i,j)\in U. \tag{3}$$

где $I_i^+(U)=\{j\in I:(i,j)\in U\}$, $I_i^-(U)=\{j\in I:(j,i)\in U\}$.

Для создания метода решения *задачи 1* определения в графе G среди всех путей максимальной ширины кратчайшего пути применяются алгоритмические, структурные и технологические решения задачи (1)–(3) поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t графа G, представленные в [3], [5], [6].

Рассмотрим алгоритм формирования специальных графов, необходимых для доказательства основных свойств и создания конструктивной теории решения двухкритериальных задач потокового программирования 1–3.

1) Упорядочим дуги U графа $G=\{I,U\}$ по не возрастанию ширины $d_{i,j},(i,j)\in U$.

2) Построим подмножества дуг $U^1,\ldots,U^k$ множества U таким образом, чтобы дуги любого множества U^i имели одинаковую ширину, $i=1,\ldots,k$, и если $(p,q)\in U^i$ и $(r,t)\in U^{i+1}$, то $d_{p,q}>d_{r,t}$, $i=1,\ldots,k-1$.

3). Для каждого $i=1,\ldots,k$ сформируем множества дуг $\tilde{U}^i$ следующим образом

$$\tilde{U}^i=\bigcup_{j=1}^{i}U^j, \quad \textit{где} \quad i=1,\ldots,k. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $L_{s,t}^p$ – некоторый путь в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ из узла s в достижимый узел t, где $p\in\{1,\ldots,h\}$. Путь $L_{s,t}^p$ может быть не единственным в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$. Если для ширины каждого пути $L_{s,t}^1,\ldots,L_{s,t}^p$ графа $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ выполняются условия*

$$d\left(L_{s,t}^1\right)=d\left(L_{s,t}^2\right)=\ldots=d\left(L_{s,t}^p\right)>d\left(L_{s,t}^{p+1}\right) \tag{5}$$

то $\left\{L_{s,t}^1,\ldots,L_{s,t}^p\right\}$ – множество путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t в начальном графе $G=(I,U)$.

Доказательство. Строим графы $G^1=\left(I,\tilde{U}^1\right)$, $G^2=\left(I,\tilde{U}^2\right)$, ..., $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ до тех пор, пока не построим некоторый граф $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$, для которого узел t достижим из узла s. Другими словами, пока не сформируем множество дуг $\tilde{U}^p$ графа $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$, в котором существует путь $L_{s,t}^p$ из узла s в узел t. По построению, путь $L_{s,t}^p$ в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ имеет максимальную ширину $d\left(L_{s,t}^p\right)$ и может быть не единственным. Все пути в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ из s в достижимый узел t имеют максимальную ширину, равную $d\left(L_{s,t}^p\right)$, и проходят только через те дуги, ширина которых не меньше ширины $d\left(L_{s,t}^p\right)$ самого широкого пути. Условия (5) определяют множество путей $\left\{L_{s,t}^1,\ldots,L_{s,t}^p\right\}$ максимальной ширины $d\left(L_{s,t}^p\right)$ из узла s в достижимый узел t в графе $G=(I,U)$. Следовательно, кратчайший путь $L_{s,t}^0$, построенный в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$, имеет максимальную ширину и является кратчайшим путем максимальной ширины в начальном графе $G=(I,U)$. Теорема доказана.

Конструктивный метод построения множества путей $\left\{L_{s,t}^1,\ldots,L_{s,t}^p\right\}$ максимальной ширины $d\left(L_{s,t}^p\right)$ из узла s в достижимый узел t в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ изложен при доказательстве теоремы 1.

Математическая модель задачи поиска кратчайшего пути $L_{s,t}^0$ из узла s в достижимый узел t графа $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$, который содержит множество путей максимальной ширины $d\left(L_{s,t}^p\right)$, имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j)\in\tilde{U}^p} c_{i,j}x_{i,j}\to\min, \tag{6}$$

$$\sum_{j\in I_i^+\left(\tilde{U}^p\right)} x_{i,j}-\sum_{j\in I_i^-\left(\tilde{U}^p\right)} x_{j,i}=\begin{cases}1, & i=s,\\ -1, & i=t,\\ 0, & i\in I\setminus\{s,t\},\end{cases} \tag{7}$$

$$x_{i,j}\in\{0,1\},(i,j)\in\tilde{U}^p. \tag{8}$$

где $I_i^+\left(\tilde{U}^p\right)=\left\{j\in I:(i,j)\in\tilde{U}^p\right\}$, $I_i^-\left(\tilde{U}^p\right)=\left\{j\in I:(j,i)\in\tilde{U}^p\right\}$.

Приведем алгоритм поиска в графе G среди всех путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t пути минимальной стоимости (кратчайшего пути).

1) Полагаем $i=1$.

2) Проверяем, достижим ли узел t из узла s в графе $G^i=\left(I,\tilde{U}^i\right)$.

3) Если узел t недостижим из узла s в графе $G^i=\left(I,\tilde{U}^i\right)$, то полагаем $i=i+1$. Переходим к шагу 2.

4) Узел t достижим из узла s в графе $G^i=\left(I,\tilde{U}^i\right)$. Полагаем $p=i$. Завершаем процесс построения графов. Переходим к шагу 5.

5) Для графа $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ решаем задачу (1)–(3) поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t. Кратчайший путь $L_{s,t}^0$, построенный в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$, имеет ширину $d\left(L_{s,t}^0\right)=min\left\{d_{i,j},(i,j)\in L_{s,t}^0\right\}$ и является кратчайшим путем максимальной ширины $d\left(L_{s,t}^0\right)$ в начальном графе $G=\left(I,U\right)$.

3. Путь максимальной ширины среди множества кратчайших путей. Рассмотрим *задачу 2* определения среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G пути максимальной ширины. Упорядочим множество дуг U графа G по не возрастанию ширины $d_{i,j},(i,j)\in U$. Построим множества дуг $\tilde{U}^i$ согласно (4): $\tilde{U}^i=\bigcup_{j=1}^{i}U^j$, $i=1,\ldots,k$, где дуги каждого подмножества $U^1,\ldots,U^k$ множества U имеют одинаковую ширину, и, если $(p,q)\in U^i$ и $(r,t)\in U^{i+1}$, то $d_{p,q}>d_{r,t}$, $i=1,\ldots,k-1$.

Теорема 2. *Пусть $L_{s,t}^i$ – кратчайший путь в графе $G^i=\left(I,\tilde{U}^i\right)$ из узла s в достижимый узел t, где дуги множества $\tilde{U}^i$ сформированы согласно $(4), i\in\{1,\ldots,k\}$. Если выполняются условия*

$$c\left(L_{s,t}^k\right)=c\left(L_{s,t}^{k-1}\right)=\ldots=c\left(L_{s,t}^l\right)<c\left(L_{s,t}^{l-1}\right), \tag{9}$$

то путь $L_{s,t}^l$ имеет наибольшую ширину среди всех кратчайших путей из узла s в достижимый узел t в графе $G=\left(I,U\right)$.

Доказательство. Поскольку $\tilde{U}^k=U$, то $c\left(L_{s,t}^k\right)$ – стоимость кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t в начальном графе $G=\left(I,U\right)$. Из (9) следует, что при выполнении равенств $c\left(L_{s,t}^k\right)=c\left(L_{s,t}^{k-1}\right)=\ldots=c\left(L_{s,t}^l\right)$ удаление дуг соответственно из графов $G^k=G$, G^{k-1}, …, G^l с

меньшей шириной не повлияет на стоимости кратчайших путей из узла s в достижимый узел t в полученных графах. При удалении дуг из графа $G^l = \left(I, \tilde{U}^l\right)$ с меньшей шириной увеличивается стоимость $c\left(L_{s,t}^{l-1}\right)$ кратчайшего пути в исходном графе G. Теорема доказана.

Алгоритм решения *задачи 2* нахождения среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G пути максимальной ширины.

1) Положим $i = k$.

2) Для начального графа $G = \left(I, U\right), U = \tilde{U}^i$ решаем задачу (1)–(3) поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t.

3) $i = i - 1$.

4) Для графа $G^i = \left(I, \tilde{U}^i\right)$ решаем задачу (1)–(3) поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t.

5) Если $c\left(L_{s,t}^i\right) = c\left(L_{s,t}^{i-1}\right)$, то переходим к шагу 3.

6) $i = l$. Выполняется условие (9) теоремы 2: $c\left(L_{s,t}^l\right) < c\left(L_{s,t}^{l-1}\right)$. Кратчайший путь $L_{s,t}^l$ из узла s в достижимый узел t в графе $G^l = \left(I, \tilde{U}^l\right)$ имеет минимальную стоимость $c\left(L_{s,t}^l\right)$ среди всех путей из узла s в достижимый узел t в исходном графе G и максимальную ширину $d\left(L_{s,t}^l\right) = min\left\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}^l\right\}$.

4. Максимальный поток минимальной стоимости. Рассмотрим *задачу 3* определения максимального потока минимальной стоимости.

Задан орграф (сеть) $G = \left(I, U\right)$. Каждая дуга $(i,j) \in U$ имеет следующие характеристики: $x_{i,j}$ – величина дугового потока дуги (i,j), $c_{i,j}$ – стоимость перемещения единицы дугового потока $x_{i,j}$ по дуге (i,j), $d_{i,j}$ – пропускная способность дуги (i,j) (максимальная величина дугового потока дуги (i,j)). Нижняя граница дугового потока каждой дуги $(i,j) \in U$ равна 0. Обозначим $x = \left(x_{i,j}, (i,j) \in U\right)$ – вектор дуговых потоков. В сети G выделены два узла: s (не содержит входящих дуг) и t (не содержит исходящих дуг). Сумма дуговых потоков по дугам, исходящим из узла s, равна суммарному потоку по входящим в узел t дугам. Величина потока v – суммарный поток по дугам, исходящим из узла s. Узел s – источник, создает поток, узел t – сток, поглощает поток.

Математическая модель задачи определения *максимального потока* v в сети $G = \left\{I, U\right\}$ имеет следующий вид:

$$v \to \max, \tag{10}$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} v, & i = s, \\ -v & i = t, \\ 0, & i \in I \setminus \{s,t\} \end{cases} \tag{11}$$

$$0 \le x_{i,j} \le d_{i,j}, (i,j) \in U, \tag{12}$$

где $I_i^+\left(U\right) = \left\{j \in I : (i,j) \in U\right\}$, $I_i^-\left(U\right) = \left\{j \in I : (j,i) \in U\right\}$.

Матрица системы (11) – абсолютно унимодулярна, что гарантирует целочисленность оптимального решения $\left\{x, v\right\}$.

Задача (10)–(12) определения максимального потока v в сети $G = \left\{I, U\right\}$ является частным случаем экстремальной задачи математического программирования вида

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{i \in I^*} c_i x_i \to \min, \tag{13}$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} x_i, & i \in I^*, \\ a_i, & i \in I \setminus I^*, \end{cases} \tag{14}$$

$$0 \le x_{i,j} \le d_{i,j}, (i,j) \in U, \quad b_{*i} \le x_i \le b_i^*, i \in I^*, \tag{15}$$

при следующих предположениях:

$$I^* = \{s,t\} \subseteq I, c_{i,j} = 0, (i,j) \in U; c_s = -1, c_t = 0; \quad x_s = v, x_t = -v; a_i = 0, \ i \in I \setminus I^*. \tag{16}$$

Конструктивная теория решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений (14) с дополнительными ограничениями на дуговые потоки $x_{ij}, (i,j) \in U$ и переменные $x_i, i \in I^*$, основанная на принципах декомпозиции, впервые была опубликована в [7]. В работах [8], [9] представлены структурные и алгоритмические решения экстремальной задачи (13)–(15), получены аналитические решения системы (14) и применены в прикладных исследованиях интеллектуальных транспортных систем [10], [11].

Начальный опорный поток [7], [8] $\{(x;v), R\}$ задачи (13)–(15) при введенных предположениях (16) состоит из допустимого решения $(x;v)$, $x = (x_{ij}, (i,j) \in U)$ – выполняются ограничения (14)–(15) и опоры $R = \{U_R, I_R^*\}$ сети G для системы (14), $U_R \subset U$, $I_R^* \subseteq \{s,t\}$. Опора R состоит из леса не более чем двух деревьев T^s, T^t, который покрывает все узлы сети G, при этом, для каждого дерева леса выполняются условия: $\left|I_R^* \bigcap I(T^s)\right| = 1$, $\left|I_R^* \bigcap I(T^t)\right| = 1$.

С учетом (16) начальное допустимое решение (x,v) экстремальной задачи (13)–(15) сформируем следующим образом. В сети $G = (I,U)$ построим произвольный путь $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t. Дуговые потоки дуг пути $L_{s,t}$ положим равными величине пропускной способности $d(L_{s,t})$ пути $L_{s,t}$:

$$d(L_{s,t}) = min\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}\}.$$

Дуговые потоки по остальным дугам сети положим равными нулю: $x_{i,j} = 0$, $(i,j) \in U \setminus L_{s,t}$. Для начального допустимого решения $(x;v)$ экстремальной задачи (13)–(15) величина v начального потока в сети G равна

$$v = \sum_{j \in I_s^+(U)} x_{s,j} = d(L_{s,t})$$

В результате применения конструктивной теория декомпозиции, вычислительных методов, алгоритмических, структурных и технологических решений [5], [8], [9] экстремальной задачи (13)–(15) находим оптимальное решение (x^0, v^0):

$$b = \sum_{j \in I_s^+(U)} x_{s,j}^0 \quad x^0 = (x_{i,j}^0, (i,j) \in U), \tag{17}$$

где $v^0 = b$ – величина *максимального потока* в сети $G = (I,U)$.

Пусть известно численное значение b величины *максимального потока* в сети G. Математическая модель задачи нахождения *потока минимальной стоимости максимальной величины* b в сети $G = (I,U)$ имеет следующий вид:

$$f(x) = \sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min, \tag{18}$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} b, & i = s, \\ -b & i = t, \\ 0, & i \in I \setminus \{s,t\}, \end{cases} \tag{19}$$

$$0 \le x_{i,j} \le d_{i,j}, (i,j) \in U, \tag{20}$$

где $\{s,t\} \subset I$, $x_{i,j}$ – дуговой поток дуги (i,j), $c_{i,j}$ – стоимость перемещения единицы дугового потока $x_{i,j}$ по дуге (i,j), $d_{i,j}$ – пропускная способность дуги (i,j) (максимальная величина дугового потока дуги (i,j)). Нижняя граница дугового потока каждой дуги $(i,j) \in U$ равна нулю, $x = \left(x_{i,j}, (i,j) \in U\right)$ – вектор дуговых потоков, b – *численное значение величины максимального потока* в сети G.

Вектор $x = \left(x_{i,j}, (i,j) \in U\right)$ – допустимое решение экстремальной задачи (18)–(20), если выполняются ограничения (19)–(20).

Замечание. Вектор $x^0 = \left(x_{ij}^0, (i,j) \in U\right)$ оптимального решения $\left(x^0, v^0 = b\right)$ экстремальной задачи (13)–(15) является начальным допустимым решением задачи (18)–(20), где $v^0 = b$ – величина численного значения максимального потока в сети $G = (I,U)$.

Максимальный поток величины b, определенный согласно (17), стоимость (18) которого минимальна, называется *максимальным потоком минимальной стоимости*.

Начальный опорный поток $\{x, U_D\}$ задачи (18)–(20) состоит из допустимого решения x и опоры $U_D \subset U$ сети $G = (I,U)$ для системы (19), где U_D – покрывающее дерево графа G (включает все узлы множества I) [5].

Теорема 3. *Пусть* $\left(x^0, v^0 = b\right)$ *– оптимальное решение задачи (13)–(15), где* $v^0 = b$ *– численное значение (17) максимального потока в сети* G. *Если для любого допустимого решения* $x = \left(x_{i,j}, (i,j) \in U\right)$ *задачи (18)–(20) условия сохранения потока (19) для узлов* $\{s,t\} \subset I$ *выполняются для величины максимального потока* b *и для узлов* $I \setminus \{s,t\}$ *равны нулю, то оптимальное решение* $\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_{i,j}^0, (i,j) \in U\right)$ *экстремальной задачи (18)–(20) является потоком минимальной стоимости* $f\left(\tilde{x}^0\right)$ *для максимального потока* $v^0 = b$*:*

$$f\left(\tilde{x}^0\right) = \sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} \tilde{x}_{i,j}^0 \qquad b = \sum_{j \in I_s^+(U)} \tilde{x}_{s,j}^0.$$

Доказательство. Вектор $x = x^0$ оптимального решения $\left\{x^0, v^0 = b\right\}$ задачи (13)–(15) является начальным допустимым решением задачи (18)–(20). На итерации $\{x, U_D\} \to \{\bar{x}, \bar{U}_D\}$ опорного метода [5] решения задачи (18)–(20) при переходе к новому допустимому решению $\bar{x} = x + \Delta x$, $\bar{x} = \left(\bar{x}_{i,j}, (i,j) \in U\right)$, $\Delta x = \left(\Delta x_{i,j}, (i,j) \in U\right)$ и новому покрывающему дереву $\bar{U}_D$ величина максимального потока в сети G вычисляется согласно $\sum_{j \in I_s^+(U)} \bar{x}_{s,j}$. Из условий сохранения потока (19) следует $\sum_{j \in I_s^+(U)} \bar{x}_{s,j} = b$, где $v^0 = b$ – численное значение величины максимального потока (17) в сети G. Следовательно, оптимальное решение $\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_{i,j}^0, (i,j) \in U\right)$ экстремальной задачи (18)–(20) является потоком минимальной стоимости $f\left(\tilde{x}^0\right) = \sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} \tilde{x}_{i,j}^0$ для максимального потока $\sum_{j \in I_s^+(U)} \tilde{x}_{s,j}^0$ в сети $G = (I,U)$. Теорема доказана.

Приведем алгоритм построения в сети $G = (I,U)$ *максимального потока минимальной стоимости*.

1) Положим $I^* = \{s,t\}$, $c_s = -1$, $c_t = 0$; $x_s = v, x_t = -v$; $a_i = 0$, $i \in I \setminus I^*$; $c_{i,j} = 0, (i,j) \in U$.

2) Построим начальное допустимое решения (x,v) экстремальной задачи (13)–(15) следующим образом:

а) определим произвольный путь $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t;

б) дуговые потоки дуг пути $L_{s,t}$ положим равными величине пропускной способности $d\left(L_{s,t}\right)$ пути $L_{s,t}$, где $d\left(L_{s,t}\right) = min\left\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}\right\}$;

в) положим $x_{i,j} = 0, (i,j) \in U \setminus L_{s,t}$.

3) Положим $v = \sum_{j \in I_s^+(U)} x_{s,j} = d\left(L_{s,t}\right)$ где v – величина начального потока в сети G.

4) Решаем задачу (13)–(15) поиска оптимального решения $\left(x^0, v^0 = b\right)$, где $v^0 = b$ – численное значение (17) максимального потока в сети G, x^0 – вектор дуговых потоков оптимального решения.

5) Выберем вектор $x^0 = \left(x_{ij}^0, (i,j) \in U\right)$ оптимального решения $\left(x^0, v^0 = b\right)$ экстремальной задачи (13)–(15) в качестве начального допустимого решения задачи (18)–(20);

6) Сформируем правую часть системы сохранения потока (19), где $v^0 = b$ – величина численного значения максимального потока в сети $G = (I, U)$.

7) Находим оптимальное решение $\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_{i,j}^0, (i,j) \in U\right)$ задачи (18)–(20). Построен максимальный поток $\sum_{j \in I_s^+(U)} \tilde{x}_{s,j}^0 = b$ минимальной стоимости $f\left(\tilde{x}^0\right) = \sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} \tilde{x}_{i,j}^0$.

С применением результатов теоретической информатики [2], [3], теоретико-графовых и технологических аспектов структурных преобразований базисов и фундаментальной системы циклов [5] разработаны алгоритмические, структурные и технологические решения задачи построения максимального потока минимальной стоимости.

Заключение. В ориентированных графах исследованы модели и построены методы решения экстремальных задач с учетом двух критериев оптимизации. Для двухкритериальных задач потокового программирования доказаны теоремы об оптимальных решениях, разработаны конструктивная теория и алгоритмы нахождения кратчайшего пути во множестве путей максимальной ширины, пути максимальной ширины среди множества кратчайших путей и решена задача построения максимального потока минимальной стоимости. Структурные и алгоритмические решения двухкритериальных задач могут быть применены в прикладных исследованиях интеллектуальных транспортных систем.

Литература

1. Maros, I. Computational techniques of the simplex method / I. Maros. – Boston, 2003. – 325 p.

2. Йенсен, П. Потоковое программирование / П. Йенсен, Д. Барнес. – М. : Радио и связь, 1984. – 392 с.

3. Ahuja, R. K. Network Flows: theory, algorithms, and applications / R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin. – New Jersey : Prentice Hall, 1993. – 864 p.

4. Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск : БГУ, 1980. – Ч. 3 : Специальные задачи. – 368 с.

5. Пилипчук, Л. А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования / Л. А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2009. – 222 с.

6. Пилипчук, Л. А. Оптимальные пути: алгоритмические, структурные и технологические решения / Л. А. Пилипчук, А. С. Пилипчук, Е. Н. Полячок // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 3. – С. 143−151.

7. Pilipchuk, L. A. Algorithms of solving large sparse underdetermined linear systems with embedded network structure / L. A. Pilipchuk, Y. V. Malakhouskaya, D. R. Kincaid, M. Lai // East-West J. of Mathematics. – 2002. – Vol. 4, № 2. – P. 191–201.

8. Pilipchuk, L. A. Sparse linear systems and their applications / L. A. Pilipchuk. – Minsk, 2013. – 235 p.

9. Pilipchuk, L. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L. Pilipchuk, O. German, A. Pilipchuk // Vestnik BGU. Ser. 1. Fiz. Mat. Inform. – 2015. – № 2. – P. 91–96.

10. Пилипчук, Л. А. Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками / Л. А. Пилипчук [и др.] // Журнал Белорусского государственного университета. Сер. Математика. Информатика. – 2018. – № 2. – С. 67–76.

11. Pilipchuk, A. Sensor location problem's software optimization / A. Pilipchuk, L. Pilipchuk, E. Polyachok // Open Semantic Technologies for Intelligent System. – Minsk : Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2019. – Issue 3. – P. 261–264.

Белорусский государственный университет Поступила в редакцию 12.06.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

Физика

УДК 539.374

Поперечный изгиб круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины

Д.В. Леоненко

Рассмотрен изгиб симметричной круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины. Для описания кинематики симметричного по толщине пакета используются гипотезы ломаной линии. Приведена постановка соответствующей краевой задачи. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Решение краевой задачи сведено к нахождению двух искомых функций на каждом участке – прогиба и сдвига срединной плоскости заполнителя. Граничные условия соответствуют жесткому защемлению контура пластины. Проведен параметрический анализ полученного решения.
Ключевые слова: сэндвич-пластина, изгиб, упругость, ступенчатая толщина.

The bending of symmetrical circular sandwich-plate of stepped thickness is considered. To describe kinematics of symmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken line are accepted. The formulation of the corresponding boundary value problem is presented. Equilibrium equations are obtained by the variational method of Lagrange. The solution of the boundary value problem is reduced to finding two required functions in each section - deflection and shear of the middle plane of the filler. The boundary conditions correspond to rigid pinching of the plate contour. A parametric analysis of the obtained solution is carried out.
Keywords: sandwich plate, bending, elasticity, step thickness.

Введение. Все более широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности (авиа-, ракетостроение, транспортное машиностроение) находят слоистые элементы конструкций, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета [1]. Динамическое и статическое деформирование трехслойных пластин и оболочек изучено в монографии [2]. Однослойные круглые пластины переменной толщины рассмотрены в работе [3]. Динамическое нагружение круговых трехслойных пластин постоянной толщины на упругом основании исследовано в статьях [4], [5]. Изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей рассмотрен в [6]. Здесь получено решение осесимметричного поперечного изгиба круговой сэндвич-пластины со ступенчатой толщиной.

Постановка задачи. Пластина состоит из трех слоев. Во внешних несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, во внутреннем слое (заполнителе) – гипотеза Тимошенко. Толщины несущих слоев равны между собой ($h_{1l} = h_{2l} = h_l$) и могут изменяться вдоль радиуса пластины ступенчато (рисунок 1). Заполнитель($h_{3l} = 2c$) считаем легким, т. е. пренебрегаем его работой в тангенциальном направлении. В целом для пакета выполняется гипотеза ломаной линии. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. На границах слоев перемещения непрерывны.

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z, связанной со срединной плоскостью заполнителя. На внешнюю поверхность первого несущего слоя действует осесимметричные распределенные поперечные нагрузки $q_1(r)$, $q_2(r)$. За искомые величины принимаются прогиб пластины $w_l(r)$ и относительный сдвиг в заполнителе $\psi_l(r)$ на каждом участке l, которые не зависят от окружной координаты φ.

Исходя их принятых гипотез для каждого из двух участков радиальные перемещения в слоях $u_{rl}^{(k)}$ выражаются через искомые функции ($l = 1, 2$ – номер участка):

$$u_{rl}^{(1)} = c\psi_l - zw_{l,r} \qquad (c \le z \le c + h_l),$$

$$u_{rl}^{(3)} = z\psi_l - zw_{l,r} \qquad (-c \le z \le c),$$
$$u_{rl}^{(2)} = -c\psi_l - zw_{l,r} \quad (-c - h_l \le z \le -c), \tag{1}$$

где z –расстояние от рассматриваемой точки до срединной плоскости заполнителя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

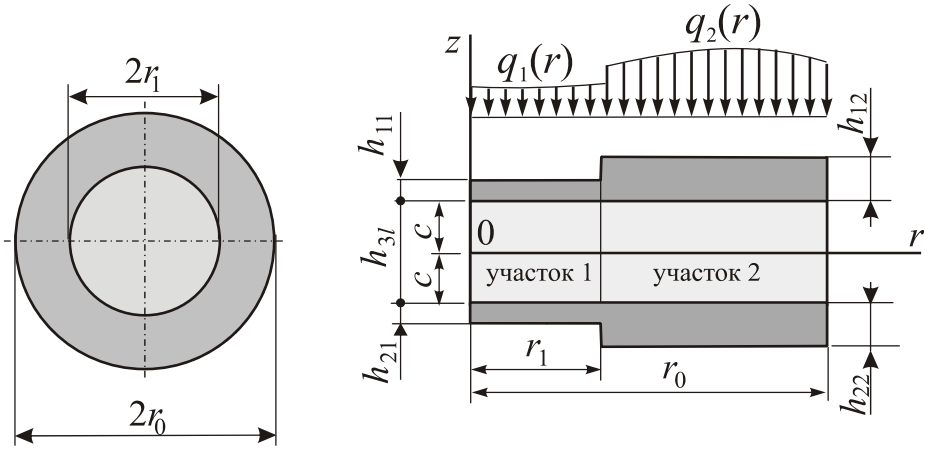


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

Деформации в слоях следуют из выражений (1) из соотношений Коши [7]:

$$\varepsilon_r^{(1)l} = c\psi_{l,r} - zw_{l,rr}, \ \ \varepsilon_\varphi^{(1)l} = \frac{1}{r}(c\psi_l - zw_{l,r}), \ \ \varepsilon_{rz}^{(1)l} = 0;$$
$$\varepsilon_r^{(2)l} = -c\psi_{l,r} - zw_{l,rr}, \ \ \varepsilon_\varphi^{(2)l} = -\frac{1}{r}(c\psi_l + zw_{l,r}), \ \ \varepsilon_{rz}^{(2)l} = 0;$$
$$\varepsilon_r^{(3)l} = z\left(\psi_{l,r} - w_{l,rr}\right), \ \ \varepsilon_\varphi^{(3)l} = \frac{z}{r}(\psi_l - w_{l,r}), \qquad \varepsilon_{rz}^{(3)l} = \frac{1}{2}\psi_l. \tag{2}$$

Усилия и напряжения в слоях пластины связаны интегральными соотношениями:

$$M_\alpha^{(k)l} = \int_{h_{kl}} \sigma_\alpha^{(k)l} z dz; \quad T_\alpha^{(k)l} = \int_{h_{kl}} \sigma_\alpha^{(k)l} dz. \tag{3}$$

Уравнения равновесия пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \tag{4}$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация суммарной работы внешних нагрузок $q_l(r)$ и контурных усилий $H_r^0,\ M_r^0,\ Q^0$

$$\delta A_1 = \int_0^{r_1}\int_0^{2\pi} q_1 \delta w_1 r dr d\varphi + \int_{r_1}^{r_0}\int_0^{2\pi} q_2 \delta w_2 r dr d\varphi, \quad \delta A_2 = \int_0^{2\pi} (H_r^0 \delta\psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\varphi,$$

δW – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \sum_{l=1}^{2} \iint_{S_l} \left(\sum_{k=1}^{3} \int_{h_{kl}} (\sigma_r^{(k)l} \delta\varepsilon_r^{(k)l} + \sigma_\varphi^{(k)l} \delta\varepsilon_\varphi^{(k)l}) dz \right) dS. \tag{5}$$

Здесь интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя на каждом участке S_1, S_2.

Подставив выражение (5) в формулу (4) с учетом деформаций (2), перемещений (1) и внутренних усилий (3), получим систему уравнений равновесия в усилиях, описывающую упругое деформирование круговой трехслойной пластины с легким заполнителем ступенчато-переменной толщины:

$$H_{r,r}^l + \frac{1}{r}(H_r^l - H_\varphi^l) = 0, \quad M_{r,rr}^l + \frac{1}{r}(2M_{r,r}^l - M_{\varphi,r}^l) = -q_l, \tag{6}$$

и граничные условия на контуре ($r = r_0$)

$$H_r^2 = H_r^0,\ M_r^2 = M_r^0,\ \ M_{r,r}^2 + \frac{1}{r}(M_r^2 - M_\varphi^2) = Q^0. \tag{7}$$

Здесь обобщенные силы и моменты ($\alpha = r, \varphi$):

$$M_\alpha^l \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)l},\ \ H_\alpha^l = M_\alpha^{(3)l} + c\left(T_\alpha^{(1)l} - T_\alpha^{(2)l}\right),\ \ Q_r^l = M_{r,r}^l + \frac{1}{r}(M_r^l - M_\varphi^l). \tag{8}$$

Решение задачи. После выражения внутренних усилий (8) через искомые перемещения (1) и подстановки их в (6), получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях для каждого участка:

$$\psi_l = \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r} + C_{1l} r + C_{2l}/r,\quad w_{l,rrrr} + \frac{2}{r} w_{l,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{l,rr} + \frac{1}{r^3} w_{l,r} = \frac{q_l}{D},\quad D_l = b_{3l} - \frac{b_{2l}^{\ 2}}{b_{1l}}. \tag{9}$$

где C_{1l}, C_{2l} – константы интегрирования.

Коэффициенты b_{il} на каждом участке l

$$b_{1l} = 2c^2\left(h_l\left(K_b + \frac{4}{3}G_b\right) + \frac{1}{3}c\left(K_f + \frac{4}{3}G_f\right)\right),$$

$$b_{2l} = 2c\left[h_l\left(c + \frac{1}{2}h_l\right)\left(K_b + \frac{4}{3}G_b\right) + \frac{1}{3}c^2\left(K_f + \frac{4}{3}G_f\right)\right],$$

$$b_{3l} = 2h_l\left(c^2 + ch_l + \frac{1}{3}h_l^2\right)\left(K_b + \frac{4}{3}G_b\right) + \frac{2}{3}c^3\left(K_f + \frac{4}{3}G_f\right),$$

где K_b, G_b – модули объемной деформации и сдвига материала несущих слоев, K_f, G_f – модули объемной деформации и сдвига материала заполнителя.

Для определения перемещений в каждой точке пластины необходимо решить дифференциальные уравнения (9) на каждом из участков. Тогда искомые перемещения будут

$$\psi(r) = \psi_1(r) + \left(\psi_2(r) - \psi_1(r)\right) H_0(r - r_1),$$
$$w(r) = w_1(r) + \left(w_2(r) - w_1(r)\right) H_0(r - r_1), \tag{10}$$

где $H_0(r)$ – функция Хевисайда [8].

Решение системы (9) принимает вид [9]

$$\psi_l = \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r} + C_{1l} r + C_{2l}/r,$$

$$w_l = C_{3l} + C_{4l} r^2 + C_{5l}\ln(r) + C_{6l} r^2 \ln(r) + w_l^*,\ \ w_l^* = \frac{1}{D_l}\int\frac{1}{r}\int r\int\frac{1}{r}\int q_l r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r,$$

$$w_{l,r} = 2C_{4l} r + C_{5l}\frac{1}{r} + C_{6l}(2r\ln(r) + r) + w_{l,r}^*,\ \ w_{l,r}^* = \frac{1}{D_l r}\int r\int\frac{1}{r}\int q_l r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r \tag{11}$$

Задача отыскания функций $\psi(r)$, $w(r)$ (10) замыкается присоединением к (9) граничных условий. При жесткой заделке контура пластины ($r = r_0$)

$$\psi_2 = w_2 = w_{2,r} = 0. \tag{12}$$

Кроме этого, должны быть удовлетворены условия конечности перемещений в начале координат при $r = 0$ и условия на границе изменения толщин при $r = r_1$:

– кинематические условия

$$w_1(r_1) = w_2(r_1),\quad w_{1,r}(r_1) = w_{2,r}(r_1),\quad \psi_1(r_1) = \psi_2(r_1);$$

– силовые граничные условия

$$M_r^1 = M_r^2,\quad H_r^1 = H_r^2,\quad Q_r^1 = Q_r^2. \tag{13}$$

Покажем процесс определения констант интегрирования на каждом участке.

В связи с ограниченностью предполагаемого решения (w_1, ψ_1, Q_r^1) в начале координат ($r = 0$) необходимо положить

$$C_{51}=0,\quad C_{61}=0,\quad C_{21}=-\frac{b_{2l}}{b_{1l}D_l}\int r\int\frac{1}{r}\int q_1 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\Big|_{r=0}. \tag{14}$$

Условия жесткого закрепления на контуре (12) принимают вид:

$$w_{2,r}=\left(2C_{42}r+C_{52}\frac{1}{r}+C_{62}(2r\ln(r)+r)+w^*_{2,r}\right)\Big|_{r=r_0}=0,$$

$$2C_{42}r_0+C_{52}\frac{1}{r_0}+C_{62}r_0(2\ln(r_0)+1)+w^*_{2,r}\Big|_{r=r_0}=0;$$

$$\psi_2=\frac{b_{2l}}{b_{1l}}w_{2,r}+C_{12}r+\frac{C_{2l}}{r}\Big|_{r=r_0}=0,\quad C_{12}r_0+\frac{C_{22}}{r_0}=0;$$

$$w_2=\left(C_{32}+C_{42}r^2+C_{52}\ln(r)+C_{62}r^2\ln(r)+w^*_2\right)\Big|_{r=r_0}=0,$$

$$C_{32}+C_{42}r_0^2+C_{52}\ln(r_0)+C_{62}r_0^2\ln(r_0)+w^*_2\Big|_{r=r_0}=0. \tag{15}$$

На границе изменения толщин ($r=r_1$) потребуем выполнения кинематических граничных условий (13)

$$w_1(r_1)=w_2(r_1),$$

$$C_{31}+C_{41}r_1^2+C_{51}\ln(r_1)+C_{61}r_1^2\ln(r_1)+w^*_1\Big|_{r=r_1}=C_{32}+C_{42}r_1^2+C_{52}\ln(r_1)+C_{62}r_1^2\ln(r_1)+w^*_2\Big|_{r=r_1};$$

$$w_{1,r}(r_1)=w_{2,r}(r_1),$$

$$2C_{41}r_1+C_{51}\frac{1}{r_1}+C_{61}(2r_1\ln(r_1)+r_1)+w^*_{1,r}\Big|_{r=r_1}=2C_{42}r_1+C_{52}\frac{1}{r_1}+C_{62}(2r_1\ln(r_1)+r_1)+w^*_{2,r}\Big|_{r=r_1};$$

$$\psi_1(r_1)=\psi_2(r_1),\quad \left(\frac{b_{21}}{b_{11}}w_{1,r}-\frac{b_{22}}{b_{12}}w_{2,r}\right)\Big|_{r=r_1}+(C_{11}-C_{12})r_1+(C_{21}-C_{22})\frac{1}{r_1}=0. \tag{16}$$

Для формулировки силовых граничных условий (13) выразим обобщенные усилия через искомые перемещения

$$M_r^l=b_{2l}\psi_{l,r}+b_{2l}^-\frac{\psi_l}{r}-b_{3l}w_{l,rr}-b_{3l}^-\frac{w_{l,r}}{r},\quad H_r^l=b_{1l}\psi_{l,r}+b_{1l}^-\frac{\psi_l}{r}-b_{2l}w_{l,rr}-b_{2l}^-\frac{w_{l,r}}{r},$$

$$Q_r^l=b_{2l}(\psi_{l,rr}+\frac{\psi_{l,r}}{r}-\frac{\psi_l}{r^2})-b_{3l}(w_{l,rrr}+\frac{w_{l,rr}}{r}-\frac{w_{l,r}}{r^2}),$$

где

$$b_{1l}^-=2c^2\left(h_l\left(K_b-\frac{2}{3}G_b\right)+\frac{1}{3}c\left(K_f-\frac{2}{3}G_f\right)\right),$$

$$b_{2l}^-=2c\left[h_l\left(c+\frac{1}{2}h_l\right)\left(K_b-\frac{2}{3}G_b\right)+\frac{1}{3}c^2\left(K_f-\frac{2}{3}G_f\right)\right],$$

$$b_{3l}^-=2h_l\left(c^2+ch_l+\frac{1}{3}h_l^2\right)\left(K_b-\frac{2}{3}G_b\right)+\frac{2}{3}c^3\left(K_f-\frac{2}{3}G_f\right).$$

С учетом выражений (13) получим еще 3 алгебраических уравнения для определения неизвестных констант интегрирования. В силу своей громоздкости они здесь не приводятся.

Объединяя выражения (14)–(16), получим систему линейных алгебраических уравнений 12 порядка, из которой определим константы интегрирования C_{11}, C_{12}, …, C_{26}.

Таким образом, решение (11) с константами интегрирования (14)–(16) описывает упругие перемещения в круговой трехслойной симметричной пластине ступенчато-переменной толщины при жестком защемлении контура.

Напряжения в слоях пластины вычисляются в соответствии с законом Гука [7]

$$\sigma_r^{(k)l} = (K_k + \frac{4}{3}G_k)\varepsilon_r^{(k)l} + (K_k - \frac{2}{3}G_k)\varepsilon_\varphi^{(k)l},\ \sigma_\varphi^{(k)l} = (K_k - \frac{2}{3}G_k)\varepsilon_r^{(k)l} + (K_k + \frac{4}{3}G_k)\varepsilon_\varphi^{(k)l}.$$

Численное исследование проводилось для сэндвич-пластины с несущими слоями из сплава Д16Т и заполнителем фторопластом, упругие константы для которых взяты из [2]. На рисунке 2 показано изменение максимального сдвига и максимального прогиба срединного слоя пластины от координаты границы изменения толщины r_1: *1* – $h_1 = 0{,}02$, $h_2 = 0{,}03$, $c = 0{,}2$; *1* – $h_1 = 0{,}03$, $h_2 = 0{,}02$, $c = 0{,}2$. С увеличением жесткости пластины перемещения уменьшаются, причем равенство перемещений достигается при $r_1 = 0{,}415\ r_0$.

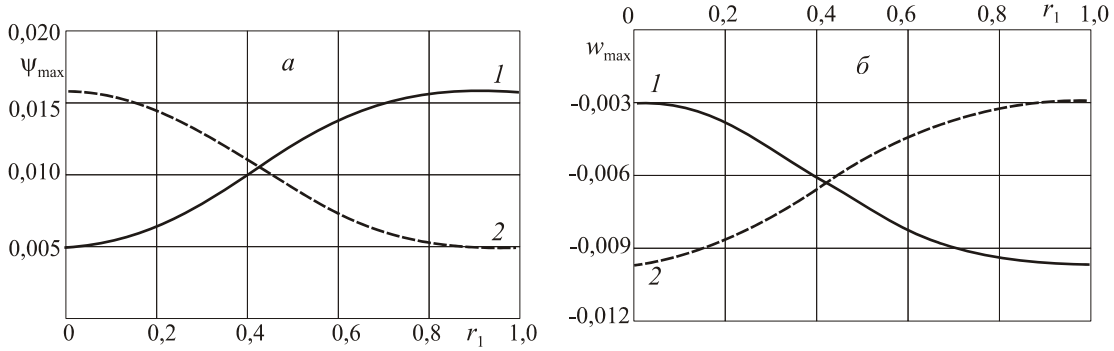


Рисунок 2 – Зависимость максимального сдвига (*а*) и максимального прогиба (*б*) пластины от длины ступеньки r_1

Заключение. Предложенная методика позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние трехслойных симметричных круговых пластин ступенчато-переменной толщины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – Москва : Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.

3. Коваленко, А. Д. Круглые пластины переменной толщины / А. Д. Коваленко. – Москва : Физматгиз, 1959. – 294 с.

4. Леоненко, Д. В. Свободные колебания трехслойной круговой пластины на инерционном основании при действии температуры / Д. В. Леоненко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2019. – № 6 (117). – С. 174–179.

5. Леоненко, Д. В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – № 3. – С. 42–47.

6. Старовойтова, Е. Э. Напряженное состояние металлополимерного трехслойного стержня прямоугольного сечения со ступенчато-переменной границей / Е. Э. Старовойтова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 1 (10). – С. 58−62.

7. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975 – 872 с.

8. Корн, Г. Справочник по математике для инженерных работников / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1973. – 832 с.

9. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва : Наука, 1976. – 576 с.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступила в редакцию 09.10.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 530.122.1

Модель геостационарного детектора гравитационных волн

И.П. Охрименко, П.В. Петров, Н.Н. Кольчевский

На сегодняшний день во всем мире функционируют 3 обсерватории, предназначенные для детектирования гравитационных волн – зарегистрировано 67 событий. Рассмотрены будущие проекты гравитационных детекторов. В работе представлена модель космического детектора гравитационных волн на основе системы геостационарных спутников «S-LIGO8R-G2». Выполнены расчеты и моделирование параметров орбит данной системы для 8 планет Солнечной системы. Выполнен расчет и анализ ключевых характеристик космического детектора гравитационных волн S-LIGO8R-G2.
Ключевые слова: интерферометр, гравитационные волны, спутниковые системы, космический детектор, LIGO, LISA, DECIGO.

There are 3 observatories operating around the world, designed to detect gravitational waves. 67 detections were made. Future projects of gravitational detectors are considered. A model of a space gravitational wave detector based on a system of geostationary satellites «S-LIGO8R-G2» is presented. Calculations and modeling of the orbits parameters of the system presented have been performed for 8 planets of the Solar System. The calculation and analysis of the key characteristics of the space detector of gravitational waves S-LIGO8R-G2 are presented.
Keywords: interferometer, gravitational waves, satellite systems, space detector, LIGO, LISA, DECIGO.

Введение. Впервые, о том, что гравитационное взаимодействие носит волновую природу, было предсказано О. Хэвисайдом в 1865 г., когда было получено волновое аналитическое решение для гравитационного аналога известных уравнений Максвелла из динамической теории электромагнитного поля [1]. Теорией предсказано, что гравитационные волны (ГВ) излучаются движущимися с переменным ускорением массами, и, воздействуя на тела, они вызывают относительное смещение их частей (деформацию ΔL) согласно поляризации волны. Было предложено множество теорий гравитации, например, [3]–[5], до всеобще принятой Общей Теории Относительности Эйнштейна, в рамках которой была описана теория гравитационного поля [6], предсказывающая существование ГВ.

Вплоть, до сентября 2015 г. ГВ оставались теоретическим аспектом. 14 сентября зарегистрирована первая ГВ в обсерватории LIGO, США – специально разработанной и построенной для детектирования ГВ [7], [8]. За «решающий вклад в детектор LIGO и наблюдение гравитационных волн» в 2017 г. была присуждена Нобелевская Премия в области физики трем ученым: Кип Торну, Барри Бэришу – CalTech и Райнер Вайссу – MIT [9]. Гравитационно-волновым детектором считается любая система пробных масс (тел) или протяженное тело и сенсор, реагирующие и записывающие малые относительные смещения масс или силы, которые их вызвали. Наибольшее распространение получили два типа наземных детекторов гравитационных волн: массивный цилиндр длинной от 1 до 3 метров, регистрирующий низкочастотные механические колебания (Weber bar) – детектор резонансного типа [10], и лазерный интерферометр, регистрирующий сдвиг интерференционных полос – детектор электромагнитного типа [11]. Реализация гравитационных детекторов, действительно способных зарегистрировать гравитационные волны, стала возможной лишь в XX веке [12], [13]. Регистрация ГВ производилась от реальных астрофизических источников больших масс (например, двух черных дыр в несколько масс Солнца), в результате процесса их столкновения-слияния. Предсказанная амплитуда ГВ от источников такого типа составляет порядка $\Delta L/L=10^{-21}$.

На сегодняшний день, функционируют 3 гравитационно-волновые обсерватории: LIGO (USA), Virgo (Italy) и KAGRA (Japan) [14], и зарегистрировано 67 событий ГВ во время наблюдательных запусков LIGO, а также LIGO+Virgo [15]. Запуск сети из трех ГВ обсерваторий LIGO+Virgo+KAGRA планируется на 2020–2021 гг. [16].

Текущие разработки. В настоящее время ведутся разработки наземных детекторов третьего поколения, а также космических детекторов гравитационных волн (таблица 1).

Таблица 1 – Разрабатывающиеся наземные и космические детекторы ГВ и планируемые даты запуска

Наземные детекторы ГВ		Космические детекторы ГВ	
IndIGO (Индия)	2023	**DECIGO** (Япония)	2027
Einstein Telescope (Евросоюз)	2030	**LISA** (Евросоюз)	2034
Cosmic Explorer (США)	2030	**BBO** (Евросоюз)	2035

Einstein Telescope (ET) и Cosmic Explorer (CE) – это проекты наземных детекторов гравитационных волн третьего поколения. Длины плеч ET составят 10 км (3 плеча), а CE – 40 км (2 плеча). Конфигурация ET отличается от LIGO-подобной конфигурации CE тем, что образует равносторонний треугольник и будет располагаться под землей. CE располагается на поверхности земли имея два перпендикулярных плеча. В 2021 или 2022 г. будет объявлено местоположение телескопа Эйнштейна.

LISA, DECIGO и BBO – это проекты космических детекторов гравитационных волн мировых лидеров в области гравитационно-волновой астрономии. Объединяющим фактором данных проектов является одинаковость конфигурации и принципа детектирования: все они представляют из себя различный набор детекторов в виде равностороннего треугольника, расположенного на орбите солнца (гелиоцентрическая орбита) и используют электромагнитный принцип детектирования – лазерный интерферометр Майкельсона с углом 60^{o} между плечами. Отличиями между проектами являются количество треугольных систем из спутников, количество спутников, задействованных в системе детектора, различная длина плеч интерферометра, а также количество интерферометров, их ориентация и др. У LISA длина плеч составит 2,5 млн. км. между 3 спутниками, размещенными в точках Лагранжа. В случае DECIGOE длина плеч составит всего 1 тыс. км. Обсерватория BBO будет состоять из 12 спутников, разбитых на подсистемы по 3, 3 и 6 спутников, образующих два равносторонних треугольника и правильный шестиугольник. В каждой подсистеме длина ребра, или плеча интерферометра – 50 тыс. км, а сами подсистемы размещаются в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в гелиоцентрическую орбиту [17]–[23].

Другой принцип детектирования основан на контролировании группы пульсаров (EPTA, IPTA, SKA), звездных остатков, которые испускают повторяющиеся импульсы излучения, и ищут тонкие временные сдвиги, вызванные прохождением гравитационных волн. Этот подход применяется для обнаружения низкочастотных волн, возникающих при слиянии сверхмассивных черных дыр – одного из самых энергетических событий в космосе, а также реликтового излучения (рисунок 1).

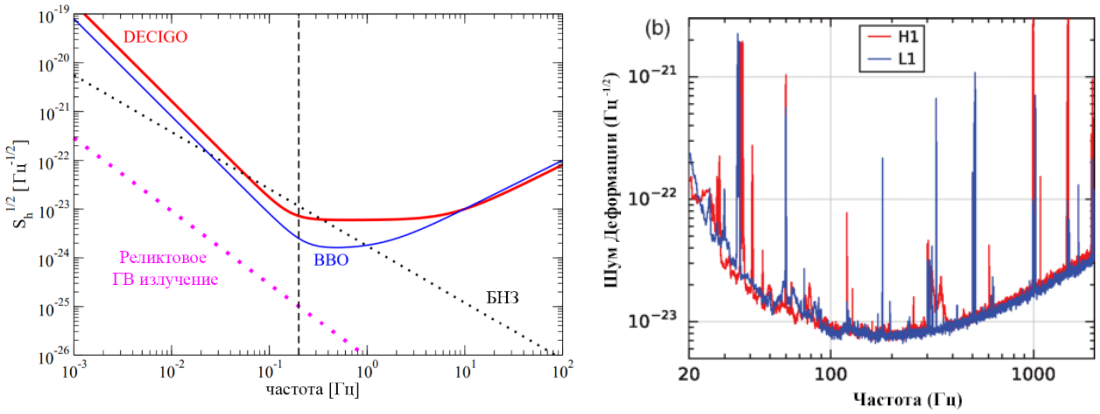


Рисунок 1 – График чувствительности планируемых космических детекторов ГВ DECIGO и BBO, а также астрофизические источники. БНЗ – бинарные нейтронные звезды; $S_h^{1/2}$ – шум деформации. График чувствительности LIGO (справа). LI – установка в Луизиане; HI – установка в Хэнфорде

Разработанная модель космического детектора гравитационных волн. Космос – условно неограниченное пространство по сравнению с Землей, в котором можно разместить детектор большего размера и трехмерной конфигурации. Этот факт открывает доступ к областям спектра ГВ, недоступных для LIGO детекторов, размещенных на Земле. К другим преимуществам относятся сверхнизкие давления и отсутствие сейсмических вибраций. В LIGO детекторах наземного типа характерна сложная и затратная система глубокого вакуума и амортизации вибраций. В Солнечной системе имеется множество космических объектов, хорошо изученных с точки зрения кинематических характеристик, которые являются естественным ресурсом для будущего использования в целях детектирования ГВ.

В качестве космического детектора ГВ предлагается космическая измерительная система искусственных спутников (ИС), расположенная на орбитах планет, естественных спутников планет или планетоидах. Для постоянного наземного взаимодействия с космической измерительной системой предложено использовать спутники, расположенные на геостационарных орбитах. Выделяют четыре типа орбит спутников (рисунок 2): LO (от англ. Low Orbit) – низкоорбитальные ИС; MO (от англ. Medium Orbit) – среднеорбитальные; GO (от англ. Geosynchronous Orbit) – геостационарные; HO (от англ. High Orbit) – высокоорбитальные. Для GO, в случае Земли (GEO), высоты около 36 тыс. км., период обращения – 23 ч 56 м 4.09 с, либо в пределах 22–24 ч. Орбиты могут быть высокоэллиптичными или близкими к круговым. Запуски спутников выполнены многими ведущими ВУЗами мира. БГУ (Минск) 29 октября 2018 г. разработал и осуществил запуск спутника «BSUSat-1». Спутник «BSUSat-1» успешно выведен на орбиту высотой более 500 километров над поверхностью Земли (LEO) (рисунок 2). На сайтах БГУ satellite.by и bsusat.com работает сервис по приему и размещению текущей телеметрии спутника. Отслеживание местоположения спутника можно с помощью программы «Orbitron» с настройками для спутника BSUSat-1.

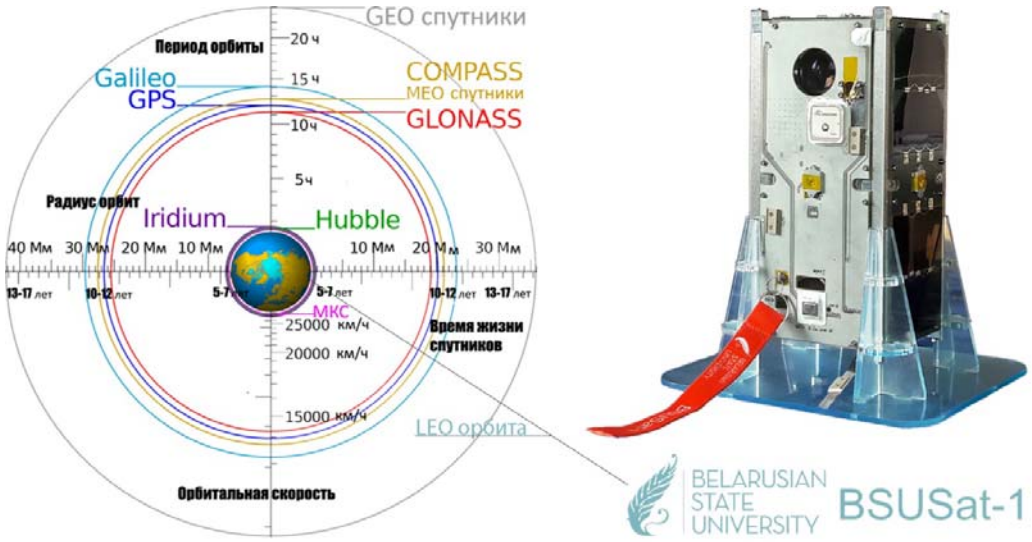


Рисунок 2 – Классификация орбит ИС Земли, их краткие характеристики и первый спутник БГУ «BSUSat-1», запущенный в 29 октября 2018 г.

Если рассматривать возможность создания подобной системы (классического интерферометра Майкельсона) на основе ИС – необходимо как минимум 3 спутника: 1 источник излучения и еще 2 с отражающими элементами и расположенные на перпендикулярных равных расстояниях, образуя треугольник. Если добавить еще один спутник в систему и допустить возможность, что каждый спутник может работать одновременно в качестве источника, отражателя, а также приемника, то возможное число одновременных космических интерферометров в системе равняется 4. Данная конфигурация плоская – 2D-конфигурация, для перехода в 3D конфигурацию необходимо добавить спутники с орбитой, характеризующейся другими углами наклонения.

Предлагается модель космического детектора ГВ «S-LIGO**x**R-G**y**» в виде системы из **X** спутников, расположенных на **Y** орбитах (рисунок 3), тип орбит также варьируется: **L**O, **M**O, **G**O и **H**O. В работе исследуется детектор S-LIGO8R-G2 (**S**pace – **L**aser **I**nterferometer **G**ravitational-Wave **O**bservatory) **8** (общее число спутников) **R**egular (правильной формы) **G**eostationary (тип орбит) **2** (число орбит). Для космического детектора S-LIGO8R-G2 первые 4 спутника выводятся на геостационарную орбиту и отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии так, что образуют квадрат, вписанный в круговую орбиту. Вторая конфигурация спутников на ортогональной орбите аналогична первой (рисунок 3). В первом приближении 4 спутника одной орбиты вращаются вокруг планеты с одинаковой угловой скоростью и сохраняют конфигурацию перпендикулярных плеч интерферометра Майкельсона. Как говорилось выше, всего получается 4 возможных детектора для одной орбиты: каждая вершина является угловой станцией детектора ГВ. Добавление второй орбиты ортогональной первой, переводит систему из двухмерной в более сложную трехмерную, где необходимо учитывать возможные совместные конфигурации в 3D пространстве. Это усложнение системы обеспечивает увеличение числа интерферометров и расширяет диаграмму направленности космического ГВ детектора. Изменения взаимного расположение спутников вызвано их орбитальным вращением. Взаимное расположение спутников и их орбитальное движение рассчитывалось теоретически, а также моделировалось в специализированной программе AGI STK (рисунок 3).

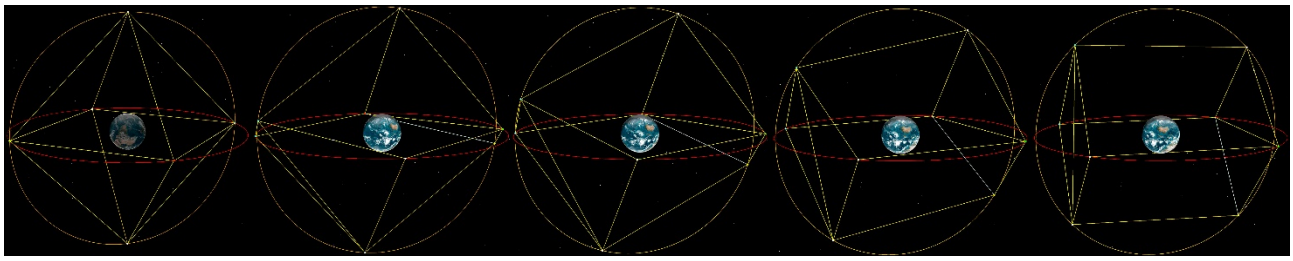


Рисунок 3 – Этапы процесса эволюции системы космического детектора гравитационных волн «S-LIGO8R-G2». В исходной фазе правильная трехмерная фигура октаэдр, и в заключительной фазе: образование правильной фигуры куб

Положение спутников в пространстве математически описывается декартовыми координатами x, y, z геоцентрической системы, среднее движение w и начальной фазой f. Для каждой плоскости орбиты вводится система координат, где радиус вектор спутников описывается матрицей:

$$\begin{pmatrix} x_{01}\,\mathrm{Cos}\left[f_1+tw_1\right] \\ y_{01}\,\mathrm{Sin}\left[f_1+tw_1\right] \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где x_{01} y_{01} – полуоси орбиты, 1 – номер спутника. Для описания взаимного положения двух спутников на разных орбитах используется матрица поворота M с учетом α угол между плоскостями орбит. Тогда взаимное положение двух спутников 1 и 2 описывается матрицей:

$$\begin{pmatrix} x_{01}\,\mathrm{Cos}\left[f_1+tw_1\right]-x_{02}\,\mathrm{Cos}\left[f_2+tw_2\right] \\ y_{01}\,\mathrm{Sin}\left[f_1+tw_1\right]-y_{02}\,\mathrm{Cos}\left[\alpha\right]\mathrm{Sin}\left[f_2+tw_2\right] \\ -y_{02}\,\mathrm{Sin}\left[f_2+tw_2\right]\mathrm{Sin}\left[\alpha\right] \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Рассмотрим первое положение системы спутников, изображенное на рис.3, и назовем данное положение исходным или началом эволюции системы. В исходном положении спутники системы S-LIGO8R-G2 образуют трехмерную фигуру октаэдра – это продемонстрировано на рис.3, где спутники соединили линиями. Следующая фаза, после оборота спутников по орбите на 45 градусов, спутники эволюционируют в трехмерную форму куба (рисунок 3). Далее, процесс эволюции системы спутников вновь возвращает ее в форму октаэдра. Период эволюции форм приблизительно равен 1/8 периода обращения планеты вокруг своей оси.

Правильные фигуры, выстраиваемые системой S-LIGO8R-G2 в двух периодически повторяющихся фазах октаэдра и куба, дают множество одновременно функционирующих детекторов ГВ классической конфигурации: интерферометр Майкельсона с перпендикулярными плечами и с углом 60 градусов между ними. Соответственно, система из спутников, расположенных в вершинах куба, расширяют возможности космического детектора ГВ и позволяют переключаться между системами с большим количеством единовременно работающих детекторов (до 24 LIGO-подобных детекторов) и выбором самых «перспективных» детекторов по ряду определяющих факторов: ориентация в пространстве, длина плеч, взаимное расположение и т. д. В соответствии с этим, предлагается размещение не менее 3-х источников излучения и 3-х отражателей на каждом из спутников.

Кроме длины плеча интерферометра, ключевым фактором для космического детектора ГВ может оказаться близость к объекту, сильно-искажающему пространство-время – например, Солнцу. В связи с этим, следует учитывать массу планеты, на орбите которой располагается такая система, и время обращения данной планеты вокруг Солнца. Возможно, для детектирования далеких астрофизических источников, излучающих ГВ, необходимо поместить детектор как можно дальше от источника сильных искажений пространства-времени. И наоборот, если необходимо измерить влияние ГВ излучения Солнца – размещать систему из спутников как можно ближе к Солнцу.

В общем случае, данную систему можно развернуть на геостационарных орбитах (гео-орбит) любой планеты Солнечной системы. Как описывалось выше, интерес представляет планеты с наибольшим радиусом гео-орбит, так как это даст большие длины плеч интерферометра – расширит частотный спектр ГВ-детектора. Для расчета геостационарных орбит 8 планет Солнечной системы воспользуемся следующей формулой:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_3}{\omega^2}}. \qquad (3)$$

В таблице 2 представлены результаты расчета гео-орбит для 8 планет Солнечной системы, а также результаты расчета ключевых параметров космического детектора ГВ S-LIGO8R-G2.

Таблица 2 – Значения радиусов геостационарных орбит и ключевых параметров космического детектора S-LIGO8R-G2, размещенного на этих орбитах, для 8 планет Солнечной системы

Планета	Масса планеты, $M_з$	Время вращения, с	Радиус геоорбит, м	Длина плеча интерферометра, тыс. км	Длина плеча в длинах LIGO (300 км)	Максимальная чувствительность детектора, Гц	Период эволюции форм системы спутников, с
Меркурий	$5{,}50\cdot10^{-2}$	$5{,}08\cdot10^{6}$	$2{,}43\cdot10^{8}$	$3{,}44\cdot10^{2}$	1150	$900\cdot10^{-3}$	$6{,}35\cdot10^{5}$
Венера	$8{,}15\cdot10^{-1}$	$2{,}10\cdot10^{7}$	$1{,}54\cdot10^{9}$	$2{,}17\cdot10^{3}$	7240	$150\cdot10^{-3}$	$2{,}62\cdot10^{6}$
Земля	1,00	$8{,}61\cdot10^{4}$	$4{,}22\cdot10^{7}$	$5{,}96\cdot10^{1}$	199	$500\cdot10^{-2}$	$1{,}08\cdot10^{4}$
Марс	$1{,}07\cdot10^{-1}$	$8{,}86\cdot10^{4}$	$2{,}04\cdot10^{7}$	$2{,}88\cdot10^{1}$	96	$100\cdot10^{-1}$	$1{,}11\cdot10^{4}$
Юпитер	$3{,}18\cdot10^{2}$	$3{,}58\cdot10^{4}$	$1{,}60\cdot10^{8}$	$2{,}26\cdot10^{2}$	755	$130\cdot10^{-2}$	$4{,}47\cdot10^{3}$
Сатурн	$9{,}50\cdot10^{1}$	$3{,}84\cdot10^{4}$	$1{,}12\cdot10^{8}$	$1{,}59\cdot10^{2}$	529	$189\cdot10^{-2}$	$4{,}80\cdot10^{3}$
Уран	$1{,}40\cdot10^{1}$	$6{,}22\cdot10^{4}$	$8{,}18\cdot10^{7}$	$1{,}16\cdot10^{2}$	386	$260\cdot10^{-2}$	$7{,}78\cdot10^{3}$
Нептун	$1{,}70\cdot10^{1}$	$5{,}80\cdot10^{4}$	$8{,}32\cdot10^{7}$	$1{,}18\cdot10^{2}$	392	$255\cdot10^{-2}$	$7{,}25\cdot10^{3}$

Из таблицы 2 видно, что самый большой радиус геостационарной орбиты у планеты Венера и составляет 1 млн. 536 тыс. 477 километров. Соответственно, плечо интерферометра будет в корень из двух раз больше и составит 2 млн. 172 тыс. 906 км. В сравнение, для Юпитера длина плеча интерферометра составляет 226 тыс. км. В сравнении, у детектора ГВ наземного типа LIGO плечо составляет лишь 300 км с учетом переотражений полученных в полости Фабри-Перо. Таким образом, длина плеча космического интерферометра Венеры S-LIGO8R-G2 равносильна 7240 длинам плеча LIGO интерферометра. Максимальная частота ГВ, которую способен зарегистрировать такой космический детектор, около 0,15 Гц и будет изменятся в зависимости от эволюции системы, так как изменится длина плеча интерферометра.

Для изучения гравитационного излучения Солнца, космический ГВ детектор S-LIGO8R-G2 необходимо размещать как можно ближе к исследуемому объекту, т. е. на орбите Меркурия. Для регистрации гравитационных волн из дальнего космоса необходимо гравитационный детектор размещать как можно дальше от любых доступных в Солнечной системе источников возмущений, т. е. на орбите планеты Нептун или планетоида Плутон. Период вращения планеты Нептун вокруг Солнца составляет 165 лет, а период вращения вокруг своей оси 15 ч 57 мин 59 с. Радиус гео-орбиты составляет 83 тыс. км, длина плеча интерферометра – 118 тыс. км, а максимальная частота чувствительности данного детектора около 2,55 Гц. Для планеты Меркурий, период вращения вокруг Солнца 88 дней, а период вращения вокруг своей оси 58 дней. Радиус гео-орбиты 243 тыс. км, длина плеч интерферометра – 344 тыс. км., максимальная частота чувствительности детектора 0,9 Гц.

Заключение. Существующие наземные детекторы ограничены в линейных размерах, что обуславливает диапазон чувствительности 10–1000 Гц ГВ, однако, они уже зарегистрировали 67 событий гравитационных волн. Для расширения частотного диапазона ГВ детекторов необходимо размещать измерительные установки в космосе.

Для решения поставленной задачи, предлагается отдельная система космического детектирования ГВ на основе системы спутников. Для описания системы предложено обозначение «S-LIGO**x**R-G**y**». В работе исследуется эволюция системы S-LIGO8R-G2, состоящей из 8 спутников на 2 ортогональных орбитах. Проведен расчет и моделирование такой системы спутников для 8 планет Солнечной системы. Выполнен расчет ключевых характеристик космического детектора ГВ для этих планет. В работе обсуждаются результаты расчетов и возможности подобных детекторов.

Система из 8 спутников будет периодически выстраиваться в виде правильных трехмерных геометрических фигур. Для рассмотренной системы S-LIGO8R-G2 такими фигурами являются октаэдр и куб. Период перестроения октаэдр-куб зависит от планеты, на которой будет располагаться космический детектор. Согласно расчетам (таблица 2), в рамках Солнечной системы, самое длинное плечо космического интерферометра S-LIGO8R-G2 получается на орбите Венеры: 2 172 906 км. Значение максимальной частоты чувствительности такого космического детектора составит 0,15 Гц для фазы куба и будет изменятся в процессе эволюции системы, так как будет изменятся длина плеча. На самой удаленной от Солнца планете – Нептун характеристики S-LIGO8R-G2 следующие: длина плеча 118 000 км, максимальная частота чувствительности 2,55 Гц.

Литература

1. Heaviside, O. A Gravitational and Electromagnetic Analogy. Part II / O. Heaviside // The Electrician. – 1893. – № 31. – P. 359.

2. Abraham, M. Zur Theorie der Gravitation / M. Abraham // Physikalische Zeitschrift. – 1912. – Vol. 13. – P. 1–4.

3. Mie, G. Grundlagen einer Theorie der Materie / G. Mie // Annalen der Physik. – 1912. – Vol. 37. – P. 511–534.

4. Mie, G. Grundlagen einer Theorie der Materie / G. Mie // Annalen der Physik. – 1913. – Vol. 40. – P. 1–65.

5. Einstein, A. Gravitationswellen / A. Einstein // Preussische Akademie der Wissenschaften Sitzungsberichte. – 1918. – Part 1. – P. 154–167.

6. Abbot, B. P. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbot [et al.] // Phys. Rev. Let. – 2016. – Vol. 116, iss. 6. – 061102.

7. Weber, J. Gravitational-wave-detector events / J. Weber // Physical Review Letters. – 1968. – Vol. 20, iss. 23. – P. 1307–1308.

8. Gertsenshtein, M. E. On the detection of low frequency gravitational waves / M. E. Gertsenshtein, V. I. Pustovoit // JETP. – 1962. – Vol. 43, № 2. – P. 605–607.

9. Abbot, B. P. Exploring the sensitivity of next generation gravitational wave detectors / B. P. Abbott [et al.] // Class. Quantum Grav. – 2017. – Vol. 34, № 4. – 044001.

10. Weiss, R. Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna / R. Weiss // Quarterly Report of the Research Laboratory for Electronics. – 1972. – № 105. – P. 54–76.

11. Advanced LIGO [Electronic resource] : LIGO Scientific Collaboration / LIGO – Livingston : Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, 2014. – Mode of access : https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1411/1411.4547.pdf. – Date of access : 01.01.2020.

12. Cervantes-Cota, J. L. A Brief History of Gravitational Waves / J. L. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri, G. F. Smoot // Universe. – 2016. – Vol. 2, iss. 3. – P. 22–52.

13. LIGO NEWS [Electronic resource] : LIGO Suspends Third Observing Run (O3). – Mode of access : https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20200326. – Date of access : 01.04.2020.

14. The Nobel Prize [Electronic resource] : The Nobel Prize in Physics 2017. – Mode of access : Nobelprize.org. – Date of access : 12.12.2019.

15. KAGRA Observatory News [Electronic resource] : KAGRA Gravitational-wave Telescope Starts Observation. – Mode of access : https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/archives/1381. – Date of access : 25.02.2020.

16. Abbott, B. P. Prospects for observing and localizing gravitational-wave transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA / B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott [et al.] // Living Rev Relativ. – 2018. – Vol. 21, iss. 3. – DOI: 10.1007 / s41114-018-0012-9.

17. Hild, S. Sensitivity studies for third-generation gravitational wave observatories / S. Hild [et al.] // Class. Quantum Grav. – 2011. – Vol. 28, № 9. – 094013.

18. Laser Interferometer Space Antenna : A proposal in response to the ESA call for L3 mission concepts / K. Danzmann [et al.]. – Hannover, 2017. – 41 p.

19. NGO, Revealing a hidden Universe: opening a new chapter of discovery (New Gravitational wave Observatory) : Assessment Study Report / O. Jenrich [et al.]. – Paris, 2011. – 153 p. – № ESA/SRE (2011) 19.

20. Kawamura, S. The Japanese space gravitational wave antenna – DECIGO / S. Kawamura [et al.] // J. Phys.: Conf. Ser. – 2008. – Vol. 122. – DOI: 10.1088/1742-6596/122/1/012006.

21. Harry, G. M. Laser interferometry for the Big Bang Observer / G. M. Harry [et al.] // Class. Quantum Grav. – 2006. – Vol. 23. – P. 4887–4894.

22. Reitze D. Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO / D. Reitze [et al.] // Bulletin of the American Astronomical Society. – 2019. – Vol. 51, iss. 7, id. 35. – arXiv: 1907.04833.

23. Yagi, K. Detector configuration of DECIGO/BBO and identification of cosmological neutron-star binaries / K. Yagi, N. Seto // Phys. Rev. D. – 2011. – Vol. 83. – 20 p.

Белорусский государственный университет Поступила в редакцию 15.09.2020

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

Краткие сообщения

УДК 591.5:599.363

О находке белозубки малой (Crocidura suaveolens) на территории Могилевской области Беларуси

А.А. САВАРИН

24.10.2020 в д. Романовичи Могилевского района найдена мертвая особь белозубки малой (*Crocidura suaveolens*). Это самая северная находка землероек р. *Crocidura* на территории страны. Данный факт свидетельствует о расширении области распространения белозубок в Беларуси.
Ключевые слова: Беларусь, *Crocidura suaveolens*, область распространения.

On October 24, 2020, in the village of Romanovichi, Mogilev district, a dead specimen of the small white-toothed shrew (*Crocidura suaveolens*) was found. This is the northernmost find of shrews from the r. Crocidura in the country. This fact indicates the expansion of the area of distribution of white-toothed shrews in Belarus.
Keywords: Belarus, *Crocidura suaveolens*, area of distribution.

Введение. Белозубка малая (*Crocidura suaveolens*) – один из видов землероек (Soricidae), занесенных в приложение Красной книги Беларуси со статусом «недостаточно данных» [1]. В последней аналитической работе по распространению малоизученных видов насекомоядных млекопитающих на территории страны [2] сведения по данному представителю р. *Crocidura* не приведены. В 21 веке достоверные находки особей *C. suaveolens* сделаны в ряде районов на юге страны: в г. п. Туров на приусадебных участках и на пойменном лугу у р. Припять [3], на мелиорированных с/х угодьях в Житковичском районе [4], в целом ряде других районов Гомельской области и в самом областном центре [5], а также в г. Брест и в г. Малорита [6]. Самая северная находка этой землеройки – в Чечерском районе. Необходимо заметить, что поимки белозубки малой упоминаются и в некоторых других публикациях, однако без указания видовых диагностических признаков.

Цель работы – обратить внимание специалистов на расширение области распространения вида на территории Беларуси, прежде всего, в населенных пунктах. Указанное обстоятельство требует особого внимания эпидемиологов, так как белозубки играют существенное значение в распространении природно-очаговых заболеваний (туляремия, лептоспироз [7] [и др.]).

Результаты и их обсуждение. 24.10.2020 в д. Романовичи (у дома № 25 по ул. Фабричная) Могилевского района найдена мертвая неполовозрелая самка белозубки малой (*C suaveolens*) (рисунок 1). Географические координаты места находки: 53.863649° 30.558173°.

Рисунок 1 – Экстерьерные признаки особи *C. suaveolens*

Зверек имел характерные экстерьерные признаки: темно-серая спина и светло-серое брюшко; хвост зауженный с небольшой кисточкой; масса тела около 5,9 г; длина тела – 66 мм, хвоста – 34 мм, стопы – 11 мм. Важнейшие краниологические характеристики: кондилобазальная длина – 16,72 мм; ширина черепа – 7,96 мм; скуловая ширина – 5,32 мм, межглазничная ширина – 4,07 мм, высота нижней челюсти – 3,99 мм; средняя часть скуловой кости имеет сглаженный рельеф; боковые края верхнего зуба Pm4 округлые, с вырезкой; клык верхней челюсти крупнее стоящего перед ним резца, оба зуба остроконечны; высота моста подглазничного отверстия значительно больше ширины.

Данная находка существенно расширяет научные представления по распространению землероек р. *Crocidura* в Беларуси. Так, нами ранее высказывалось мнение о том, что область распространения этого вида охватывает не только Белорусское Полесье. Причиной же слабой изученности белозубок в Беларуси является, прежде всего, недостаток соответствующих специалистов.

Заключение. Находка малой белозубки на территории Могилевского района предполагает ее обитание и в других районах Могилевской области. Интересное сообщение получено в 2020 г.: в г. Могилеве по ул. Челюскинцев (53.89359° 30.3075°) уже несколько лет в ловушки попадаются зверьки с таким «описанием» жителей: вытянутая острая мордочка, белое брюшко, серая спина, хвост с длинными белыми волосками. Предполагаем, что и в областном центре обитает именно *C. suaveolens*. Видовая принадлежность будет установлена при последующей поимке землеройки.

Литература

1. Красная книга Республики Беларусь. Животные : редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды диких животных. – Минск : Беларуская Энцыклапедыя імя П. Броукі, 2015. – 317 с.

2. Новые данные о распространении и биологии редких видов семейства землеройковых (Soricidae, Mammalia) в Беларуси / В. В. Гричик [и др.] // Журнал Белорусского государственного университета. Биология. – 2020. – № 2: – С. 58–65.

3. Зенина, И. М. Малая белозубка (Crocidura suaveolens Pall.) в Полесье / И. М. Зенина // Экологические проблемы Полесья и сопредельных территорий : материалы науч.-практич. конф., Гомель, 2002 г. / ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель, 2002. – С. 107–108.

4. Домбровский, В. Ч. Видовой состав и численность мелких млекопитающих в естественных и трансформированных местообитаниях Припятского Полесья / В. Ч. Домбровский, Н. Н. Яковец // Проблемы сохранения биологического разнообразия и использования биологических ресурсов : материалы науч.-практич. конф., Минск, 2009 г. : в 2 ч. / ГНПО «Научно-практический центр НАНБ по биоресурсам» ; редкол.: М. Е. Никифоров [и др.]. – Минск, 2009. – Ч. 1. – С. 102–105.

5. Саварин, А. А. Об экологии и морфологической изменчивости Crocidura suaveolens (Pallas, 1811) на юго-востоке Беларуси / А. А. Саварин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 5 (80). – С. 143–149.

6. Саварин, А. А. О находке Crocidura suaveolens (Pallas, 1811) в погадках серой неясыти (Strix aluco) на юго-западе Беларуси / А. А. Саварин, Д. А. Китель // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2017. – № 6 (105). – С. 172–173.

7. Евстафьев, И. Л. Итоги тридцатилетнего изучения мелких млекопитающих Крыма. Часть 3. Паразитофауна и эпизоотология / И. Л. Евстафьев // Праці Теріологічної школи. – 2017. – № 15. – С. 111–135.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 06.11.2020

Технический редактор: *О.Г. Шляхтова.* Корректоры: *В.А. Бобрик, Г.Н. Петухова*

Подписано в печать 08.12.2020. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 19,3. Уч.-изд. л. 16,81. Тираж 100 экз. Заказ № 583.
Цена свободная

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.