

ИЗВЕСТИЯ

Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины

№ 6 (117)

Естественные науки

2019

Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины

ИЗВЕСТИЯ

Журнал зарегистрирован в Министерстве информа-
ции Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации
№ 546 от 06.07.2009 года)

Журнал включен ВАК Республики Беларусь
в перечень научных изданий Республики Беларусь,
в которых публикуются результаты
диссертационных исследований
(приказы № 207 от 13.12.2005, № 9 от 15.01.2010,
№ 57 от 16.05.2013)

Журнал включен в библиографические базы данных
ВИНИТИ и Научную электронную библиотеку
eLIBRARY.RU

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор С.А. ХАХОМОВ,
д-р. физ.-мат. наук, доцент
Зам. главн. редактора О.М. ДЕМИДЕНКО,
д-р тех. наук, профессор
Зам. главн. редактора М.В. СЕЛЬКИН,
д-р физ.-мат. наук, профессор

Члены редакционной коллегии:

Г.Г. Гончаренко, д-р биол. наук, проф.,
чл.-корр. НАН Беларуси
Ф.В. Кадол, д-р пед. наук, проф.
В.Н. Калмыков, д-р филос. наук, проф.
В.И. Коваль, д-р филол. наук, проф.
Г.Г. Лазько, д-р ист. наук, проф.
И.В. Семченко, д-р физ.-мат. наук, проф.
В.С. Смородин, д-р тех. наук, проф.
Б.В. Сорвилов, д-р экон. наук, проф.
В.М. Хомич, д-р юрид. наук, проф.
О.Г. Шляхтова, ответственный секретарь

Члены редакционной коллегии по естественным наукам:

В.Ф. Багинский, д-р биол. наук, проф., член-корр.
НАН Беларуси
А. Баллистер-Болинше (Испания), д-р, проф. математики
Ван Сяо Фэн (Китай), д-р тех. наук, проф.
Го Вэньбинь (Китай), д-р физ.-мат. наук, проф.
В.В. Кириченко (Украина), д-р физ.-мат. наук, проф.
В.П. Кудин, д-р тех. наук, проф.
А.А. Махнев (Россия), д-р физ.-мат. наук, проф.,
член-корр. РАН
В.В. Можаровский, д-р тех. наук, проф.
А.Н. Сердюков, д-р физ.-мат. наук, проф., член-
корр. НАН Беларуси
А.Н. Скиба, д-р физ.-мат. наук, проф.
Шэн Рикун (Китай), д-р тех. наук, проф.
Р. Эстебан Ромеро (Испания), д-р, проф. математики

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
246019, Беларусь, Гомель, ул. Советская, 104,
Телефоны: +375 (232) 51-03-21
E-mail: vesti@gsu.by
Интернет-адрес: <http://vesti.gsu.by>

Francisk Scorina Gomel State University

PROCEEDINGS

The Journal is registered in the Ministry of Information of
Republic of Belarus
(registration certificate
number 546 dated 06.07.2009)

The Journal is included in the Republic of Belarus
Higher Attestation Commission list of scientific publica-
tions of the Republic of Belarus, which publish the main
results for the degree of Doctor (Candidate) of Sciences
(order number 207 dated 13.12.2005, number 9 dated
15.01.2010, number 57 dated 16.05.2013)

The Journal is included in bibliographic databases of the
All-Russia Institute of Scientific and
Technical Information (VINITI), Scientific electronic
library eLIBRARY.RU

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief S.A. KHAKHOMOV,
Sc. D., Docent of Physics
Deputy editor-in-chief O.M. DEMIDENKO,
Sc. D., Professor
Deputy editor-in-chief M.V. SELKIN,
Sc. D., Professor

Members of editorial board:

G.G. Goncharenko, Sc. D., Professor, Corresponding
Member NASB
F. V. Kadol, Sc. D., Professor
V.N. Kalmykov, Sc. D., Professor
V.I. Koval, Sc. D., Professor
G.G. Lazko, Sc. D., Professor
I.V. Semchenko, Sc. D., Professor
V.S. Smorodin, Sc. D., Professor
B.V. Sorvirov, Sc. D., Professor
V.M. Homich, Sc. D., Professor
O.G. Shlyahova, executive secretary

Members of editorial board for the natural sciences

V.F. Baginsky, Sc. D., Professor, Corresponding
Member NASB
A. Ballister-Bolinshes (Spain), Sc. D., Professor
Van Siao Fen (China), Sc. D., Professor
Go Wenbin (China), Sc. D., Professor
V.V. Kirichenko (Ukraine), Sc. D., Professor
V.P. Kudzin, Sc. D., Professor
A.A. Makhnev (Russia), Sc. D., Professor, Correspond-
ing Member RAS
V.V. Mozharovsky, Sc. D., Professor
A.N. Serdukov, Sc. D., Professor, Corresponding
Member NASB
A.N. Skiba, Sc. D., Professor
Shen Riku (China), Sc. D., Professor
R. Esteban Romero (Spain), Sc. D., Professor

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
246019, Belarus, Gomel, Sovetskaya Str., 104,
Tel: +375 (232) 51-03-21
E-mail: vesti@gsu.by
Site: <http://vesti.gsu.by>

ИЗВЕСТИЯ

Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины

НАУЧНЫЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1999 г.
Выходит 6 раз в год

• 2019, № 6 (117) •

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ:

БИОЛОГИЯ • ТЕХНИКА (ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ;
РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ; ЭЛЕКТРОНИКА) • МАТЕМАТИКА • ФИЗИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Биология

Багинский В.Ф. <i>Возрасты рубки в различных категориях лесов Беларуси</i>	5
Бачура Ю.М. <i>Организация альгоцианобактериальных сообществ почв сосняков после верхового пожара</i>	10
Ганжур Е.Н., Бачура Ю.М. <i>О влиянии культур ностока на рост и развитие семян пшеницы</i>	17
Гулаков А.В. <i>Патогистологические исследования внутренних органов дикого кабана (<i>Sus scrofa</i> L.) после аварии на Чернобыльской АЭС</i>	24
Гулаков А.В., Дроздов Д.Н. <i>Динамика поглощенной дозы внутреннего облучения мышечной ткани дикого кабана от ^{137}Cs, обитающего в условиях Полесского радиационно-экологического заповедника</i>	29
Дроздова Н.И., Гатальская М.Н. <i>Влияние предпосевной обработки препаратом «Виал-ТТ» на активность липазы в проростках озимого рапса</i>	35
Зиновкин Д.А., Надыров Э.А. <i>Реактивные изменения иммунного компонента опухолевого микроокружения эндометриоидной аденокарциномы эндометрия в ответ на гамма-облучение ткани опухоли</i>	41
Карпенко А.Ф. <i>Содержание бора в почвах Гомельской области</i>	45
Концевая И.И. <i>Цитогенетические эффекты, индуцируемые у <i>Allium cepa</i> L. бета-лактамными антибиотиками и 6-бензиламинопурином</i>	50
Логинов Д.Н., Волкова Т.В. <i>Нападающий комплекс кровососущих комаров (<i>Diptera: Culicidae</i>) на территории Белорусского Полесья</i>	56
Макаренко Т.В. <i>Мониторинг содержания тяжелых металлов в высших водных растениях водоемов г. Гомеля, испытывающих различную антропогенную нагрузку</i>	61
Надина Н.Г., Кураченко И.В., Гончаренко Г.Г. <i>Анализ гельминтофауны енотовидной собаки, обитающей на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника</i>	68
Плискевич Е.С., Солодовников И.А. <i>Карабидокомплексы (<i>Coleoptera: Carabidae</i>) прибрежных древесных насаждений в г. Витебске. Часть 2. Зооценотическая характеристика</i>	73
Хаданович А.В., Денисенко Я.А. <i>Особенности накопления нитрат- и нитрит-ионов плодовоовощными культурами в различные сроки внесения карбамида в почву после посадки</i>	80

Хох А.Н., Шалабода В.Л. <i>Сравнительная оценка анатомометрических параметров хвои сосны обыкновенной в разных типах леса</i>	85
Храмченкова О.М. <i>Влияние биомассы лишайника на всхожесть и первичный рост корневищных злаков</i>	91
Шевчик В.Л., Соломаха И.В., Смоляр Н.А., Соломаха В.А., Данилик И.Н. <i>Эколого-ценотические характеристики новых местонахождений <i>Carex secalina</i> (Cyperaceae) в Левобережной Лесостепи Украины</i>	97
ИНФОРМАТИКА	
Горошко С.М., Петров С.Н. <i>Метод шумоочистки речевых сигналов на основе мел-частотных кепстральных коэффициентов с использованием фильтрации Калмана</i>	103
Осипенко Н.Б., Осипенко А.Н. <i>Концепция рекомендательной системы «Подбор решений, отвечающих предназначению человека»</i>	108
МАТЕМАТИКА	
Абдулкадер М.Х. <i>Компьютерное моделирование контактного взаимодействия индентора с грунтом при внедрении с вращением</i>	113
Балычев С.В., Васильев А.Ф., Селькин В.М. <i>Конечные группы, факторизуемые тремя попарно перестановочными подгруппами</i>	117
Бородич Р.В., Селькин М.В., Кучеров Р.А. <i>О пересечении не $\mathfrak{F}$-подгрупп, в группах с операторами</i>	123
Гребенцов Ю.М., Лаптинский В.Н. <i>О периодических решениях многомерных систем второго порядка с параметром</i>	130
Копать Д.Я., Маталыцкий М.А. <i>Анализ ожидаемого дохода в открытой марковской сети обслуживания с ограниченным числом заявок и случайным временем их ожидания в очередях</i>	137
Марцинкевич А.В. <i>О решетке локально нормальных классов Фиттинга</i>	144
Можей Н.П. <i>Эквивалентные связности на редуктивных несимметрических пространствах</i>	150
Поцейко П.Г. <i>Приближения на классах Липшица суммами Фейера рядов Фурье одной системы алгебраических дробей Чебышёва-Маркова</i>	157
Селькин В.М., Побылковский А.А., Зинчук С.И., Ярошенко Д.А. <i>О π-разложимой норме конечной группы</i>	164
Старовойтов А.П., Рябченко Н.В. <i>Критерий единственности и детерминантные представления многочленов Эрмита-Паде первого рода</i>	168
ФИЗИКА	
Леоненко Д.В. <i>Свободные колебания трехслойной круговой пластины на инерционном основании при действии температуры</i>	174
Мороз И.В., Гурневич Е.А. <i>Излучение заряженной частицы, движущейся через плоскую периодическую структуру, образованную параллельными нитями</i>	180
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
Гальмак А.М., Кулаженко Ю.И., Селькин М.В. <i>Косые элементы в полиадических группах специального вида</i>	186
Саварин А.А., Кравцов А.А. <i>Предварительные сведения о патологиях мозгового отдела черепа выхухоли (<i>Desmana moschata</i>), обитающей на территории Украины</i>	189

PROCEEDINGS

of Francisk Scorina Gomel State University

SCIENTIFIC, PRODUCTION AND PRACTICAL JOURNAL

There are 6 times a year

Published since 1999

• 2019, № 6 (117) •

NATURAL SCIENCES:

BIOLOGY • TECHNIQUE (INFORMATION TECHNOLOGY;
RADIO ENGINEERING AND COMMUNICATIONS; ELECTRONICS)

• MATHEMATICS • PHYSICS

CONTENTS

BIOLOGY

V.F. Baginsky. <i>Felling ages in various forest categories of Belarus</i>	5
Yu.M. Bachura. <i>Organization of algocyanobacterial communities of pine soils after a crown fire</i>	10
E.N. Ganzhur, Yu.M. Bachura. <i>On the influence of Nostok crops on the growth and development of wheat seeds</i>	17
A.V. Gulakov. <i>Histopathological studies of the internal organs of wild boar (Sus scrofa L.) after the accident at the Chernobyl nuclear power plant</i>	24
A.V. Gulakov, D.N. Drozdov. <i>Dynamics of the absorbed dose of internal exposure of muscle tissue of wild boar from ¹³⁷Cs living in the Polesie State Radioecological Reserve</i>	29
N.I. Drozdova, M.N. Gatalskaya. <i>The effect of presowing treatment with the drug «Vial-TT» on the activity of lipase in seedlings of winter rape</i>	35
D.A. Zinovkin, E.A. Nadyrov. <i>Reactive changes in the immune component of the tumor microenvironment of the endometrioid: endometrial adenocarcinoma in response to gamma radiation of the tumor tissue</i>	41
A.F. Karpenko. <i>Concentrations of boron in soils of Gomel region</i>	45
I.I. Kontsevaya. <i>Cytogenetic effects induced by Allium cepa L. beta-lactam antibiotics and 6-benzylaminopurine</i>	50
D.N. Loginov, T.V. Volkova. <i>The attacking complex of blood-sucking mosquitoes (Diptera: Culicidae) in the territory of Belarusian Polesie</i>	56
T.V. Makarenko. <i>Monitoring of the content of heavy metals in higher water plants of the water bodies of the city of Gomel experiencing various anthropogenic stress</i>	61
N.G. Nadina, I.V. Kurachenko, G.G. Goncharenko. <i>Analysis of helminth fauna of a raccoon dog that lives on the territory of Polesie State Radioecological Reserve</i>	68
E.S. Pliskevich, I.A. Solodovnikov. <i>Carabidocomplexes (Coleoptera: Carabidae) in banks tree plantations in the city of Vitebsk. Part 2. Zoocenotic characteristic</i>	73
A.V. Khadanovich, Y.A. Denisenko. <i>Peculiarities of the accumulation of nitrate and nitrite ions by vegetable crops at different periods of application of urea into the soil after planting</i> ..	80
A.N. Khokh, V.L. Shalaboda. <i>Comparative assessment of the anatomical parameters of pine needles in different types of forests</i>	85
V.M. Khramchankova. <i>Lichen biomass influence on the germination and primary growth of rhizome cereals</i>	91

V.L. Shevchik, I.V. Solomakha, N.A. Smolyar, V.A. Solomakha, I.N. Danilik. <i>Ecological and cenotic characteristics of the new locations of Carex secalina (Cyperaceae) in the Left-Bank Forest-Steppe of Ukraine</i>	97
INFORMATION TECHNOLOGY	
S.M. Goroshko, S.N. Petrov. <i>The method of noise cleaning of speech signals based on mel-frequency cepstral coefficients using Kalman filtering</i>	103
N.B. Osipenko, A.N. Osipenko. <i>The concept of the recommendation system «Selection of solutions that meet the purpose of man»</i>	108
MATHEMATICS	
M.Kh. Abdulkader. <i>Computer simulation of the contact interaction of the indenter with the soil during implementation with rotation</i>	113
S.V. Balychev, A.F. Vasiliev, V.M. Selkin. <i>Finite groups factored by three pairwise permutable subgroups</i>	117
R.V. Borodich, M.V. Selkin, R.A. Kucherov. <i>On the intersection of non $\mathfrak{F}$-subgroups, in groups with operators</i>	123
Y.M. Grebentsou, V.N. Laptinsky. <i>On periodic solutions of the multidimensional second order systems with the parameter</i>	130
D.Ya. Kopat, M.A. Matalitsky. <i>Analysis of expected income in an open Markov service network with a limited number of applications and a random waiting time in queues</i>	137
A.V. Martsinkevich. <i>On the lattice of locally normal Fitting classes</i>	144
N.P. Mozhey. <i>Equiaffine connections on reductive nonsymmetric spaces</i>	150
P.G. Patseika. <i>Approximations on Lipschitz classes by Fejer means of Fourier series of one system of Chebyshev-Markov algebraic fractions</i>	157
V.M. Selkin, A.A. Pobilovsky, S.I. Zinchuk, D.A. Yaroshenko. <i>On the π-decomposable norm of a finite group</i>	164
A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko. <i>Uniqueness criterion and determinant representations of Hermite-Padé polynomials of the first kind</i>	168
PHYSICS	
D.V. Leonenko. <i>Free vibrations of a three-layer circular plate on an inertial foundation under the influence of temperature</i>	174
I.V. Moroz, E.A. Gurnevich. <i>Radiation of a charged particle moving through a plane periodic structure formed by parallel conducting wires</i>	180
ABSTRACTS	
A.M. Gal'mak, Yu.I. Kulazhenko, M.V. Selkin. <i>Skew elements in polyadic groups of a special kind</i>	186
A.A. Savarin, A.A. Kravtsov. <i>Preliminary information on neurocranium pathologies of the Russian desman (Desmana moschata) inhabiting the territory of Ukraine</i>	189

Биология

УДК 630*613(476)

Возрасты рубки в различных категориях лесов Беларуси

В.Ф. БАГИНСКИЙ

В настоящее время в Беларуси действуют возрасты рубки, принятые Постановлением Совета Министров Республики Беларусь 06.12.2001 г. № 1765. Они определены в эксплуатационных лесах для хвойных в 81 – 100 лет, для дуба и других твердолиственных в 101–120 лет, березы – 61–70 лет, ольхи черной – 51–60 лет, осины в 41–50 лет. В лесах экологического направления эти возрасты выше на один класс возраста. В настоящее время эти возрасты рубки не отвечают требованиям экологизированного лесопользования и потребностям народного хозяйства в высококачественных сортаментах. Поэтому в 2019 г. сотрудниками БГТУ (Н.П. Демид) и УО ГГУ им. Ф. Скорины (В.Ф. Багинский) предложены новые возрасты рубки для эксплуатационных лесов. Для других категорий (природоохранные, рекреационно-оздоровительные, защитные леса) предлагаются новые возрасты рубки, которые обосновываются экологической спелостью леса. Для сосны, ели, дуба и березы высших бонитетов они на один класс возраста выше, чем в эксплуатационных лесах. Для низших классов бонитета повышение предложено провести на два класса возраста.

Ключевые слова: возраст рубки, экологическая спелость леса, техническая спелость, количественная спелость, класс бонитета, хвойные породы, дуб, мягколиственные древесные виды, категории лесов.

At present, cutting ages are in force in Belarus, adopted by Decree of the Council of Ministers of the Republic of Belarus on December 6, 2001 № 1765. They are identified in production forests for conifers at 81–100 years, for oak and other hardwoods at 101–120 years, birch – 61–70 years, black alder – 51–60 years, aspen at 41–50 years. In ecological forests, these ages are one class higher. At present, these cutting ages do not meet the requirements of ecologically sound forest management and the needs of the national economy in high-quality assortments. Therefore, in 2019, employees of the Belarusian State Technological University (N.P. Demid) and Educational Establishment F.Scorina Gomel State University (V.F. Baginsky) proposed new cutting ages for production forests. For other categories (conservation, recreational, recreational, protective forests), new cutting ages are proposed, which are justified by the ecological maturity of the forest. For pine, spruce, oak and birch of higher bonitetes, they are one class of age higher than in production forests. For the lower classes of bonitet, an increase is proposed to be carried out by two classes of age.

Keywords: felling age, ecological forest ripeness, technical ripeness, quantitative ripeness, bonitet class, coniferous species, oak, soft-leaved tree species, forest categories.

Введение. Возраст рубки является одним из основных научно-технических элементов главного пользования лесом. Расчетная лесосека в нашей стране составляет около 12 млн. м³. В перспективе она возрастет до 17 млн. м³ в год. Поэтому точное установление возраста рубки имеет важное экономическое и экологическое значение.

Возраст рубки показывает тот возрастной момент, когда по экономическим, экологическим, лесоводственным или иным соображениям древостой разрешено срубить. Допускается рубка после этого срока, но раньше она запрещена. Возраст рубки зависит от древесной породы, категории лесов, целевой функции хозяйства и т. д. [1]–[4]. В отдельных категориях лесов, где главное пользование запрещено, возраст рубки является верхним пределом, с которого отсчитывают распределение по группам возраста.

В то же время не должно быть исключения древостоев из расчета главного пользования. Все древостой (исключением должна быть только зона полной заповедности в заповедниках и национальных парках) при исчерпании их сырьевого и экологического потенциала должны в конечном итоге подвергаться рубкам главного пользования. Такой подход может показаться противоречащим принципам экологизации ведения хозяйства и лесопользования. Но наше предложение не требует рубить все древостой при одинаковом возрасте рубки, использовать единые способы рубок. Наоборот, леса зеленых зон, другие участки, имеющие

экологическое или культурное значение, должны поступать в рубку в весьма высоком возрасте, вплоть до естественной спелости. Здесь уместны разные виды постепенных рубок и т. д. Но по своей юридической сути окончательное снятие лесного урожая древесины должно осуществляться через рубки главного пользования. При этом вносятся попенная плата или иные платежи в бюджет. Вырубка спелых насаждений не должна быть некоторой имитацией промежуточного пользования, как это происходит сегодня в отношении рубок обновления и переформирования, которые отнесены к промежуточному пользованию из ведомственных соображений, чтобы уйти от платежей в бюджет.

Многоцелевое значение лесов требует от лесоустроителей дифференцированно, научно обоснованно, комплексно и эффективно производить проектирование хозяйственных мероприятий. Поэтому Лесным Кодексом Республики Беларусь [5] предусмотрена оптимизация соотношения площадей защитных, охранных и эксплуатационных лесов. В соответствии с экологическим, экономическим и социальным значением лесов, их местонахождением и выполняемыми функциями леса делятся на следующие 4 категории: 1) природоохранные леса; 2) рекреационно-оздоровительные леса; 3) защитные леса; 4) эксплуатационные леса.

В настоящее время в Беларуси действуют возрасты рубки, принятые Постановлением Совета Министров Республики Беларусь 06.12.2001 г. № 1765 [6]. Они определены в эксплуатационных лесах для хвойных в 81–100 лет, для дуба и иных твердолиственных в 101–120 лет, березы – 61–70 лет, ольхи черной – 51–60 лет, осины в 41–50 лет. В лесах экологического направления эти возрасты выше на один класс возраста. Исключением является осина, где сохранены возрасты рубки, как в эксплуатационных лесах.

При организации лесопользования нельзя забывать и о таком организационно-техническом элементе, как оборот рубки. Он представляет собой промежуток времени от вырубки древостоя до появления нового насаждения, т. е. включает период лесовозобновления [2], [3], [7]. Оборот рубки в лесах Беларуси при расчетах обычно не употребляется в силу того, что период лесовозобновления на лесосеках главного пользования не превышает 1–2 года. Как правило, на суходольных лесосеках сосны, ели и дуба высаживают лесные культуры, а мягколиственные (ольха черная, береза, осина) возобновляются порослевым путем. Большая разница между оборотом и возрастом рубки наблюдается только у сосняков V класса бонитета и ниже, растущих на верховых болотах. Но эти насаждения исключаются из расчета лесопользования по экологическим соображениям.

Возрасты рубки, которые действуют в настоящее время, не соответствуют требованиям к организации экологизированного многоцелевого лесопользования. Они не обеспечивают получения достаточного количества крупной высококачественной древесины, неоднократно подвергались критике со стороны научной общественности [3], [8], [9]. Анализ стоимости древесины за последние 80 лет показал, что индексы цены на древесину несколько повышаются. В то же время индексы цен на крупную деловую древесину повышаются весьма значительно, особенно за последние 30 лет [4], [8]. На основании этого высказывались различные предложения по повышению возрастов рубки [3], [4], [8]. Но эти предложения не находили поддержки в Министерстве лесного хозяйства Беларуси. Основной причиной отказа от повышения возрастов рубки было опасение, что размер главного пользования сократится. Действительно, из-за истощительного лесопользования процент спелых лесов в Беларуси в 1991 г. составил лишь 2,2 % [4], [10]. Но в настоящее время положение существенно изменилось к лучшему. Поэтому пересмотр возрастов рубки во всех категориях лесов актуален.

Материалы и методика исследований. Материалом для настоящего исследования послужили данные о выходе различных сортиментов, заготавливаемые в древостоях основных древесных пород Беларуси при проведении рубок главного пользования, а также данные пробных площадей, где была проведена сортиментация древостоев разного возраста. Этот материал собирался под руководством и при непосредственном участии автора в Институте леса НАН Беларуси и в Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины в течение последних 40 лет. Данные материалы большей частью уже обработаны, обобщены и вошли в различные нормативные справочники [4], [8], [11].

Пробные площади закладывались по общепринятой в лесной таксации методике [4], [12], [7], [13]. Классификация древостоев проводилась по классам бонитета и типам леса [12], [10]. Раскряжевка древесных стволов проводилась по действующим стандартам. Всего было использовано свыше 1200 пробных площадей и около 12000 модельных деревьев. Основное количество пробных площадей было заложено в сосновых, еловых и березовых древостоях, что соответствует их доле участия в составе лесного фонда.

Методика исследований соответствовала стандартным лесоводственным и лесотаксационным методам [12], [7], [13]. Для лесов экологической направленности применили новые разработки по экологической спелости, сделанные ранее [8], [14].

Результаты и обсуждение. Основанием для определения возрастов рубки являются спелости леса. В разное время и разными учеными отдавалось предпочтение спелостям, базирующимся на лесоводственно-биологических, экономических или технических принципах [1], [3], [4], [7], [15], [5], [16], [17]. Для эксплуатационной категории лесов расчеты проводились по количественной и технической спелостям. Эти спелости определялись по общей производительности насаждения. Их нахождение достаточно подробно имеется в литературе [1], [3], [4], [7], [16], [17] и поэтому здесь опускается. Хотя возрасты рубки в настоящее время указываются в виде класса возраста, но фактически они равны нижнему пределу класса возраста. Мы использовали предложение Н.П. Анучина [2]: возраст рубки должен иметь одно измерение, т. е. его нижний предел. Разработка возрастов рубки для эксплуатационной категории лесов сделана ранее совместно с БГТУ и опубликована [18]. Здесь приведем только итоговый результат наших предложений (таблица 1).

Таблица 1 – Возрасты рубок леса (лесных пород) по рубкам главного пользования и возрасты спелости

Преобладающая порода, хозяйственная секция	Предлагаемые возрасты рубки	Ныне действующие возрасты рубки	Разница
Сосна, ель, доступные леса:			
– 1 кл. бонитета и выше	с 81 года	81	нет
– 2 кл. бонитета и ниже	с 91 года	81	+10
Сосна, ель, труднодоступные леса	с 91 года	81	+10
Дуб	со 101 года	101	нет
Ясень	с 81 года	101	–20
Береза	с 61 года	61	нет
Осина	с 41 года	41	нет
Ольха черная	с 61 года	51	+10

Из таблицы видно, что новые возрасты рубки вносят определенные изменения в сторону повышения возраста рубки, сделанные для сосны и ели, а также для ольхи черной. Хотя повышение возраста рубки для сосны и ели небольшое, но оно приведет к существенному улучшению сортиментной структуры лесосечного фонда, т. к. хвойные древостои в Беларуси занимают в совокупности более 60.

Древостои ольхи черной занимают около 9 % в составе лесного фонда. Их возрасты рубки в настоящее время (51 год) были явно занижены, и новые возрасты рубки исправляют это положение.

Предложенные возрасты рубки не должны приводить к существенному уменьшению объемов главного пользования по сравнению с действующей расчетной лесосекой. В настоящее время возрастная структура лесов Беларуси улучшается: увеличивается количество приспевающих и спелых насаждений, что позволяет относительно безболезненно вводить новые повышенные возрасты рубок в эксплуатационных лесах.

В лесах, относящихся к природоохранным, рекреационно-оздоровительным, защитным категориям, подход к определению возрастов рубок иной. Здесь применяют специальные спелости леса: водоохранную, почвозащитную, санитарно-гигиеническую и т. п. [2], [4], [7]. Использование множества спелостей создает неудобства при их практическом применении. Леса различных категорий экологической направленности обычно выполняют не одну, а комплекс экологических функций, и определить главную из них часто затруднительно.

В условиях Беларуси требуется многоцелевое использование лесных насаждений путем сочетания на одной площади многообразных функций одноцелевых лесов [3], [4], [7], [5]. Соблюдение условий устойчивого развития, к положениям которого присоединилась Республика Беларусь, тре-

бует учитывать экологический императив. Экологические полезности леса имеют самостоятельную потребительную стоимость [1], [4], [14], [19], [20], [21]. Экологическая составляющая здесь велика и разнообразна. Леса в Беларуси обеспечивают экологическую стабильность и положительно влияют на экологическую ситуацию в Европе. Экологические функции леса многообразны, что приводит к затруднениям при установлении возрастов рубки. Анализ экологических функций леса показал, что большинство из них носит локальный характер. Например, водоохранная функция леса «привязана» к конкретному водному бассейну – в Беларуси это Днепр, Неман, Западная Двина. Почвозащитные и другие полезности леса тоже ограничиваются определенным районом.

Ранее показано [18], [14], что принимая за основу возраста экологической спелости депонирование CO_2 , мы «накрываем» практически все остальные экологические полезности леса. Здесь остается проблема верного определения самой экологической спелости. Необходимо, чтобы ее величина соответствовала максимальной реализации всех других полезностей, что возможно при достаточно высоком возрасте. Следует учитывать, что возрасты специальных экологических спелостей (водоохранная, почвозащитная и т. д.) колеблются для хвойных в пределах от 90–100 до 140–160 лет [4], [7], [14].

Экологическая спелость леса – это состояние насаждений, обусловленное их возрастом, в котором достигается максимальная экологическая эффективность постоянного лесопользования. Она характеризуется максимальной среднегодовой производительностью лесов, которая выражается через максимум среднего прироста. Этот показатель аккумулирует процесс воспроизводства запаса леса, обуславливая постоянство лесопользования на конкретной территории в аспекте положения «время-пространство» [22].

В результате проведенных исследований, в качестве интегрального показателя для определения экологической спелости приняли величину депонирования диоксида углерода. Такой подход существенно облегчает расчеты, т. к. величина связанного углекислого газа и выделенного кислорода имеет высокую корреляционную связь с приростом древостоя: коэффициент корреляции равен здесь 0,98–0,99. Вычисление же среднего прироста представляет собой в методическом отношении гораздо более простую задачу, чем непосредственное определение величины связанного CO_2 и выделенного O_2 .

Для удовлетворения сырьевых и экологических потребностей общества в лесных продуктах необходимо использование всей территории лесного фонда в его пространственно-временной взаимосвязи. Поэтому отыскание максимальной величины среднего прироста необходимо выполнить не для отдельного древостоя, а для их совокупности. При этом минимальной величиной рассматриваемой совокупности должен быть крупный лесхоз, который мы взяли величиной в 120 тыс. га.

Возраст экологической спелости использован для обоснования возрастов рубки во всех категориях лесов экологической направленности.

При этом нельзя не учитывать необходимость получения высококачественных сортиментов. Поэтому возрасты рубки здесь не могут быть ниже технической спелости. Это положение выдержано. Предлагаемые возрасты рубки приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Возрасты рубки в лесах экологической направленности, где разрешено главное пользование

Порода	Возрасты рубки (лет) по классам бонитета		
	Ia–I	II–III	IV и ниже
Сосна	110	120	140
Ель	120	140	150
Дуб	120	140	–
Береза	72	75	80
Осина	41	45	–
Ольха черная	70	80	–

Анализ таблицы 2 показывает, что возрасты экологической спелости здесь выше, чем установленные возрасты рубки в эксплуатационных лесах.

Они примерно соответствуют возрастам рубки, принятых в 2001 г. для лесов 1 первой группы. В осинниках возраст рубки установлен с учетом их товарности с целью недопущения снижения качества деловой древесины от поражений ядровой гнилью.

Заключение. Обобщая вышеизложенное, приходим к следующим выводам:

- предложены (совместно с БГТУ [18]) новые возрасты в эксплуатационных лесах. Они выше действующих возрастов рубки для сосны и ели 2 класса бонитета и ниже для ольхи черной на 10 лет;
- в природоохранных, рекреационно-оздоровительных и защитных лесах возрасты рубки установлены по экологической спелости;
- возрасты рубки в лесах экологической направленности в целом выше, примерно на класс возраста выше, чем в эксплуатационных лесах.

Литература

1. Антанайтис, В.В. Современное направление лесоустройства / В.В. Антанайтис. – М. : Лесная промышленность, 1977. – 280 с.
2. Анучин, Н.П. Теория и практика организации лесного хозяйства / Н.П. Анучин. – М. : Гослесбумиздат, 1977. – 176 с.
3. Анучин, Н.П. Лесоустройство: учебник для вузов / Н.П. Анучин. – 2-е изд. – М. : Экология, 1991. – 400 с.
4. Багинский, В.Ф. Лесопользование в Беларуси / В.Ф. Багинский, Л.Д. Есимчик. – Минск : Белорусская наука, 1996. – 367 с.
5. Лесной кодекс Республики Беларусь : принят Палатой представителей 3 декабря 2015 г. : одобрен Советом Республики 9 декабря 2015 г. : в ред. Закона Респ. Беларусь от 18 декабря 2018 г., № 152-3 // Нац. реестр прав. актов Респ. Беларусь. – 2018. – 2/2590.
6. О возрасте рубок леса : постановление Совета Министров Респ. Беларусь от 06 декабря 2001 г., № 765 : в ред. постановления Совета Министров Респ. Беларусь от 4 ноября 2016 г., № 907 // Нац. реестр прав. актов Респ. Беларусь. – 2016. – 5/42891.
7. Ермаков, В.Е. Лесоустройство / В.Е. Ермаков. – Минск : Выш. школа, 1993. – 256 с.
8. Багинский, В.Ф. Проблема повышения возрастов рубки в лесах Беларуси / В.Ф. Багинский // Лесное и охотничье хозяйство. – 2000. – № 1. – С. 10–18.
9. Ермаков, В.Е. Оборот рубки как показатель качества древесного сырья / В.Е. Ермаков // Труды белорусского государственного технологического университета. Серия 1. Лесное хозяйство. – Минск : БГТУ, 2000. – Вып. 8. – С. 21–25.
10. Янушко, А.Д. Лесное хозяйство Беларуси / А.Д. Янушко. – Минск : БГТУ, 2001. – 218 с.
11. Нормативные материалы для таксации леса Белорусской ССР / Под ред. В.Ф. Багинского. – Москва : ЦБНТИ-лесхоз, 1984. – 300 с.
12. Багинский, В.Ф. Таксация леса: учебное пособие для ВУЗов / В.Ф. Багинский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2018. – 530 с.
13. Мелехов, И.С. Лесоведение / И.С. Мелехов. – М. : Лесная промышленность, 1980. – 406 с.
14. Лапицкая, О.В. Принципы определения спелостей леса в условиях рыночной экономики / О.В. Лапицкая // Проблемы лесоведения и лесоводства: сб. науч. трудов. – Гомель : ИЛ НАН Беларуси, 2005. – Вып. 64. – С. 352–363.
15. Костюкович, Ф.Т. Экономическая спелость леса / Ф.Т. Костюкович // Лесной журнал. Известия вузов. – 1964. – № 2. – С. 44–46.
16. Моисеенко, Ф.П. Возраст рубки леса / Ф.П. Моисеенко // Лесное хозяйство. – 1950. – № 9. – С. 42–44.
17. Судачков, Е.Я. Спелость леса / Е.Я. Судачков. – М.–Л. : Гослесбумиздат, 1957. – 52 с.
18. Багинский, В.Ф. Возрасты рубки в эксплуатационных лесах Республики Беларусь / В.Ф. Багинский, Н.П. Демид, О.В. Лапицкая // Сибирский лесной журнал. – 2019. – № 6. – С. 278–292.
19. Моисеев, Н.А. Об оценке запаса и прироста углерода в лесах России / Н.А. Моисеев, А.М. Алферов, В.В. Страхов // Лесное хозяйство. – 2000. – № 4. – С. 18–20.
20. Шимова, О.С. Эколого-экономические приоритеты устойчивого развития / О.С. Шимова // Европа – наш общий дом: Экологические аспекты. Тематические доклады международной научной конференции. – Минск : НАН Беларуси, 2000. – Ч. 1. – С. 207–215.
21. Штейнбок, А.Г. Леса и лесное хозяйство Беларуси как фактор экологической и социально-экономической стабильности / А.Г. Штейнбок // Европа – наш общий дом: экологические аспекты // Тематические доклады международной научной конференции. – Минск : НАН Беларуси, 2000. – Ч. 1. – С. 215.
22. Юркевич, И.Д. Выделение типов леса при лесоустроительных работах / И.Д. Юркевич. – Минск : Наука и техника, 1980. – 120 с.

УДК 631.46:631.44:582.475:630*187:631.44.061

Организация альгоцианобактериальных сообществ почв сосняков после верхового пожара

Ю.М. БАЧУРА

Изучена организация альгоцианобактериальных сообществ почв постпирогенной территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника. Выявлено 36 видов водорослей и цианобактерий из 27 родов, 18 семейств, 12 порядков, 8 классов отделов Chlorophyta, Ochrophyta и Cyanobacteria. В экологическом отношении все водоросли и цианобактерии являлись эдафотрофными, доминировали среди них виды Ch- и C-жизненных форм. Установлено, что видовое богатство водорослей и цианобактерий постпирогенных участков в 3 раза выше, чем фоновых. Показано, что видовой состав и организация альгоцианобактериальных сообществ зависят от степени огневого воздействия и условий, которые сформировались после пожара.

Ключевые слова: почвенные водоросли и цианобактерии, пирогенное воздействие.

The organization of algocyanobacterial communities of soils of the post-pyrogenic territory of the Polesye State Radiation-Ecological Reserve is studied. During researches soil algae and cyanobacteria from 36 species, 27 genera, 18 families, 12 orders, 8 classes of divisions Chlorophyta, Ochrophyta and Cyanobacteria were determined. Ecologically all algae and cyanobacteria were edaphilic, dominated by Ch- and C-life species. The species richness of algae and cyanobacteria of post-pyrogenic sites was found to be 3 times higher than that of control sites. The species composition and organization of algocyanobacterial communities have been shown to depend on the degree of fire exposure and the conditions that formed after the fire.

Keywords: soil algae and cyanobacteria, pyrogenic influence.

Введение. Сосновые леса составляют 60,6 % лесной растительности на территории Гомельской области [1]. Периодически возникающие пожары являются одним из экологических факторов природного или антропогенного происхождения, приводящим к значительным изменениям сосняков. Особую опасность для хвойных лесов представляют верховые пожары, которые охватывают полог леса и отличаются высокой скоростью распространения (5–70 км/час). Трансформация лесных сообществ осуществляется на всех уровнях – нарушения наблюдаются в составе древесно-кустарникового яруса, травянистой растительности, напочвенного покрова, затрагивают почву и почвенную биоту [2]–[4].

В постпирогенной почве нарушаются температурный и гидротермический режимы, изменяется углеродное состояние и мощность органического горизонта, наблюдается минерализация органической части почвы, понижается кислотность, увеличивается содержание общего азота и обменных оснований [5], [6]. Это оказывает прямое или опосредованное воздействие на почвенные микроорганизмы, являющиеся важным звеном восстановительных сукцессий на пирогенно-нарушенных участках.

В составе почвенной биоты лесных экосистем особую роль играют фотоавтотрофные микроводоросли и цианобактерии, которые отличаются высокой скоростью размножения и возобновления биомассы и участвуют в восстановлении нарушенных земель [7]. Состав и организация альгоцианобактериальных сообществ (АЦБС) позволяют судить об условиях их существования и, следовательно, о состоянии почвенного покрова [8]. Целью работы было изучение организации АЦБС трансформированной верховым пожаром территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника (ПГРЭЗ).

Материалы и методика исследований. Материалом для исследования послужили образцы почвы, отобранные на территории ПГРЭЗ в сосняке мшистом, подверженном действию верхового пожара. Пробы были взяты по общепринятой в почвенной альгологии методике [9] у крон деревьев (УК), под кронами (ПК) и между кронами деревьев (МК) послойно (0–5 см и 5–10 см); в качестве контроля служили ненарушенные участки леса.

Культивирование водорослей и цианобактерий исследуемых почв проводили методами почвенных накопительных культур «со стеклами обрастания» и агаровых культур [10]. При определении систематического положения объектов использовали размерно-морфологические показатели клеток, трихомов, колоний. Для разграничения ряда представителей учитывали особенности строения не только вегетативных, но и генеративных клеток, проводили цитохимические реакции [11].

Систематическое положение объектов приводили по данным сайтов Algaebase [12] и CyanoDB [13], спектр жизненных форм определяли по классификации Э.А. Штиной и М.М. Голлербаха [9]. Для сравнения АЦБС исследуемых постпирогенных и контрольных территорий рассчитывали коэффициенты сходства систематического состава Сьеренсена-Чекановского при помощи программного модуля «GRAPHS» [14].

Результаты исследований и их обсуждение. На исследуемой территории ППРЭЗ было выявлено 36 видов водорослей и цианобактерий, относящихся к 27 родам, 18 семействам, 12 порядкам, 8 классам, 3 отделам. Преобладали представители отдела Chlorophyta (77,8 %), далее в порядке убывания располагаются отделы Ochrophyta (16,7 %) и Cyanobacteria (5,5 %). Среди порядков в составе альгоцианобактериальной флоры наиболее представлен был Chlamydomonadales, доля видов которого составила 38,9 %. Представители Sphaeropleales составили 11,1 %, Chlorellales, Klebsormidiales и Mischococcales – по 8,3 %, остальные порядки являлись одно- и двухвидовыми. Наибольшее видовое богатство выявлено для семейств Chlorococcaceae (16,6 %) и Chlamydomonadaceae (13,9 %); значительна была доля одновидовых семейств, представители которых объединили 33,6 % от общего числа видов водорослей и цианобактерий. В родовом спектре доминировали представители родов *Chlamydomonas* Ehrenberg (5 видов), *Chlorella* Beijerinck и *Klebsormidium* Silva et al. (по 3 вида), являющиеся типичными обитателями лесных почв [15].

Экологический анализ показал, что в составе альгоцианобактериальной флоры преобладают водоросли Ch-жизненной формы, способные существовать в экстремальных условиях (47,2 %) и виды C-формы, способные к образованию слизи, позволяющей им переносить неблагоприятные условия (30,6 %) [9], [15]. Также были выявлены виды H- и X- форм, неустойчивые против засухи и сильного нагревания (13,9 % и 8,3 % соответственно).

Видовое богатство водорослей и цианобактерий на постпирогенной территории было в 3 раза выше, чем в почве фонового участка; соотношение представленности отделов водорослей и цианобактерий приведено в таблице 1.

Таблица 1 – Соотношение представленности отделов водорослей и цианобактерий фоновых и постпирогенных территорий

Отделы	Фоновый участок	Долевое участие, %	Постпирогенные участки	Долевое участие, %	Всего в почве сосняков
Cyanobacteria	1	8,3	2	5,6	2
Ochrophyta	1	13,3	6	16,7	6
Chlorophyta	10	83,4	28	77,7	28
Всего	12	100,0	36	100,0	36

Увеличение числа видов происходило за счет «вселения» видов отделов Ochrophyta и Chlorophyta на постпирогенных участках. Значительного изменения в соотношении представленности отделов не выявлено. Следует отметить полное отсутствие диатомовых водорослей на данных участках, возможно, это обусловлено влиянием радиоактивного загрязнения на исследуемой территории. Число таксонов различного ранга на постпирогенных участках увеличилось в 1,6–3,8 раз по сравнению с фоновым участком. Среди семейств, представители которых начали вегетировать на нарушенных участках, были отмечены Merismopediaceae (*Aphanocapsa* Nägeli), Botrydiopsidaceae (*Botrydiopsis* Borzi), Pleurochloridaceae (*Monodus* Chodat, *Pleurochloris* Pascher), Heterococcaceae (*Heterococcus* Chodat), Trebouxiaceae (*Myrmecia* Printz), Bracteacoccaceae (*Bracteacoccus* Teger), Characiaceae (*Fernandinella* Chodat), Mychonastaceae (*Mychonastes* Simpson et Van Valkenburg), Scenedesmaceae (*Scotiellopsis* Vinatzer) и Mesotaeniaceae (*Mesotaenium* Nägeli).

Постпирогенные участки включали представителей всех выявленных на территории ПГРЭЗ жизненных форм водорослей и цианобактерий; фоновый участок отличался отсутствием видов Х-жизненной формы. И постпирогенные, и фоновые участки характеризовались значительным вкладом в экологическую структуру АЦБС видов Ch- и C-жизненных форм (47,2–50,0 % и 30,6–41,7 % соответственно).

Организация АЦБС постпирогенных участков исследуемой территории у крон, между кронами и под кронами деревьев отличалась (таблица 2).

Таблица 2 – Таксономическая структура АЦБС постпирогенных территорий

Отделы	Участки		
	у крон (УК)	под кронами (ПК)	между кронами (МК)
Cyanobacteria	2 (12,5)	2 (8,7)	-
Ochrophyta	3 (18,7)	3 (13,0)	5 (18,5)
Chlorophyta	11 (68,8)	18 (78,3)	22 (81,5)
Всего	16	23	27

Примечание: за скобками – число видов, в скобках – % от общего числа видов.

Наибольшее видовое богатство водорослей и цианобактерий было отмечено в составе АЦБС между кронами деревьев (27 видов); наименьшее – на участках у крон деревьев (16 видов). Полученные результаты обусловлены экологическими условиями на участках: отличались освещенность, влажность, содержание золы на участках [16]. Преобладали в сообществах зеленые водоросли (68,8–81,5 %), значительна была доля охрофитовых водорослей (13,6–18,7 %). По сравнению с фоновыми участками на участках у крон деревьев исчезли зеленые водоросли – *Chlorosarcinopsis* sp.1, *Interfilum terricola* (J.B. Petersen) Mikhailyuk et al., *Chlorella* cf. *ellipsoidea* Gerneck; появились цианобактерии – *Aphanocapsa* sp., охрофитовые водоросли – *Botrydiopsis* sp. и *Monodus* sp., зеленые водоросли – *Mychonastes homosphaera* (Skuja) Kalina et Puncocárová, *Bracteacoccus* sp. *Scotiellopsis* sp. и *Apodochloris polymorpha* (Bischoff et Bold) Komárek. На участках под кронами деревьев по сравнению с контролем отмечено исчезновение *Chlamydomonas* sp.3 (Chlorophyta), появление *Aphanocapsa* sp. (Cyanobacteria), *Pleurochloris* sp., *Botrydiopsis* sp. (Ochrophyta), *Scotiellopsis* sp., *Bracteacoccus* sp., *Apodochloris polymorpha*, *Elliptochloris* sp., *Sphaerellopsis gelatinosa* (Korshikov) Gerloff, *Myrmecia* sp., *Chlamydomonas* sp.4, *Chlorosarcinopsis* sp.2, *Klebsormidium* sp.2 (Chlorophyta). Наибольшая трансформация АЦБС выявлена на участках между кронами деревьев: исчезли цианобактерии *Microcystis* sp., появились *Vischeria* sp., *Pleurochloris* sp., *Botrydiopsis* sp. (Ochrophyta), *Mychonastes homosphaera*, *Desmotetra stigmatica* (T.R. Deason) T.R. Deason et G.L. Floyd, *Chlorella* sp., *Neosporangiococcus* sp., *Bracteacoccus* sp., *Klebsormidium* sp.2, *Tetracystis* sp.2, *Chlorosarcinopsis* sp.2, *Deasonia* sp., *Fernandinella alpina* Chodat, *Klebsormidium* sp.1 и *Mesotaenium* sp. (Chlorophyta). Наиболее активно на всех участках происходило «вселение» зеленых водорослей, занимающих первое место в составе почвенной альгоцианобактериальной флоры лесных экосистем [15], [17].

Сравнение экологической организации АЦБС позволило установить, что при переходе от участков у крон деревьев к участкам между кронами деревьев (УК → ПК → МК) в составе АЦБС происходит расширение долевого участия видов Н- и Ch-жизненных форм и сокращение представленности видов С- и Х-форм (таблица 3).

Таблица 3 – Экологическая структура АЦБС постпирогенных территорий

Жизненные формы	Участки		
	у крон (УК)	под кронами (ПК)	между кронами (МК)
Ch	7 (43,8)	11 (47,8)	15 (55,6)
C	6 (37,5)	8 (34,8)	6 (22,2)
X	2 (12,5)	2 (8,7)	1 (3,7)
H	1 (6,2)	2 (8,7)	5 (18,5)

Примечание: за скобками – число видов, в скобках – % от общего числа видов

Анализ состава водорослей и цианобактерий фоновых и пирогенно-нарушенных участков позволил выявить виды водорослей и цианобактерий, способные активно вегетировать в почве как фоновых, так постпирогенных участков (виды-индифференты): *Eustigmatos* sp. (Ochrophyta), *Chlamydomonas* sp.1, *Chlorococcum* sp.1, *Chlorella vulgaris* Beijerinck, *Klebsormidium flaccidum* Silva et al. (Chlorophyta); среди них преобладали представители Ch-жизненной формы (60 %). Также были определены водоросли и цианобактерии, приуроченные к определенным постпирогенным участкам:

- к участкам у крон деревьев: *Monodus* sp. (Ochrophyta, X-жизненная форма);
- к участкам под кронами деревьев: *Elliptochloris* sp., *Chlamydomonas* sp.4 (Chlorophyta, представители Ch- и C- жизненных форм);
- к участкам между кронами деревьев: *Neosporangiococcum* sp., *Klebsormidium* sp.1 (Chlorophyta, представители Ch- и H- жизненных форм).

По профилю почвы для всех участков данной территории отмечено сокращение видового богатства водорослей и цианобактерий (рисунок 1).

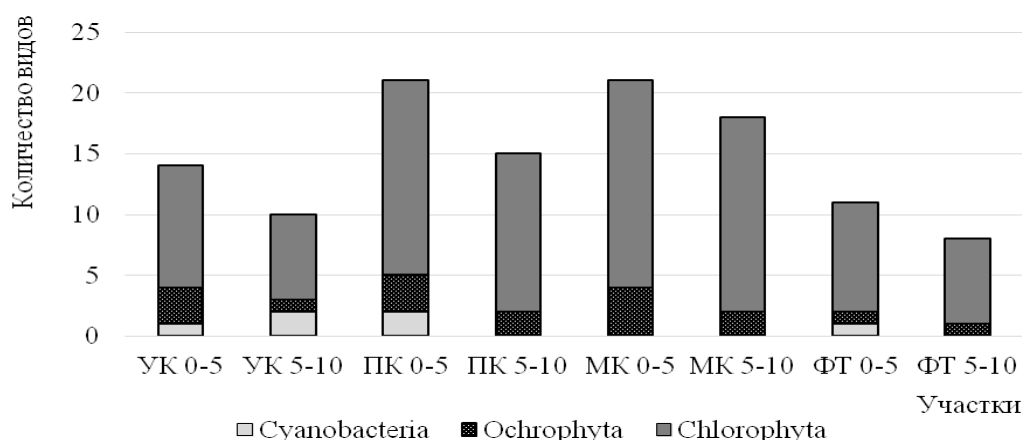


Рисунок 1 – Сравнение таксономической структуры АЦБС по профилю почвы

Типичная для ненарушенных лесных почв тенденция упрощения организации АЦБС с глубиной почвы на нарушенных участках, возможно, связана с выгоранием водорослей и цианей в обоих горизонтах вследствие верхового пожара и последующим привнесением новых видов из атмосферы (вероятность попадания водорослей и цианобактерий в верхние горизонты выше, чем в нижние). Сокращение состава АЦБС на участках у крон деревьев происходило за счет «выпадения» из них охрофитовых (*Botrydiopsis* sp., *Monodus* sp.) и зеленых водорослей (*Chlamydomonas* sp.5, *Bracteacoccus* sp. *Mychonastes homosphaera*, *Scotiellopsis* sp.). На участках под кронами деревьев в нижележащем горизонте исчезли цианобактерии *Microcystis* sp. и *Aphanocapsa* sp., охрофитовые водоросли *Pleurochloris* sp. и зеленые водоросли – *Chlamydomonas* sp.5, *Bracteacoccus* sp., *Apodochloris polymorpha*, *Scotiellopsis* sp., *Myrmecia* sp.; между кронами деревьев – *Vischeria* sp. и *Botrydiopsis* sp. из отдела Ochrophyta, *Chlorosarcinopsis* sp.2 и *Deasonia* sp. из отдела Chlorophyta; в почве фоновых участков – зеленые водоросли *Chlorosarcinopsis* sp.1 и *Interfilum terricola*. Большинство из них являются одноклеточными представителями, что увеличивает вероятность их попадания в верхний слой почвы из атмосферы.

При сравнении спектров жизненных форм АЦБС по профилю почвы установлено, что в почве участков у крон деревьев и под кронами при переходе от поверхностных слоев к глубоко лежащим отмечается упрощение экологической структуры сообществ, а в почве участков между кронами деревьев – усложнение. На всех участках вниз по профилю почвы отмечено сокращение числа видов Ch-жизненной формы, на участках у крон и под кронами деревьев – «выпадение» из АЦБС представителей X-жизненной формы. На наиболее нарушенных участках у крон деревьев в слое 5–10 см установлено резкое увеличение представленности видов C-жизненной формы, что, возможно, обусловлено их способностью удерживать влагу в слизи [9] и, как следствие, возможностью существовать в неблагоприятных условиях.

При сравнении флористических спектров исследуемых АЦБС применяли коэффициент сходства систематического состава Сьеренсена-Чекановского. На основании результатов расчета индекса была построена дендрограмма, отражающая уровень сходства видового состава АЦБС исследованных территорий (рисунок 2).

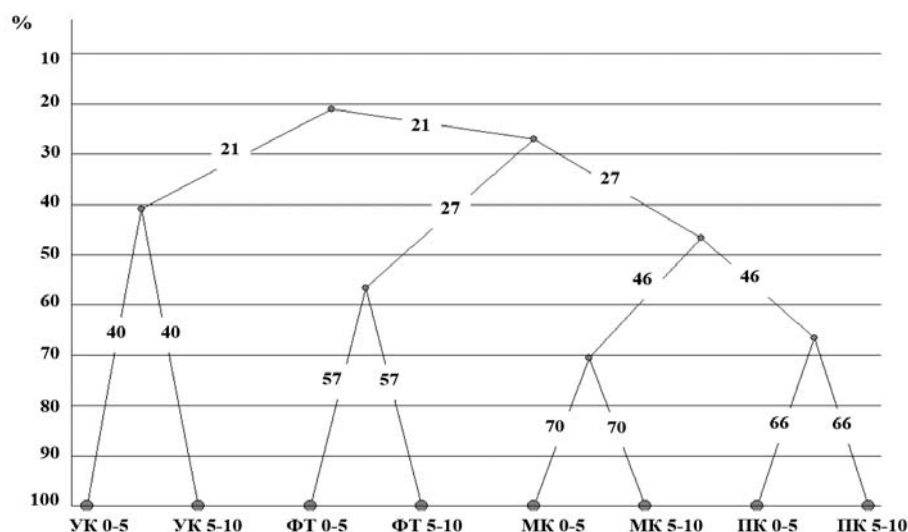


Рисунок 2 – Дендрограмма сходства видового состава водорослей и цианобактерий постпирогенных и фоновых территорий: УК 0-5, УК 5-10 – у крон деревьев, ПК 0-5, ПК 5-10 – под кронами деревьев, МК 0-5, МК 5-10 – между кронами деревьев, ФТ 0-5, ФТ 5-10 – фоновая контрольная территория

Наибольшим сходством видового состава характеризовались АЦБС однотипных участков ПГРЭЗ. Группировки водорослей и цианобактерий участков между кронами деревьев на глубине 0–5 см и 5–10 см были объединены на уровне 70 %. Среди общих для обоих сообществ видов выявлены исключительно зеленые водоросли различных морфотипов: *Bracteacoccus* sp., *Neosporangiococcum* sp. *Interfilum terricola* (одноклеточные), *Chlorosarcinopsis* sp.1, *Fernandinella* cf. *alpina* (пакетообразующие), *Klebsormidium* sp.1, *Klebsormidium* sp.2 (нитчатые), большинство из которых относятся к Ch-жизненной форме. АЦБС участков под кронами деревьев на глубине 0–5 см и 5–10 см имели коэффициент сходства 66 %. Количество общих видов – 7, из них 6 представителей отдела Chlorophyta (*Chlorella* cf. *ellipsoidea*, *Chlamydomonas* sp.4, *Elliptochloris* sp., *Chlorosarcinopsis* sp.1, *Chlorosarcinopsis* sp.2, *Klebsormidium* sp.2), 1 вид из Ochrophyta (*Botrydiopsis* sp.). В экологическом отношении 71,4 % из них являлись представителями Ch-жизненной формы; большинство – одноклеточные. Сообщества водорослей и цианобактерий участков под кронами и между кронами деревьев сформировали наиболее крупную ветвь дендрограммы; общих видов – 2 (*Chlorosarcinopsis* sp.1, *Klebsormidium* sp.2), коэффициент Сьеренсена-Чекановского – 46 %. Группировки водорослей и цианобактерий фоновых участков были сходны между собой на уровне 57 %; общих видов – 2 (одноклеточные *Chlorella* cf. *ellipsoidea* и *Chlamydomonas* sp.3, относящиеся к Ch- и C-жизненным формам). На уровне 27 % они присоединились к АЦБС участков у крон и между кронами деревьев. АЦБС участков у крон деревьев характеризовались сходством на уровне 40 %; общих видов – 2 (колониальные цианобактерии *Microcystis* sp. и одноклеточные зеленые водоросли *Apodochloris polymorpha* C-жизненной формы). Сообщества данных участков были наиболее обособлены от АЦБС остальных участков (коэффициент Сьеренсена-Чекановского составил 21 %), что указывает на значительные изменения условий существования водорослей и цианобактерий вследствие пирогенного воздействия.

Таким образом, установлено, что более высокий уровень сходства АЦБС в почве участков средней степени нарушенности (участки под и между кронами деревьев) обусловлен расширением их видового богатства и обеспечивается видами различных морфотипов и жизненных форм с преобладанием одноклеточных представителей Ch-жизненной формы. Подобное увеличение числа видов в составе альгоцианогруппировок при средней интенсивно-

сти действующего антропогенного фактора известно как «эффект промежуточного нарушения» и отмечается в альгологических работах [18]. Сходство АЦБС наиболее нарушенных огнем участков (у крон деревьев) обеспечивают виды С-жизненной формы, способные к слизиобразованию, которое облегчает существование при неблагоприятных условиях.

Заключение. В ходе исследования впервые для Беларуси на территории ПГРЭЗ выявлено 36 видов водорослей и цианобактерий из 27 родов, 18 семейств, 12 порядков, 8 классов, 3 отделов. Преобладали представители отдела Chlorophyta (77,8 %), порядка Chlamydomonadales (38,9 %), семейств Chlorococcaceae (16,6 %) и Chlamydomonadaceae (13,9 %). В экологическом отношении все водоросли и цианобактерии являлись эдафотрофными, доминировали среди них виды-убиквисты С-жизненной формы и виды-слизьеобразователи С-жизненной формы (47,2 % и 30,6 % соответственно).

Установлено, что видовое богатство водорослей и цианобактерий постпирогенных участков в 3 раза выше, чем фоновых; при этом число таксонов различного ранга после огневого воздействия увеличивается в 1,6–3,8 раз. Показано, что видовой состав и организация АЦБС зависят от степени огневого воздействия и условий, которые сформировались после пожара. Наибольшее видовое богатство группировок водорослей и цианобактерий отмечено на участках средней степени нарушенности; расширение состава АЦБС и активная вегетация водорослей и цианобактерий свидетельствуют об идущих на участках процессах восстановления почвенного покрова с участием данных групп фотоавтотрофных микроорганизмов. По профилю почвы на всех участках выявлена типичная для лесных биогеоценозов тенденция упрощения таксономической организации АЦБС; на большинстве участков – и экологической структуры группировок.

Показано, что более высокий уровень сходства АЦБС в почве участков средней степени нарушенности обусловлен расширением видового богатства водорослей и цианобактерий и обеспечивается видами различных морфотипов и жизненных форм с преобладанием одноклеточных представителей С-жизненной формы. Сходство АЦБС наиболее нарушенных огнем участков обеспечивают виды С-жизненной формы, способные к слизиобразованию при неблагоприятных условиях.

Проведенное исследование указывает на необходимость их продолжения с подключением основных показателей почвы для установления более четких тенденций и закономерностей изменения организации АЦБС постпирогенных территорий и выявления роли водорослей и цианобактерий в восстановительных сукцессиях на пирогенно-нарушенных участках.

Литература

1. Лесной фонд Гомельской области [Электронный ресурс] / Гомельское государственное производственное лесохозяйственное объединение. – Режим доступа : <https://www.plho.by>. – Дата доступа : 08.08.2019.
2. Рыхтэр, І.Э. Лясная піралогія з асновамі радыёэкалогіі / І.Э. Рыхтэр. – Мн. : БДТУ, 2006. – 394 с.
3. Kozłowski, Th. Date Fire and ecosystems / Th. Kozłowski. – Academic Press, 2012. – 553 s.
4. Усеня В.В. Лесные пожары, последствия и борьба с ними / В.В. Усеня – Гомель, 2002. – 205 с.
5. Бескоровайная, И.Н. Пирогенная трансформация почв сосняков средней тайги / И.Н. Бескоровайная // Сибирский экологический журнал. – 2005. – № 1. – С. 143–152.
6. Попова, Э.П. Пирогенная трансформация свойств лесных почв Среднего Приангарья / Э.П. Попова // Сибирский экологический журнал. – 1997. – № 4. – С. 413–418.
7. Штина, Э.А. Роль водорослей в биогеоценозах суши / Э.А. Штина // Альгология. – 1991. – Т. 1, № 1. – С. 23–35.
8. Штина, Э.А. Почвенные водоросли как индикаторы генезиса и состояния почвы / Э.А. Штина, М.М. Голлербах // Проблемы и методы биологической диагностики и индикации почв : сб. ст. / Всесоюз. микробиол. о-во. Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова ; отв. ред. Г.В. Добровольский. – М. : Наука, 1976. – С. 341–349.
9. Штина, Э.А. Экология почвенных водорослей / Э.А. Штина, М.М. Голлербах. – М. : Наука, 1976. – 143 с.
10. Водорості ґрунтів України (історія та методи дослідження, система, конспект флори) / редкол. : І.Ю. Костіков [та інш.]. – Київ : Фітосоціоцентр, 2001. – 300 с.
11. Современные методы выделения, культивирования и идентификации зеленых водорослей (Chlorophyta) / А.Д. Темралеева и [и др.] ; под общ. ред. А.Д. Темралеевой. – Кострома : Костромской печатный дом, 2014. – 215 с.

12. Database of information on algae that includes terrestrial, marine and freshwater organisms [Electronic resource] / ed. M.D. Guiry. – Mode of access : <http://www.algaebase.org>. – Date of access : 08.08.2019.
13. The on-line database of cyanobacterial genera [Electronic resource] / J. Komárek, T. Hauer. – Mode of access : <http://www.cyanodb.cz>. – Date of access : 08.08.2019.
14. Новаковский, А.Б. Возможности и принципы работы программного модуля «GRAPHS» / А.Б. Новаковский. – Сыктывкар : Коми научный центр УрО РАН, 2004. – 31 с.
15. Алексашина, Т.И. Почвенные водоросли лесных биогеоценозов / Т.И. Алексашина, Э.А. Штина. – М. : Наука, 1984. – 98 с.
16. Почвенные водоросли антропогенно нарушенных экосистем / Ж.Ф. Пивоварова [и др.]. – Новосибирск : НГПУ, 2014. – 146 с.
17. Мальцева, І.А. Грунтові водорості лісів степової зони України / І.А. Мальцева. – Мелітополь : Люкс, 2009. – 312 с.
18. Хайбуллина, Л.С. Флора и синтаксономия почвенных водорослей и цианобактерий урбанизированных территорий / Л.С. Хайбуллина, Н.В. Суханова, Р.Р. Кабиров. – Уфа : Гилем, 2011. – 216 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 09.09.2019

О влиянии культур ностока на рост и развитие семян пшеницы

Е.Н. ГАНЖУР, Ю.М. БАЧУРА

Изучена характеристика культуры почвенной цианобактерии рода *Nostoc* и возможности ее использования в качестве стимулятора роста пшеницы. Установлено, что исходная и разбавленная культуры ностока оказывают подтвержденное статистически стимулирующее действие на длину и массу проростков пшеницы. Показано, что оптимально проведение предварительного двухчасового замачивания семян в цианобактериальных культурах – при использовании исходной и разбавленной культур рода ностока фитоэффекты по длине проростков пшеницы составили 40–45 %, по массе проростков – 74–106 %.

Ключевые слова: почвенные цианобактерии, пшеница, фитоэффект, стимулирующее действие, *Nostoc*.

The characteristics of cultures of soil cyanobacteria of the genus *Nostoc* is studied. The possibilities of using *Nostoc* as a stimulator of wheat growth are considered. It is established that the original and diluted culture of *Nostoc* have a stimulating effect on length and weight of wheat seedlings. It is shown that a two-hour soaking of seeds in cyanobacterial cultures is optimal: when using the original and diluted cultures of *Nostoc* photoeffect on length of wheat seedlings amounted to 40–45 %, by weight of the seedlings – 74–106 %.

Keywords: soil cyanobacteria, wheat, phytoeffect, stimulating effect, *Nostoc*.

Введение. Почвенные цианобактерии – специфическая группа фотоавтотрофных микроорганизмов, сочетающих в себе признаки водорослей и бактерий. Они являются активным компонентом почвенной биоты, обогащают почву органическими веществами и кислородом, участвуют в азотфиксации, могут изменять pH почвенного раствора и повышать водоудерживающую способность почвы, выделяют метаболиты и биологически активные вещества, оказывающие влияние на почвенные организмы различных групп [1], [2].

Помимо естественной роли, выполняемой цианобактериями в наземных биогеоценозах, они находят применение и в хозяйственной деятельности человека. Одним из перспективных направлений в настоящее время является использование цианобактерий в сельском хозяйстве в качестве органического удобрения и/или стимулятора роста высших растений. Выделяя физиологически активные вещества, изменяя pH в сторону нейтральной реакции среды, обогащая почву макро- и микроэлементами, являясь продуцентами антибиотически активных веществ, они ускоряют рост проростков растений, особенно их корней [3]–[8]. Цианобактерии рода *Nostoc* являются типичным представителем почвенной альгоцианобактериальной флоры Беларуси, что и обусловило изучение влияния ностока на рост и развитие семян пшеницы.

Материалы и методика исследований. Культивирование цианей осуществляли на основной среде Болда (Bold basal medium – BBM) [9] при температуре 20 ± 3 при 10/14 часовом чередовании световой и темновой фаз и освещении 3500–4000 лк с барботированием в дневное время. Определение количества клеток цианобактерий проводили с помощью камеры Горяева по стандартной методике [10].

Для проведения исследования использовали пшеницу (*Triticum aestivum* L.). Была заложена серия экспериментов (без предварительного замачивания семян и с замачиванием семян на 1, 2 и 4 часа), каждый из которых включал четыре варианта опыта: контроль I (абсолютный, дистиллированная вода), контроль II (BBM), опыт I (культура водоросли исходная), опыт II (культура водоросли, разбавленная 1:1 средой Болда). Семена пшеницы раскладывали в емкости в пятикратной повторности по 10 штук и приливали по 5 мл жидкости в соответствии с вариантами опыта. На 4 и 8 сутки доливали по 2 мл соответствующих жидкостей. В ходе исследования определяли энергию прорастания (на четвертые сутки), всхожесть семян (на восьмые сутки), измеряли морфометрические показатели проростков пшеницы (на десятые сутки; длину корней, побегов и массу). Оценку и учет проросших семян вели с использованием ГОСТа 12038-84 [11]. Статистическую обработку полученных данных проводили с помощью программ Statistica (Version 10) и Microsoft Excel.

Результаты исследований и их обсуждение. Цианобактерии рода *Nostoc* входят в состав отдела Cyanobacteria класса Cyanophyceae порядка Nostocales семейства Nostocaceae [12]. Они характеризуются колониями различной формы и размеров, состоящими из гетероцитных неразветвленных трихомов с гетероцистами и часто акинетами, которые погружены в слизь различной консистенции. Плотность культуры составила 25,6 млн клеток на 1 мл культуры.

В эксперименте без предварительного замачивания энергия прорастания семян в вариантах опыта с дистиллированной водой и с основной средой Болда составила 90 %, в вариантах опыта исходной и разбавленной культурами *Nostoc* – 84 %. Наиболее активное развитие проростков на начальном этапе развития наблюдали при увлажнении фильтров дистиллированной водой и разбавленной культурой цианобактерий (рисунок 1).

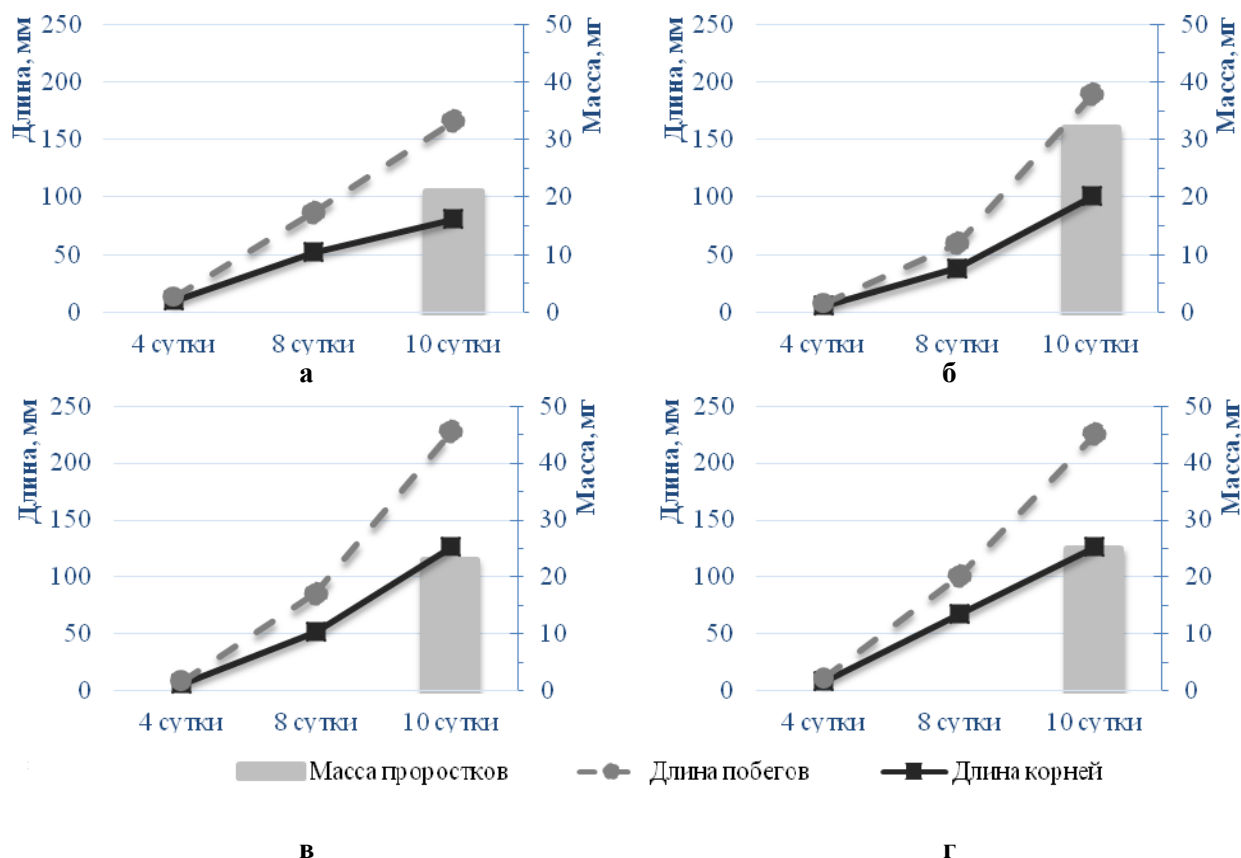


Рисунок 1 – Сравнение морфометрических показателей проростков пшеницы (эксперимент без предварительного замачивания семян); варианты опыта: а – вода дистиллированная, б – ВВМ, в – исходная культура *Nostoc*, г – разбавленная культура *Nostoc*

Средняя всхожесть семян составила 92 %; 100 %-ная всхожесть пшеницы отмечена в варианте опыта с исходной культурой ностока, минимальный показатель параметра выявлен в варианте опыта с разбавленной культурой цианобактерии (88 %). На восьмые сутки эксперимента наиболее активное развитие проростков пшеницы наблюдали в варианте опыта с разбавленной культурой ностока – длина проростков составила 100,9 мм, наименее активное – в варианте опыта с основной средой Болда (59,94 мм).

По итогам эксперимента средняя длина корней оказалась наибольшей в варианте опыта с исходной культурой *Nostoc*; она составила 126,86 мм; наименьшей – в варианте опыта с дистиллированной водой – 81,38 мм. Максимальная длина корней выявлена для варианта опыта с разбавленной культурой ностока (215 мм). Для вариантов опыта с использованием исходной культуры *Nostoc* длина корней достоверно выше, чем для варианта опыта с дистиллированной водой ($F = 11,91$; $p < 0,01$) и основной средой Болда ($F = 10,79$; $p < 0,01$). Средняя длина побега была наибольшей в варианте опыта с исходной культурой *Nostoc* (100,8 мм); наименьшей – в варианте опыта с основной средой Болда – 84,3 мм. Максималь-

ная длина побегов выявлена для варианта опыта с исходной культурой *Nostoc* (170 мм). В варианте опыта с исходной культурой *Nostoc* длина побега достоверно выше, чем в варианте опыта с дистиллированной водой ($F = 5,32$; $p < 0,01$). Средняя масса проростков варьировала от 21 мг в варианте опыта с дистиллированной водой до 32 мг в варианте опыта с основной средой Болда, максимум зафиксирован в варианте опыта со средой Болда (56 мг). Полученные данные по массе проростков достоверны ($F = 2,66-37,2$; $p \leq 0,01$).

По результатам эксперимента в порядке убывания значений были составлены: ряд средних длин проростков пшеницы: *Nostoc* исходная культура > *Nostoc* разбавленная культура > BBM > H₂O дистиллированная; ряд средней массы проростков пшеницы: BBM > *Nostoc* разбавленная культура > *Nostoc* исходная культура > H₂O дистиллированная.

При проведении эксперимента с предварительным замачиванием семян на 1 час энергия прорастания семян была аналогична показателям предыдущего эксперимента. На начальном этапе эксперимента проростки наиболее активно развивались при увлажнении фильтров культурами *Nostoc*, наименее активно при увлажнении фильтров основной средой Болда и дистиллированной водой (рисунок 2).

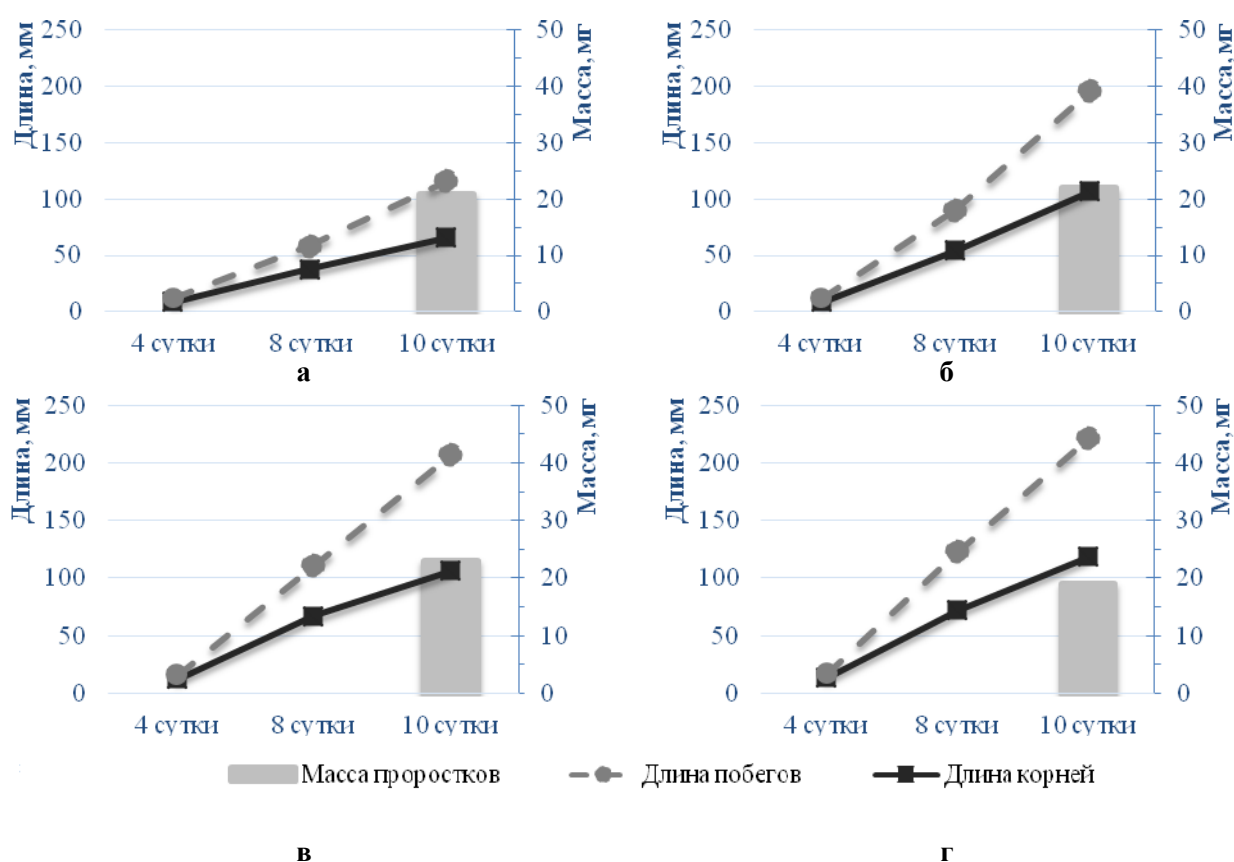


Рисунок 2 – Сравнение морфометрических показателей проростков пшеницы (эксперимент с предварительным замачиванием семян на 1 час); варианты опыта: а – вода дистиллированная, б – BBM, в – исходная культура *Nostoc*, г – разбавленная культура *Nostoc*

Средняя всхожесть семян составила 91 %; максимальный показатель отмечен в варианте опыта с исходной культурой *Nostoc* – 100 %, минимальный – в варианте опыта с основной средой Болда – 84 %. На восьмые сутки эксперимента наиболее активно пшеница вегетировала в варианте опыта с разбавленной культурой ностока, наименее активно – в варианте опыта с дистиллированной водой (длина проростков составила 123,01 мм и 58,32 мм соответственно).

По итогам эксперимента наибольшая средняя длина корней была зафиксирована в варианте опыта с разбавленной культурой *Nostoc* – 118,6 мм, наименьшая – в варианте опыта с дистиллированной водой (64,44 мм); максимум по длине корней отмечен для варианта опыта с разбавленной культурой цианеи – 200 мм). Средняя длина побега была наибольшей в вари-

анте опыта с разбавленной культурой *Nostoc* – 102,72 мм; наименьшей – в варианте опыта с дистиллированной водой – 50,48 мм. Максимальная длина побегов выявлена для вариантов опыта с ностоком (160 мм). Для длины побегов достоверность данных не отмечена. Масса проростков варьировала от 19 мг в варианте опыта с разбавленной культурой *Nostoc* до 23 мг в варианте опыта с исходной культурой цианобактерии; максимум отмечен в варианте опыта с дистиллированной водой (46 мг). Средняя масса проростков в варианте опыта с исходной культурой ностока достоверно выше, чем в вариантах опыта с разбавленной культурой ностока ($F = 5,23$; $p < 0,01$) и основной средой Болда ($F = 4,62$; $p < 0,01$), а в варианте опыта со средой Болда достоверно выше, чем в вариантах опыта с разбавленной культурой ностока ($F = 4,62$; $p < 0,01$) и дистиллированной водой ($F = 4,62$; $p < 0,01$).

По результатам эксперимента с предварительным замачиванием семян на 1 час в порядке убывания значений, были составлены: ряд средних длин проростков пшеницы: *Nostoc* разбавленная культура > *Nostoc* исходная культура > BBM > H₂O дистиллированная; ряд средней массы проростков пшеницы: *Nostoc* исходная культура > BBM > H₂O дистиллированная > *Nostoc* разбавленная культура.

При увеличении времени замачивания семян до двух часов средняя энергия прорастания семян составила 78 %, максимальный показатель отмечен в варианте опыта с основной средой Болда (84 %), минимальный – в варианте опыта с разбавленной культурой *Nostoc* (70 %). Наиболее активное развитие проростков пшеницы на начальном этапе эксперимента наблюдали при увлажнении фильтров культурами ностока (рисунок 3).

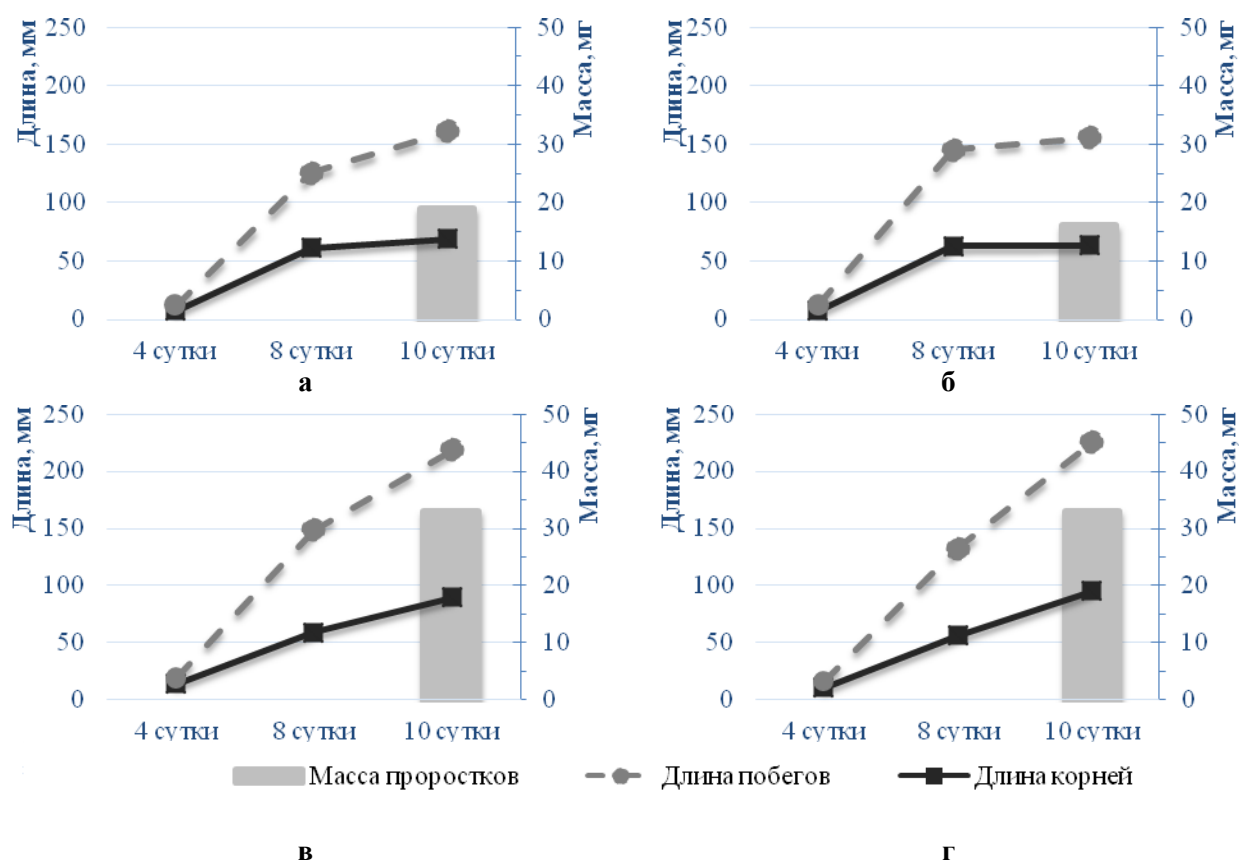


Рисунок 3 – Сравнение морфометрических показателей проростков пшеницы (эксперимент с предварительным замачиванием семян на 2 часа); варианты опыта: а – вода дистиллированная, б – BBM, в – исходная культура *Nostoc*, г – разбавленная культура *Nostoc*

Всхожесть семян варьировала от 78 % в варианте опыта с дистиллированной водой до 84 % в вариантах опыта с культурами цианобактерий. На восьмые сутки эксперимента наиболее активная вегетация проростков зафиксирована в варианте опыта с исходной культурой *Nostoc* (149,08 мм), наименее активная – в варианте опыта с дистиллированной водой (125,04 мм).

На 10 сутки эксперимента средняя длина корней была наибольшей в варианте опыта с исходной культурой *Nostoc* (95,72 мм); наименьшей – с основной средой Болда (63,34 мм). Максимальная длина корней выявлена для варианта опыта с исходной культурой *Nostoc* (171 мм). Установлено, что длина корней в варианте опыта с исходной и разбавленной культурами ностока достоверно выше, чем в вариантах опыта с основной средой Болда ($F = 12,29$; $p < 0,01$ и $F = 12,16$; $p < 0,01$ соответственно) и с дистиллированной водой ($F = 10,20$; $p < 0,01$ и $F = 10,19$; $p < 0,01$ соответственно). Средняя длина побега была наибольшей в варианте опыта с разбавленной культурой *Nostoc* – 130,08 мм; наименьшей – в варианте опыта с дистиллированной водой (91,38 мм). Максимальная длина побега выявлена для вариантов опыта с разбавленной культурой *Nostoc* (191 мм). Показано, что длина побегов в вариантах опыта с исходной и разбавленной культурами ностока достоверно выше, чем в вариантах опыта с основной средой Болда ($F = 9,08$; $p < 0,01$ и $F = 9,93$; $p < 0,01$ соответственно) и дистиллированной водой ($F = 13,46$; $p < 0,01$ и $F = 15,14$; $p < 0,01$ соответственно).

Средняя масса проростков варьировала от 16 мг в варианте опыта с основной средой Болда до 33 мг в вариантах опыта с ностоком, максимальный показатель выявлен в варианте опыта с исходной культурой *Nostoc* (46 мг). Показано, что средняя масса проростков в вариантах опыта с исходной и разбавленной культурами ностока достоверно выше, чем в вариантах опыта с дистиллированной водой ($F = 45,6$; $p < 0,01$; $F = 59,5$; $p < 0,01$) и основной средой Болда ($F = 89,4$; $p < 0,01$).

По результатам эксперимента с предварительным замачиванием семян пшеницы на 2 часа в порядке убывания значений были составлены: ряд средних длин проростков пшеницы *Nostoc* разбавленная культура > *Nostoc* исходная культура > H_2O дистиллированная > ВВМ; ряд средней массы проростков пшеницы *Nostoc* разбавленная культура = *Nostoc* исходная культура > H_2O дистиллированная > ВВМ.

При проведении эксперимента предварительным замачиванием семян пшеницы на 4 часа средняя энергия прорастания семян пшеницы варьировала от 60 % в варианте опыта с дистиллированной водой до 70 % в варианте опыта с разбавленной культурой цианобактерии. Наиболее активное развитие проростков наблюдали при увлажнении фильтров культурами *Nostoc* (рисунок 4).

Всхожесть семян была максимальной при использовании культур ностока (84 %), минимальной – при использовании дистиллированной воды (78 %). На восьмые сутки эксперимента наибольшая длина проростков отмечена в варианте опыта с исходной культурой *Nostoc*, наименьшая – в варианте опыта с дистиллированной водой (153,36 мм и 107,06 мм соответственно).

На десятые сутки средняя длина корней была наибольшей в варианте опыта с разбавленной культурой *Nostoc*, она составила 104,6 мм; наименьшей – в варианте опыта с основной средой Болда – 63,94 мм. Максимум по длине корней зафиксирован в варианте опыта с разбавленной культурой *Nostoc* (157 мм). Наибольшая средняя длина побега была отмечена в варианте опыта с исходной культурой *Nostoc* (110,36 мм); наименьшая – в варианте опыта с дистиллированной водой (82,68 мм). Максимум по длине побегов выявлен в варианте опыта с основной средой Болда (175 мм). Доказано, что длина побегов в вариантах опыта с исходной культурой ностока достоверно выше, чем в вариантах опыта с основной средой Болда и дистиллированной водой ($F = 7,58$; $p < 0,01$ и $F = 13,70$; $p < 0,01$ соответственно); в варианте опыта с разбавленной культурой цианобактерии – достоверно выше, чем в варианте опыта с дистиллированной водой ($F = 6,00$; $p < 0,01$).

Наибольшая средняя масса проростков пшеницы была зафиксирована в варианте опыта с исходной культурой ностока (0,35 мг); наименьшая – в варианте опыта с основной средой Болда (0,25 г), максимумы по массе проростков во всех вариантах опыта отличались незначительно и варьировали в пределах 41–46 мг. Средняя масса проростков в вариантах опыта с исходной и разбавленной культурами ностока достоверно выше, чем в вариантах опыта с дистиллированной водой ($F = 13,70$; $p < 0,01$) и основной средой Болда ($F = 7,58$; $p < 0,01$; $F = 29,86$; $p < 0,01$).

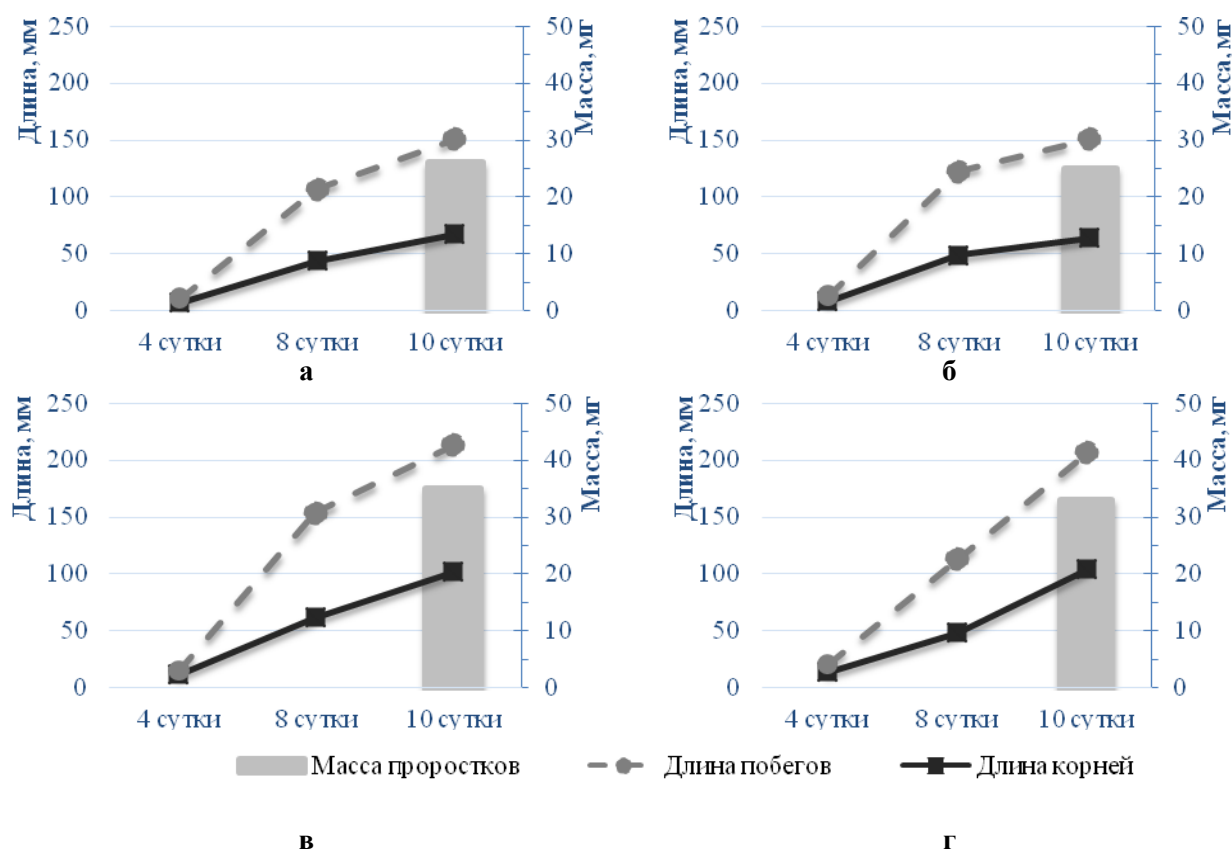


Рисунок 4 – Сравнение морфометрических показателей проростков пшеницы (эксперимент с предварительным замачиванием семян на 4 часа); варианты опыта: а – вода дистиллированная, б – BBM, в – исходная культура *Nostoc*, г – разбавленная культура *Nostoc*

По результатам эксперимента с четырехчасовым замачиванием семян пшеницы в порядке убывания значений были составлены: ряд средних длин проростков пшеницы: *Nostoc* исходная культура > *Nostoc* разбавленная культура > BBM > H₂O дистиллированная; ряд средней массы проростков пшеницы: *Nostoc* исходная культура > *Nostoc* разбавленная культура > H₂O дистиллированная > BBM.

Сравнительный анализ динамики развития проростков пшеницы показал, что замачивание семян в культурах ностока и среде Болда приводит к более быстрому росту проростков; замачивание семян на 1 и 2 часа в культурах ностока дает увеличение длины проростков. Увеличение времени замачивания семян до 2 и 4 часов в вариантах опыта с цианобактериями обуславливает значительное повышение массы проростков. Для всей серии экспериментов установлено, что длина проростков при использовании исходной и разбавленной культур ностока достоверно выше, чем в контрольных вариантах опыта.

Выявлено, что относительно абсолютного контроля с дистиллированной водой фитоеффекты по длине проростков составили 37–40 % при использовании исходной культуры ностока и 36–91 % при использовании разбавленной культуры; относительно контроля с основной средой Болда – 1–45 % при использовании исходной культуры и 13–45 % при использовании разбавленной культуры цианобактерии. Стимулирующее действие культур ностока на массу проростков было несколько ниже. В экспериментах без предварительного замачивания семян и с замачиванием семян на 1 час получено некоторое снижение массы проростков в вариантах опыта с ностоком относительно контрольных вариантов. Наибольшие значения фитоеффектов по массе проростков зафиксированы в экспериментах с замачиванием семян на 2 и 4 часа.

Закключение. В ходе проведенной серии экспериментов изучена характеристика культуры почвенной цианобактерии рода *Nostoc* и возможности ее использования в качестве стимулятора роста пшеницы. Установлено, что исходная и разбавленная культуры ностока ока-

зывают подтвержденное статистически стимулирующее действие на длину и массу проростков пшеницы в ряде вариантов опыта. Показано, что оптимально проведение предварительного двухчасового замачивания семян в цианобактериальных культурах – при использовании исходной и разбавленной культур рода *Nostoc* фитоэффекты по длине проростков пшеницы составили 40–45 %, по массе проростков – 74–106 %. Выполненное исследование обуславливает проведение дальнейших экспериментов с целью установления более четких закономерностей по изменению массы проростков под действием культур ностока и изучения влияния цианобактерий на другие сельскохозяйственные растения.

Литература

1. Штина, Э.А. Экология почвенных водорослей / Э.А. Штина, М.М. Голлербах. – М. : Наука, 1976. – 143 с.
2. Андреюк, Е.И. Цианобактерии / Е.И. Андреюк, Ж.П. Коптева, В.В. Занина ; под ред. М.И. Менджул. – Киев : Наук. Думка, 1990. – 200 с.
3. Шалыго, Н.В. Микроводоросли и цианобактерии как биоудобрение / Н.В. Шалыго // Наука и инновации. – 2019. – № 3 (193). – С. 22–26.
4. Лукьянов, В.А. Прикладные аспекты применения микроводорослей в агроценозе / В.А. Лукьянов, А.И. Стифеев. – Курск : КГСХА, 2014. – 181 с.
5. Нгуен, Т.К. Морфологические и физиологические особенности сине-зеленой водоросли *Napalasion fontinalis* и возможности ее использования в повышении урожайности некоторых сельскохозяйственных культур : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Т.К. Нгуен. – Киев, 1987. – 22 с.
6. Использование некоторых видов синезеленых азотфиксирующих водорослей в качестве биологического удобрения / С.Н. Доброжан [и др.] // Альгология. – 2014. – Т. 24, № 3. – С. 426–429.
7. Role of blue green algae in rice productivity / Y.P. Paudel [et al.] // Agriculture and biology journal of North America. – 2012. – V. 3, № 8. – P. 332–335.
8. Blue-green algal treatment and inoculation had no significant effect on rice yield in an acidic wetland soil / P.M. Reddy [et al.] // Phil. Agri. Special BGA ISSUE. – 1986. – V. 69. – P. 629–632.
9. Гайсина, Л.А. Современные методы выделения и культивирования водорослей: учебное пособие / Л.А. Гайсина, А.И. Фазлутдинова, Р.Р. Кабиров. – Уфа : БГПУ, 2008. – 152 с.
10. Влияние культуральной жидкости микроводорослей на рост и развитие семян корнеплодов / Э.А. Туктарова [и др.] // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – № 1–2. – С. 127–130.
11. Семена сельскохозяйственных культур. Методы определения всхожести : ГОСТ 12038-84. – Введ. 01.01.2002. – М. : Изд-во станд., 2001. – 30 с.
12. The on-line database of cyanobacterial genera [Electronic resource] / J. Komárek, T. Hauer. – Mode of access : <http://www.cyanodb.cz>. – Date of access : 24.05.2019.

УДК 591.8:599.731.1:628.4.047

Патогистологические исследования внутренних органов дикого кабана (*Sus scrofa* L.) после аварии на Чернобыльской АЭС

А.В. Гулаков

В работе представлены патогистологические исследования внутренних органов дикого кабана, обитающего на территории с различной плотностью радиоактивного загрязнения. Представлены наиболее характерные патоморфологические изменения внутренних органов животного. Результаты гистологического исследования показали, что морфологические изменения органов и тканей дикого кабана по степени выраженности были значительно вариабельны.

Ключевые слова: дикий кабан, внутренние органы, радиоактивное загрязнение, патоморфологические изменения, авария на Чернобыльской АЭС.

The work presents pathological studies of the internal organs of a wild boar which lives on the territory with different density of radioactive contamination. The most characteristic pathomorphological changes in the internal organs of the animal are presented. The results of a histological examination showed that the morphophysiological changes in the organs and tissues of the wild boar, in terms of severity, were significantly variable.

Keywords: wild boar, internal organs, radioactive contamination, pathomorphological changes, accident at the Chernobyl nuclear power plant.

В результате аварии на Чернобыльской АЭС люди, а также сельскохозяйственные и дикие животные подверглись хроническому воздействию внешнего и инкорпорированного облучения.

Следствием данного воздействия является медленное развитие функциональных изменений в организме с параллельно развивающимися восстановительными процессами, которые в значительной мере могут снижать уровень биологического эффекта [1], [2]. Нередко у животных, подвергшихся воздействию ионизирующего излучения, снижается иммунитет и повышается чувствительность к различным эндогенным и экзогенным инфекциям [3], [4], [5].

К отдаленным последствиям относятся нарушения плодовитости, эмбрионального развития, развитие стерильности животных [6]. Также существует проблема защиты наследственности организмов от острого и хронического воздействия ионизирующей радиации, так как малые дозы радиации, не оказывающие заметного влияния на организм животного, повышают частоту генетических мутаций в облучаемых клетках [7].

Основным объектом исследований являлся дикий кабан (*Sus scrofa* L.), обитающий на территории с различной плотностью радиоактивного загрязнения. Животное является основным объектом спортивной охоты среди диких промысловых копытных, он широко распространен на территории Республики Беларусь и имеет высокую численность.

Наиболее загрязненный радионуклидами участок, где проводились исследования, находился в зоне отчуждения аварийного выброса Чернобыльской АЭС в районе деревень Борщевка, Молочки, Погонное, Радин, Аревичи, Дроньки Хойникского района Гомельской области, где уровень загрязнения территории ^{137}Cs составлял 1100–8184 кБк/м² и ^{90}Sr – 185–1633 кБк/м². Данная местность расположена в Полесском зоогеографическом районе и находится в подзоне широколиственно-сосновых лесов. Основную часть изучаемой территории занимают дерново-подзолистые (дерново-глееватые рыхлосупесчаные или связнопесчаные почвы) – 80 % и менее значительную часть – аллювиальные (пойменные) и торфяно-болотные почвы – 20 %. Район характеризуется, главным образом, низким и плоским рельефом с конечноморенными грядами, террасами и равнинами. Территория исследования расположена в междуречье рек Припять и Днепр на расстоянии 10–35 км от Чернобыльской АЭС.

От диких животных производили взятие проб мышечной ткани, сердца, легких, печени, почек и селезенки. Образцы отбирались массой 0,1–0,5 кг.

Исследование клинического состояния диких копытных проводили согласно общепринятым методикам. Обращали внимание на общее состояние животных, упитанность, координацию движений, состояние шерстного покрова, видимых слизистых оболочек, лимфатических узлов. При патологоанатомическом обследовании изучали на правильность расположения внутренних органов, их величину, структуру, новообразования, поражения от различных инфекций и инвазий. Кусочки внутренних органов фиксировали в 10 % растворе нейтрального формалина. Срезы готовили в Гомельском государственном медицинском университете на серийном микротоме из парафиновых блоков и окрашивали их гематоксилинэозином.

Клиническое состояние животных в целом за весь период исследований не имело существенных отклонений от физиологической нормы. Визуальный осмотр и наблюдение за животными в природной среде показали, что у них хорошее обоняние, острота зрения, не нарушена координация движения и частота дыхания, отмечается хорошая поедаемость корма. Не приходилось встречать животных с аномальным развитием (уродства, гигантизм, карликовость). За время наблюдения за отдельными популяциями диких животных встречались особи разных возрастных групп. У кабана отмечали и добывали особей не старше 5–7 лет. Не было отмечено нарушений внутриутробного развития плода у дикого кабана на протяжении всего периода исследований, у самок кабана обнаруживалось от 4 до 9 эмбрионов.

В результате послеубойного осмотра было установлено, что у всех добытых животных упитанность хорошая, кожные покровы чистые, эластичные, шерстный покров густой и прочно удерживается. Органы и ткани находились в естественном положении без изменений, кроме пулевых ранений.

Нами было проведено гистологическое исследование органов и тканей дикого кабана, отстрелянного на территории радиоактивного загрязнения после аварии на Чернобыльской АЭС.

В легких животных, добытых на территории зоны отчуждения, отмечали хронический умеренно выраженный слизисто-катаральный бронхит, эмфизематозное расширение альвеол на значительном протяжении, с разрывами межальвеолярных перегородок, очаговый стромальный фиброз с лимфо-плазмоцитарной инфильтрацией, участки фиброателектазов, мало-выраженный, очаговый умеренно выраженный, интерстициальный пневмофиброз (рисунок 1).

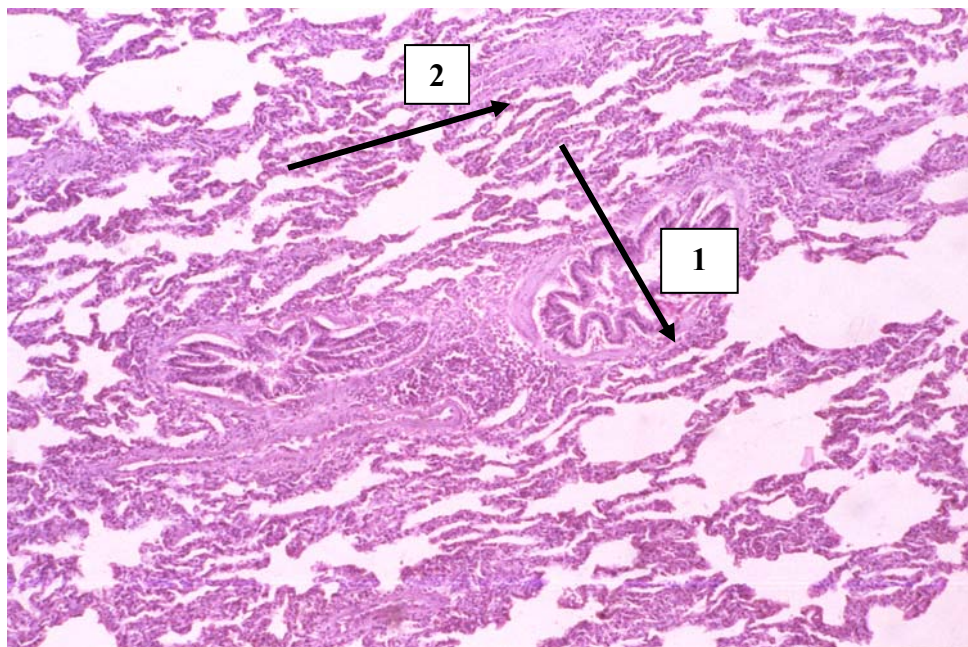


Рисунок 1 – Хронический умеренно выраженный слизисто-катаральный бронхит (1), очаговый стромальный фиброз с лимфо-плазмоцитарной инфильтрацией (2), участки фиброателектазов

В почках дикого кабана наблюдали признаки гломерулопатии (гломерулонефрит) с минимальными изменениями, очаговую зернистую дистрофию канальцевого эпителия (рисунок 2).

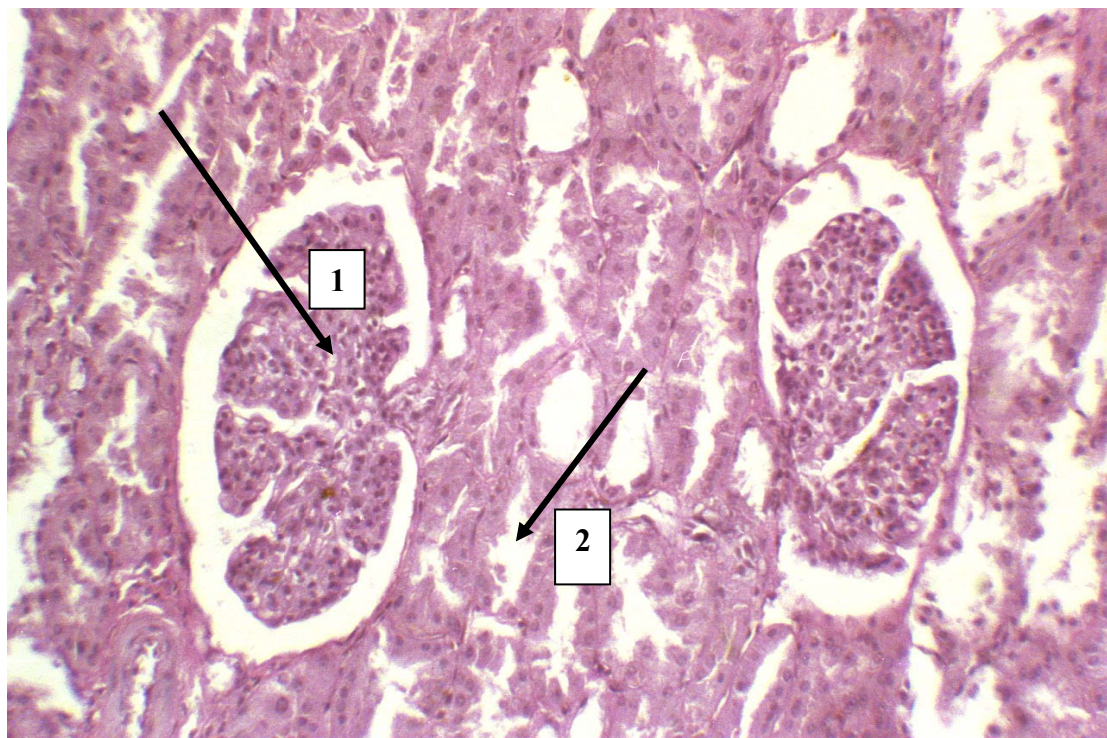


Рисунок 2 – Признаки гломеруллопатии (гломерулонефрит) с минимальными изменениями (1), очаговую зернистую дистрофию канальцевого эпителия (2)

Для печени животных была характерна умеренно выраженная белковая дистрофия гепатоцитов (рисунок 3).

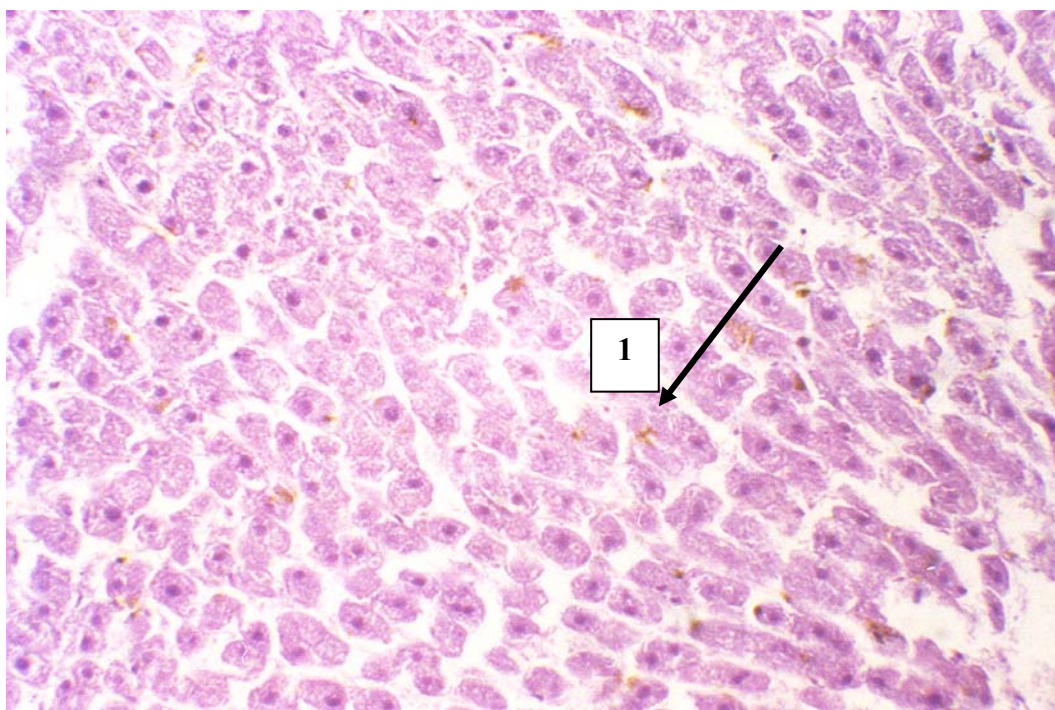


Рисунок 3 – Умеренно выраженная белковая дистрофия гепатоцитов (1)

Для селезенки дикого кабана в процессе гистологического исследования отмечали утолщение и фиброз трабекул, пролиферация эндотелия микрососудов, обеднение белой пульпы (рисунок 4).

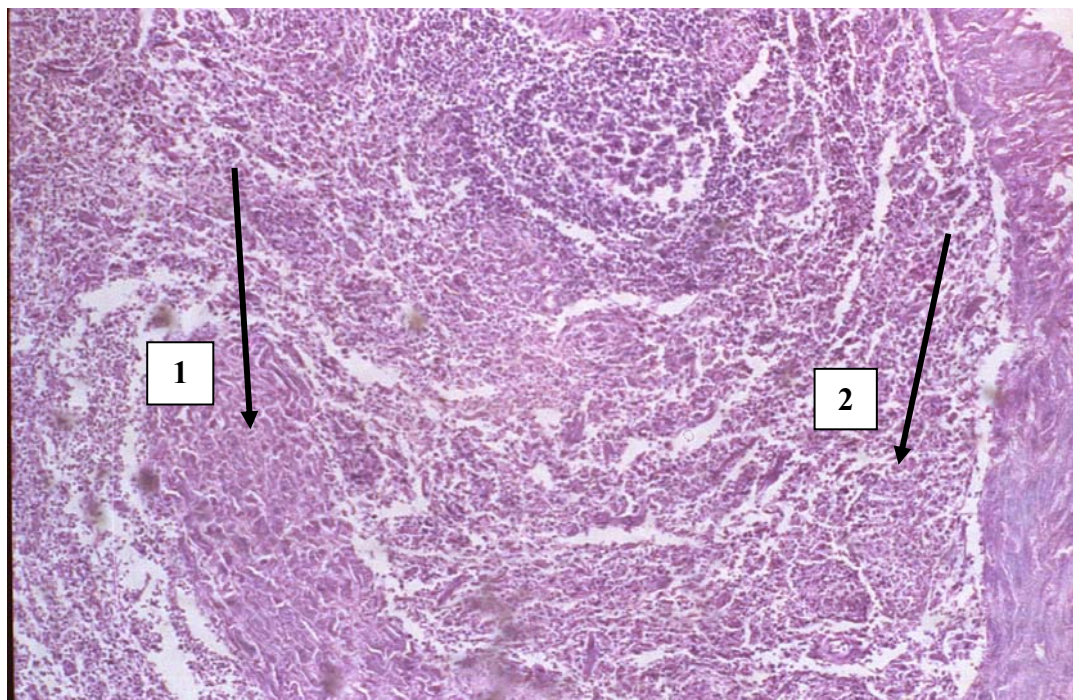


Рисунок 4 – Утолщение и фиброз трабекул (1), пролиферация эндотелия микрососудов, обеднение белой пульпы (2)

В семенниках животных отмечали от небольшой очаговой до умеренно выраженной атрофии сперматогенного эпителия, пролиферацию клеток Лейдига (рисунки 5, 6) [8].

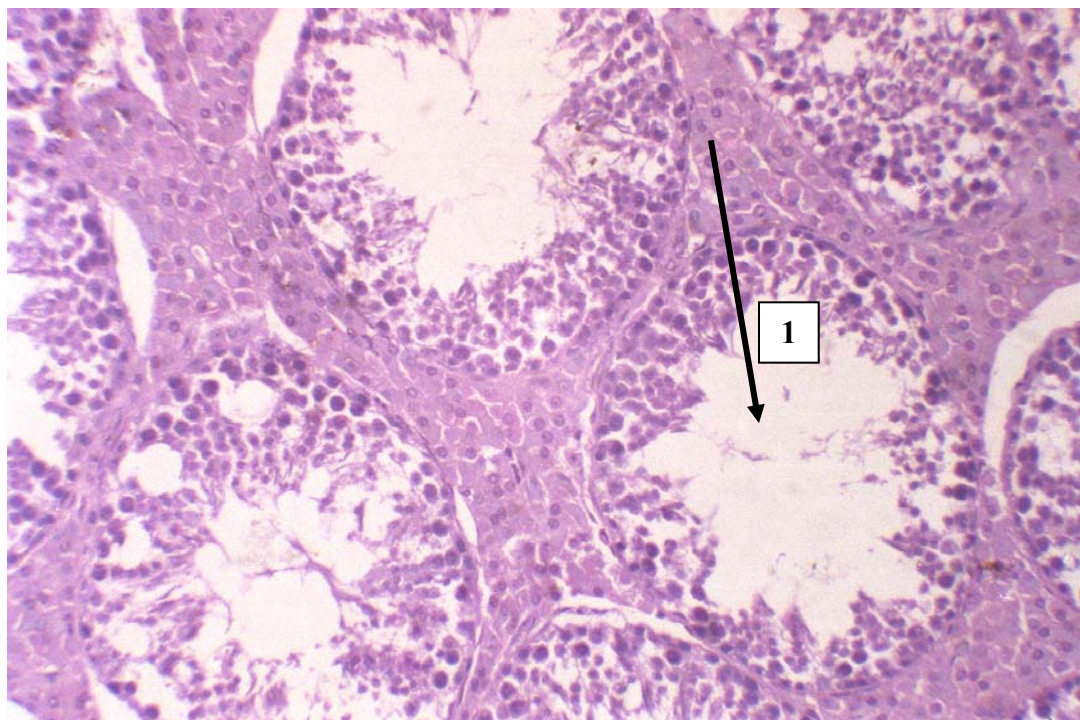


Рисунок 5 – Очаговая небольшая атрофия сперматогенного эпителия (1)

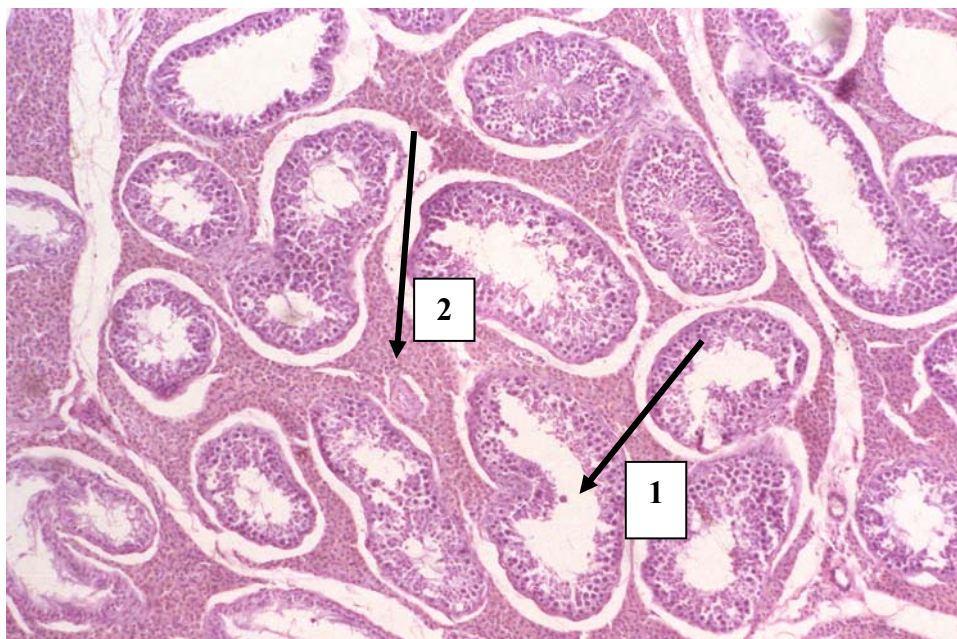


Рисунок 6 – Умеренно выраженная атрофия сперматогенного эпителия (1), пролиферация клеток Лейдига (2)

Следует отметить, что в отдаленный период после аварии на Чернобыльской АЭС у диких промысловых копытных, обитающих на территории с различной плотностью радиоактивного загрязнения, изменения во внутренних органах при патологоанатомическом обследовании были выражены значительно слабее или ткани имели нормальное гистологическое строение, чем в начальный период аварии [9].

Таким образом, в результате проведенных исследований было установлено, что патоморфологические изменения во внутренних органах и тканях диких промысловых копытных наблюдались только в начальный период аварии. Они характеризовались по степени выраженности значительной вариабельностью и зависели от места добычи и возраста животных.

Литература

1. Москалев, Ю.И. Отдаленные последствия воздействия ионизирующих излучений / Ю.И. Москалев. – М. : Медицина, 1991. – 464 с.
2. Киршин, В.А. Ветеринарная противорадиационная защита / В.А. Киршин, В.А. Бударков. – М. : Агропромиздат, 1990. – 207 с.
3. Клемпарская, Н.Н. Аутофлора, как индикатор радиационного поражения организма / Н.Н. Клемпарская, Г.А. Шальнова. – М. : Медицина, 1966. – 22 с.
4. Шубик, В.М. Состояние иммунитета при радиационных воздействиях / В.М. Шубик // Гигиена и санитария. – 1989. – № 1 – С. 25–28.
5. Шубик, В.М. Иммунологические исследования в радиоэкологии / В.М. Шубик // Экология. – 1989. – № 5 – С. 91–93.
6. Сироткин, А.Н. Радиоэкология сельскохозяйственных животных / А.Н. Сироткин, Р.Г. Ильязов. – Казань : ФЭН, 2000, – 384 с.
7. Моссэ, И.Б. Проблема защиты наследственности от острого и хронического воздействия ионизирующей радиации / И.Б. Моссэ // Сахаровские чтения 2004 года: экологические проблемы XXI века : материалы Междунар. науч. конф., 21–22 мая 2004 г., Минск. – Минск : Бестпринт, 2004. – С. 84–87.
8. Гулаков, А.В. Патоморфологические изменения органов мочеполовой системы диких промысловых копытных, добытых на территории зоны отчуждения / А.В. Гулаков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 107–112.
9. Гулаков, А.В. Патоморфологические изменения в органах и тканях диких копытных животных, добытых на территории зоны отчуждения / А.В. Гулаков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 3 (54). – Ч. 1. – С. 128–133.

УДК 535.231.16:546.36*137:599.735.34(476.2)

Динамика поглощенной дозы внутреннего облучения мышечной ткани дикого кабана от ^{137}Cs , обитающего в условиях Полесского радиационно-экологического заповедника

А.В. Гулаков, Д.Н. Дроздов

Вне зависимости от уровня радиоактивного загрязнения территории наблюдается высокая вариация поглощенной дозы внутреннего облучения диких животных, которая сохраняется в отдаленный период аварии на ЧАЭС. Мощности поглощенной дозы ^{137}Cs в мышечной ткани диких кабанов, обитающих на территориях зоны отчуждения, достоверно отличаются от доз облучения животных зоны отселения и контрольного района. Увеличение плотности загрязнения территории ^{137}Cs ведет к нелинейному росту поглощенной дозы. Наблюдаются периодические колебания дозовых величин, выходящих за предел скрининговых показателей ($7 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3}$ Гр/сут).

Ключевые слова: дикий кабан, мощность дозы, цезий-137, мышечная ткань.

Regardless of the level of radioactive contamination of the territory, there is a high variation in the absorbed dose of the internal exposure of wild animals, which remains in the remote period of the Chernobyl accident. The absorbed dose rates of ^{137}Cs in the muscle tissue of wild boars inhabiting the territories of the exclusion zone differ significantly from the radiation doses of animals from the resettlement zone and the control region. An increase in the pollution density of the ^{137}Cs territory leads to a nonlinear increase in the absorbed dose. There are periodic fluctuations in dose values, that go beyond the screening parameters ($7 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3}$ Gy/day).

Keyword: wild boar, dose rate, cesium 137, muscle tissue.

Введение. Радиоактивное загрязнение и миграция источников ионизирующего излучения является одним из наиболее сложно устранимых экологических факторов, которые оказывают негативное воздействие на биоту территорий, подвергшихся радиоактивному загрязнению в результате аварии на Чернобыльской АЭС. Основными источниками радиоактивного загрязнения являются радионуклиды ^{137}Cs и ^{90}Sr . Представители фауны, обитающие на загрязненных чернобыльскими радионуклидами территориях, подвергаются хроническому внешнему и внутреннему облучению. Формирование дозы облучения в органах и тканях обуславливает возникновение радиобиологических эффектов, которые могут быть оценены с помощью поглощенной дозы на единицу времени [1]–[3].

Между процессами формирования дозы внешнего и внутреннего облучения существуют значимые различия [4]. Для процессов формирования дозы внутреннего облучения важными являются процессы поступления, накопления и распределения радионуклидов по органам и тканям. Эти процессы зависят от физиологических особенностей животного организма, поэтому вопрос о формировании доз внутреннего облучения имеет не только физическое, но биологическое содержание. В результате поступления и накопления радионуклидов в организм животных формируются достаточно высокие дозы внутреннего облучения. Среди наземных позвоночных животных максимальные активности радионуклидов ^{137}Cs регистрируют в организме дикого кабана [5]. Показатели радиоактивности в мышечной ткани этих животных варьируют в широких пределах от $1,0 \cdot 10^2$ Бк/кг до $6,6 \cdot 10^5$ Бк/кг [5].

Дикий кабан (*Sus scrofa* L.) населяет разные биотопы, предпочитает широколиственный лес с заболоченными участками или участки с зарослями кустарников по берегам водоемов. Зимой собирается в ельниках и на непромерзающих болотах. Животные держатся группами по 6–16 особей, за исключением взрослых самцов и самок с сеголетками. Во время гона и на жировке размеры стада увеличиваются. Размеры участка обитания у одиночных самцов достигают летом 10 км^2 , а зимой сокращаются до $0,5\text{--}2,5 \text{ км}^2$. В неурожайные годы мигрируют на расстояние 100–200 км. Животные всеядны, преимущественно растительноядные. В структуру питания входят орехи, желуди, семена, опавшие плоды диких яблонь, груш, на-

земные и подземные части растений. Охотно поедают дождевых червей, моллюсков, насекомых и их личинок, мышевидных грызунов. В поисках пищи разрывают почву и лесную подстилку на больших участках [6].

Результаты наблюдений, проводимые в рамках радиоэкологического мониторинга территории радиоактивного загрязнения Республики Беларусь, показывают, что накопление ^{137}Cs в мышечной ткани диких животных связано с радиоактивным загрязнением кормовой базы. В зависимости от сезона состав кормовой базы существенно изменяться – в составе зимнего рациона дикого кабана преобладают подземные части растений (корневища, клубни) и лиственной опад, в летнем рационе – осока, крапива, гравилат, калужница, иван-чай, плоды зерновых злаков, фруктовых деревьев, желуди, ягоды и орехи. Кроме того, в состав летнего рациона также входят насекомые, черви, рыба, мелкие позвоночные (мыши, крысы). В весенне-летний период кабаны потребляют до 6–8 кг пищи в сутки, в неурожайные годы обгладывают кору деревьев, питаются грибами и падалью.

Из приведенных данных видно, что экология и структура питания дикого кабана тесно связаны с нижним ярусом фито-, и зооценоза, кроме того, животные могут использовать представителей ихтиофауны, в которой накапливается наибольшая удельная активность радионуклидов. Рассматривая возможность пребывания поголовья дикого кабана в границах зоны отчуждения и широкий ареал обитания, можно сделать вывод о том, что дикий кабан является активным аккумулятором и источником миграции чернобыльских радионуклидов на территории Европы. Из чего следует закономерный вопрос о том, какие дозы облучения формируются у дикого кабана, и какие возможные дозовые эффекты могут при этом возникать.

Цель работы: оценить динамику мощности поглощенной дозы внутреннего облучения от инкорпорированного в мышечной ткани дикого кабана ^{137}Cs , обитающего в условиях Полесского радиационно-экологического заповедника.

Объект и методы исследования. Для достижения цели использованы данные многолетних исследований содержания ^{137}Cs в органах и тканях дикого кабана. Данные получены в наиболее загрязненных чернобыльскими радионуклидами участках, расположенных в зоне отчуждения аварийного выброса ЧАЭС в районе дд. Борщевка, Молочки, Погонное, Радин, Аревичи, Дроньки Хойникского района Гомельской области, уровень загрязнения территории ^{137}Cs составлял 1100–8184 кБк/м². Территория исследования расположена в междуречье рек Припять и Днепр на расстоянии 10–35 км от Чернобыльской АЭС. Наряду с зоной отчуждения отбор проб также проводился на территории зоны отселения Брагинского района Гомельской области в окрестностях деревень Савичи, Пучин, Жердное. Плотность поверхностного загрязнения (ППЗ) участка по ^{137}Cs находилась в пределах 185–1480 кБк/м². Район, в основном, с низким и плоским рельефом, с конечноморенными грядами, террасами и равнинами. Он расположен в междуречье рек Припять и Днепр на расстоянии 30–35 км от ЧАЭС. Контрольным районом служила территория Гомельского района Гомельской области, расположенная вблизи деревни Кравцовка, на границе с Черниговской областью Украины, на притоке реки Днепр (р. Сож). Данная местность находится на расстоянии 40 км от г. Гомеля и около 100 км от Чернобыльской АЭС. Уровень загрязнения территории ^{137}Cs составлял 18,5–37,0 кБк/м² и ^{90}Sr – 1,0–1,85 кБк/м².

Объектом исследований являлся дикий кабан (*Sus scrofa* L.), обитающий на территории с различной плотностью радиоактивного загрязнения. Все пробы взяты от 117 голов дикого кабана, среди которых 54 животных изъяты из зоны отчуждения, 30 – из зоны отселения и 33 – из контрольного района. От каждого животного отбирались пробы мышечной ткани массой 0,1–0,5 кг. Данные удельной активности мышечной ткани дикого кабана от ^{137}Cs использовали для оценки мощности поглощенной дозы внутреннего облучения. В ходе оценки поглощенной дозы внутреннего облучения допускали, что в организме радионуклид находится в условиях равновесия и его концентрация в органах и тканях постоянная на протяжении года. Расчет мощности поглощенной дозы внутреннего облучения от ^{137}Cs проводили по формуле (1):

$$D(t) = A \times K, \quad (1)$$

где $P(t)$ – мощность поглощенной дозы, мкГр/сутки; A – удельная активность ^{137}Cs в мышечной ткани, Бк/кг; K – дозовый коэффициент, равный мощности дозы, создаваемой 1 Бк/кг ^{137}Cs , составляет $6,65 \times 10^{-3}$ мкГр/сутки [7].

При выборе коэффициентов дозового преобразования для внутреннего облучения животных исходили из того, что формирование дозы облучения не зависит от видовой принадлежности, а зависит только от уровня накопленной животным удельной активности.

Результаты и их обсуждение. На основании проведенных дозиметрических расчетов получены средние значения мощности поглощенной дозы от инкорпорированного в мышечной ткани дикого кабана ^{137}Cs для трех пробных участков ПГРЭЗ – зоны отчуждения ($\text{ППЗ} > 555 \text{ кБк/м}^2$), зоны отселения (ППЗ от 185 до 555 кБк/м^2) и контрольного района ($\text{ППЗ} < 37,0 \text{ кБк/м}^2$). Оцененные значения средней мощности поглощенной дозы и границы варьирования ее величины представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Мощности поглощенной дозы внутреннего облучения дикого кабана

Год	Контроль		Отселение		Отчуждение	
	мкГр/сут	Гр/сут	мкГр/сут	Гр/сут	мкГр/сут	Гр/сут
1991	$2,79 \pm 0,80$ (49 %*)	3E-06	$9,58 \pm 1,73$ (26 %)	1E-05	$79,53 \pm 6,38$ (14 %)	8E-05
1992	–	–	$64,31 \pm 1,45$ (40 %)	6E-05	$228,96 \pm 11,40$ (10 %)	2E-04
1993	$3,26 \pm 0,93$ (49 %)	3E-06	$14,96 \pm 2,00$ (23 %)	1E-05	$125,42 \pm 28,73$ (69 %)	1E-04
1994	–	–	$62,24 \pm 3,48$ (11 %)	6E-05	$688,74 \pm 40,83$ (15 %)	7E-04
1995	$2,66 \pm 0,53$ (28 %)	3E-06	$71,42 \pm 3,19$ (10 %)	7E-05	$263,34 \pm 14,83$ (8 %)	3E-04
1996	$4,46 \pm 2,89$ (112 %)	4E-06	$217,79 \pm 5,65$ (8 %)	2E-04	$1615,29 \pm 139,38$ (15 %)	2E-03
1997	$1,73 \pm 0,73$ (60 %)	2E-06	$121,43 \pm 4,75$ (9 %)	1E-04	$346,27 \pm 209,48$ (105 %)	3E-04
1998	$5,65 \pm 2,00$ (86 %)	6E-06	$40,23 \pm 2,33$ (12 %)	4E-05	$66,43 \pm 12,97$ (34 %)	7E-05
1999	$3,86 \pm 2,66$ (154 %)	4E-06	$37,57 \pm 1,43$ (5 %)	4E-05	$1103,17 \pm 93,90$ (17 %)	1E-03
2000	$2,39 \pm 0,90$ (75 %)	2E-06	$12,37 \pm 5,79$ (94 %)	1E-05	$68,50 \pm 17,96$ (45 %)	7E-05
2001	–	–	–	–	$45,15 \pm 13,97$ (44 %)	5E-05
2002	–	–	–	–	$36,44 \pm 12,40$ (90 %)	4E-05
2003	$2,46 \pm 1,13$ (65 %)	2E-06	$4,19 \pm 1,63$ (67 %)	4E-06	$94,66 \pm 26,53$ (68 %)	9E-05
2004	-	-	-	-	$343,14 \pm 22,88$ (15 %)	3E-04
2005	-	-	-	-	$137,39 \pm 11,84$ (31 %)	1E-04
2006	-	-	-	-	$199,63 \pm 11,84$ (17 %)	2E-04
2007	-	-	-	-	$222,44 \pm 49,88$ (100 %)	2E-04
2008	-	-	-	-	$243,32 \pm 14,76$ (19 %)	2E-04

* – коэффициент вариации

Из данных, представленных в таблице 1, видно, что между территориями с разным уровнем ППЗ ^{137}Cs наблюдается достоверное различие мощности поглощенной дозы, достоверная вероятность различия не превысила уровень значимости 0,05. Средние значения мощности поглощенной дозы у животных, отловленных в контрольном районе, составили $3,25 \pm 1,40$ мкГр/сут, в зоне отселения – $59,64 \pm 3,04$ мкГр/сут, в зоне отчуждения $328,23 \pm 41,11$ мкГр/сут. Методом корреляционного анализа установлено, что увеличение ППЗ ведет к нелинейному росту удельной активности ^{137}Cs и мощности поглощенной дозы. На рисунке 1 представлены две динамические модели: 1) удельной активности ^{137}Cs в мышечной ткани животного и 2) мощности поглощенной дозы от ППЗ. Из рисунка 1 видно, что с увеличением ППЗ мощность поглощенной дозы растет пропорционально росту удельной активности.

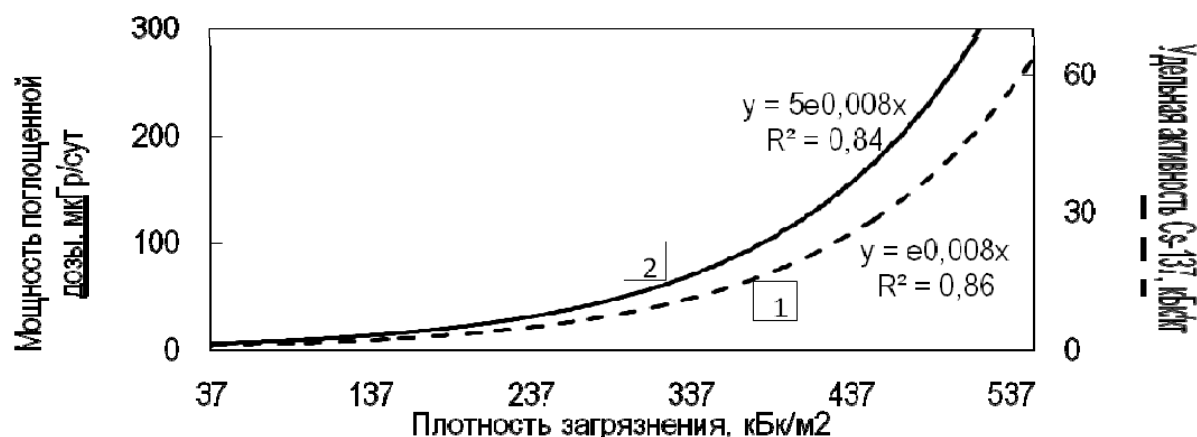


Рисунок 1 – Удельная активность и мощность поглощенной дозы от ^{137}Cs мышечной ткани дикого кабана

Отдельный интерес вызывает вариация мощности поглощенной дозы на территориях с разным уровнем ППЗ. Из таблицы 1 видно, что в течение всего периода наблюдения не было получено однородной выборки в отношении как удельной активности ^{137}Cs , так и оцененной мощности поглощенной дозы. В контрольном районе среднее значение коэффициента вариации составило 37 %, разброс значений – от 49 % (1991–92 гг.) до 154 % (1999 г.), в зоне отселения – 106 %, разброс – от 5 % (1999 г.) до 94 % (2000 г.), в зоне отчуждения – 127 %, разброс – от 8 % (1995 г.) до 105 % (1997 г.). Можно предположить, что вариация мощности поглощенной дозы в большей степени связана не с фактором плотности загрязнения почвы, а с миграцией и возможностью поступления ^{137}Cs в организм животных. В данном случае ППЗ влияет на уровень мощности поглощенной дозы, а не ее вариацию – методом *ANOVA* анализа установлено, что сила влияния фактора ППЗ на величину мощности поглощенной дозы оценивается в 22 % ($p = 0,01$).

Экологический принцип толерантности распространяется на пределы приемлемых дозовых нагрузок, границы которых обеспечивают выживание количества особей достаточного для того, чтобы поддерживать необходимую для воспроизведения численность популяции. Диапазон толерантности радиационного фактора установлен в работе [8] и реализован в рамках европейского проекта PROTECT. В результате исследования [9]–[11] методом построения «распределения чувствительности видов» (*species sensitivity distribution*) установлена и оценена величины безопасного порога облучения биоты. Для животных нижняя граница облучения определена на уровне 10 мкГр/ч, или $2,4 \cdot 10^{-4}$ Гр/сут – это скрининговая величина, предназначенная для первичной оценки безопасности биоты. В случае, если нижняя граница облучения не превышает скринингового уровня, ситуацию можно считать безопасной [9].

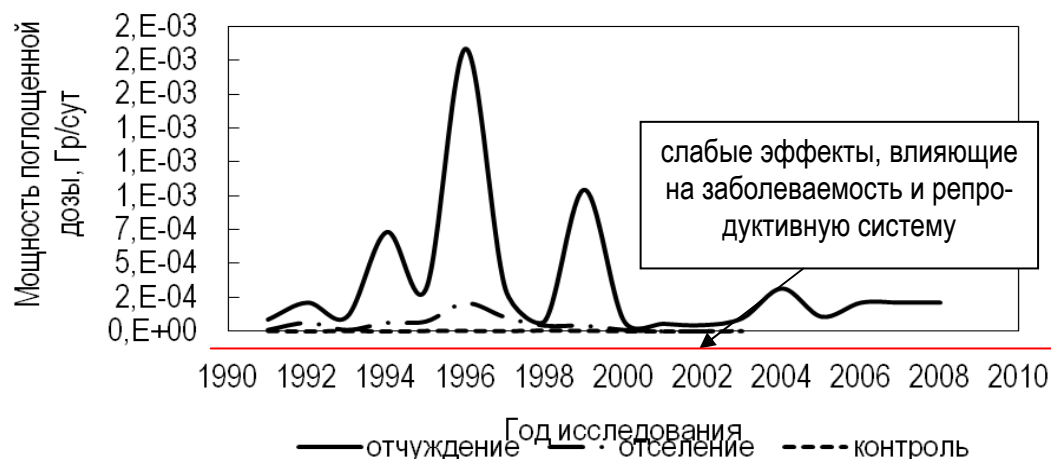


Рисунок 2 – Динамика мощности поглощенной дозы внутреннего облучения от ^{137}Cs инкорпорированного в мышечную ткань дикого кабана

Предложенный критерий использован нами для оценки возможных радиационных эффектов для случаев хронического облучения дикого кабана. В результате анализа временной динамики мощности поглощенной дозы внутреннего облучения было установлено, что в зоне отчуждения в течение 15 лет после аварии сохранялась высокая вероятность слабых эффектов, влияющих на заболеваемость и репродуктивную систему дикого кабана (более 50 %). В последующий период среди особей имело место увеличение вероятности цитогенетических эффектов (около 30 %). В зоне отселения и контрольном районе не установлено превышения скрининговой величины.

Общая для разных территорий динамика мощности поглощенной дозы представлена на рисунке 2, где видно, что в зоне отчуждения на протяжении 20 лет после аварии сохранялась выраженная флуктуация поглощенной дозы, выходящая за границу предела скрининговой величины. Максимальное значение поглощенной дозы в зоне отчуждения наблюдалось в 1996 г. и составило $1615,29 \pm 139,38$ мкГр/сут, новый всплеск произошел в 1999 г. – $1103,17 \pm 93,90$ мкГр/сут, после чего наблюдалось более чем 15-ти кратное падение мощности дозы до значений, характерных для зоны отселения $68,50 \pm 17,96$ мкГр/сут. Последний участок флуктуации наблюдался в зоне отчуждения в 2004 г. – $343,14 \pm 22,88$ мкГр/сут, после чего значения мощности поглощенной дозы внутреннего облучения не превышали предел скрининговой величины.

Таким образом, наиболее интенсивное влияние аккумулированный в мышечной ткани ^{137}Cs оказывал на частоту цитогенетических изменений, заболеваемость и репродуктивную систему диких кабанов в период с 1994 по 1999 гг. в зоне отчуждения. В этот период происходило волнообразное увеличение поглощенной дозы облучения – периоды подъема приходятся на 1994, 1996, 1999 гг., спад – на 1995, 1998, 2000 гг. Циклическую динамику поглощенной дозы, по-видимому, можно объяснить характером кормовой базы, изучение которой на тот период времени можно рассматривать как самостоятельную научную задачу.

Заключение. Таким образом, для диких кабанов, обитающих на территории Полесского радиационно-экологического заповедника, отмечается высокая вариация поглощенной дозы внутреннего облучения. Мощности поглощенной дозы ^{137}Cs в мышечной ткани диких кабанов, обитающих на территориях зоны отчуждения, достоверно отличаются от доз облучения животных зоны отселения и контрольного района. Увеличение плотности загрязнения территории ^{137}Cs ведет к нелинейному росту поглощенной дозы.

Наблюдаются периодические колебания дозовых величин, выходящих за предел скрининговых показателей ($7 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3}$ Гр/сут). Наиболее интенсивная аккумуляция ^{137}Cs приходится на 1994, 1996, 1999 гг., когда доза облучения у диких кабанов, превысила предел скрининговой величины в 2–6 раз. Последний всплеск мощности поглощенной дозы регистрировался в 2004 г., когда показатель превысил скрининговый порог на 40 %. Для зоны отселения и контрольного района превышение скрининговой величины не установлено за весь период наблюдения. Однако на этой территории на протяжении всего периода наблюдения сохранилась высокая аккумуляция радионуклида в мышечной ткани диких кабанов, которые могут представлять опасность в качестве источника миграции радионуклидов ^{137}Cs .

Литература

1. Корнеев, Н.А. Основы радиоэкологии сельскохозяйственных животных / Н.А. Корнеев, А.Н. Сироткин. – Москва : Энергоатомиздат, 1987. – 208 с.
2. Карабанов, А.К. Радон и дочерние продукты распада в воздухе зданий на территории Беларуси / А.К. Карабанов [и др.] // Природопользование. – 2015. – Вып. 27. – С. 49–53.
3. Сельскохозяйственная радиоэкология / Р.М. Алексахин [и др.] ; под ред. Р.М. Алексахина, Н.А. Корнеева. – М. : Экология, 1991. – 400 с.
4. Рожко, А.В. СИЧ-ориентированный метод оценки годовых доз внутреннего облучения населения в отдаленный период чернобыльской аварии / А.В. Рожко [и др.] // Радиация и Риск. – 2009. – Т. 18, № 2. – С. 48–60.
5. Gulakov, A.V. Accumulation and distribution of ^{137}Cs and ^{90}Sr in the body of the wild boar (*Sus scrofa*) found on the territory with radioactive contamination / A.V. Gulakov // Journal of Environmental Radioactivity. – 2014. – Vol. 127. – P. 171–175.

6. Фауна Беларуси. Позвоночные [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://gurkov2n.jimdo.com>. – Дата доступа : 17.09.2019.
7. Спирин, Е.В. Метод расчета доз облучения животных для оценки последствий загрязнения окружающей среды / Е.В. Спирин // Радиационная биология. Радиоэкология. – 2009. – Т. 49, № 5. – С. 608–616.
8. Planel, H. *Paramecium aurelia* as a cellular model used for studies of the biological effects of natural ionizing radiation / H. Planel [et al.] // Methodology for assessing impacts of radioactivity on aquatic ecosystems. IAEA Tech. rep. ser. № 190. – Vienna : IAEA, 1979. – P. 335–346.
9. Andersson, P. Numerical benchmarks for protecting biota from radiation in the environment: proposed levels, underlying reasoning and recommendations / P. Andersson [et al.] // PROTECT Deliverable 5. EC contract number: 036425 (FI6R). – 2008. – 112 p.
10. Крышев, И.И. Радиационная безопасность окружающей среды: необходимость гармонизации российских и международных нормативно-методических документов с учётом требований федерального законодательства и новых международных основных норм безопасности ОНБ-2011 / И.И. Крышев, Т.Г. Сазыкина // Радиация и риск. – 2013. – Т. 22. № 1. – С. 47–61.
11. Effects of ionizing radiation / United Nations Scientific Committee on the Effects of Atomic Radiation // UNSCEAR 2006 Report to the General Assembly with Scientific Annexes – New York : United Nations, 2009. – Vol. II Scientific Annexes C, D and E. – 81 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 27.09.2019

УДК 631.53.027.2:577.152.311:581.142:633.853.494

Влияние предпосевной обработки препаратом «Виал-ТТ» на активность липазы в проростках озимого рапса

Н.И. Дроздова, М.Н. ГАТАЛЬСКАЯ

В условиях лабораторного эксперимента изучено влияние пестицида «Виал-ТТ», включенного в государственный реестр средств защиты растений на метаболическую активность проростков озимого рапса сорта «Зорный». Установлено, что липолитическая активность имеет общую тенденцию к снижению как в контрольных, так и в опытных группах, обработанных препаратом в концентрации 0,5 мл/кг и 1 мл/кг от четвертых до одиннадцатых суток проращивания, что может быть связано с уменьшением запасов липидов при прорастании. Для активности липазы в опытных группах маслосемян рапса, обработанных препаратом «Виал-ТТ», и контрольных группах на четвертые сутки прорастания статистически значимых различий не установлено.

Ключевые слова: фунгициды, липазы, ферментативная активность, проростки озимого рапса, динамика липолитической активности.

In a laboratory experiment, the effect of the pesticide «Vial-TT», included in the state register of plant protection products on the metabolic activity of seedlings of winter rape of the variety «Zorny» was studied. It was found that lipolytic activity has a general tendency to decrease both in the control and in the experimental groups treated with the drug at a concentration of 0,5 ml/kg and 1 ml/kg from the fourth to eleventh days of germination, which may be associated with a decrease in lipid reserves during germination. For lipase activity in the experimental groups of oilseed rape treated with the drug «Vial-TT» and the control groups on the fourth day of germination, no statistically significant differences were found.

Keywords: fungicides, lipases, enzymatic activity, seedlings of winter rape, dynamics of lipolytic activity.

Введение. Озимый рапс – высокопродуктивная культура, которая является одной из перспективных масличных культур в мировом земледелии. Семена рапса содержат около 40 %–45 % масла и 22 %–29 % протеина. По содержанию белка рапс более чем в три раза ценнее кормового ячменя [1].

Рапс является важнейшей технической культурой, имеющей большое народнохозяйственное значение. Интерес аграриев к рапсу объясняется его хорошей приспособляемостью к климату и высокой продуктивностью, а также постоянно растущей потребностью в высокобелковых кормах и растительных маслах [2].

Рапс получил широкое распространение в Республике Беларусь и выращивается практически в каждом хозяйстве. В 2018 г. посевные площади под озимым рапсом составляли 381,7 тыс. га. Сегодня площадь, занимаемая озимым рапсом в Республике Беларусь, шестая по величине среди посевов этой культуры в Европе. Несмотря на большую значимость рапса для экономики Беларуси, потенциал его используется еще недостаточно. Урожайность данной культуры в производстве чаще всего достигает 10–15 ц/га, что составляет не более 30 % от его биологической продуктивности. В 2012 г. средняя урожайность маслосемян озимого рапса в республике составляла 20,7 ц/га. В Гродненской области было получено 22,0 ц/га маслосемян против 16,1 ц/га в 2011 г. [1].

За прошедшую пятилетку впервые в Беларуси была разработана научная основа селекции озимого и ярового рапса, создан исходный материал, в том числе зимостойких сортов озимого и стрессоустойчивых сортов ярового рапса. Природа вносит свои коррективы в производство масличных культур, так как в последние годы складываются крайне неблагоприятные погодные условия в период сева и в осенний период роста и развития растений озимого рапса [2]. Несмотря на то, что в целом природно-климатические условия Беларуси являются благоприятными для выращивания данной культуры, но они способствуют так же развитию вредителей и патогенов, снижающих урожайность рапса [3].

Рапс повреждается многими видами вредителей и заболеваний, поэтому требует умелой защиты, ориентации всей технологии выращивания на создание оптимальных условий для более полной реализации его потенциала [4]. Перед посевом семена озимого рапса обрабатывают препаратами, которые внесены в Государственный реестр средств защиты растений (пестицидов) и удобрений, разрешенных к применению на территории Республики Беларусь. В настоящее время к числу разрешенных относятся препараты, содержащие тебуконазол и тиабендазол, например «Виал-ТТ», обладающий фунгицидными свойствами. Препарат «Виал-ТТ» – высокоэффективный системный двухкомпонентный протравитель широкого спектра действия. Действующими веществами, входящими в состав препарата, являются тиабендазол (80 г/л), тебуконазол (60 г/л) и антистрессовые компоненты. Тебуконазол относится к химическому классу триазолов, отличается более высокой растворимостью и подвижностью, обладает профилактическим и лечащим системным действием. Тиабендазол – активный ингредиент из класса бензимидазолов, слабо растворим, менее подвижен, обладает защитным и лечащим системным действием.

Несмотря на достаточно широкий спектр разрешенных к применению препаратов, их влияние на метаболические процессы в клетках растений, на рост и развитие проростков в настоящее время остается мало изученным.

Целью работы являлось изучение влияния препарата «Виал-ТТ», используемого для предпосевной обработки на липолитическую активность в проростках озимого рапса, которая играет важную роль в энергообеспечении процессов прорастания семян масличных культур.

Объект исследования: озимый рапс сорта «Зорный», полученный методом межсортовой гибридизации сортов WW 995 x Librador x 3005/88 и последующего индивидуально-семейного отбора. Сорт включен в Государственный реестр в 2007 г. [5].

Предметом исследования являлась липолитическая активность маслосемян озимого рапса как при различных режимах обработки препаратом «Виал-ТТ», так и в зависимости от длительности проращивания.

Так как основным запасным питательным веществом в семенах рапса являются липиды, следовательно, активность липазы оказывает влияние на скорость их мобилизации, гидролиза, что обеспечивает нормальные условия прорастания и развития проростков.

Липазы (триацилглицеролацилгидролаза, стеапсин, трибутираза, липаза триглицеридов КФ 3.1.1.3) – ферменты, катализирующие гидролитическое расщепление триацилглицеринов до глицерина и жирных кислот, представляют собой липопротейны с неорганическим кофактором – ионами кальция [6]. Так как триацилглицеролы нерастворимы в воде, липазы действуют на границе раздела фаз «вода–липиды» и являются липопротейнами с гидрофильно-гидрофобными группами. Полный гидролиз триацилглицеролов происходит ступенчато и катализируется тремя липазами. Первая из них гидролизует 1,3-связи – триацилглицероллипаза. Затем вступает в действие диацилглицероллипаза и, наконец, моноацилглицероллипаза, катализирующая гидролиз сложноэфирной связи в моноацилглицеролах. Локализация указанных липаз в органоидах клетки различна. Триацилглицероллипаза локализована в мембране липидных сферосом. Липаза, гидролизующая моноацилглицеролы, локализована в мембранах глиоксисом прорастающих семян. Установлено, что указанные липазы отличаются не только по характеру субстрата, но и по оптимуму pH и температуре максимальной активности [7].

Способность липаз функционировать на поверхности раздела фаз «липид–вода» подразумевает, что фермент взаимодействует с полярными и неполярными молекулами. Следует отметить, что взаимодействие с неполярными молекулами может вызвать конформационные изменения в структуре фермента, вследствие чего появляется каталитическая активность. Наряду с вышесказанным установлено, что чем выше степень диспергирования субстрата, тем быстрее идет липолиз. Вероятно, это связано с явлением сорбции фермента на поверхности субстрата. Считается, что именно этот процесс и является первым актом ферментативного липолиза [8].

С целью изучения влияния режимов предпосевной обработки, маслосемена озимого рапса обрабатывали препаратом фунгицидного действия «Виал-ТТ» в концентрациях 0,5 мл/кг (допустимый уровень, рекомендован производителем препарата – 1 ДУ) и 1 мл/кг (концентрация в два раза превышающая рекомендованную – 2 ДУ). Срок ожидания перед посевом семян в условиях лабораторного опыта составлял 1 час, 7 суток и 14 суток с момента обработки.

Для эксперимента были сформированы контрольные и опытные группы, каждая из которых содержала по 5 г маслосемян. Суммарный объем дистиллированной воды, добавляемой ко всем экспериментальным группам озимого рапса, составлял 30 мл при 4 сутках проращивания и 90 мл при 11 сутках проращивания. Проростки использовали для определения активности липазы титриметрическим методом [9].

Для изучения динамики изменения активности липазы в проростках рапса активность ферментов определялась на 4 и 11 сутки прорастания семян.

Результаты исследования и их обсуждение

В ходе исследований проанализировано изменение активности липазы под действием различных концентраций препарата для предпосевной обработки «Виал-ТТ» в проростках озимого рапса сорта «Зорный». Данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Липолитическая активность проростков озимого рапса в условиях эксперимента

в мг гидроксида калия, затраченного на титрование образующихся за 1 час при гидролизе жирных кислот, в расчете на 1 г растительной массы

Условия эксперимента		Активность липаз	
		на 4 сутки проращивания	на 11 сутки проращивания
Контроль	Период ожидания 1 час после протравливания	0,924 ± 0,036	0,629 ± 0,066
1 ДУ		0,951 ± 0,028	0,780 ± 0,056
2 ДУ		0,940 ± 0,065	0,832 ± 0,025
Контроль	Период ожидания 7 суток после протравливания	0,927 ± 0,043	0,594 ± 0,025
1 ДУ		0,905 ± 0,054	0,625 ± 0,032
2 ДУ		0,903 ± 0,049	0,624 ± 0,034
Контроль	Период ожидания 14 суток после протравливания	0,881 ± 0,093	0,594 ± 0,027
1 ДУ		0,916 ± 0,050	0,618 ± 0,047
2 ДУ		0,895 ± 0,065	0,587 ± 0,060

В ходе изучения активности липазы в зависимости от сроков воздействия различных концентраций препарата «Виал-ТТ» установлено, что ферментативная активность четырехдневных проростков во всех вариантах опыта находилась в диапазоне 0,881–0,951 мг гидроксида калия, затраченного на титрование образующихся за 1 час при гидролизе жирных кислот в расчете на 1 г растительной массы. Статистически значимых различий между опытными группами не установлено, что подтверждается результатами однофакторного дисперсионного анализа. Показатели активности липазы при обработке препаратом «Виал-ТТ» в концентрациях, соответствующих 1 и 2 ДУ, достоверно не различимы с активностью липазы в контроле (рисунок 1).

Липолитическая активность проростков озимого рапса была определена так же на 11 сутки прорастания. Установлено, что с увеличением концентрации препарата для предпосевной обработки от 1 ДУ до 2 ДУ активность липазы в проростках рапса, обработанных непосредственно за 1 час до проращивания, увеличивалась по сравнению с контролем на 24 % и 32 % соответственно. Увеличение активности липазы в проростках семян, обработанных за 7 дней до проращивания, составило 5 % по сравнению с контролем независимо от концентрации фунгицида. В вариантах опыта с предварительной обработкой семян озимого рапса с периодом ожидания 14 суток липолитическая активность опытных групп находилась на одном уровне с контрольной группой проростков.

Достоверность наблюдаемых различий была подтверждена статистически с помощью однофакторного дисперсионного анализа, результаты которого представлены на рисунке 2.

С возрастом периода ожидания после обработки семян озимого рапса эффект увеличения липолитической активности угасает, что требует дополнительного экспериментального изучения для объяснения причин и механизмов.

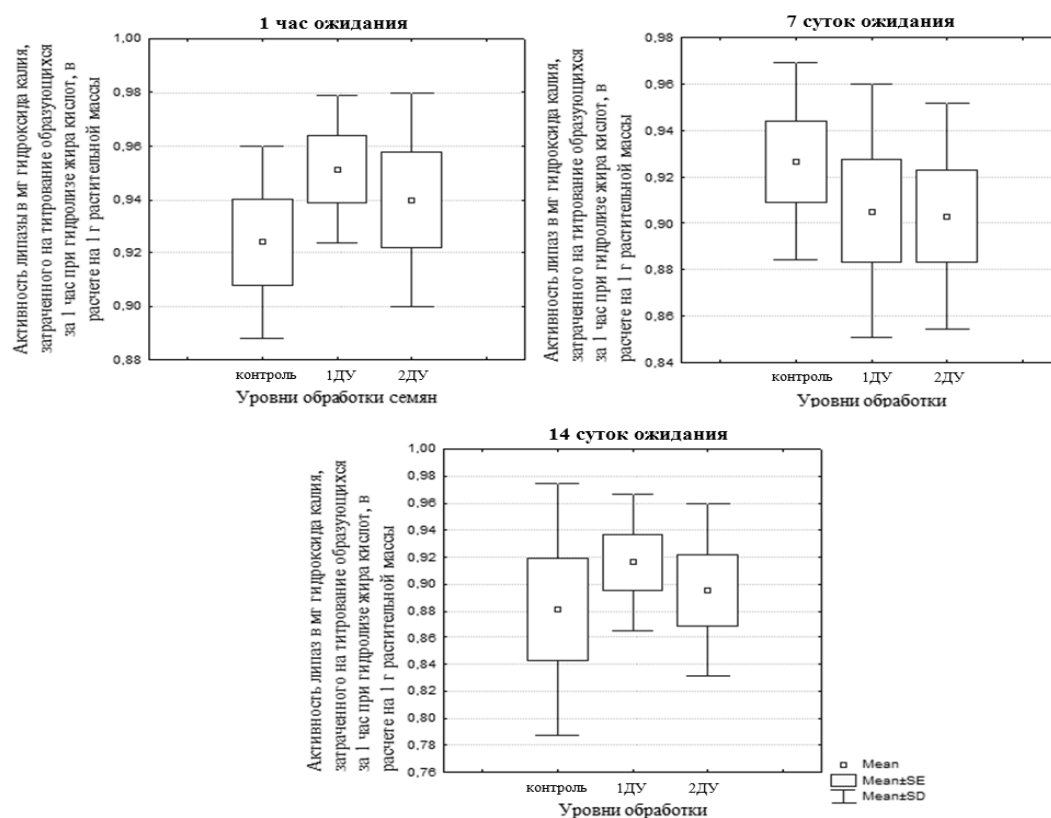


Рисунок 1 – Изменение активности липазы четырехдневных проростков озимого рапса в условиях эксперимента

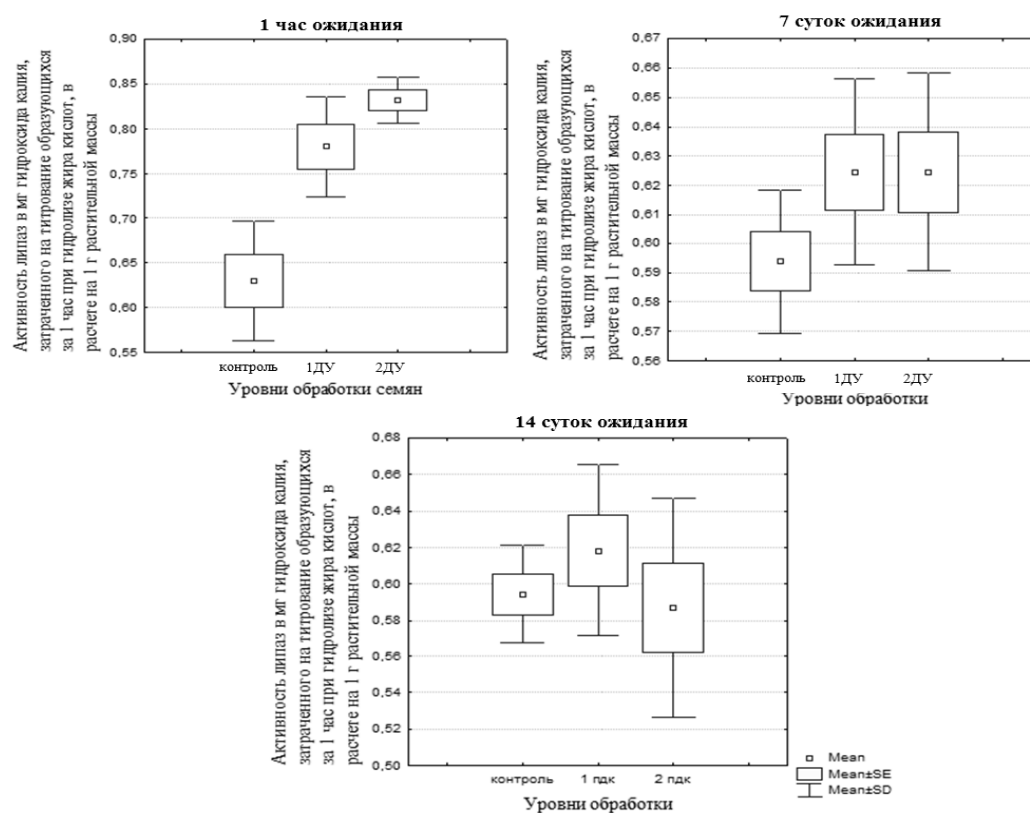


Рисунок 2 – Изменение активности липазы одиннадцатидневных проростков озимого рапса в условиях эксперимента

Определение липолитической активности маслосемян на 4 и 11 сутки проращивания позволило выявить определенную динамику. Установлено, что активность липазы в проро-

стках в контрольных вариантах опыта без предварительной обработки фунгицидным на 11 сутки проращивания снижалась в среднем на 33 % по сравнению с активностью фермента на 4 сутки проращивания.

В вариантах опыта с обработкой семян рапса препаратом «Виал-ТТ» в концентрациях 1 и 2 ДУ непосредственно перед проращиванием активность липазы на 11 сутки снизилась соответственно на 17 % и 11 % по сравнению с аналогичными показателями на 4 сутки эксперимента. Показатели активности ферментов при сроке ожидания после обработки семян до проращивания в течение 7 дней снижались на 30 % во всех вариантах опыта. В условиях обработки семян с периодом ожидания 14 дней липолитическая активность на 11 сутки проращивания по сравнению с 4-дневным периодом снизилась в среднем на 33 %, включая и контрольные варианты опыта. Однофакторный дисперсионный анализ подтверждает достоверность выявленных в эксперименте различий. Результаты статистической обработки данных представлены на рисунке 3.

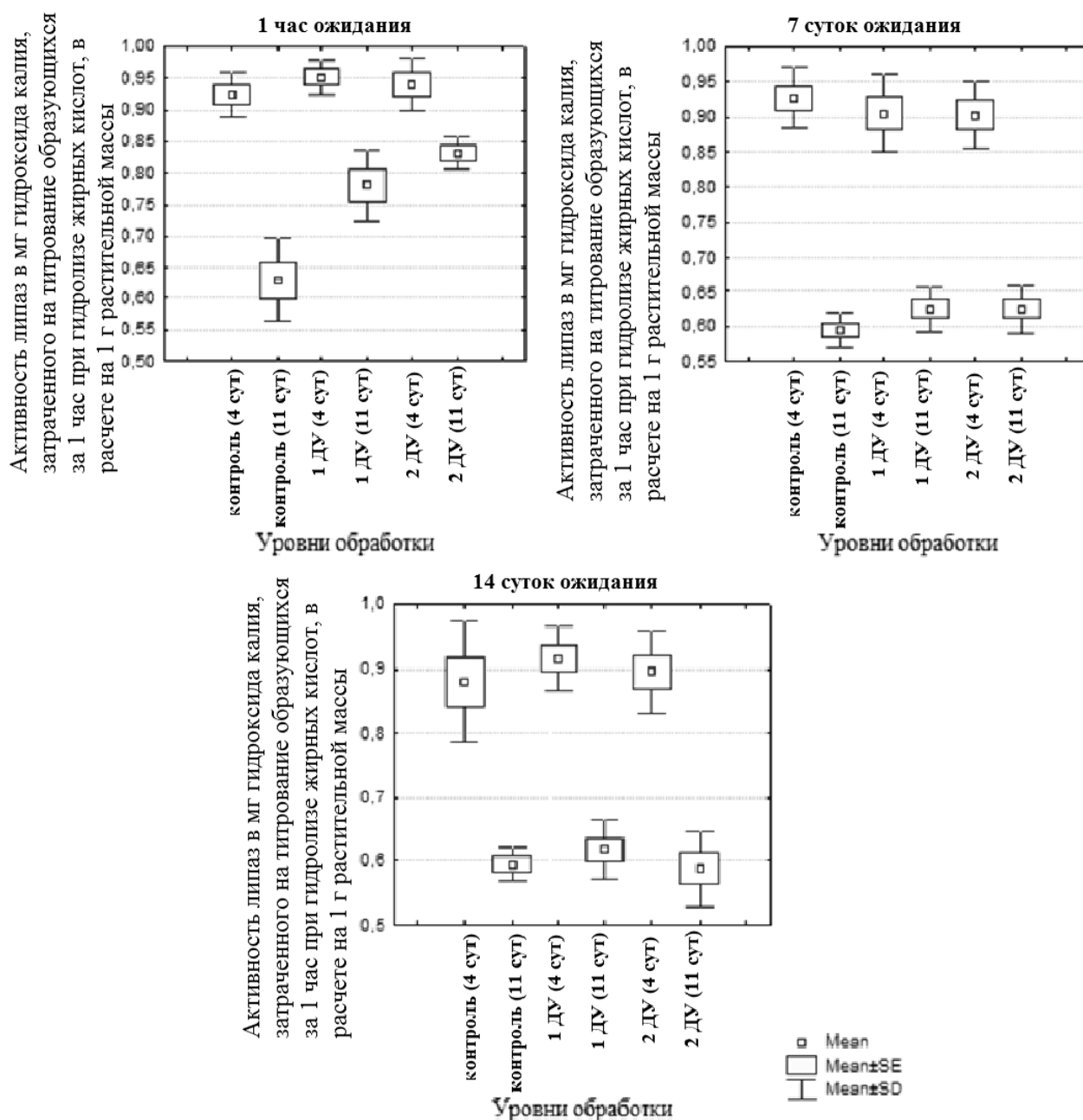


Рисунок 3 – Динамика изменения активности липазы проростков озимого рапса при проращивании

Таким образом, в условиях лабораторного эксперимента установлена сходная тенденция снижения активности липазы в ходе развития проростков озимого рапса как в контрольных вариантах опыта, так и при обработке препаратом «Виал-ТТ» на 11 сутки.

Заключение. В условиях лабораторного эксперимента изучено влияние пестицида «Виал-ТТ», включенного в государственный реестр средств защиты растений, на метаболическую активность проростков озимого рапса сорта «Зорный». Установлено, что липолитическая активность имеет общую тенденцию к снижению как в контрольных, так и в опытных группах от четвертых до одиннадцатых суток проращивания во всех вариантах опыта, что может быть связано с уменьшением концентрации субстрата, т. е. со снижением запасов липидов при прорастании.

Между опытными группами маслосемян рапса, обработанных препаратом «Виал-ТТ» в концентрации 0,5 мл/кг и 1 мл/кг, а так же контрольными группами на четвертые сутки прорастания независимо от сроков ожидания статистически значимых различий не установлено. На одиннадцатые сутки прорастания активность липазы в проростках рапса достоверно возросла при обработке препаратом «Виал-ТТ» по сравнению с контролем. Максимальные различия наблюдались при сокращении срока ожидания между посевом и обработкой до 1 часа.

Таким образом, полученные экспериментальные данные позволяют расширить представления о влиянии препаратов пестицидного действия на метаболические процессы в прорастающих маслосеменах озимого рапса.

Литература

1. Смоглей, И.Н. Необходимость совершенствования системы применения удобрений под озимый рапс в сельскохозяйственных организациях / И.Н. Смоглей, С.В. Петровский, И.В. Шибанова // Агрономия, защита растений, зоотехния, ветеринария, общественные науки: материалы XIV Международной студенческой научной конференции. – Гродно : УО «ГГАУ», 2019. – С. 77–80.
2. Котьяк, Т.М. Сравнительная оценка экономической эффективности производства озимого и ярового рапса в Республике Беларусь / Т.М. Котьяк // Современные технологии сельскохозяйственного производства: Международная научно-практич. конф. – Гродно : УО «ГГАУ», 2017. – С. 104–105.
3. Чуча, В.А. Эффективность применения инсектицидов Ф. Байер против рапсового цветоеда в посевах озимого рапса / В.А. Чуча, С.Н. Бейтюк // Защита растений: сб. научн. трудов по Материалам XX Международной студенческой научной конференции. – Гродно : УО «ГГАУ», 2019. – С. 46–48.
4. Вафина, Э.Ф. Реакция ярового рапса на предпосевную обработку семян инсектицидом и срок посева формирования урожайности / Э.Ф. Вафина, И.Ш. Фатыхов // Вести казанского государственного аграрного университета. – 2018. – Т. 13, № 4 (51). – С. 10–15.
5. Озимый рапс [Электронный ресурс]. – Октябрь 2011. – Режим доступа : https://docviewer.yandex.by/view/362145248/?*=6rKRp8ijW6piDJtrdQqq3BPGx%2B97InVybcI6Imh0dHA6Ly9zb3J0dGVzdC5ieS9yYXBzLW96aW15eS5w. – Дата доступа : 04.02.2019.
6. Никитенко, Н.И. Методические особенности определения активности липаз в семенах рапса / Н.И. Никитенко, В.Н. Леонтьев, В.С. Болтовский // Химия, технология органических веществ и биотехнология. – 2011. – № 4 (142). – С. 190–193.
7. Рахимов, М.М. Изменение активности липолитических ферментов при хранении и переработке семян хлопчатника / М.М. Рахимов, А.Х. Атауллаев, А.Х. Абдумаликов, Н.Р. Джамбаев // Масложировая промышленность. – 1976. – № 11. – С. 8–10.
8. Characteristics of lipase isolated from coconut (*Cocos nucifera* linn) seed under different nutrient treatments / B.O. Ejedegba [et al.] // African Journal of Biotechnology. – 2007. – Vol. 6 (6). – P. 723–727.
9. Новиков, Н.Н. Лабораторный практикум по биохимии растений: учеб. пособ. / Н.Н. Новиков, Т.В. Таразанова. – М. : Издательство РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева, 2012. – 97 с.

УДК [.:577.346]618.14-006.6-097:615.849.14

Реактивные изменения иммунного компонента опухолевого микроокружения эндометриоидной аденокарциномы эндометрия в ответ на гамма-облучение ткани опухоли

Д.А. Зиновкин, Э.А. Надыров

В работе представлены результаты морфометрического анализа опухолевого микроокружения, подвергнутого модуляции гамма-излучением. В качестве объекта исследования рассматривалась эндометриоидная аденокарцинома тела матки. Определялось влияние гамма облучения на развитие опухоль-опосредованных иммунных реакций.

Ключевые слова: гамма-облучение, радиобиология, опухолевое микроокружение, эндометриоидная аденокарцинома.

The paper presents the results of morphometric analysis of tumor microenvironment modulated by gamma radiation. Endometrioid adenocarcinoma of the uterus body was considered as the object of the study. The influence of gamma irradiation on the development of tumor-mediated immune reactions was determined.

Keywords: gamma-radiation, radiobiology, tumor microenvironment, endometrioid adenocarcinoma.

Введение. Опухолевое микроокружение представляет из себя систему, которая состоит из клеток злокачественной опухоли, опухоль-ассоциированных фибробластов, эндотелиальных клеток и перитцитов, образующих сосудистую сеть опухоли, иммунных клеток и внеклеточного матрикса [1]. Одну из ключевых ролей в регуляции данной системы играют Т-регуляторные и NK лимфоциты [2], [3].

Воздействие ионизирующего излучения приводит к ремоделированию опухолевого микроокружения опухоли и изменению соотношений и функций его компонентов. Несмотря на возросший в последнее время интерес к изменениям опухолевого микроокружения под действием лучевой терапии, на сегодняшний день в отечественной и зарубежной литературе не освещены радиобиологические аспекты ремоделирования опухолевого микроокружения эндометриоидной аденокарциномы (ЭА) тела матки под действием контактной гамма-лучевой терапии [4]–[6].

В данном исследовании мы предположили, что кроме непосредственного повреждения ДНК паренхиматозных опухолевых клеток гамма-излучение вызывает так же иммуномодулирующий эффект на строму опухоли.

Материалы и методы. Данное ретроспективное «случай-контроль» исследование проводилось на архивном гистологическом материале 80 пациенток с гистологически верифицированным диагнозом ЭА тела матки I–III стадии (FIGO, 2009). В группу пациенток с лучевой терапией (ЛТ) вошло 42 случая, в группу без лучевой терапии – 38. Все пациентки в группе с лучевой терапией получали 13,5 Гр в течении суток, оперативное вмешательство проводилось через 24–48 часов после облучения. Для иммуногистохимического исследования готовили срезы толщиной 3–4 мкм, которые монтировали на вымороженные и обработанные L-полилизинном предметные стекла. Иммуногистохимическую реакцию проводили на срезах, полученных с парафиновых блоков опухолей, фиксированных в формалине и прошедших обычную гистологическую проводку с применением высокотемпературных методов восстановления антигенной иммунореактивности с использованием в микроволновой печи. В данном исследовании использовали первичные поликлональные мышинные антитела к FoxP3 (разведение 1:100) для выявления регуляторных Т-лимфоцитов и к CD56 (разведение 1:150) для выявления NK-лимфоцитов (Elabscience, КНР). Визуализацию результатов иммуногистохимической реакции и контрокрашивание гематоксилином проводили с помощью набора системы визуализации антител 2-step plus Poly-HRP Anti Rabbit/Mouse IgG Detection System (Elabscience, КНР).

Подсчет FoxP3 и CD56 позитивных клеток в строме злокачественных новообразований производился с помощью микроскопа HumaScope Premium Led (Human Diagnostics, Германия) в 10 неперекрывающихся полях зрения при увеличении $\times 400$ [7], после чего производился подсчет среднего количества клеток в поле зрения и расчет количества клеток в 1 мм^2 опухоли.

Анализ нормальности распределения проводили с использованием критерия Колмогорова-Смирнова. Данные были представлены медианой, нижним и верхним квартилями. Обработку данных проводили с использованием пакета программ GraphPad Prism V 7.0. При сравнении исследуемых групп по иммуногистохимическим критериям применяли тест Манна-Уитни. Статистически значимыми считали результаты при $p < 0,05$.

Результаты и обсуждения. Известно, что FoxP3 – это фактор, который играет основную роль в Т-клеточном звене иммунной системы. Он экспрессируется регуляторными Т-клетками с иммунофенотипом CD4 + /CD25 + или CD4 + /CD25- как в цитоплазме, так и в ядре. Вышеупомянутые клетки являются иммуносупрессивными клетками, которые регулируют гомеостаз и иммунную толерантность [8].

В строме FoxP3 позитивные Т-лимфоциты располагались небольшими группами, с инфильтрацией зоны инвазии опухоли и вокруг сосудов. В группе, подвергшейся предоперационной лучевой терапии отмечалось увеличение количества FoxP3 позитивных регуляторных Т-лимфоцитов в строме ЭА тела матки, медиана составила 110,8 (69,2; 193,9) клеток/ мм^2 . В группе сравнения при микроскопии выявлялось небольшое количество FoxP3-позитивных клеток в строме опухоли, медиана была равна 27,8 (0,0; 55,4). Сравнение групп выявило статистически значимые различия ($p < 0,0001$) в количестве FoxP3-позитивных Т-регуляторных лимфоцитов в строме ЭА (рисунок).

В паренхиме FoxP3 позитивные Т-лимфоциты инфильтрировали преимущественно базальные мембраны опухолевых желез. Медиана расположенных в паренхиме FoxP3 позитивных клеток в группе с лучевой терапией составляла 110,8 (41,5; 138,5) клеток/ мм^2 , в группе сравнения – 27,7 (13,8; 55,4) клеток/ мм^2 . При сравнении групп определялись статистически значимые различия ($p < 0,0001$) в количестве FoxP3-позитивных Т-регуляторных лимфоцитов (рисунок 1).

Выраженная инфильтрация опухоли Т-лимфоцитами, по мнению ряда авторов, может быть ассоциирована с благоприятным прогнозом различных типов рака эндометрия [9]. Снижение количества Т-клеток в строме и паренхиме ЭА наиболее часто наблюдалось в случаях III–IV стадии заболевания и в группе пациенток с высоким риском рецидивов рака эндометрия. Более того, инфильтрация Т-регуляторными лимфоцитами опухоли может быть связана с прогнозом. При некоторых новообразованиях, таких как рак толстой кишки, меланомы, немелкоклеточный и мелкоклеточный рак легких, высокий уровень FoxP3 связан с плохим прогнозом [10]. Однако при раке молочной железы, простаты и желудка высокий уровень инфильтрации FoxP3 связан с хорошим прогнозом. Различия в прогнозах различных типов опухолей, вероятно, связаны с разной активацией функции FoxP3 Treg в данных случаях. Кроме того, такие противоречивые результаты могут возникнуть в результате неправильной интерпретации гетерогенной экспрессии FoxP3 при проведении молекулярно-генетического анализа, в связи с тем, что ряд опухолей (рак мочевого пузыря, колоректальный рак, рак простаты) сами могут экспрессировать данный ген [11].

Кроме того, ряд работ указывает, что FoxP3 подвергается повышению регуляции после γ -облучения, что соответствует роли FoxP3 в реакции клеток на облучение. Транскрипция FoxP3 регулируется зависимым механизмом ATF-2/JNK. Учитывая работы о том, что γ - и ультрафиолетовое излучение индуцирует транскрипцию ATF2, стоит рассмотреть вопрос о возможности способности индукции ATF2 активации FoxP3. Кроме того, FoxP3 также регулируется NFkB, который, в свою очередь, как было выявлено ранее, реагирует на ионизирующее облучение [12].

Возможно, при ЭА тела матки, как и при раке молочной железы, FoxP3 является основным регулятором клеточной реакции на двухцепочечные разрывы ДНК при гамма-облучении. Известно, что увеличение экспрессии FoxP3 ингибирует негомологичное воссоединение концов при постлучевой репарации ДНК.

Полученные в нашем исследовании данные об усилении инфильтрации Т-регуляторных клеток как в строме, так и в паренхиме опухолей, подвергшихся гамма-

облучению, могут свидетельствовать об активации данного типа клеток в результате повреждения ДНК как непосредственно опухоли (паренхиматозный компонент), так и тканей организма, формирующих десмопластическую реакцию стромы.

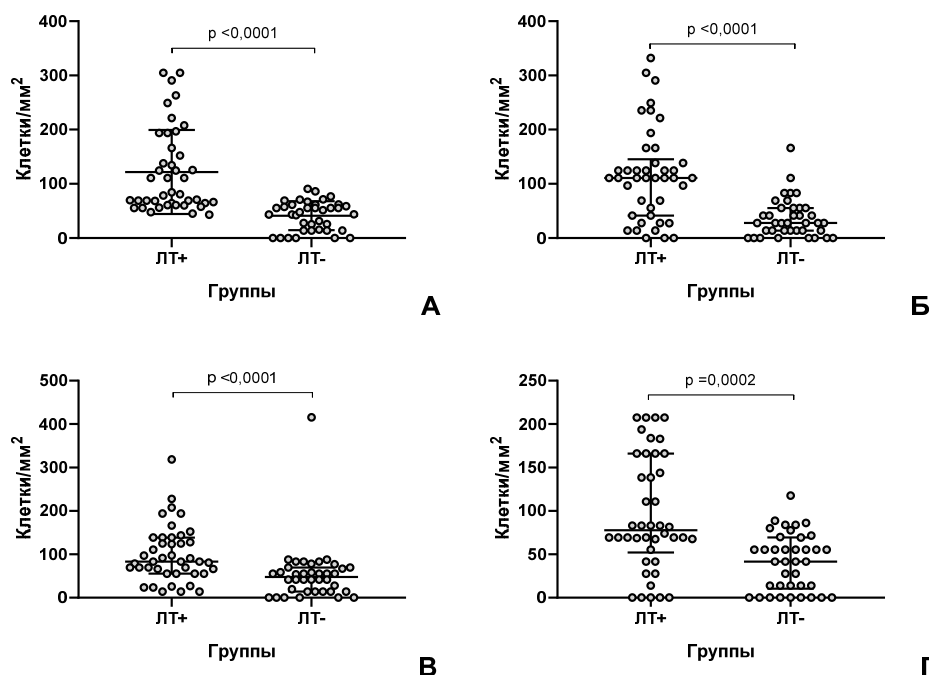


Рисунок – Характеристика групп в зависимости от: А – количества FoxP3 Т-лимфоцитов, инфильтрирующих строму опухоли; Б – количества FoxP3 Т-лимфоцитов, инфильтрирующих паренхиму опухоли; В – количества CD56-позитивных NK-лимфоцитов, инфильтрирующих строму опухоли; Г – количества CD56-позитивных NK-лимфоцитов, инфильтрирующих паренхиму опухоли

Примечание: LT+ – группа пациенток, получавших лучевую терапию; LT- – группа сравнения, не получавшая лучевую терапию.

В нашем исследовании у пациенток группы, получавшей предоперационную терапию, в строме в непосредственной близости от железистых комплексов ЭА отмечались умеренно выраженные группы CD56 позитивных NK-лимфоцитов стромы ЭА. В группе пациенток без облучения отмечались единичные слабо выраженные инфильтраты CD56 позитивных лимфоцитов.

В строме медиана количества CD56 позитивных лимфоцитов в группе с облучением составила 83,1 (55,4; 138,5) клеток/мм², в группе без лучевой терапии медиана была 47,7 (13,8; 69,2) клеток/мм². Характеристика групп представлена на рисунке 1. При сравнении групп определялись статистически значимые различия ($p < 0,0001$) в инфильтрации стромы NK-лимфоцитами.

В паренхиматозном компоненте ЭА тела матки CD56 позитивные лимфоциты располагались в просвете желез, а также инфильтрировали железистые структуры опухоли.

В паренхиме медиана количества позитивных CD56 позитивных лимфоцитов в группе с облучением составила 77,7 (55,4; 166,2) клеток/мм², в группе без облучения – 41,5 (13,8; 69,2) клеток/мм². Характеристика групп представлена на рисунке 1. При сравнении групп определялись статистически значимые различия ($p = 0,0002$) в инфильтрации паренхимы NK-лимфоцитами.

В ряде исследований показано, что NK-лимфоциты играют важную роль в элиминации опухолевых клеток, потерявших в процессе трансформации экспрессию главного комплекса гистосовместимости I. Изменение экспрессии HLA-I неоднократно наблюдалось в злокачественных опухолях, что являлось одним из механизмов уклонения опухоли от цитотоксического Т-клеточного иммунного ответа. В связи с этим, NK клетки играют важную роль в противоопухолевом контроле и уничтожении опухолевых клеток. В инфильтрате иммунных клеток NK-лимфоциты содержатся в небольшом количестве. Ряд исследований показал, что данные клетки преимущественно располагаются в строме опухоли, в местах эпителиально-

мезенхимальных контактов [13]. Распознавание НК клеток-мишеней регулируется активацией и торможением сигналов, подаваемых различными группами рецепторов на поверхности опухолевых клеток. Кроме того, НК клетки являются мощным источником цито- и хемокинов, особенно таких как IFN- γ , TNF- α и GM-CSF. В дополнение к прямому воздействию на злокачественные клетки эти цитокины могут способствовать дифференцировке, активации и рекрутированию других клеток иммунной системы в перитуморозную зону [14]. Ионизирующее излучение индуцирует экспрессию NKG2D-лигандов – активаторов рецепторов для НК-клеток и усиление инфильтрации стромы опухоли ими, что и наблюдалось нами в строме облученных ЭА [15]. Инфильтрация паренхиматозного компонента опухоли CD56 НК-лимфоцитами является непосредственной деструкцией опухолевых клеток.

Заключение. Было установлено, что гамма-облучение в дозе 13,5 Гр при предоперационной лучевой гамма-терапии приводит к увеличению количества FoxP3 и CD56 позитивных лимфоцитов как в паренхиме, так и в строме ЭА тела матки. Представленные закономерности могут быть проявлением опухоль-опосредованных иммунных реакций, возникающих при деструкции клеток злокачественной опухоли в результате ее облучения.

Литература

1. Romaniuk, A. Immune microenvironment as a factor of breast cancer progression / A. Romaniuk, M. Lyndin // *Diagn Pathol.* – 2015. – Vol. 10. – P. 79.
2. Зиновкин, Д.А. Роль воспалительного компонента опухолевого микроокружения эндометриоидной аденокарциномы тела матки при различных исходах заболевания / Д.А. Зиновкин // *Опухоли женской репродуктивной системы.* – 2016. – Т. 12, № 1. – С. 73–78.
3. Корнева, Ю.С. Взаимосвязь между морфологическими характеристиками рака толстой кишки и количеством эозинофильных гранулоцитов периферической крови как один из прогностических признаков / Ю.С. Корнева, А.Е. Доросевич // *Уральский медицинский журнал.* – 2016. – № 3 – С. 91–94.
4. Tumor-associated T-lymphocytes and macrophages are decreased in endometrioid endometrial carcinoma with MELF-pattern stromal changes / D.A. Zinovkin [et al.] // *Cancer Microenvironment.* – 2018. – P. 107–114.
5. Shurin, M.R. The Tumor Immunoenvironment / M.R. Shurin, V. Umansky, A. Malyguine. – New York : Springer, 2013. – P. 19–125.
6. Tumor-infiltration of T-lymphocytes is inversely correlated with clinicopathologic factors in endometrial adenocarcinoma / I.K. Jung [et al.] // *Obstet. Gynecol. Sci.* – 2014. – Vol. 57, № 4. – P. 266–273.
7. The presence of tumor-infiltrating FoxP3 + lymphocytes correlates with intratumoral angiogenesis in endometrial cancer / A. Giatromanolaki [et al.] // *Gynecol. Oncol.* – 2008. – Vol. 110, is. 2. – P. 216–221.
8. Immunofluorescence-detected infiltration of CD4 + FOXP3 + regulatory T cells is relevant to the prognosis of patients with endometrial cancer / W. Yamagami [et al.] // *Int. J. Gynecol. Cancer.* – 2011. – Vol. 21, № 9. – P. 1628–1634.
9. Increased natural killer cells and decreased regulatory T cells are seen in complex atypical endometrial hyperplasia and well-differentiated carcinoma treated with progestins / A.K. Witkiewicz [et al.] // *Hum. Pathol.* – 2010. – Vol. 41, № 1. – P. 26–32.
10. Husseinzadeh, N. Role of Toll-like receptors in cervical, endometrial and ovarian cancers: a review / N. Husseinzadeh, S. M. Davenport // *Gynecologic Oncology.* – 2014. – Vol. 135, is. 2. – P. 359–363.
11. Ozpiskin, O.M. Immune targets in the tumor microenvironment treated by radiotherapy / O.M. Ozpiskin, L. Zhang, J.J. Li // *Theranostics.* – 2019. – Vol. 9, is. 5. – P. 1215–1231.
12. Early recurrence of early stage endometrioid endometrial carcinoma: possible etiologic pathways and management options / C. Iavazzo [et al.] // *Maturitas.* – 2014. – Vol. 78, № 3. – P. 155–159.
13. Comparison of outcomes in patients with early-stage mucinous endometrial cancer and those with endometrioid endometrial cancer, with and without adjuvant therapy / S. Owusu-Darko [et al.] // *J. Reprod. Med.* – 2014. – Vol. 59. – P. 527–533.
14. Cancer immunoediting: elimination, equilibrium and immune escape in solid tumors / M. Klink. – New York : Springer, 2013. – P. 23–76.
15. Waldhauer, I. NK cells and cancer immunosurveillance / I. Waldhauer, A. Steinle. // *Oncogene.* – 2008. – Vol. 27. – P. 5932–5943.

Содержание бора в почвах Гомельской области

А.Ф. КАРПЕНКО

Анализируются результаты исследований определения содержания бора в пахотной и луговой почвах в районах Гомельской области, выполненных с четырёхлетним интервалом. Установлено колебание средневзвешенных показателей бора в 2013 г. в пахотной почве в пределах 0,44–0,72 мг/кг, в 2017 г. – 0,49–0,76 мг/кг почвы, в луговой – соответственно 0,52–0,83 и 0,59–0,94 мг/кг почвы. Отмечается увеличение количества пахотных площадей с содержанием в почве бора менее 0,3 мг/кг с 0,6 % до 5,6 % и луговых – с 0,7 % до 2,5 %.

Ключевые слова: почвы, бор, содержание.

The results of studying borum concentrations in cultivated soils and grasslands in various districts of Gomel region are analyzed. The studies were carried out with a four-year interval. The weighed means of borum concentrations in arable soils and grasslands were found to be in the range of 0,44–0,72 and 0,52–0,83 mg/kg in 2013, and 0,49–0,76 and 0,59–0,94 mg/kg in 2017, respectively. The areas of cultivated and meadow soils with borum concentrations of < 0.3 mg/kg are gradually increasing, improving from 0,6 % to 5,6 % and from 0,7 % to 2,5 %, respectively.

Keywords: soils, borum, concentration.

Введение. Почвы и растения — важные компоненты биологической среды, которая может быть в целом охарактеризована как огромная, сложная и постоянно изменяющаяся часть биосферы [1], [2]. Распространенность микроэлементов в почвах влияет на поступление этих элементов в живые организмы и поэтому имеет большое значение в исследованиях в области охраны окружающей среды и производства продуктов питания [3], [4].

Среди почвенных микрокомпонентов питания растения требовательны к содержанию в них бора. Бор – единственный неметалл в III группе. В земной коре он распределен неоднородно. Содержание бора в породах возрастает с их кислотностью. При химическом выветривании пород бор легко переходит в раствор, образуя различные анионы.

Поведение бора в почвах широко изучалось. Показано, что бор гораздо сильнее сорбируется почвой, чем другие анионы. Тип сорбции бора на поверхности глиен сходен больше с сорбцией катионов, нежели анионов. Преобладающими механизмами в кислых и нейтральных почвах является адсорбция бора кислородными и гидроксильными радикалами на поверхности алюмосиликатов и путем включения в их межслоевые или структурные позиции. Описаны различные механизмы реакций бора с компонентами почв. Эти реакции в основном зависят от pH, причем максимум всегда наблюдается при pH выше 7. Концентрация бора в почвенных растворах относительно высока и может составлять 67–3000 мкг/л [5].

Среди микрокомпонентов питания бор считается наиболее подвижным элементом в почвах. Его передвижение в почве зависит от потока воды, с которой он вымывается вниз по почвенному профилю.

В большинстве почв бор сравнительно дефицитный элемент. Однако при избыточном его внесении с удобрениями почвы могут содержать опасные количества этого элемента. Сточные воды, используемые для полива, и выбросы в атмосферу золы от сжигания топлива могут также быть важным источником загрязнения почв бором.

В почве бор взаимодействует с другими минеральными элементами. Особенно часто обнаруживается взаимосвязь между бором и кальцием. Растения развиваются нормально при условии, что существует определенный баланс как в поступлении бора и кальция, так и в концентрации их в тканях. Обычно в кислых почвах часто отмечается дефицит бора, вызванный известкованием. Показано, что известкование приводит к пониженной адсорбции бора, поэтому токсичное действие этого элемента может быть ослаблено или даже предотвращено внесением кальция в почву. Это явление объясняется как реакциями в почвенной среде, так и метаболическими процессами.

Считается, что бор и фосфор аналогично взаимодействуют с группой ОН-, поэтому потребление этих элементов растениями сходно. Потребление и распределение фосфора в растениях во многом зависит от концентрации бора, так как она снижает подвижность фосфора в корнях.

Растворимые в почве формы бора легко доступны для растений, которые могут потреблять как недиссоциированную борную кислоту, так и другие формы бора, присутствующие в питающем растворе. В метаболизме растений бор играет незаменимую роль, особенно у высших растений. Его функции у растений связаны с процессами метаболизма углеводов и переносом сахаров через клеточные мембраны; синтезом нуклеиновых кислот и фитогормонов; образованием клеточных стенок; развитием растительных тканей [6].

Для некоторых видов растений характерны дефицит бора или его недостаточность для таких сельскохозяйственных культур как, сахарная и кормовая свекла, сельдерей, подсолнечник, бобовые, яблони. Симптомы недостаточности бора обычно проявляются в задержке и ненормальном развитии ростовых точек, голубовато-зеленой окраске молодых листьев и ухудшении образования плодов.

С другой стороны, некоторые виды растений обладают низкой потребностью в боре и могут быть чувствительны к повышенным уровням его содержания, даже если последние лишь незначительно превышают необходимые для нормального роста. Для таких растений токсичное действие бора может возрасти при интенсивном применении борсодержащих удобрений.

На чувствительные к бору сельскохозяйственные культуры (например, зерновые) оказывают влияние даже низкие его концентрации в почвенных растворах (около 1 т/л). Многие другие культуры могут быть нечувствительны и к 5 мг/л, но 10–15 мг/л токсичны даже для толерантных видов [7].

Цель работы – провести анализ результатов исследований на содержание бора в почвах сельскохозяйственных районов Гомельской области [8].

Материал и методы исследований. Материалы работы – результаты многолетних исследований почв Гомельской области. Методы исследований – классические методы агрохимии и почвоведения. Кроме того, были также использованы общенаучные методы – анализа и синтеза, индукции и дедукции, аналогии и моделирования, абстрагирования и конкретизации.

Результаты исследований и их обсуждение. В рамках Министерства сельского хозяйства и продовольствия в республике изучением агрохимических показателей почв занимаются областные проектно-изыскательские станции химизации сельского хозяйства (ОПИСХ), которые располагают необходимым для этого оборудованием и персоналом. Например, Гомельская ОПИСХ строит свою работу таким образом, чтобы один раз в четыре года обследовать почвы всех районов области на содержание минеральных веществ, в том числе бора.

Станцией в 2017 г. было повторено изучение агрохимических показателей почв сельскохозяйственных земель шести районов Гомельской области, где до этого в 2013 г. оно проводилось. На периодичности обследования и изучении агрохимических показателей строится многолетняя работа предприятия. В число шести районов входили Октябрьский, Мозырский, Лоевский, Буда-Кошелевский, Кормянский и Чечерский. В 2013 г. в этих районах было обследовано 174,3 тыс. га, в 2017 г. – 187,2 тыс. га пахотных земель сельскохозяйственных угодий в 52 сельхозпредприятиях (таблица 1).

Как следует из показателей таблицы 1 по содержанию бора, почвы сельскохозяйственных угодий распределяются на группы с применением интервальной градации показателей. Например, для дерново-подзолистых почв установлены интервалы показателей бора менее 0,30; 0,31–0,70; 0,71–1,00 и более 1,01 мг/кг почвы. Анализ результатов исследований свидетельствует, что от 57,5 % до 90,6 % площадей пахотных земель в настоящее время содержат бор в пределах от 0,31 до 0,70 мг/кг почвы. В то же время, если удельный вес площадей первого интервала (менее 0,3 мг/кг почвы) в 2013 г. составил 0,6 % от всей площади обследованных площадей, то в 2017 г. площадей в данном интервале увеличилось в 9,3 раза. Также увеличилось количество площадей в третьем интервале с 10,2 % до 16,3 % и в четвертом интервале с 5,6 % до 6,2 %. Во втором интервале (0,31–0,70 мг/кг бора в почве) произошло уменьшение площадей на 11,7 % с 83,6 до 71,9 %. Из этого следует, что за счёт интервала 0,31–0,70 мг/кг бора в почве произошло увеличение на 5 % площадей в интервале менее 0,3 мг/кг бора в почве и на 6,7 % увеличение количества площадей в интервалах более 0,71 мг/кг почвы.

Таблица 1 – Агрохимическая характеристика пахотной почвы шести районов Гомельской области по содержанию бора

Наименование района	Год обследования	Площадь, га	Содержание бора, мг/кг почвы							
			менее 0,30 ^х		0,31–0,70		0,71–1,00		более 1,01	
			менее 1,09 ^{хх}		1,10–2,09		2,10–3,09		более 3,10	
			га	%	га	%	га	%	га	%
Октябрьский	2013	23791	280	1,2	15443	64,9	3970	16,7	4098	17,2
	2017	27203	699	2,6	15631	57,5	4471	16,4	6402	23,5
	+-	3412	419	1,4	188	-7,4	501	-0,3	2304	6,3
Мозырский	2013	21808	64	0,3	21123	96,8	478	2,2	143	0,7
	2017	22864	1058	4,6	20698	90,6	1051	4,6	57	0,2
	+-	1056	994	4,3	-425	-6,2	573	2,4	-86	-0,5
Лоевский	2013	23292	138	0,6	17446	74,9	3473	14,9	2235	9,6
	2017	23023	2106	9,1	17106	74,4	2843	12,3	968	4,2
	+-	-269	1968	8,5	-340	-0,5	-630	-2,6	-1267	-5,4
Буда-Кошелевский	2013	51919	135	0,3	44720	86,1	5919	11,4	1145	2,2
	2017	59756	2947	4,9	38987	65,2	14505	24,3	3317	5,6
	+-	7837	2812	4,6	-5733	-20,9	8586	12,9	2172	3,4
Кормянский	2013	30834	240	0,8	27311	88,5	2864	9,3	419	1,4
	2017	31667	2554	8,1	22408	70,7	6257	19,8	448	1,4
	+-	833	2314	7,3	-4903	-17,8	3393	10,5	29	0
Чечерский	2013	22639	108	0,5	20501	90,6	1501	6,6	529	2,3
	2017	22686	998	4,4	16551	73,0	4593	20,2	544	2,4
	+-	47	890	3,9	-3950	-17,6	3092	13,6	15	0,1

Примечание: х – градация для минеральных почв, хх – градация для торфяных почв.

Определение средневзвешенного содержания бора в пахотной почве в целом по шести районам на 0,02 мг/кг было выше в сравнении с предыдущим обследованием данных почв (рисунк 1).

Исключение составлял лишь показатель в Лоевском районе, где он был ниже на 0,08 мг/кг почвы. Колебание средневзвешенного показателя по отдельным районам в 2013 г. находилось в пределах 0,44–0,72 мг/кг, в 2017 г. – 0,49–0,76 мг/кг почвы.

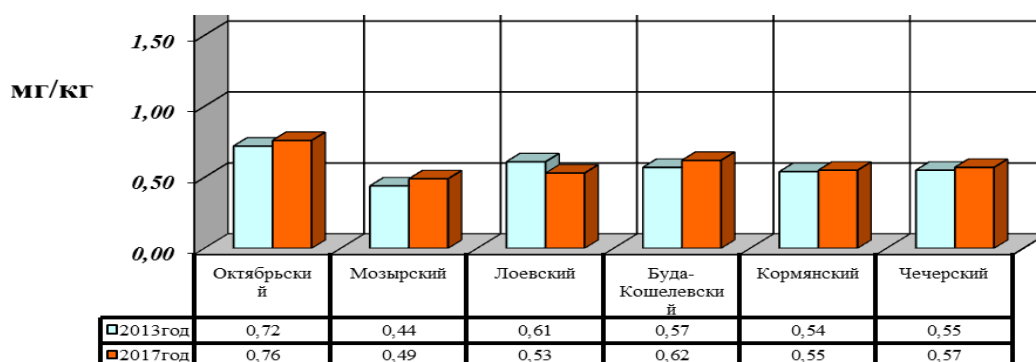


Рисунок 1 – Средневзвешенное содержание бора в пахотной почве обследованных районов в 2013 и 2017 гг.

Одновременно с пахотными почвами обследовались и луговые почвы (таблица 2). С этой целью были отобраны пробы почвы луговых земель на площади 66,97 тыс. га в 2013 г. и 57,0 тыс. га в 2017 г.

Распределение площадей по группам в соответствии с удельной концентрацией бора в почве показало, если в 2013 г. в первую группу их входило 0,7 %, во вторую группу 67,6 %, третью группу 16,3 % и четвертую группу 15,4 %, то в 2017 г. – соответственно 2,5 %, 55,2 %, 21,7 % и 20,6 %. Из этих показателей следует, что количество луговых почв с самым низким содержанием бора (первая группа) приросло на 1,8 %. Отмечен прирост площадей в

третьей на 5,4 % и в четвёртой группе на 5,2 %. Увеличение количества площадей в перечисленных группах произошло за счёт их снижения на 12,4 % во второй группе. Обращает на себя внимание тот факт, что если в 2013 г. в Лоевском и Чечерском районах угодий с содержанием бора в почве менее 0,3 мг/кг не было обнаружено, то уже в 2017 г. таких площадей установлено в количестве 462 га и 51 га соответственно.

Сравнение количества почв пахотных и луговых площадей по содержанию бора свидетельствует, что если в 2013 г. 0,6–0,7 % пахотных и луговых почв находилось в первой группе (было примерно одинаковое количество), то в 2017 г. – уже 5,6 % пахотных и 2,5 % луговых. Это говорит о том, что произошло снижение содержания бора в обоих видах почв, причём в пахотной – в 2,2 раза больше, чем в луговой.

Таблица 2 – Агрохимическая характеристика луговой почвы шести районов Гомельской области по содержанию бора

Наименование района	Год обследования	Площадь, га	Содержание бора, мг/кг почвы							
			менее 0,30 ^х		0,31–0,70		0,71–1,00		более 1,01	
			менее 1,09 ^{хх}		1,10–2,09		2,10–3,09		более 3,10	
			га	%	га	%	га	%	га	%
Октябрьский	2013	12896	275	2,1	5986	46,4	3223	25,0	3412	26,5
	2017	10574	176	1,7	3951	37,4	2263	21,4	4184	39,5
	±	–2322	–99	–0,4	–2035	–9,0	–960	–3,6	772	13
Мозырский	2013	7770	93	1,2	6720	86,4	618	8,0	339	4,4
	2017	7990	287	3,6	5873	73,5	1425	17,8	405	5,1
	±	220	194	2,4	–847	–12,9	807	9,8	66	0,7
Лоевский	2013	8263	0	0,0	4874	59,0	1785	21,6	1604	19,4
	2017	9085	462	5,1	5909	65,1	1475	16,2	1239	13,6
	±	822	462	5,1	1035	6,1	–310	–5,4	–365	–5,8
Буда-Кошелёвский	2013	24205	189	0,8	15502	64,0	4458	18,4	4056	16,8
	2017	17233	334	1,9	7441	43,3	4488	26,0	4970	28,8
	±	–6972	145	1,1	–8061	–20,7	30	7,6	914	12
Кормянский	2013	6627	17	0,3	4887	73,7	1029	15,5	694	10,5
	2017	5030	86	1,7	2386	47,4	1524	30,3	1034	20,6
	±	–1597	69	1,4	–2501	–26,3	495	14,8	340	10,1
Чечерский	2013	7113	0	0,0	5429	76,3	646	9,1	1038	14,6
	2017	7121	51	0,7	4607	64,7	1300	18,3	1163	16,3
	±	8	51	0,7	–822	–11,6	654	9,2	125	1,7

Примечание: х – градация для минеральных почв, хх – градация для торфяных почв.

Изменение средневзвешенных показателей содержания бора через четырехлетний период на почвах улучшенных луговых угодий приведено на рисунке 2. Так, только в Лоевском районе данный показатель в 2017 г. был меньше на 0,1 мг/кг почвы, а в Октябрьском районе он увеличился на 0,11 мг/кг, Мозырском районе – на 0,07 мг/кг почвы, в Буда-Кошелёвском – на 0,17 мг/кг почвы, в Кормянском – на 0,13 мг/кг почвы и в Чечерском районе – на 0,01 мг/кг почвы. Колебания средневзвешенного показателя по отдельным районам в 2013 г. находилось в пределах 0,52–0,83 мг/кг, в 2017 г. – 0,59–0,94 мг/кг почвы. Средневзвешенное содержание в луговой почве бора в 2013 г. было в количестве 0,70 мг/кг почвы, в 2017 г. – 0,77 мг/кг почвы или было больше на 0,07 мг/кг почвы.

Сравнение изменения средневзвешенных показателей содержания бора в пахотной и луговой почвах свидетельствует, что если за четырёхлетний период на пахотной почве прирост показателя составил 0,02 мг/кг почвы, то на луговых угодьях – 0,07 мг/кг. Следовательно, скорость накопления бора в луговой почве оказалась более чем в 3,5 раза высокой в сравнении с пахотной почвой.

Содержание бора в пахотных почвах интенсивно исследовалось во всем мире. Суммарные содержания бора в поверхностном слое почв изменяются от 1 до 467 мг/кг при средних значениях 9–85 мг/кг. Самые низкие его концентрации установлены в песчаных и супесчаных почвах, а наивысшие – в солончаках [5].

Закключение. Бор относится к минеральным элементам, имеющим большое значение в развитии и росте растений. Основным источником бора для растений является почва. Анализ результатов исследований по содержанию бора в почве сельскохозяйственных районов Гомельской области свидетельствует о колебании его средневзвешенных показателей в 2013 г. в пахотной почве в пределах 0,44–0,72 мг/кг, в 2017 г. – 0,49–0,76 мг/кг, в луговой – соответственно 0,52–0,83 и 0,59–0,94 мг/кг. Средневзвешенное содержание бора в луговой почве в 2013 г. имело значение на уровне 0,70 мг/кг, через четыре года – 0,77 мг/кг, в пахотной почве соответственно – 0,57 и 0,59 мг/кг почвы. Следовательно, за четырёхлетний период на пахотной почве прирост показателя составил 0,02 мг/кг почвы, на луговых угодьях – 0,07 мг/кг.

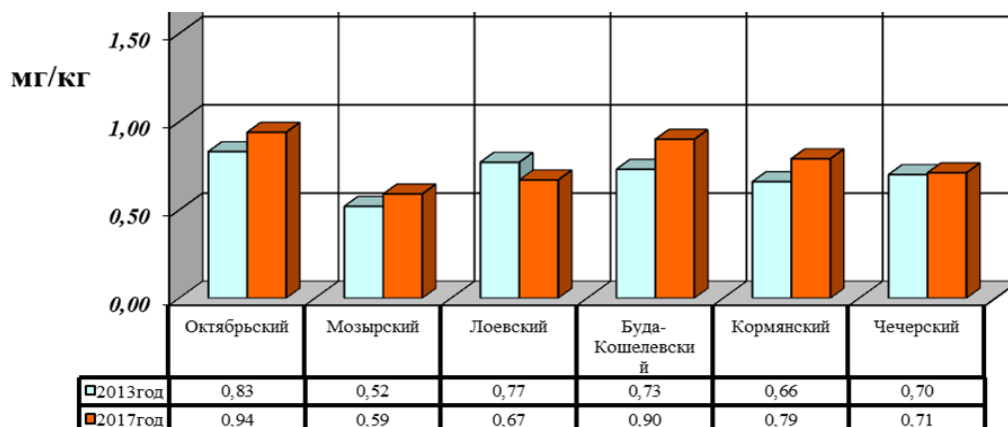


Рисунок 2 – Средневзвешенное содержание бора в луговой почве обследованных районов в 2013 и 2017 гг.

Наблюдается перераспределение количества площадей с содержанием бора 0,31–0,70 мг/кг в сторону с более низким содержанием в почве бора и в сторону с более высоким его содержанием. Так, в 2013 г. 0,6 % обследованных площадей пахотных почв имели удельную концентрацию бора менее 0,3 мг/кг почвы, то по состоянию на 2017 г. уже 5,6 %, соответственно луговых почв – с 0,7 % до 2,5 %. Прирост в 2017 г. пахотных площадей с содержанием бора выше 0,71 мг/кг составил 6,7 %, луговых 10,6 %.

Литература

1. Подоляк, А.Г. Научные аспекты сельскохозяйственного производства в постчернобыльских условиях / А.Г. Подоляк, В.В. Валетов, А.Ф. Карпенко. – Мозырь : МГПУ им. И.П. Шамякина, 2017. – 240 с.
2. Кормопроизводство : учебник для студентов высших учебных заведений по агрономическим специальностям / А.А. Шелюто [и др.] ; под ред А.А. Шелюто. – Минск : ИВЦ Минфина, 2009. – 472 с.
3. Георгиевский, В.И. Минеральное питание животных / В.И. Георгиевский, Б.Н. Анненков, В.Т. Самохин. – М. : Колос, 1979. – 471 с.
4. Карпенко, А.Ф. Эколого-экономические проблемы агропроизводства Гомельской области после Чернобыльской катастрофы: монография / А.Ф. Карпенко. – Брянск : Дельта, 2012. – 258 с.
5. Кабата-Пендиас, А. Микроэлементы в почвах и растениях / А. Кабата-Пендиас, Х. Пендиас ; пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – С. 118–135.
6. Школьник, М.Я. Основная концепция физиологической роли бора в растениях / М.Я. Школьник // Физиология растений. – 1974. – Вып. 21. – С. 174.
7. Алиханова, О.И. Токсическое действие бора на растения / О.И. Алиханова // Агрохимия. – 1980. – №7. – С. 98.
8. Рекомендации по оптимизации системы применения удобрений под многолетние злаковые и бобово-злаковые травосмеси на загрязненной радионуклидами торфяных почвах / РНИУП «Институт радиологии» ; подгот.: А.Г. Подоляк [и др.]. – Минск : Институт радиологии, 2012. – 40 с.

Цитогенетические эффекты, индуцируемые у *Allium cepa* L. бета-лактамными антибиотиками и 6-бензиламинопурином

И.И. КОНЦЕВАЯ

Полученные данные свидетельствуют, что бета-лактамные антибиотики цефотаксим и аугментин способны проникать в активно пролиферирующие клетки высших растений и изменять скорость вступления их в митоз и нормальное протекание процессов деления. Тестируемые вещества повышают процент патологических митозов в клетке в 1,4–3,0 раза по сравнению со значением в контроле. Во всех вариантах опыта доминирует патология «забегание/отставание хромосом» в анафазе митоза. Установлено, что цефотаксим и цитокинин 6-БАП оказывали выраженное статмокинетическое воздействие.

Ключевые слова: Allium-тест, митоз, патология митоза, β-лактамные антибиотики, 6-бензиламинопурин, микроскопические параметры.

The data obtained indicate that beta-lactam antibiotics cefotaxime and augmentin are able to penetrate actively proliferating cells of higher plants and change the rate of their entry into mitosis and the normal course of division processes. Test substances increase the percentage of pathological mitoses in the cell 1,4–3,0 times as compared with the value in the control. In all variants of the experiment, the pathology «chromosome run-in/lagging» in anaphase of mitosis dominates. It was established that cefotaxime and cytokinin 6-BAP had a pronounced statmokinetic effect.

Keywords: Allium-test, mitosis, mitosis pathology, β-lactam antibiotics, 6-benzylaminopurine, microscopic parameters.

Введение. Исследования по влиянию антибиотиков на клеточные культуры различных сельскохозяйственных растений довольно многочисленны [1]. Показан как стимулирующий эффект антибиотиков на рост культуры клеток и тканей растений, так и представлены сведения о негативном влиянии антибиотиков на клеточном и молекулярном уровнях. Таким образом, есть существенная потенциальная опасность антибиотиков для клеток эукариотического организма, и эта опасность учитывается в меньшей степени, чем должно быть. Имеются работы по цитогенетическому исследованию эффекта антибиотиков на клетки высших организмов в тест-системах, предложенных Всемирной организацией здравоохранения (ВОЗ) [2], [3].

Антибиотики – ксенобиотики, которые обладают антибактериальным действием. Поскольку в культуре *in vitro* растений тестируемые антибиотики проявляют морфологическую и регенерационную активность [1], [4], мы предполагаем, что некоторые из них проявляют активность как биологически активные вещества, в частности, цитокинины.

Актуальным вопросом сегодня является изучение влияния побочных свойств антибиотиков, оказываемых на эукариотический организм, на который происходит воздействие. Единично синтезированные вещества могут вызывать изменения генетического аппарата, приводя к неминуемым как положительным, так и отрицательным последствиям.

В настоящее время существует ряд современных молекулярно-биологических тестов, но в силу высокой технологической сложности и стоимости их применение оказывается ограниченным. Наблюдения за особенностями корневой системы лука обыкновенного (*Allium cepa* L.) [5] показали, что это растение может быть использовано как инструмент для обнаружения потенциально генотоксичных соединений. В качестве показателей цито- и генотоксичности корневой меристемы лука согласно методике, предлагаемой ВОЗ [6], были выбраны длина и количество корешков, митотическая активность, доля аберрантных клеток. Результаты тестов с *A. cepa* имеют корреляцию с другими тестами на животных, растениях и микроорганизмах, а также могут быть экстраполированы на человека [6].

Цель работы: изучить цитогенетические эффекты, индуцируемые у *Allium cepa* L. бета-лактамными антибиотиками и цитокинином 6-бензиламинопурином (6-БАП).

Материал и методы исследования. Исследование ответных реакций растений лука обыкновенного в условиях действия водных растворов антибиотиков и цитокинина 6-БАП выполняли с помощью *Allium*-теста (рисунок 1) [5], [7]. В качестве контроля использовали водопроводную воду. Растворы антибиотиков также готовили на водопроводной воде [5].

Луковицы, необходимые для постановки опыта, были приобретены в специализированном магазине, сорт лука обыкновенного «Стурон».



Рисунок 1 – Этап проращивания луковиц в *Allium*-тесте: а – контроль; б – опыт

Тестировали следующие антибиотики: цефотаксим (РУП «Борисовский завод медицинских препаратов», Беларусь) в концентрации 500 мг/л; аугментин («СмитКляйн Бичем Фармасьютикалз», Великобритания) – 800 мг/л. При выборе концентраций антибиотиков исходили из информации, предлагаемой PhytoTechnology Laboratories (USA) [8]. В качестве цитокининов исследовали 6-БАП – 5,0 мг/л.

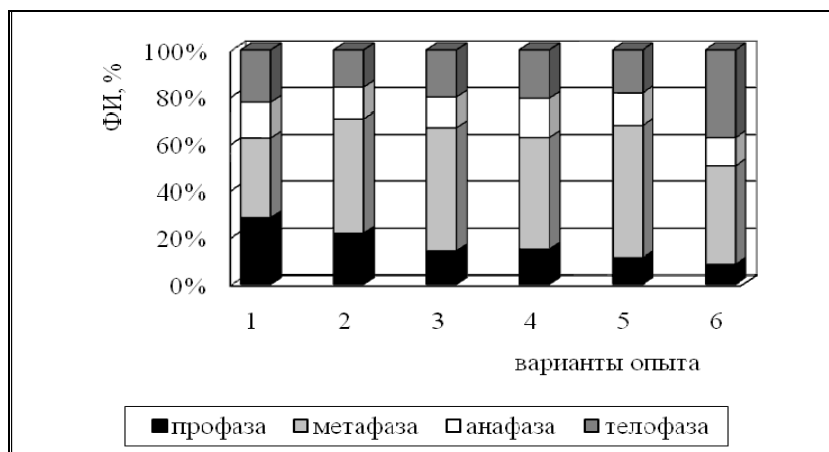
Давленные препараты для цитогенетического анализа, окрашенные ацетогематоксилином, изготавливали по общепринятой методике [9].

Анализировали по 10–30 проростков в варианте. В каждом препарате учитывали все клетки на стадии профазы, метафазы, анафазы и телофазы. К стадии метафазы относили клетки на стадии прометафазы. Для выявления стадии митоза, на которой происходит митотический блок, подсчитывали относительную продолжительность фаз митоза. Для определения возможной задержки митоза на стадии метафазы использовали метафазно-профазный индекс (МПИ) [9], [10]. Патологию митоза (ПМ) подсчитывали как отношение числа клеток с нарушениями митоза к общему числу делящихся клеток [9] и классифицировали отдельно для каждого корешка по И.А. Алову с незначительной модификацией [10]. Просмотр препаратов осуществляли на компьютеризированной кариологической станции, оснащенной микроскопом Leica DMR при увеличении $40\times 10\times 1,5$ или микроскопе Leica Gallen III (Германий) при увеличении 40×10 . По каждому варианту было просмотрено не менее 10 000 клеток.

Статистическую обработку полученных результатов исследований проводили с помощью пакета прикладного программного обеспечения Microsoft Excel и «Statsoft (USA) Statistica v.7.0». Для данных, подчиняющихся нормальному закону распределения, использовали t-критерий Стьюдента для попарных сравнений. Нулевую гипотезу отклоняли при уровне статистической значимости $p < 0,05$ [11].

Результаты и их обсуждение. Расчет различных типов митотического индекса и определение долей делящихся клеток (фазных индексов (ФИ) [12]) необходимы для регистрации времени прохождения клетками различных стадий митоза, выявления возможной задержки клеток на какой-либо стадии вследствие повреждения цитогенетических структур клетки под действием стрессовых факторов.

Изучение доли клеток на стадии профазы показало, что по сравнению с контролем во всех опытных вариантах она снижается, соответственно, с 28,41 % до 8,18 % (рисунок 2).



Варианты опыта: 1 – контроль; 2 – 6-БАП, 5,0 мг/л; 3 – цефотаксим, 500,0 мг/л; 4 – цефотаксим, 500,0 мг/л + 6-БАП, 5,0 мг/л; 5 – аугментин, 800,0 мг/л; 6 – аугментин, 800,0 мг/л + 6-БАП, 5,0 мг/л

Рисунок 2 – Влияние тестируемых веществ на фазный индекс

В тоже время увеличилась доля клеток на стадии метафазы во всех опытных вариантах. Наиболее существенно по сравнению с контролем метафазный индекс возрос в 1,7 раза в варианте «аугментин, 800 мг/л» (рисунок 2). Накопление клеток на стадии метафазы свидетельствует о блокировании дальнейшего протекания митоза в точке контроля «метафаза-анафаза» [13]. Это дает основание рассматривать изменение времени прохождения клетками данной стадии митоза как включение механизма адаптации к стрессовым факторам и поддержания гомеостаза клеточной популяции.

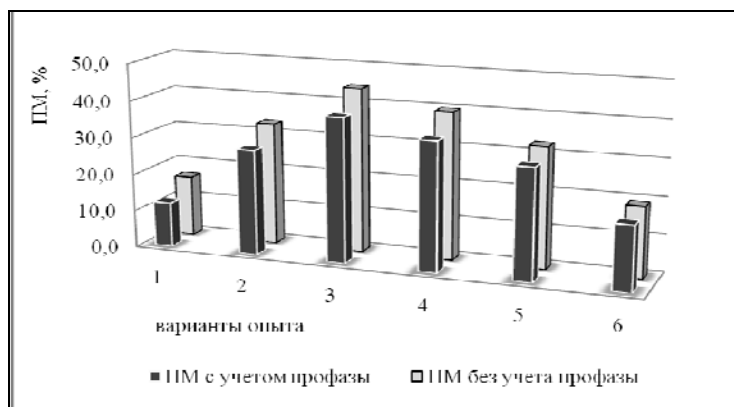
Доля клеток на стадии анафазы возросла с 15,12 % в контроле до 16,61 % в варианте «6-БАП, 5,0 мг/л + цефотаксим, 500 мг/л». В остальных опытных вариантах данный показатель, наоборот, уменьшается (рисунок 2).

Значение телофазного индекса в большинстве опытных вариантов сопоставимо с контрольной цифрой. Исключение составляет вариант «6-БАП, 5,0 мг/л + аугментин, 800 мг/л», когда доля клеток на стадии телофазы увеличилась по сравнению с контролем в 1,6 раза (рисунок 2).

Следует отметить, что комбинация цитокинина 6-БАП с цефотаксимом незначительно повлияла на прохождение отдельных фаз митоза. В тоже время сочетание 6-БАП с аугментином способствовало снижению доли клеток в телофазе, метафазе и анафазе, а на стадии телофазы, наоборот, оказывала содействие в существенном повышении (рисунок 2). Необходимо напомнить, что цитокинины стимулируют экспрессию специфического циклина и ускоряют переход от фазы G_2 к митозу. Однако на разных стадиях клеточного цикла синтезируются разные циклины, которые к окончанию митоза быстро разрушаются протеиназами [14], [15]. Вышесказанное объясняет распределение фазных индексов при использовании 6-БАП (рисунок 2).

Таким образом, при рассмотрении фазных индексов отмечено индуцирование тестируемыми веществами такой патологии митоза, как задержка митоза в метафазе, что связано с повреждением митотического аппарата. Об этом свидетельствует и расчет метафазно-профазного индекса по результатам эксперимента. Отмечено, что тестируемые химические соединения в опытных вариантах способствуют увеличению МПИ в 3–6 раз по сравнению со значением в контроле.

Патологический митоз является одним из способов возникновения мутаций и развития анеуплоидии [10]. Результаты анализа показали, что тестируемые вещества во всех опытных вариантах существенно повышают процент патологических процессов в клетке (рисунок 3). В контроле значение ПМ с учетом профазы составило 12,03 %, что превышает нормальное значение уровня спонтанного мутирования: 2–5 % [16]. Однако необходимо подчеркнуть, что значение МПИ в контрольном варианте незначительно превышает единицу, и такая цифра свидетельствует фактически об отсутствии патологий, связанных с повреждением митотического аппарата. На это указывают и данные анализа по спектру патологий митоза в контроле (таблица 1). В остальных вариантах опыта показатель ПМ возрастает более чем в 1,4–3,0 раза по сравнению со значением в контроле. Наиболее высокие значения патологии митоза наблюдали в вариантах использования цефотаксима (рисунок 3, вариант опыта 3 и 4).



Варианты опыта: 1 – контроль; 2 – 6-БАП, 5,0 мг/л; 3 – цефотаксим, 500,0 мг/л; 4 – цефотаксим, 500,0 мг/л + 6-БАП, 5,0 мг/л; 5 – аугментин, 800,0 мг/л; 6 – аугментин, 800,0 мг/л + 6-БАП, 5,0 мг/л

Рисунок 3 – Влияние тестируемых веществ на патологию митоза

Спектр ПМ включал такие типы патологий, как асимметричное расположение веретена деления, забегание и отставание хромосом в анафазе митоза, обособление единичных хромосом и группы хромосом в метафазе, мосты в анафазе и телофазе, то есть наиболее общие типы митотических нарушений (таблица 1).

Таблица 1 – Уровень и спектр патологий митоза в корневой меристеме *A. cepa* L.

Варианты опыта	Доля патологий митоза в суммарном спектре варианта опыта, %					
	асимметричное расположение веретена деления	забегание/отставание хромосом	мосты	выбросы хромосом	к-митоз	разное
1 – контроль	23,0	73,0	0,05	3,9	–	0,05
2 – 6-БАП, 5,0 мг/л	3,1	51,0	–	2,1	43,1	0,7
3 – цефотаксим, 500,0 мг/л	2,1	37,2	–	0,7	60,0	–
4 – цефотаксим, 500,0 мг/л + 6-БАП, 5,0 мг/л	4,7	60,1	0,2	1,1	–	33,9
5 – аугментин, 800,0 мг/л	10,9	45,0	8,8	0,5	–	34,8
6 – аугментин, 800,0 мг/л + 6-БАП, 5,0 мг/л	26,4	70,0	–	3,6	–	–

В контрольном варианте из всех регистрируемых патологий митоза наблюдали в 73 % патологию «забегание/отставание хромосом» и в 23 % – патологию «асинхронное веретено деления». Установлено, что последняя патология митоза в опытных вариантах с применением цефотаксима и 6-БАП практически не отмечена, колеблется на уровне 1–5 %. В вариантах с применением аугментина этот показатель возрастает до 11–26 %. Данная патология напрямую не связана с клеточным циклом и собственно митозом. Асимметричное расположение веретена деления не влияет на распределение ядерного материала ДНК, однако может привести к неравномерному распределению цитоплазматических органелл и, соответственно, ДНК митохондрий и пластид.

Патология митоза «забегание/отставание хромосом» в метакинезе и при расхождении к полюсам возникает при повреждении хромосом в области кинетохора. Однако необходимо помнить, что снижение функциональной активности кинетохора может возникать не только в патологических, но и физиологических условиях [10].

Сравнение спектра патологических митозов в вариантах опыта показало, что во всех вариантах доминирует патология «забегание/отставание хромосом» в анафазе митоза. Патологию «мосты» наблюдали в единичных клетках в контроле и в варианте «6-БАП, 5,0 мг/л + цефотаксим, 500 мг/л», и в 9 % из всех случаев патологий митоза при воздействии аугментина (концентрация 800,0 мг/л).

Установлено, что цефотаксим и 6-БАП оказывали выраженное статмокинетическое воздействие (рисунок 4). Соответственно, 44,0 % и 60,0 % клеток из всех клеток с патологией митоза находились в состоянии к-митоза. Хромосомы при этом были гиперспирализованы, укорочены, наблюдался задержанный митоз, у части клеток – рассеивание хромосом в метафазе.

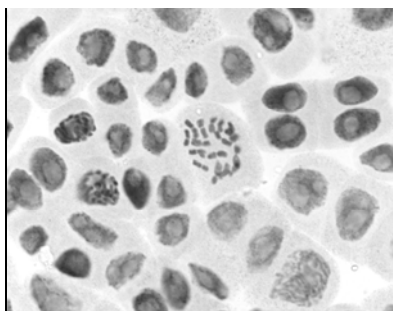


Рисунок 4 – Статмокинетическое воздействие цефотаксима (500,0 мг/л) (увеличение микроскопа 600х)

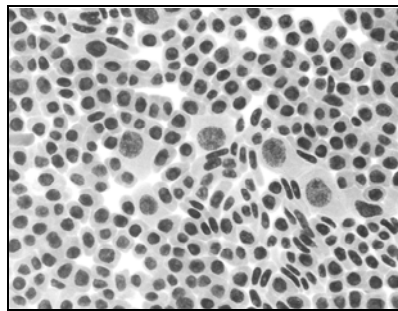


Рисунок 5 – Блокирующее воздействие аугментина (800,0 мг/л) на пролиферативную активность клеток корневой меристемы лука (увеличение микроскопа 200х)

К-митоз – форма патологии митоза, которая характеризуется блокадой деления клетки в метафазе в связи с повреждением митотического аппарата. Для к-митоза характерны и изменения хромосом. Усиливается спирализация хромосом (гиперспирализация), что приводит к формированию к-метафаз с сильно укороченными и утолщенными хромосомами. При сильных воздействиях статмокинетических ядов отмечается набухание и слипание хромосом, а также образование различных хромосомных aberrаций с развитием микроядер и с возникновением анеуплоидных клеток. Эта патология митоза приводит либо к пикнозу ядра и гибели клетки (токсические дозы), либо к полиплоидизации клетки, либо, наконец, к восстановлению митотического аппарата и к завершению течения митоза [10].

При микроскопировании препаратов в вариантах опыта наблюдали в апикальной меристеме некоторых придаточных корней лука отсутствие деления клеток (рисунок 5, таблица 2). У них митотический индекс был близок к нулю и большинство клеток находилось в профатическом состоянии. Мы полагаем, что это своеобразный адаптационный механизм на клеточном уровне при действии стрессовых факторов. Следует отметить, что 6-БАП в комбинации с цефотаксимом практически не влияет на изменение данного показателя, который колеблется от 68,8 % до 83,3 %. В то время как в комбинации с аугментином число корешков с митозом существенно уменьшается с 50,0–68,8 % до 10,5 %.

Таблица 2 – Влияние бета-лактамовых антибиотиков и 6-БАП на клеточный цикл меристемных клеток корешков лука обыкновенного

Варианты опыта	Тестируемые вещества, концентрация в мг/л	Число корешков с митозом, %
1 – контроль	вода	100,0
2 – 6-БАП, 5,0 мг/л	6-БАП, 5,0	68,8
3 – цефотаксим, 500,0 мг/л	цефотаксим, 500,0	83,3
4 – цефотаксим, 500,0 мг/л + 6-БАП, 5,0 мг/л	цефотаксим, 500,0 + 6-БАП, 5,0	75,9
5 – аугментин, 800,0 мг/л	аугментин, 800,0	50,0
6 – аугментин, 800,0 мг/л + 6-БАП, 5,0 мг/л	аугментин, 800,0 + 6-БАП, 5,0	10,5

Похожие результаты были обнаружены на луке при проращивании лукович в пробах воды из Нижней Волги, когда было отмечено достоверное мутагенное воздействие [12].

Полученные данные свидетельствуют, что изученные бета-лактамовые антибиотики, в частности, цефотаксим и аугментин, способны проникать в активно пролиферирующие клетки высших растений и изменять скорость вступления их в митоз и нормальное протекание процессов деления. Это позволяет предположить, что механизм антибактериального широкого спектра действия бета-лактамовых антибиотиков не ограничивается только влиянием на биосинтез клеточной стенки [17].

Полученные результаты подтверждаются сведениями о влиянии изучаемых антибиотиков на пролиферативные процессы в соматических клетках высших растений [1], [9], [10], [18]. Также согласуются с данными литературы о возможности трансмембранного проникновения бета-лактамовых антибиотиков через бислойные липидные мембраны бактериальных и растительных фосфолипидов (универсальных компонентов структуры клеточных мембран прокариотических и эукариотических клеток) [3]. По-нашему мнению, повышение пролиферативной активности в культуре *in vitro* растений, в частности, березы, выявленное нами ранее [4], [7], [18], является компенсаторной реакцией в ответ на снижение (вследствие неблагоприятного действия антибиотиков)

количества функционально полноценных клеток. Об этом свидетельствует существенное снижение морфогенной и органогенной активности в культуре тканей березы при условии обязательного применения антибиотиков в составе питательной среды на протяжении нескольких пассажей (свыше трех). Подобное предположение было высказано при выявлении цитогенетических эффектов бета-лактамов антибиотиков на семенах яровой пшеницы в качестве тест-культуры [2], [3].

Заключение. Таким образом, установлено, что тестируемые вещества: цитокинин 6-БАП и бета-лактамы антибиотики цефотаксим и аугментин, – повышают процент патологических митозов в клетке в 1,4–3,0 раза по сравнению со значением в контроле. Полученные данные свидетельствуют, что цефотаксим и аугментин способны проникать в активно пролиферирующие клетки высших растений и изменять скорость вступления их в митоз и нормальное протекание процессов деления. Сравнение спектра патологических митозов в вариантах опыта показало, что во всех вариантах доминирует патология «забегание/отставание хромосом» в анафазе митоза. Установлено, что цефотаксим и 6-БАП оказывали выраженное статмокинетическое воздействие.

Работа выполнена в рамках ГПНИ (№ темы М19-33).

Литература

1. Дунаева, С.Е. Бактериальные микроорганизмы, ассоциированные с тканями растений в культуре *in vitro*: идентификация и возможная роль / С.Е. Дунаева, Ю.С. Оследкин // Сельскохозяйственная биология. – 2015. – Т. 5, № 1. – С. 3–15.
2. Цитогенотоксические эффекты бета-лактамов антибиотиков / Ю.В. Редикин [и др.] // Ученые записки биологического факультета Ом ГПУ. – Омск, 1996. – С. 16–28.
3. Гурова, О.П. Цитогенетические эффекты бета-лактамов антибиотиков в стратегии их использования: автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.16 / О.П. Гурова. – Омск, 1997. – 24 с.
4. Концевая, И.И. Эффективность применения антибиотиков на этапе мультипликации при клонировании березы / И.И. Концевая, С.В. Жадько // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2016. – № 6 (99). – С. 24–30.
5. Fiskesjö, G. The Allium test for screening chemicals; evaluation of cytological parameters / G. Fiskesjö // Plants for environmental studies. CRC Press LLC. – New York., 1997. – P. 308–333.
6. Руководство по краткосрочным тестам для выявления мутагенных канцерогенных химических соединений. Гигиенические критерии окружающей среды / ВОЗ. – Женева, 1982. – 212 с.
7. Концевая, И.И. Совершенствование методики биотестирования на основе Allium-теста / И.И. Концевая, Т.А. Толкачева // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2012. – № 6 (72). – С. 57–65.
8. Antibiotics [Электронный ресурс] // PhytoTechnology Laboratories. – Режим доступа : <http://phytotechlab.com/index.php/biochemicals/antibiotics>. – Дата доступа : 19.02.2016.
9. Паушева, З.П. Практикум по цитологии растений: учебники и учеб. пособия для студентов высших учеб. заведений / З.П. Паушева. – 4-е изд. перераб. и доп. – М. : Агропромиздат, 1988. – 271 с.
10. Алов, И.А. Цитофизиология и патология митоза / И.А. Алов. – М. : Медицина, 1972. – 264 с.
11. Лакин, Г.Ф. Биометрия / Г.Ф. Лакин. – М. : Высш. шк., 1990. – 352 с.
12. Козак, М.Ф. Цитогенетические эффекты взаимодействия антропогенного загрязнения вод Нижней Волги / М.Ф. Козак, Н.В. Марченко. – Астрахань : Изд. дом «Астраханский университет», 2011. – 116 с.
13. Ченцов, Ю.С. Введение в клеточную биологию: учебник для вузов / Ю.С. Ченцов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : ИКЦ «Академкнига», 2004. – 495 с.
14. Физиологические проявления действия цитокининов [Электронный ресурс] // Физиология растений. Онлайн-энциклопедия. – Режим доступа : <http://fizrast.ru/razvitie/rost/fitogormony/citokininy/deystvie.html>. – Дата доступа : 08.01.2017.
15. Романов, Г.А. Как цитокинины действуют на клетку / Г.А. Романов // Физиология растений. – 2009. – Т. 56, № 2. – С. 295–319.
16. Захаров, В.М. Биотест: интегральная оценка здоровья экосистем и отдельных видов / В.М. Захаров, Д.М. Кларк. – М. : Моск. отд.-ние междунар. фонда «Биотест», 1995. – 68 с.
17. Егоров, А.М. Антибиотики: прошлое, настоящее и будущее препаратов для лечения инфекционных болезней / А.М. Егоров // Ведомости научного центра экспертизы средств медицинского применения. – 2007. – № 3. – С. 1–6.
18. Концевая, И.И. Использование антибиотиков в культуре тканей березы / И.И. Концевая // Лесоведение. – 2011. – № 1. – С. 45–51.

УДК 595.771(476.2/.7)

Нападающий комплекс кровососущих комаров (Diptera: Culicidae) на территории Белорусского Полесья

Д.Н. Логинов, Т.В. Волкова

Представлены данные сборов нападающего комплекса кровососущих комаров на территории Белорусского Полесья. Установлено распространение 17 видов комаров семейства Culicidae, также изучены структура доминирования, особенности биотопического распределения и сезонной динамики численности кровососущих комаров.

Ключевые слова: кровососущие комары, Белорусское Полесье, нападающий комплекс.

The data of the collections of the attacking complex of blood-sucking mosquitoes on the territory of Belarusian Polesie are presented. The distribution of 17 species of mosquitoes of the Culicidae family, the studied structures of the dominant, the features of the biotopic distribution and the seasonal dynamics of the number of blood-sucking mosquitoes were established.

Keywords: blood-sucking mosquitoes, Belarusian Polesie, attacking complex.

Территория Белорусского Полесья относится к южной геоботанической подзоне Беларуси. Характерной особенностью данной территории является развитая гидрографическая сеть водотоков и водоемов как естественного, так и искусственного происхождения. Основную часть искусственных водотоков составляют мелиоративные каналы, созданные в результате широкомасштабного проведения осушительной мелиорации, которые являются дополнительными источниками массового выплода преимагинальных стадий кровососущих комаров. Кроме того, в связи с аварией на Чернобыльской АЭС земли многих районов Гомельской области исключены из землепользования и подвержены вторичному заболачиванию, в результате чего формируются оптимальные условия для неконтролируемого выплода эпидемически опасных видов групп насекомых. Таким образом, именно территория Белорусского Полесья наиболее благоприятна по температурным данным, численности переносчиков, наличию мест выплода для возникновения очагов и циркуляции возбудителей трансмиссивных заболеваний различной природы, таких как арбовирусные инфекции, дирофиляриоз, малярия и туляремия.

Видовая идентификация кровососущих комаров как переносчиков возбудителей инфекций и инвазий играет важную роль в определении эпидемической значимости вида, поскольку все противоэпидемические мероприятия выстраиваются на основе знаний биологии и экологии переносчика.

В связи с этим целью настоящей работы являлось изучение особенностей нападающего комплекса кровососущих комаров на территории Белорусского Полесья. В задачи исследования входило проведение видовой идентификации видов кулицид, выявление особенностей в структуре доминирования, сезонной динамике численности, а также биотопической приуроченности комаров на исследуемой территории.

Первые сведения по фенологии и фауне кровососущих комаров Белорусского Полесья получены в 1920-х гг. [1], [2]. Ранние работы большинства авторов посвящены изучению фауны и экологии малярийных комаров, как основных переносчиков малярии [3], [4]. Систематические исследования фауны и экологии кровососущих комаров Беларуси начаты с середины 1940-х гг. с целью ликвидации малярии. Малярия как заболевание ликвидирована на территории Беларуси в 1956 г. [5]. Историческим центром изучения данной группы двукрылых на территории Беларуси являлся Институт зоологии НАН БССР (на сегодняшний день ГНПО «НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам»). Значительный вклад в изучение данной проблематики внесли Х.М. Модель, М.Н. Трухан, Б.П. Савицкий, Н.В. Терешкина, М.М. Якович [6]–[10].

Материалы и методы исследований. Исследования проведены в 2018 г. на территории Брестской и Гомельской областей (г. Кобрин, г. Пинск, д. Огдемер Дрогичинского рай-

она, д. Федоры и д. Домашицы Пинского района, д. Ловча Лунинецкого района, д. Юхновичи Ивановского района, г. Житковичи, г. Калинковичи, д. Красная Зорька Житковичского района), а также на территории ГПУ Национальный парк «Припятский».

Объектом исследования являлись кровососущие комары (Diptera: Culicidae) на стадии имаго, собранные в ольховых и сосновых лесах, а также в луговых биотопах. Всего проведено 261 учет, собрано 12514 экземпляров кровососущих комаров. Сборы и учеты кулицид проведены согласно общепринятым методикам [11], [12]. Видовая идентификация материала выполнена по руководствам А.В. Гуцевича и др. в 1970, Р.М. Горностаевой и А.В. Данилова в 1999, а также N. Becker et al. 2010 [11]–[13].

Результаты и обсуждение. В ходе полевых исследований в 2018 г. по изучению нападающего комплекса кровососущих комаров подтверждено распространение 17 видов, принадлежащих к 3 родам, а именно: *Aedes* Meigen, 1818 – 15 видов, *Culex* Linnaeus, 1758 – 1 вид, *Coquillettidia* (Dyar, 1905) – 1 вид, что составляет 42,5 % от видового разнообразия фауны кровососущих комаров Беларуси. Впервые для территории Белорусского Полесья отмечены 2 новых вида для фауны кровососущих комаров, а именно: виды *Aedes rossicus* Dolbeshkin, Gorickaja et Mitrofanova, 1930 и *Culex territans* Walker, 1856.

Отряд Diptera

Семейство Culicidae

Подсемейство Culicinae Meigen, 1818

Триба Aedini Neveu-Lemaire, 1902

Род *Aedes* Meigen, 1818

Подрод *Aedes* Meigen, 1818

A. (A.) cinereus Meigen, 1818

A. (A.) rossicus Dolbeshkin, Goritzkaja et Mitrofanova, 1930

Подрод *Aedimorphus* Theobald, 1903

A. (A.) vexans vexans (Meigen, 1830)

Подрод *Ochlerotatus* Lynch Arribalzaga, 1891

A. (O.) annulipes (Meigen, 1830)

A. (O.) cantans (Meigen, 1818)

A. (O.) cataphylla Dyar, 1916

A. (O.) communis (De Geer, 1776)

A. (O.) diantaeus Howard, Dyar et Knab, 1913

A. (O.) excrucians (Walker, 1856)

A. (O.) flavescens (Muller, 1764)

A. (O.) intrudens Dyar, 1919

A. (O.) pullatus (Coquillett, 1904)

A. (O.) punctor (Kirby, 1837)

A. (O.) riparius Dyar et Knab, 1907

A. (O.) sticticus (Meigen, 1838)

Триба Culicini Meigen, 1818

Род *Culex* Linnaeus, 1758

Подрод *Neoculex* Dyar, 1905

C. (N.) territans Walker, 1856

Триба Mansonini Belkin, 1962

Род *Coquillettidia* Dyar, 1905

Подрод *Coquillettidia* Dyar, 1905

C. (C.) richiardii (Ficalbi, 1889)

Анализ распространения зоогеографических элементов на территории Белорусского Полесья показал наличие видов с тремя типами ареалов: голарктические транспалеарктические и западнопалеарктические. Подавляющее большинство видов принадлежит к голарктической группе (76,4 %), виды *Aedes rossicus*, *A. annulipes* относятся к западнопалеарктической группе (11,8 %), транспалеарктическая группа (11,8 %) представлена также двумя видами, а именно: *A. cantans* и *A. pullatus*. Также следует отметить, что 11 видов относятся к моноциклическим видам и 6 видов являются полициклическими.

В результате проведения полевых исследований видовой состав имаго кровососущих комаров на территории Белорусского Полесья представлен 17 видами, из них доминантными видами являются *Aedes cantans* (ИД 51,14), *A. cinereus* (ИД 10,16), *A. excrucians* (ИД 9,80), субдоминантные – *A. intrudens* (ИД 6,81), *A. punctor* (ИД 6,90), *A. communis* (ИД 4,59), *Ae. sticticus* (ИД 5,59), *A. annulipes* (ИД 2,84), малочисленные – *A. flavescens* (ИД 0,6), *Coquillettidia richiardii* (ИД 0,62), редкие и локальные – *A. riparius* (ИД 0,29), *A. diantaeus* (ИД 0,09), *A. cataphylla* (ИД 0,03), *A. pullatus* (ИД 0,05), *A. vexans* (ИД 0,20), *A. rossicus* (ИД 0,18), *Culex territans* (ИД 0,09).

Наибольшее количество видов зарегистрировано в ольховых лесах – 17, наименьшее – 12 видов отмечено в луговых биоценозах, в сосновых лесах – 15 видов. Общими для сравниваемых биотопов являются 12 видов кровососущих комаров, из них массовыми видами являются *Aedes cantans*, *A. excrucians* и *A. cinereus*.

Индекс общности по фауне (K_s), вычисленный по формуле Жаккара, указывает, что видовой состав имаго кровососущих комаров ольховых и сосновых лесов имеют наибольшую степень общности (K_s 0,88). Наименьшую степень общности видового состава нападающего комплекса комаров имеют ольховые леса и луговые биотопы (K_s 0,71). Степень общности сосновых и луговых биотопов составила (K_s 0,8).

Показатели видового разнообразия фаунистических комплексов кровососущих комаров в исследуемых биотопах представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Показатели видового разнообразия имаго кровососущих комаров в исследуемых биотопах Белорусского Полесья

Показатели разнообразия	Ольховые леса	Сосновые леса	Луговые биотопы
Число экземпляров	5490	4886	1642
Видовое богатство	17	15	12
Индекс Шеннона	1,73	1,72	1,37
Индекс Симпсона	0,28	0,29	0,41

При сравнении видового состава комаров в исследуемых биотопах наиболее низкие показатели видового разнообразия отмечены в луговых биотопах. Показатели ольховых и сосновых лесов примерно равны. В тоже время в луговых биотопах установлены самые высокие показатели индекса Симпсона. Данные индекс очень чувствительны к присутствию в выборке сверхдоминантных видов. В нашем случае данным видом является *Aedes cantans*.

Самыми богатыми по численности ($59,5 \pm 30,12$ экз/учет) и видовому составу (17 видов) являются ольховые леса. По-видимому, высокие показатели численности и видового состава обусловлены тем, что ольховые леса в большей степени растут на богатых, влажных, хорошо дренированных почвах. То есть ольшаники преимущественно растут по берегам рек, ручьев, на травянистых болотах, в которых происходит массовый выплод кровососущих комаров. Наименьшей численностью и видовым составом обладают луговые биотопы, где фиксируется до 12 видов со средней численностью $25,77 \pm 10,14$ экз/учет, что в несколько раз меньше чем в ольховых лесах. В сосновых лесах зарегистрировано 15 видов кровососущих комаров со средней численностью $43,72 \pm 27,13$ экз/учет (рисунок 1).

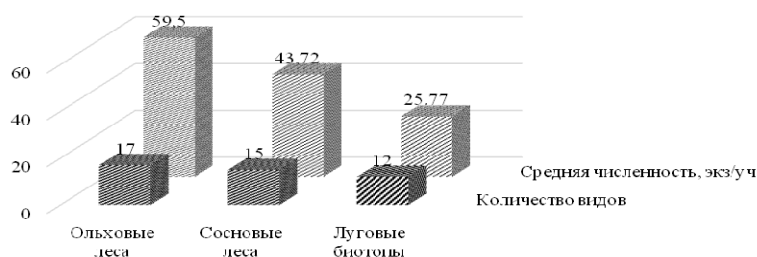


Рисунок 1 – Биотопическое распределение имаго кровососущих комаров на территории Белорусского Полесья

Средний показатель численности кровососущих комаров за весь период сборов составил $42,9 \pm 26,14$ экз/учет. Общими для всех исследуемых биотопов являлись 12 видов: *Aedes cantans*, *A. excrucians*, *A. flavescens*, *A. annulipes*, *A. punctor*, *A. communis*, *A. intrudens*, *A. sticticus*, *A. vexans*, *A. cinereus*, *A. rossicus*, *Coquillettidia richiardii*.

В сборах 2018 г. наибольшая средняя численность ($84,07 \pm 48,98$ экз/учет) кровососущих комаров зарегистрирована в первой декаде мая (рисунок 2).

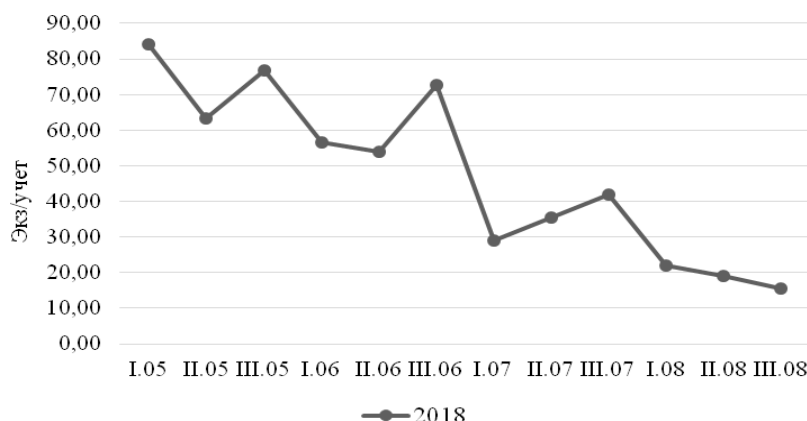


Рисунок 2 – Сезонная динамика численности имаго кровососущих комаров на территории Белорусского Полесья

На основании проведенных учетов в 2018 г. в исследуемых биотопах установлено, что с первой по третью декаду мая средняя численность имаго кровососущих комаров составляла $74,72 \pm 44,47$ экз/учет, при этом видовой состав в мае в сумме составил 15 видов. Данный период характеризуется массовым выплодом моноциклических и полициклических видов рода *Aedes*. К первой декаде июня численность кулицид уменьшилась с $76,85 \pm 46,79$ экз/учет (III декада мая) до $56,44 \pm 30$ экз/учет (I декада июня), при этом количество регистрируемых видов также снизилось с 14 до 10 видов. В третьей декаде июня видовой состав насчитывал 8 видов, кроме того зарегистрирован пик численности $72,55 \pm 29,26$ экз/учет. В начале июля наблюдалось резкое снижение численности до $29,02 \pm 8,96$ экз/учет, что более чем в 2 раза меньше, чем в конце июня. К третьей декаде июля зарегистрирован очередной пик численности кровососущих комаров ($41,96 \pm 38,83$ экз/учет). К концу августа наблюдалось постепенное снижение численности (от $22,07 \pm 9,21$ до $15,67 \pm 3,45$ экз/учет), что в 2 раза меньше, чем в конце июля. Со второй половины лета произошли изменения в видовом составе комаров, а именно, по сравнению с началом июня наблюдалось уменьшение количества видов до 3–5 видов. Минимальное количество видов (3 вида) зарегистрировано в третьей декаде августа.

В сезонной динамике численности отмечались некоторые особенности, а именно зарегистрированы пики численности кровососущих комаров, приходящиеся на I, III декаду мая, июня и июля. Среднесезонный показатель численности в 2018 г. составил $51,71 \pm 37,39$ экз/учет.

Заключение. Таким образом, в результате проведенных исследований нападающий комплекс кровососущих комаров на территории Белорусского Полесья представлен 17 видами, относящихся к 3 родам: *Aedes*, *Culex*, *Coquillettidia*. Впервые для территории Брестской и Гомельской областей зарегистрировано 2 новых вида кровососущих комаров *Aedes rossicus* и *Culex territans*.

Согласно проведенному анализу биотопического распределения наибольший видовой состав (17 видов) установлен в ольховых лесах, 15 видов – в сосновых лесах и 12 видов зарегистрировано в луговых биотопах. Наибольшее сходство исследуемых биотопов по фауне кровососущих комаров наблюдается между ольховыми и сосновыми лесами (K_s 0,88), наименьшее сходство биотопов по видовому составу зарегистрировано между ольховыми лесами и луговыми биотопами (K_s 0,71).

Общими видами кровососущих комаров для всех типов исследуемых биотопов являлись: *Aedes cantans*, *A. excrucians*, *A. flavescens*, *A. annulipes*, *A. punctor*, *A. communis*, *A. intrudens*,

A. sticticus, *A. vexans*, *A. cinereus*, *A. rossicus*, *Coquillettidia richiardii*, из них к доминантным видам относятся *A. cantans*, *A. cinereus* и *A. excrucians*.

В сезонной динамике численности наблюдаются несколько пиков активности нападающего комплекса кровососущих комаров, которые были зарегистрированы в начале и в конце мая, а также в конце июня и июля. За весь период исследований среднесезонный показатель численности составил $51,71 \pm 37,39$ экз/учет.

Литература

1. Раховский, Я.А. К биологии малярийного комара в Мозырском уезде / Я.А. Раховский, З.Д. Сергеева-Булавко // Белорусская медицинская мысль. – 1925. – Т. 2, № 3. – С. 99–105.
2. Раховский, Я.А. Перспективы борьбы с малярией в Белоруссии / Я.А. Раховский // Белорусская медицинская мысль. – 1925. – Т. 1, № 6–9. – С. 106–110.
3. Сергеева, З.Д. Подвиды *An. maculipennis* Mg. в БССР / З.Д. Сергеева // Медицинская паразитология и паразитарные болезни. – 1937. – Т. 6, №3. – С. 363–365.
4. Сергеева, З.Д. Видовой состав добычи *Anopheles maculipennis* Mg. в районах БССР / З.Д. Сергеева // Медицинская паразитология и паразитарные болезни. – 1939. – Т. 8, № 6. – С. 89–90.
5. Модель, Х.М. Фенологические данные в борьбе с малярией / Х.М. Модель // I зоол. конф. Белорус. ССР : тез. докл. / Отдел зоол. и паразит. АН БССР ; редкол.: И.Н. Сержанин [и др.]. – Минск, 1958. – С. 162–163.
6. Модель, Х.М. Анофелогенность водоемов, видовой и подвидовой состав малярийных комаров в пойме среднего течения реки Припяти / Х.М. Модель // Тр. комплексной экспедиции по изучению водоемов Полесья. – Минск, 1956. – С. 23–238.
7. Савицкий, Б.П. Кровососущие комары Гомельской области / Б.П. Савицкий [и др.] // Животный мир Белорусского Полесья, охрана и рациональное использование : обл. науч.-практ. конф. УН-ПО «Фауна Полесья»: тез. докл. / Гомельский гос. ун-т ; ред. кол.: Б.П. Савицкий (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 1982. – С. 13–18.
8. Трухан, М.Н. Влияние осушительной мелиорации на фауну и численность кровососущих комаров / М.Н. Трухан, И.А. Гутковский // VII Международный симпозиум по энтомофауне Средней Европы : материалы VII науч. конф., Ленинград, 19–24 сентября 1977 г. / Зоологический ин-т ; ред. кол.: Е.И. Васьковская (гл. ред.) [и др.]. – Ленинград, 1977. – С. 256–257.
9. Терешкина, Н.В. Распределение кровососущих двукрылых насекомых (Diptera: Culicidae, Simuliidae, Tabanidae) в биоценозах Полесского радиологического заповедника / Н.В. Терешкина, М.Н. Трухан, В.М. Каплич // 10 лет ПГРЭЗ : сб. ст. / ПГРЭЗ ; ред.кол.: В.И. Парфенова (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 1998. – С. 179–182.
10. Якович, М.М. Видовое разнообразие кровососущих комаров в биотопах Припятского ландшафтно-гидрологического заповедника / М.М. Якович, М.Н. Трухан // Проблемы изучения, сохранения и использования биологического разнообразия животного мира : тез. докл. VII зоол. конф., Минск, 27–29 сентября 1994 г. / Редкол.: М.М. Пикулик (отв. ред.) [и др.]. – Мн. : Навука і тэхніка, 1994. – 350 с.
11. Becker, N. Mosquitoes and their control / N. Becker, D. Petric, M. Zgomba, C. Boase, M.B. Madon, C. Dahl, A. Kaiser. – 2-nd ed. – Berlin : Springer, 2010. – 91 p.
12. Гуцевич, А.В. Фауна СССР. Насекомые двукрылые / А.В. Гуцевич, А.С. Мончадский, А.А. Штакельберг. – Ленинград : НАУКА. 1970. – Т. 30. – 381 с.
13. Горностаева, Р.М. Комары (сем. Culicidae) Москвы и Московской области: руководство для практ. службы здравоохранения Московского региона / Р.М. Горностаева, А.В. Данилов – М. : КМК, 1999. – 341 с.

УДК 549.25/.29:581.526.3:556.5(476.2-21Гомель)

Мониторинг содержания тяжелых металлов в высших водных растениях водоемов г. Гомеля, испытывающих различную антропогенную нагрузку

Т.В. МАКАРЕНКО

Для кобальта, хрома, никеля и свинца отмечено однонаправленное снижение уровня содержания в растениях водоемов с 2004 г. до 2014 г. независимо от характера антропогенной нагрузки, оказываемой на водоем, что может объясняться снижением техногенного воздействия на водные экосистемы. Необходимо отметить заметный рост загрязнения кобальтом, хромом и никелем растений как водоемов городской черты, так и контрольного водоема в период с 2015 по 2017 гг., а для свинца, меди и цинка с 2015 по 2016 гг. В исследованиях установлено, что существуют две группы металлов, характеризующиеся различными механизмами накопления водной растительностью: группа I – цинк и медь; группа II – кобальт, хром, никель и свинец. Полученные в исследованиях корреляционные зависимости могут быть использованы при проведении эколого-химической оценки степени загрязнения водоемов тяжелыми металлами.

Ключевые слова: высшие водные растения, водные экосистемы, тяжелые металлы, мониторинговые исследования, корреляционные связи.

Cobalt, chromium, nickel and lead are unidirectionally decrease in water plants, which was observed in the period from 2004 till 2014, regardless of the nature of anthropogenic stress exerted on a water body, which may be explained by a decrease in the technogenic impact on aquatic ecosystems. One should observe a noticeable increase in cobalt, chromium and nickel pollution of plants of both city-level reservoirs and the control reservoir in the period from 2015 to 2017, and for lead, copper and zinc from 2015 to 2016. It was found that there are two groups of metals characterized by various mechanisms of accumulation of aquatic vegetation: group I – zinc and copper; group II – cobalt, chromium, nickel and lead. The correlational dependencies obtained in the studies may be used in the environmental and chemical assessment of the degree of water bodies pollution with heavy metals.

Keywords: higher aquatic plants, aquatic ecosystems, heavy metals, monitoring studies, correlational dependencies.

Введение. Для крупных городов с многопрофильной промышленностью характерно присутствие в окружающей среде не отдельного загрязнителя, а ассоциации загрязнителей, способных оказывать комбинированное действие на организм, при котором может наблюдаться как суммирование эффектов, так и их потенцирование [1]. Высшие водные растения удовлетворяют многим требованиям, предъявляемым к биоиндикаторам загрязнения водных экосистем тяжелыми металлами, среди которых повсеместная встречаемость, высокая численность, удобство сбора и обработки, относительно крупные размеры. Занимая прибрежную часть водоема, водные растения служат своеобразным барьером, предотвращающим проникновение в водоемы и водотоки недостаточно очищенных сточных вод.

Цель работы – анализ содержания тяжелых металлов в высших водных растениях водоемов г. Гомеля, испытывающих различную антропогенную нагрузку.

Материалы и методы. Отбор проб высших водных растений производился с мая по август 2004–2017 гг. в водоемах г. Гомеля, различающихся по характеру антропогенной нагрузки. Для проведения сравнительной характеристики был выбран контрольный водоем (контроль), который не испытывает видимой антропогенной нагрузки и расположен на 15 км выше города по течению р. Сож. В процессе выполнения работы собраны макрофиты, широко распространенные в водоемах Беларуси. Анализировалась надземная часть макрофитов. Пробы растений после тщательного ополаскивания последовательно высушивали до воздушно-сухого состояния и озоляли до белой золы в муфельной печи при 450°C [2].

Содержание металлов в золе растений и донных отложений определяли атомно-эмиссионным спектральным методом на спектрофотометре PGS-2 в лаборатории физико-химического анализа Республиканского унитарного предприятия «Белорусский научно-исследовательский геологоразведочный институт».

Результаты и их обсуждение. Поступление загрязнителей в водоемы городской зоны сопровождается изменением их содержания в различных компонентах водной экосистемы, в том числе и в высших водных растениях. При этом колебание содержания элементов в донных отложениях и воде, изменение степени их биологической доступности по мере фиксации в составе донных отложений и включения в миграционные процессы биогеоценоза отображается на многолетней динамике накопления этих элементов растениями.

В ходе исследований были получены данные по загрязненности тяжелыми металлами растений, произрастающих в водоемах г. Гомеля за период наблюдений с 2004 по 2017 гг. Необходимо отметить, что для нивелирования значительной вариабельности показателей у представителей различных водных растений было проведено усреднение результатов анализа содержания металлов, обобщенные данные приведены на рисунках 1–6.

Проведенный анализ концентрации тяжелых металлов в растениях водоемов г. Гомеля показал, что, в целом, загрязнение растительности городских водоемов выше, чем контрольного водоема, расположенного вне зоны влияния промышленных предприятий и городского комплекса г. Гомеля. Наиболее существенная разница между содержанием металлов в растениях городских водоемов и в контрольном водоеме обнаружена при анализе концентрации хрома и никеля. В среднем, за наблюдаемый период различия для данных металлов достигали 4-х кратного уровня, а максимальные различия составляли 6,2 раза. Также выявлено довольно существенное превышение контрольных уровней (в 2,0 раза и более) меди, цинка, кобальта и свинца для водной растительности водоемов г. Гомеля.

Анализируя годовую динамику содержания тяжелых металлов в растениях можно отметить незначительное снижение загрязнения цинком и медью растений как водоемов городской черты, так и контрольного водоема с 2004 по 2014 гг. Однако за период исследований с 2015 по 2016 гг. ярко выражена тенденция повышения содержания меди и цинка в макрофитах всех изучаемых водоемов (рисунки 1, 2). Так, результаты мониторинга показали, что концентрация меди и цинка в растениях городских водоемов в 2016 г. возросла, в среднем, в 4,9 раза, по сравнению с данными, полученными в период с 2004 г. по 2015 г. Аналогичная закономерность обнаружена и при анализе содержания металлов в макрофитах контрольного водоема: концентрация меди и цинка в растениях повысилась, в среднем, в 5,5 раза.

Факт роста загрязнения растительности всеми изучаемыми металлами, выявленного в проведенных исследованиях как в водоемах, находящихся в зоне техногенного влияния, так и на относительно благополучной в экологическом аспекте территории объяснить затруднительно. Можно предложить, что существуют, по крайней мере, две причины, объясняющие повышенное в последние годы накопление изучаемых металлов водной растительностью. Во-первых, глобальные атмосферные выпадения веществ, содержащих тяжелые металлы. Известно, что значительная часть техногенных выбросов тяжелых металлов, поступающих в атмосферу в виде аэрозолей, может переноситься на большое расстояние и вызывать глобальное загрязнение [3]. Во-вторых, повышение накопления металлов в водных растениях может быть вызвано процессами, происходящими непосредственно в самих водоемах. Так, увеличение биодоступности тяжелых металлов в донных отложениях происходит при условиях, когда абсорбционная способность донных отложений исчерпывается и, кроме того, доступные формы различных загрязнителей переходят в воду, откуда легко поступают в ткани водных растений. Этому способствует повышение кислотности воды, сильное зарастание водоемов, интенсификация выделения CO_2 в результате деятельности микроорганизмов. Изменение биологической доступности соединений металлов в компонентах водоемов могло быть вызвано снижением уровня воды в водных экосистемах г. Гомеля по данным гидрометеоцентра с 2013 по 2016 гг. практически на 1,2 метра, а в некоторых водоемах и более (максимальное падение уровня воды отмечено в 2016 г.), что повлекло за собой изменение физико-химических показателей состояния водоема [4]. В донных отложениях водных экосистем в данный период содержание металлов снизилось [5]. Вероятнее всего, произошло перераспределение соединений металлов в компонентах водоема и из донных отложений они перешли в водные массы водоема в доступных для живых организмов формах. Для проверки данных гипотез необходимы дополнительные исследования.

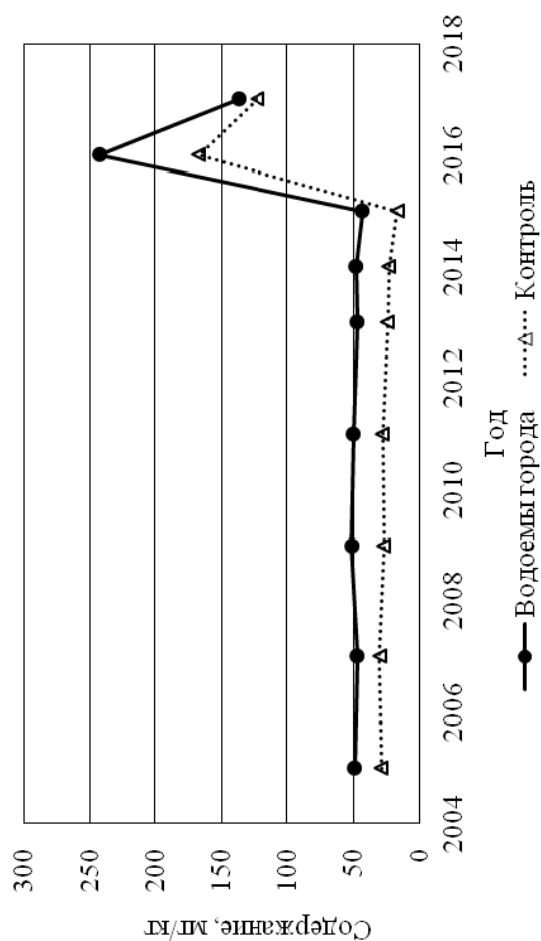


Рисунок 1 – Сравнительная динамика содержания меди в водных растениях в городских водоемах и контрольном водоеме

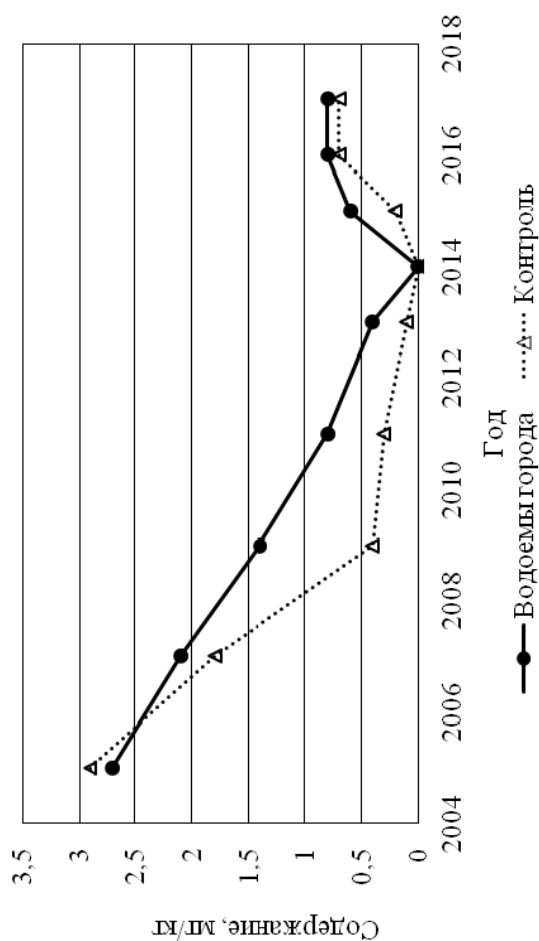


Рисунок 3 – Сравнительная динамика содержания кобальта в водных растениях в городских водоемах и контрольном водоеме

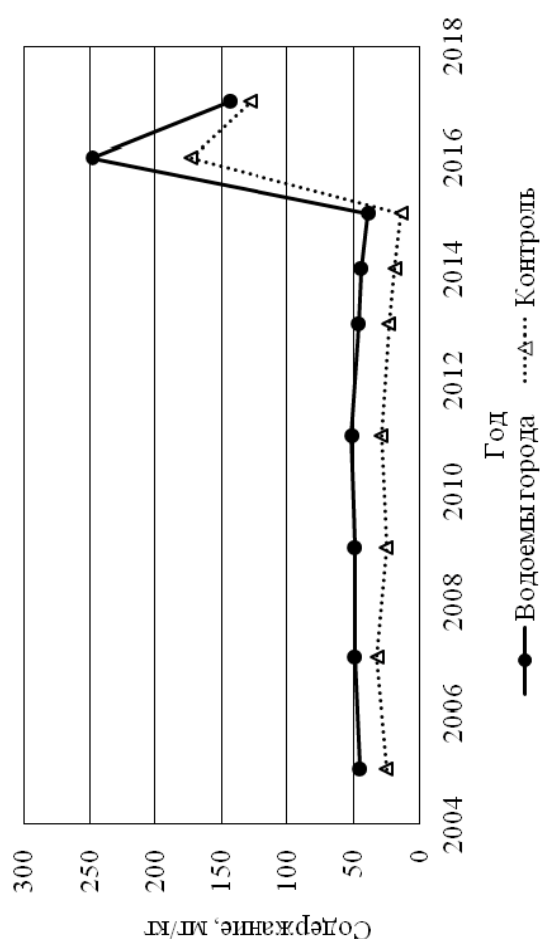


Рисунок 2 – Сравнительная динамика содержания цинка в водных растениях в городских водоемах и контрольном водоеме

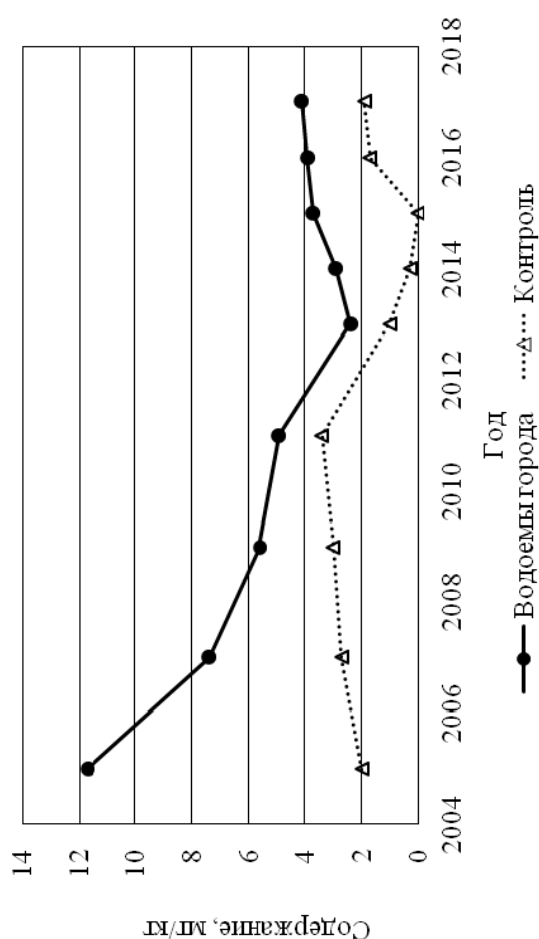


Рисунок 4 – Сравнительная динамика содержания хрома в водных растениях в городских водоемах и контрольном водоеме

В 2017 г. содержание меди и цинка в растениях всех изучаемых водоемов значительно снизилось, что также может быть связано с погодными условиями, в частности, с увеличением количества осадков, и, следовательно, поступлением большого количества поверхностного стока в водоем, что вызывает так называемый «эффект разбавления» загрязненной воды водоема. Но с поверхностным стоком в водоемы могут поступать новые «порции» загрязненных веществ. Как было сказано выше, все это требует более детального изучения. Для других металлов, за исключением свинца, снижение их концентрации в растениях после 2016 г. не отмечалось.

Содержание кобальта в растениях как городских водоемов, так и в контрольном водоеме резко снижалось в период с 2004 г. по 2012 г. и в 2014 г. было ниже предела обнаружения (рисунок 3). Этот факт однозначно свидетельствует о снижении техногенного воздействия на водоемы исследуемой территории. Но с 2015 г. концентрация металла в макрофитах начинает увеличиваться, и в дальнейшем отмечена тенденция к незначительному росту содержания кобальта в растениях городских водоемов и контрольного водоема.

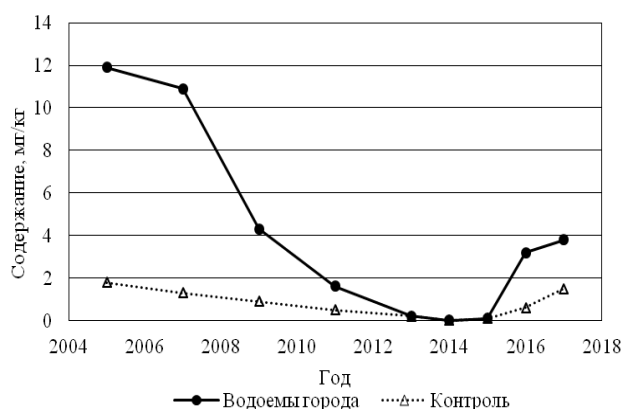


Рисунок 5 – Сравнительная динамика содержания никеля в водных растениях в городских водоемах и контрольном водоеме

Концентрация хрома в растениях водоемов города до 2015 г. резко снижалась, различия в содержании металла в макрофитах в 2004 г. и в 2014 г. составляли 6 раз (рисунок 4), но в контрольном водоеме отмечался рост концентрации хрома до 2014 г. (в 1,8 раза выше, в сравнении с 2004 г.). В литературе описываются примеры, когда в экосистемах с низким содержанием загрязнителей в абиотических компонентах живые организмы накапливали токсиканты до высоких уровней, тогда как в загрязненных системах организмы включали механизм блокировки и токсиканты поступали избирательно в ткани животных и растений и уровень концентрации поллютантов был гораздо ниже, чем в чистых зонах [6]. Начиная с 2015 г. в городских водоемах отмечался рост содержания хрома в растениях, тогда как в контрольном водоеме с 2014 г. резко снижалась концентрация соединений металла и в 2015 г. в макрофитах уровень содержания хрома был ниже предела обнаружения. Такое разнохарактерное изменение в концентрации вышеуказанного металла в растениях водоемов города и контрольного водоема, скорее всего, связано с внутриводоемными процессами и, в меньшей степени, с характером антропогенной нагрузки, которую испытывают водоемы.

Для никеля, как и для других металлов, характерно уменьшение содержания в макрофитах изучаемых водоемов до 2014 г. (рисунок 5). И если для растений контрольного водоема, расположенного вне зоны техногенного воздействия, концентрация уменьшилась к 2012 г., в среднем, в 2,2 раза, то для водоемов зоны воздействия промышленных предприятий Гомеля снижение содержания составило 11,7 раза, что свидетельствует, как и в случае с кобальтом, о снижении поступления соединений никеля в изучаемые водоемы. К 2014 г. концентрация металла в макрофитах всех водоемов настолько уменьшилась, что стала ниже предела обнаружения, но в 2016 г. уровень содержания никеля в растениях непроточных водоемов города с малой площадью водного зеркала вырос до 4,2 мг/кг сухой массы, а в среднем до 3,2 мг/кг. В контрольном водоеме рост концентрации металла в растениях был не столь значителен, и концентрация достигла величины 1,7 мг/кг сухой массы.

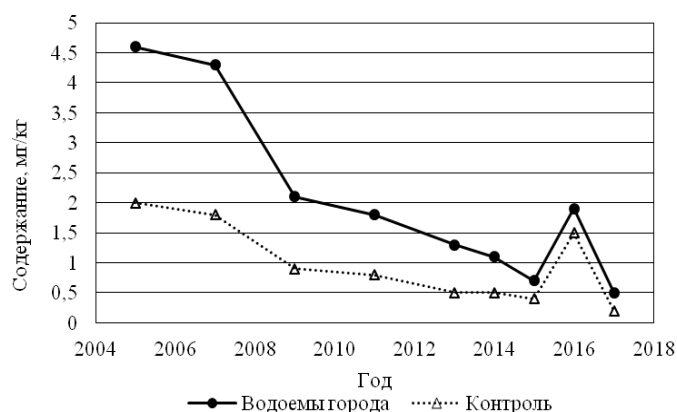


Рисунок 6 – Сравнительная динамика содержания свинца в водных растениях в городских водоемах и контрольном водоеме

Уровень загрязнения свинцом растений городских водоемов с 2004 г. по 2015 г. снизился практически в 6,0 раз, а для растений контрольного водоема – в 4,5 раза (рисунок 6). Однако, как и для всех металлов, в 2016 г. наблюдалось увеличение содержания элемента в растениях примерно в 2,5 раза. Также, как и для меди и цинка, содержание свинца снизилось к 2017 г. Возможно, медь, цинк и свинец поступали в растения в большей степени вследствие протекания в водоемах сложных процессов перераспределения соединений металлов между водой и донными отложениями при значительном снижении уровня воды в водных экосистемах. Известно, что при определенных условиях донные отложения могут выступать источниками вторичного загрязнения водоемов, причем металлы выходят из донных отложений в формах более доступных для биоты, чем поступают в водоемы извне [7]. Остальные изучаемые металлы поступали в растения исследуемых водоемов не только из донных отложений, но и имели приток извне с поверхностным стоком, а также с загрязненными сухими и влажными осадками на поверхность водоема.

В общем случае взаимосвязь и взаимовлияние тяжелых металлов в процессе накопления их растениями можно охарактеризовать с помощью корреляционных соотношений концентраций данных элементов. Для расчетов значений коэффициентов корреляции использовались усредненные данные содержания металлов в растениях всех обследуемых водоемов. Полученные коэффициенты корреляции для растительности городских водоемов и контрольного водоема приведены в таблицах 1 и 2. Из таблицы 1 видно, что у растений, произрастающих в водоемах городской черты, существуют достаточно четкие взаимосвязи содержания металлов. Высокая степень прямой корреляционной связи наблюдалась между содержанием меди и цинка ($r = 0,74$), никеля и свинца ($r = 0,96$), никеля и хрома ($r = 0,93$); никеля и кобальта ($r = 0,71$), свинца и хрома ($r = 0,94$), хрома и кобальта ($r = 0,91$).

Таблица 1 – Значения коэффициента корреляции r между содержанием изучаемых металлов в водных растениях водоемов г. Гомеля

Элемент	Медь	Цинк	Кобальт	Хром	Никель
Свинец	–0,44	–0,07	0,70	0,94	0,96
Никель	–0,33	–0,02	0,71	0,93	–
Хром	–0,41	–0,30	0,91	–	–
Кобальт	–0,58	–0,68	–	–	–
Цинк	0,74	–	–	–	–

Таблица 2 – Значения коэффициента корреляции r между содержанием изучаемых металлов в водных растениях контрольного водоема

Элемент	Медь	Цинк	Кобальт	Хром	Никель
Свинец	0,08	0,16	0,61	–0,27	0,89
Никель	–0,02	–0,01	0,94	0,05	–
Хром	–0,60	–0,71	0,30	–	–
Кобальт	–0,34	–0,34	–	–	–
Цинк	0,99	–	–	–	–

Очевидно, существует высокая степень синергизма в потреблении данных элементов растениями. В то же время отмечены отрицательные корреляционные связи между медью, с одной стороны, и свинцом, никелем, хромом, кобальтом – с другой (значение коэффициент корреляции r составляет $-0,44$; $-0,33$; $-0,41$; $-0,58$ соответственно). Также характеризуются противоположными тенденциями в накоплении растениями цинк и кобальт, цинк и хром. Для пар цинк-свинец и цинк-никель корреляция не установлена ($r = 0,07$ и $0,02$ соответственно). Аналогичные закономерности выявлены при анализе корреляционных связей в накоплении металлов растениями из контрольного водоема (таблица 2).

На основании результатов корреляционного анализа можно сделать вывод, что существуют, по крайней мере две группы металлов, характеризующиеся различными механизмами накопления водной растительностью: группа I – цинк и медь, группа II – кобальт, хром, никель, свинец. Таким образом, данные корреляционного анализа также подтверждают показанную выше разнонаправленность процессов, влияющих на динамику содержания тяжелых металлов в высшей водной растительности водоемов г. Гомеля.

Закключение. Проведенный анализ динамики содержания тяжелых металлов в высших водных растениях, произрастающих в водоемах г. Гомеля, показал, что за период с 2004 г. по 2017 г. концентрация в растениях всех анализируемых металлов претерпела существенные изменения. Для кобальта, хрома, никеля и свинца отмечено однонаправленное снижение уровня содержания в растениях водоемов до 2014 г. независимо от характера антропогенной нагрузки, оказываемой на водоем (исключение – хром в макрофитах контрольного водоема), что может объясняться снижением техногенного воздействия на водные экосистемы. Необходимо отметить заметный рост загрязнения кобальтом, хромом и никелем растений как водоемов городской черты, так и контрольного водоема в период с 2015 по 2017 гг., а для свинца, меди и цинка с 2015 по 2016 гг. Данный факт требует дальнейших более детальных исследований, но можно предположить, что в большей степени, чем техногенное воздействие на повышение содержания свинца, меди и цинка в 2016 г. и дальнейшее снижение их концентрации в 2017 г. (что не отмечено для других изучаемых металлов) повлияли внутри-водоемные процессы перераспределения металлов между водой и донными отложениями, вызванные падением уровня воды в исследуемых водных экосистемах.

Растения городских водоемов загрязнены соединениями металлов в большей степени, чем в контрольном водоеме, что указывает на влияние Гомельского промышленного комплекса на экосистемы города.

Обнаружена высокая степень прямой корреляционной связи между содержанием в водных растениях меди и цинка, никеля и свинца, никеля и хрома, никеля и кобальта, свинца и хрома, хрома и кобальта. Исследованиями установлено, что существуют две группы металлов, характеризующиеся различными механизмами накопления водной растительностью: группа I – цинк и медь; группа II – кобальт, хром, никель и свинец. Полученные корреляционные зависимости могут быть использованы при проведении эколого-химической оценки степени загрязнения водоемов тяжелыми металлами.

Литература

1. Безель, В.С. Химическое загрязнение среды: вынос химических элементов надземной фитомассой травянистой растительности / В.С. Безель, Т.В. Жуйкова // Экология. – 2007. – № 4. – С. 259–267.
2. Никаноров, А.М. Биомониторинг тяжелых металлов в пресноводных экосистемах / А.М. Никаноров, А.В. Жулидов, А.Д. Покаржевский. – Л. : Гидрометеиздат, 1985. – 143 с.
3. Баглаева, Е.М. Пространственная структура техногенного загрязнения снегового покрова промышленного города и его окрестностей растворимыми и нерастворимыми формами металлов / Е.М. Баглаева, А.П. Сергеев, А.Н. Медведев // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геоэкология. – 2012. – № 4. – С. 326–335.
4. Интернет-портал республиканского центра по гидрометеорологии, контролю радиоактивного загрязнения и мониторингу окружающей среды [Электронный ресурс] / Министерство природных ресурсов и охраны окружающей среды Республики Беларусь. – Режим доступа : <http://www.pogoda.by/gidroarchive>. – Дата доступа : 03.08.2017.

5. Макаренко, Т.В. Динамика содержания тяжелых металлов в донных отложениях и водных растениях р. Сож в районе Гомеля / Т.В. Макаренко, А.С. Косматьков // Журн. Белорус. гос. ун-та. Экология. – 2018. – № 1. – С. 48–60.

6. Головатый, С.Е. Научные основы минимизации накопления тяжелых металлов в растениеводческой продукции на дерново-подзолистых почвах : автореф. дис. ... д. сельскохозяйств. наук : 06.01.04 / С.Е. Головатый ; НИРУП Ин-т почвовед. и агрохим. НАН Беларуси. – Минск, 2003. – 47 с.

7. Болдырев, К.А. Методика расчета выхода тяжелых металлов из слоя донных отложений водоемов / К.А. Болдырев, В.В. Кузьмин, Н.П. Куранов // Водоснабжение и санитарная техника. – 2016. – № 6. – С. 43–47.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 30.09.2019

УДК 599.742.11(591.2)

Анализ гельминтофауны енотовидной собаки, обитающей на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника

Н.Г. НАДИНА¹, И.В. КУРАЧЕНКО², Г.Г. ГОНЧАРЕНКО²

Произошедшая техногенная катастрофа привела к появлению естественного полигона с новым фактором воздействия на биогеоценозы – повышенным уровнем ионизирующего излучения. Этот комплекс новых условий может привести к глубоким изменениям в биоценозах и сказаться на разных систематических группах животных. Все это также может оказывать воздействие и на паразитологическую ситуацию в популяциях диких животных. Животные, перемещаясь, в том числе на прилегающие к заповеднику территории, могут менять паразитологическую ситуацию в местах их нового пребывания. Это может происходить за счет прямого и опосредованного контакта диких хищных млекопитающих с домашними животными, вовлекая новые территории в циркуляцию возбудителей. Тем самым актуализируется необходимость проведения паразитологического исследования, направленного на изучение формирования гельминтозов енотовидной собаки на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника и оценки зараженности.

Ключевые слова: гельминтофауна, дикие животные, паразиты, паразитологические исследования, биотоп, инвазия.

The technological disaster that led to the appearance of a natural training ground with a new factor affecting biogeocenoses – an increased level of ionizing radiation. This set of new conditions can lead to profound changes in biocenoses and affect different systematic groups of animals. All this can also affect the parasitological situation in wild animal populations. Animals moving, including to the territories adjacent to the reserve, can change the parasitological situation in the places of their new stay. This can occur due to direct and indirect contact of wild predatory mammals with domestic animals, involving new territories in the circulation of pathogens. Thus, the need for a parasitological study aimed at studying the formation of helminthoses of a raccoon dog in the territory of the Polesie State Radioecological Reserve and assessing infection is updated.

Keywords: helminth fauna, wild animals, parasites, parasitological studies, biotope, invasion.

Введение. Гельминтофауна диких позвоночных животных играет значительную роль в биоценозах, являясь биологическим фактором загрязнения окружающей среды, инвазионным началом, причиняя большой ущерб популяциям. Вызывая опасные заболевания, паразиты могут оказывать деструктивное влияние на популяции диких животных. Некоторые виды гельминтов относятся к зооантропонозам, в связи с чем имеют эпидемиологическое значение. Ввиду снятия антропогенной нагрузки на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника происходят естественные процессы восстановления трансформированных ранее экосистем. Отмечена высокая численность диких животных, служащих резервуаром и переносчиками инвазионных болезней животных и человека. Мониторинг гельминтофауны диких животных может служить одним из показателей паразитарной оценки территории.

Из всех диких плотоядных семейства псовых на территории ПГРЭЗ наиболее широко и повсеместно распространена енотовидная собака (*Nyctereutes procyonoides* Gray, 1834). По сравнению со средней плотностью енотовидной собаки в Гомельской области, в Полесском заповеднике она в пять раз выше [1].

Объекты и методы исследований. В полевой сезон 2016–2017 гг. на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника проводилось изъятие енотовидных собак в литоральных зонах участков: бнп. Красноселье, который находится вблизи реки Припять; бнп. Кулажин, вблизи реки Несвич; бнп. Хвощевка вблизи озера Гнездное; Оревичское лесничество: вблизи озера Семеница и Оревичского канала. Изъятые особи енотовидной собаки подвергались гельминтологическим исследованиям методом полных вскрытий с последующей камеральной обработкой, проводимых в лаборатории отдела

экологии фауны ПГРЭЗ [2], [3], [4]. При вскрытии учитывался пол животного, а также определялся возраст диких животных. Для определения гельминтов и их фотофиксации применяли микроскоп Альтами № А4088 с цифровой окулярной USB камерой 5,1 Мпикс и бинокляр Альтами СМ 1065-Т № 4393 с увеличением – $1,0 \times 6,5$ и с цифровой окулярной USB камерой 5,1 Мпикс. Видовую принадлежность гельминтов 55-ти особей енотовидной собаки определяли с использованием определителей [4]. Полученный материал обработан математическими и статистическими методами в компьютерной программе Microsoft Excel. Собранные данные позволяют оценить фаунистическое разнообразие гельминтов исследуемых хозяев на уровне крупных таксонов (классов). С учетом особенностей экологии хозяев и условий внешней среды можно выявить закономерности биоразнообразия паразитических червей.

При проведении сравнительного анализа видового разнообразия гельминтов у систематически или экологически близких групп или видов хозяев, а также в связи с условиями их обитания (условиями биотопов), использовали стандартные индексы. Для оценки степени зараженности енотовидной собаки применены статистические показатели – интенсивность и экстенсивность инвазии, индекс обилия [2], [5]. Для оценки биологического разнообразия рассчитаны коэффициент видового сходства сообществ (коэффициент Жаккара), позволяющий сравнить видовой состав двух сообществ между собой, индекс Симпсона, являющийся показателем доминирования в сообществе [5], [6].

Результаты исследований и их обсуждение. Полученные данные свидетельствуют о том, что паразитофауну гельминтов енотовидной собаки заповедника на данном этапе исследований можно охарактеризовать как трематодозную, так как экстенсивность инвазии трематодами составляет 98,2 % от всех исследованных енотовидных собак. Это объясняется тем, что основную долю рациона енотовидной собаки составляют грызуны, амфибии, рептилии, пресноводные рыбы, насекомые, дождевые черви, в большей степени являющиеся промежуточными и резервуарными хозяевами паразитов. Общая инвазированность енотовидной собаки в данной выборке составила 100 %.

В количественном отношении у енотовидной собаки на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника преобладают трематоды, которыми заражено 54 особи енотовидной собаки (98,18 %). Акантоцефалы обнаружены у 32 особей исследуемых животных (58,18 %), нематоды выявлены у 18 особей енотовидной собаки (32,72 %), цестоды обнаружены у 10 енотовидных собак (18,18 %). На основе численности всех обнаруженных гельминтов исследуемой группы енотовидной собаки для оценки биологического разнообразия был рассчитан индекс Симпсона. Показатель индекса Симпсона составил 0,46, что свидетельствует об устойчивой паразитофауне со стабильной видовой структурой.

Классовый гельминтоценотический индекс (К.И. Скрябин, 1946) представлен следующим образом:

$$\frac{55(T\ 98,18\ A\ 58,18\ N\ 32,72\ C\ 18,18)}{(207,26 - 100)15}$$

При полном гельминтологическом исследовании установлено, что наибольшее число гельминтов – 11 видов было обнаружено в тонком кишечнике, 6 видов в толстом кишечнике, 4 вида в слепом отростке, по 2 вида паразитов в желудке, легких и желчном пузыре. Единичные экземпляры гельминтов обнаружены в мышечной ткани, диафрагме и под кожей енотовидных собак.

Также можно отметить, что доминирующим видом является трематода *Alaria alata*. Количество паразитов на одного хозяина варьирует от 2 до 2700 экземпляров, с экстенсивностью инвазии до 85,0 % в легких енотовидной собаки. Тонкий кишечник енотовидной собаки населяют трематоды, нематоды, цестоды и акантоцефалы в различных соотношениях микст инвазии. Встречаемость видов гельминтов у исследуемой группы енотовидной собаки составила от 1,8 % до 92,7 %, интенсивность инвазии отмечена на уровне от 1 до 4026 экземпляров, индекс обилия варьирует от (0,02) – у *Opisthorchis felineus*, *Metorchis bilis*, *Ancylostoma caninum*, *Capillaria putorii*, *Strongiloides vulpis* до (211,0) – у *Alaria alata*.

Таким образом, при сравнении инвазированности енотовидных собак, изъятых на пяти участках, было установлено, что встречаемость трематод варьировало от трех (бнп. Красноселье вблизи реки Припять) до пяти видов на участке (вблизи оз. Семеница) с экстенсивно-

стью инвазии от 8,0 до 100,0 %; нематоды встречались от одного вида (вблизи оз. Семеница, бнп. Кулажин вблизи р. Несвич, вблизи Оревичского канала) до трех видов (вблизи оз. Семеница, бнп. Красноселье вблизи реки Припять) с экстенсивностью инвазии от 7,0 до 44,0 %, цестоды обнаружены от одного вида (бнп. Красноселье вблизи реки Припять, вблизи оз. Семеница) до двух видов (бнп. Кулажин вблизи р. Несвич, вблизи оз. Гнездное) с экстенсивностью инвазии от 7,0 до 36,0 %. Акантоцефалы обнаружены у енотовидных собак, изъятых на всех пяти точках, с экстенсивностью инвазии от 13,0 до 86,0 %.

При сравнении видового состава паразитов енотовидных собак, изъятых на разных участках, был произведен расчет коэффициента видового сходства, позволяющий сравнить видовой состав гельминтов двух сообществ между собой. Полученные результаты говорят о полном видовом сходстве гельминтов енотовидных собак, изъятых на участках: «вблизи Оревичского канала и бнп. Красноселье (вблизи р. Припять)» – K_g 0,75, «вблизи Оревичского канала и бнп. Кулажин (вблизи р. Несвич)» – K_g 0,66. Выявлено низкое видовое сходство паразитов енотовидных собак, изъятых на участках «вблизи оз. Семеница, вблизи оз. Гнездное» – K_g 0,42.

В остальных случаях на сравниваемых участках выявлено высокое видовое сходство паразитов, коэффициент видового сходства сообществ составил от K_g 0,46 и до 0,60.

При сравнении зараженности в зависимости от возраста енотовидной собаки наблюдалась практически одинаковая экстенсивность инвазии. Только в случае нематоды *Trichinella spiralis* наблюдалась минимальная зараженность в неполовозрелом возрасте (от 0+ до 1+) – 3,7 %, а в половозрелом возрасте енотовидной собаки (от 2+ до 7+) интенсивность инвазии составила 50 % ($p < 0,001$).

Некоторые виды гельминтов (*Ancylostoma caninum*, *Uncinaria stenocephala*, *Opisthorchis felinus*, *Metorchis bilis*) встречались только у половозрелых особей с экстенсивностью инвазии 3,6 %.

Для оценки видового состава гельминтов по возрастным характеристикам были проведены расчеты коэффициента видового сходства. Были исследованы две группы: первая группа (возраст от 0+ до 1+) в количестве 27 особей енотовидных собак и вторая группа (возраст от 2+ до 7+) в количестве 28 особей. Исследования показали, что в младшей возрастной группе присутствовало 11 видов гельминтов, в группе возрастом от двух до семи лет обнаружено 13 видов паразитов. Коэффициент видового сходства сообществ гельминтов составил 0,6, что показывает высокое сходство паразитов вне зависимости от возраста исследуемой группы енотовидных собак. Следует отметить, что в каждой возрастной группе выявлены паразиты, способные заражать от 3,7 % до 46 % особей в популяции.

На сезонное изменение зараженности диких животных паразитами большое влияние оказывает изменение интенсивности питания в различное время года. Сезоны года оказывают влияние на физиологическое состояние организма животного, что определяет интенсивность их питания, а, следовательно, и степень зараженности.

Количественные исследования енотовидной собаки показали, что инвазированность животных гельминтами в течение года существенно варьирует. При исследовании сезонной динамики были выявлены определенные закономерности пораженности енотовидной собаки возбудителями смешанных инвазий.

При паразитологическом исследовании видового разнообразия гельминтов енотовидных собак в зависимости от сезона изъятия нами было проанализировано в летний период 11 особей енотовидных собак. Обнаружено девять видов гельминтов, из них четыре вида относятся к классу Trematoda, два вида – к классу Nematoda, два вида – к классу Cestoda и один вид – к классу Acanthocephala.

Экстенсивность инвазии в летний период у трематод составила: *Alaria alata* (100,0 %), *Echinochasmus perfoliatus* (82,0 %), *Paragonimus westermani* (18,2 %), *Euparyphium melis* (18,0 %); у нематод – *Trichinella spiralis* (27,3 %), *Uncinaria stenocephala* (9,0 %); у цестод: *Spirometra erinacei-europei* (27,3 %), *Diphyllbothrium latum* (9,0 %) и скребня *Macracanthorhynchus catulinus* с экстенсивностью инвазии 36,4 %.

В летний период интенсивность инвазии составила: у трематод от 1 до 381 экз., у цестод – ИИ (2-35) экз., нематод – ИИ (4-38) экз./л/к., акантоцефал с ИИ – (1-13) экземпляров приходилось на одну особь енотовидной собаки.

Для оценки зараженности паразитами диких животных, изъятых в осенний период, было проведено паразитологическое исследование 44 особей енотовидных собак. Нами было установлено 15 видов паразитов в различных микстинвазиях. Из них 6 видов относятся к классу Trematoda с экстенсивностью инвазии от 2,0 до 91 %, ИИ 1-4026 экз., четыре вида относятся к классу Nematoda с ЭИ от 2,3 до 23,0 %, ИИ 1-89 экз., л/к., два вида относятся к классу Cestoda с ЭИ от 2,0 до 14 %, ИИ 2-45 экз., и два вида, относящихся к классу Acanthocephala с экстенсивностью инвазии от 6,8 до 62,0 % и интенсивностью инвазии от 1 до 43 экземпляров.

В летний период наибольшая экстенсивность инвазии представлена *Alaria alata* 100 %, в осенний – 91,0 %, что показывает зараженность на одном уровне в данные периоды времени ($p > 0,05$). Из класса цестод наиболее выражена экстенсивность инвазии у *Trichinella spiralis* – 27,2 %; *Spirometra erinacei-europei* – 27,3 % в летний период, ЭИ – 14,0 % в осенний. Наиболее инвазирована енотовидных собак скребнем *Macracanthorhynchus catulinus* наблюдается в осенний период с экстенсивностью инвазии – 62 %. Паразитофауна енотовидной собаки в осенний период более насыщена разнообразием паразитов и представлена 14 видами, а в летний период – 9 видами. Достоверны сезонные различия у енотовидных собак только по инвазии ленточным червем *Diphyllobothrium latum* ($p \leq 0,05$). Таким образом, при сравнении сезонной изменчивости зараженности енотовидных собак паразитами было установлено, что большую часть инвазии в осенне-летний период составляют трематоды.

Заключение. За период исследования было установлено, что паразитофауна енотовидной собаки на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника представлена 15 видами гельминтов, относящихся к трем типам и 4 классам: Trematoda Rudolphi, 1808, Nematoda Rudolphi, 1808, Cestoda Rudolphi, 1808, Acanthocephala Rudolphi, 1801. Класс трематод представлен шестью видами, цестод – двумя видами, нематод – пятью видами и два вида принадлежит классу акантоцефал. При этом трематодами инвазировано 98,2 % енотовидных собак, нематодами – 32,7 %, цестодами – 18,2 %, акантоцефалами – 58,2 % исследованных особей. В 87 % случаях нами была отмечена полиинвазия двумя-пятью видами паразитов в различных сочетаниях. Доминируют по встречаемости виды *Alaria alata* с экстенсивностью инвазии 92,7 % и *Echinochasmus perfoliatus* с экстенсивностью инвазии 81,8 %. Встречаемость трематоды *Euparyphium melis* отмечена на уровне 25,4 %, *Paragonimus westermani* – 5,5 %. Экстенсивность инвазии нематоды *Trichinella spiralis* составила 27,3 %, цестоды *Spirometra erinacei-europei* – 16,4 %, скребня *Macracanthorhynchus catulinus* составила 56,4 % и *Macracanthorhynchus hushirudinaceus* – 5,4 %. Зарегистрированы нематода *Capillaria putorii* и цестода *Diphyllobothrium latum* с экстенсивностью инвазии 3,6 %. Виды *Opisthorchis felineus*, *Uncinaria stenocephala*, *Ancylostoma caninum*, *Metorchis bilis*, *Strongiloides vulpis* зарегистрированы с экстенсивностью инвазии 1,8 %. Наибольшая интенсивность инвазии енотовидной собаки отмечена для *Alaria alata* – до 4026 экземпляров, у *Echinochasmus perfoliatus* – 1860 экземпляров. Единичная интенсивность наблюдалась у пяти видов: *Capillaria putorii*, *Strongiloides vulpis*, *Metorchis bilis*, *Ancylostoma caninum*, *Opisthorchis felineus*.

Показатель индекса Симпсона составил 0,46, что свидетельствует об устойчивой паразитофауне со стабильной видовой структурой. Полученные результаты говорят о полном сходстве гельминтов енотовидных собак, изъятых на участках: «Прибрежная зона Оревичского канала и бнп. Красноселье (вблизи р. Припять)» – $K_g 0,75$, «Прибрежная зона Оревичского канала и бнп. Кулажин (вблизи р. Несвич)» – $K_g 0,66$.

Исследования показали, что в неполовозрелой возрастной группе енотовидных собак зарегистрировано 11 видов гельминтов, в половозрелой группе возрастом от двух до семи лет обнаружено 13 видов паразитов.

Коэффициент видового сходства сообществ гельминтов показал высокое сходство паразитов вне зависимости от возраста исследуемой группы енотовидных собак (0,6). Следует отметить, что в каждой возрастной группе выявлены паразиты, способные заражать от 3,7 % до 46 % особей в популяции.

Таким образом, енотовидная собака является дефинитивным хозяином эпидемически и эпизоотически значимых видов гельминтов, формируя на территории заповедника природные очаги аляриоза, трихинеллеза, спарганоза и др.

Полученные данные свидетельствуют о том, что фауну гельминтов енотовидной собаки заповедника в данной выборке можно охарактеризовать как трематодозную, так как экстенсивность инвазии трематодами составляет 98,2 % от всех исследованных енотовидных собак. Общая инвазированность енотовидной собаки на территории ПГРЭЗ на данном этапе исследований составила 100 %.

Литература

1. Фаунистические исследования в Полесском государственном радиационно-экологическом заповеднике: сборник научных трудов / Департамент по ликвидации последствий катастрофы на Чернобыльской АЭС Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь, Полесский государственный радиационно-экологический заповедник ; под ред. Г.В. Анципова. – Гомель : РНИ-УП «Институт радиологии», 2008. – 162 с.
2. Ромашов, Б.В. Методика гельминтологических исследований позвоночных животных: учебное пособие / Б.В. Ромашов, Л.Н. Хицова, Е.И. Труфанова, Н.В. Ромашова. – Воронеж, 2003. – 35 с.
3. Ивашкин, В.М. Методы сбора и изучения гельминтов наземных млекопитающих / В.М. Ивашкин, В.Л. Контримавичус, Н.С. Назарова. – М. : Наука, 1971. – 124 с.
4. Козлов, Д.П. Определитель гельминтов хищных млекопитающих / Д.П. Козлов. – М. : Наука, 1977. – 275 с.
5. Рокицкий, П.Ф. Биологическая статистика: учебн. пособ. / П.Ф. Рокицкий ; под ред. А.Н. Шалковской. – Мн. : Высшая школа, 1967. – 328 с.
6. Орлова, Ю.С. Использование индексов биологического разнообразия для анализа альгофлоры бассейна р. Алатырь / Ю.С. Орлова // Вестник Мордовского университета. – 2013. – № 3–4. – С. 53–57.

¹Полесский государственный
радиационно-экологический заповедник

²Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 21.05.2019

УДК 595.763 (476.5)

Карабидокомплексы (Coleoptera: Carabidae) прибрежных древесных насаждений в г. Витебске. Часть 2. Зооценотическая характеристика

Е.С. ПЛИСКЕВИЧ, И.А. СОЛОДОВНИКОВ

Рассмотрена зооценотическая характеристика карабидокомплексов в прибрежной древесно-кустарниковой растительности города Витебска по долине реки Западная Двина. Отмечено преобладание западнопалеарктических (38,29 %), транспалеарктических (28,34–32,77 %) и западно-центрально-палеарктических видов (20,77–28,56 %). В ряду биоценозов по увеличению антропогенной нагрузки (от 1 к 3) выявлено увеличение численности стратобионтов зарывающихся подстильно-почвенных (16,28–28 %) и геохортобионтов гарпалоидных (18,6–20 %). По экологической приуроченности жуки выявлено увеличение от 1 к 3 биоценозу численности лугоболотно-низинных (0,84–6,12 %) и прибрежных видов (7,19–17,34 %).

Ключевые слова: Carabidae, прибрежная древесно-кустарниковая растительность, *Bembidion tenellum*, Белорусское Поозерье.

The zoocenotic characterization of carabidocomplexes in the bank trees and shrubs in the city of Vitebsk along the valley of the river Zapadnaya Dvina is considered. The predominance of the West Palaearctic (38,29 %), Trans-Palaearctic (28,34–32,77 %) and West-Central-Palaearctic species (20,77–28,56 %) was noted. In a series of biocenoses, an increase in anthropogenic load (from 1 to 3) revealed an increase in the number of stratobionts of burrowing litter-soil (16,28–28 %) and harpaloid geochortobionts (18,6–20 %). According to the ecological confinement of ground beetle, an increase from 1 to 3 of the biocenosis of the numbers of meadow-bog-lowland (0,84–6,12 %) and coastal species (7,19–17,34 %) was revealed.

Keywords: Carabidae, bank tree and shrubs plantations, *Bembidion tenellum*, Belarusian Lakeland.

Изучение многочисленных видов жесткокрылых в антропогенных сообществах древесных и кустарниковых насаждений города имеет большое значение в сохранении ценных природных комплексов и биоразнообразия многих видов растений и животных.

Хорошим экологическим индикатором изменения окружающей среды являются жуки-жужелицы (Coleoptera, Carabidae), так как они встречаемостью во многих местообитаниях обладают высокой чувствительностью, высокой численностью и быстрой реакцией на различные антропогенные и природные воздействия. Имеющиеся работы [1], [2] по урбанизированным территориям и жуки-жужелицы, обитающим на них, не освещают вопросы, связанные с обитанием на городских территориях.

В первой части нашей работы мы представили данные о видовом составе и структуре доминирования карабидокомплексов прибрежной древесно-кустарниковой растительности в городе Витебске [3]. Цель настоящей работы – дать зооценотическую характеристику карабидокомплексов прибрежной древесно-кустарниковой растительности в городе Витебске.

Материал был собран в период 30.04.–18.11.2018 г. в административных границах г. Витебска (на левом берегу реки Западная Двина). При сборе материала использовались почвенные ловушки Барбера (фиксирующая жидкость – 9 % уксусная кислота). Ловушки были расположены в 3 биоценозах: биоценоз № 1 – окрестности парка «Партизанской Славы им. М. Шмырева», № 2 – левый берег р. Зап. Двина, № 3 – окрестности «Сквера героев Отечественной войны» (подробное описание мест сбора см. часть 1 [3]).

При установлении типов ареалов жуки-жужелицы применялась схема К.Б. Городкова [4]. Для проведения ареалогического анализа применяли Каталог Палеарктических жуков [5] и фаунистические сводки [6], [7]. Для анализа жизненных форм и экологической приуроченности жуки-жужелицы была использована литература [6], [8], [9]. В результате проведенного нами исследования для выявленных ранее нами видов жуки-жужелицы [3] приведены сведения по зооценотическим характеристикам (таблица 1).

Таблица 1 – Видовой состав и зооценотические характеристики жуужелиц Carabidae в прибрежных древесных насаждениях города Витебска, 2018 г.

№	Вид				
		№ 1 ^{1*}	№ 2 ^{2*}	№ 3 ^{3*}	№ 4 ^{4*}
1	<i>Leistus ferrugineus</i> (Linnaeus, 1758)	зцП	Ссп	ЛсЛ	м
2	<i>L. terminatus</i> (Hellwig, 1793)	зцП	Ссп	Э	м
3	<i>Nebria brevicollis</i> (Fabricius, 1792)	ЕК	Ссп	Лс	м
4	<i>Notiophilus palustris</i> (Duftschmid, 1812)	зцП	Сспп	Лс	м
5	<i>Carabus granulatus</i> Linnaeus, 1758	ТП	Эпх	ЛсБн	мг
6	<i>C. nemoralis</i> Müller, 1764	Е	Эпх	Лс	м
7	<i>Loricera pilicornis</i> (Fabricius, 1775)	Ц	Сспп	ЛсБн	г
8	<i>Clivina fossor</i> (Linnaeus, 1758)	Ц	Гр	Э	м
9	<i>Dyschiriodes globosus</i> (Herbst, 1784)	ТП	Гр	Э	мг
10	<i>Trechus secalis</i> (Paykull, 1790)	зП	Ссп	Лс	м
11	<i>Asaphidion flavipes</i> (Linnaeus, 1761)	ЕКаз	Эпб	ЛсЛ	мг
12	<i>Bembidion properans</i> (Stephens, 1828)	Ц	Сспп	П	м
13	<i>B. biguttatum</i> (Fabricius, 1779)	зП	Сспп	ПрБн	г
14	<i>B. guttula</i> (Fabricius, 1792)	зцП	Сспп	ЛБн	г
15	<i>B. tenellum</i> Erichson, 1837	зцП	Сспп	Пр	г
16	<i>B. mannerheimii</i> Sahlberg, 1834	ЕС	Сспп	ЛсБн	г
17	<i>Patrobus atrorufus</i> (Ström, 1768)	зП	Ссп	ЛсБн	г
18	<i>Stomis pumicatus</i> (Panzer, 1796)	ЕК	Ссп	ЛсЛ	м
19	<i>Poecilus cupreus</i> (Linnaeus, 1758)	зцП	Сзпп	ЛП	м
20	<i>P. versicolor</i> (Sturm, 1824)	ТП	Сзпп	ЛП	м
21	<i>Pterostichus niger</i> (Schaller, 1783)	ТП	Сзпп	ЛсЛ	мг
22	<i>Pt. vernalis</i> (Panzer, 1796)	зцП	Сспп	ЛБн	мг
23	<i>Pt. anthracinus</i> (Jlliger, 1798)	ЕС	Сзпп	Пр	г
24	<i>Pt. gracilis</i> (Dejean, 1828)	зцП	Сзпп	ПрБн	г
25	<i>Pt. nigrita</i> (Paykull, 1790)	ТП	Сзпп	Э	мг
26	<i>Pt. strenuus</i> (Panzer, 1797)	ТП	Ссп	Лс	мг
27	<i>Pt. oblongopunctatus</i> (Fabricius, 1787)	зП	Сзпп	Лс	м
28	<i>Pt. melanarius</i> (Illiger, 1798)	зП	Сзпп	ЛсЛ	м
29	<i>Calathus fuscipes</i> (Goeze, 1777)	ЕК	Ссп	ЛП	к
30	<i>C. melanocephalus</i> (Linnaeus, 1758)	ТП	Ссп	ЛсЛ	м
31	<i>Agonum emarginatum</i> (Gyllenhal, 1827)	зП	Сспп	ПрБн	г
32	<i>A. duftschmidi</i> Schmidt, 1994	зП	Сспп	ПрБн	г
33	<i>A. micans</i> (Nicolai, 1822)	ЕС	Ссп	ЛсБн	г
34	<i>A. munsteri</i> Hellen, 1935	зцП	Ссп	ПрБн	г
35	<i>A. thoreyi</i> Dejean, 1828	Ц	Ссп	ЛБн	г
36	<i>A. scitulum</i> Dejean, 1828	цЕ	Ссп	Пр	г
37	<i>A. impressum</i> (Panzer, 1797)	ТП	Сспп	Пр	г
38	<i>Anchomenus dorsalis</i> (Pontoppidan, 1763)	ТП	Сспп	ЛП	мг
39	<i>Platynus assimilis</i> (Paykull, 1790)	ТП	Ссп	ЛсБн	мк
40	<i>Oxypselaphus obscurus</i> (Herbst, 1784)	Ц	Ссп	ЛсЛ	г
41	<i>Synuchus vivalis</i> (Panzer, 1797)	ТП	Ссп	ЛП	мк
42	<i>Amara aenea</i> (DeGeer, 1774)	зцП	Гг	ЛП	к
43	<i>A. communis</i> (Panzer, 1797)	ТП	Гг	ЛсЛ	м
44	<i>A. convexior</i> Stephens, 1828	ЕС	Гг	ЛП	м
45	<i>A. nitida</i> Sturm, 1825	ТП	Гг	ЛсЛ	мк
46	<i>A. ovata</i> (Fabricius, 1792)	ТП	Гг	ЛсЛ	м
47	<i>A. spreta</i> Dejean, 1831	ЕС	Гг	Л	мк
48	<i>Curtonotus gebleri</i> Dejean, 1831	ЕС	Гг	ЛсЛ	мк
49	<i>Anisodactylus binotatus</i> (Fabricius, 1792)	зцП	Гг	Э	мг
50	<i>Harpalus rufipes</i> (DeGeer, 1774)	зцП	Схб	Э	м
51	<i>H. latus</i> (Linnaeus, 1758)	ТП	Гг	Лс	м
52	<i>H. progrediens</i> Schaubberger, 1922	ЕС	Гг	ЛП	м
53	<i>H. tardus</i> (Panzer, 1797)	зцП	Гг	ЛП	мк
54	<i>H. xanthopus winkleri</i> Schaubberger, 1923	ТП	Гг	ЛЛс	м
55	<i>Ophonus rufibarbis</i> (Fabricius, 1792)	зП	Схб	Л	м
56	<i>Panagaeus cruxmajor</i> (Linnaeus, 1758)	ЕС	Эпб	ПрЛ	г

Окончание таблицы 1

57	<i>Badister bullatus</i> (Schränk, 1798)	ТП	Ссп	Л	м
58	<i>B. lacertosus</i> Sturm, 1815	ТП	Ссп	Лс	м
59	<i>B. sodalis</i> (Duftschmid, 1812)	зП	Ссп	ЛсБн	мг
60	<i>Philorhizus sigma</i> (Rossi, 1790)	ТП	Сспт	Э	мг
61	<i>Syntomus truncatellus</i> (Linnaeus, 1761)	зцП	Сспт	ЛЛс	к

*Условные обозначения. 1. Зоогеографическая характеристика: Ц – циркумареал, ТП – транспалеарктический, Е – европейский, К – кавказский, Каз – казахский, П – палеарктический, С – сибирский, з – западный, ц – центральный.

2. Жизненная форма имаго: 1 класс зоофаги: Эпб – эпигеобионты бегающие, Эпх – эп. ходящие, Гр – геобионты роющие, Ссп – стратобионты скважинки подстилочные, Сспп – с.с. поверхностно-подстилочные, Сспт – с. с. подстильно-трещинные, Сзпп – с. зарывающиеся подстильно-почвенные; 2 класс миксофитофаги: Гг – геохортобионты гарпалоидные, Схб – стратохортобионты.

3. Биотопическая приуроченность: Б – болотный, Л – луговой, Лс – лесной, П – полевой, Пр – прибрежный, С – синантропный, Э – эвритопный, н – низинный.

4. Отношение к влажности: г – гигрофил, мг – мезогигрофил, м – мезофил, мк – мезоксерофил, к – ксерофил.

Выявленные нами виды жуужелиц, исходя из их распространения, были распределены по 9 типам ареалов. Для биоценоза 1 характерно присутствие жуужелиц с 8 типами ареалов, где по числу видов преобладают транспалеарктические (14 или 32,56 %) и западно-центрально-палеарктические (11 или 25,58 %). Жуужелицы, выявленные в биоценозе 2, также представлены 8 типами ареалов, здесь по числу видов также преобладают транспалеаркты (13 или 29,55 %) и западно-центрально-палеарктические (12 или 27,27 %). Для биоценоза 3 отмечены виды с 6 типами ареалов: по числу видов (11 или 44 %) преобладают транспалеаркты. Согласно относительному обилию (числу экз.) для биоценоза 1 отмечено преобладание западнопалеарктических (38,29 %) и транспалеарктических (32,77 %) видов (рисунок 1). Для биоценоза 2 отмечено также преобладание по обилию транспалеарктов (28,34 %) и западно-центрально-палеарктических (20,77 %). Наибольшим обилием в биоценозе 3 характеризовались транспалеарктические (32,64 %) и западно-центрально-палеарктические виды (28,56 %) (рисунок 1).

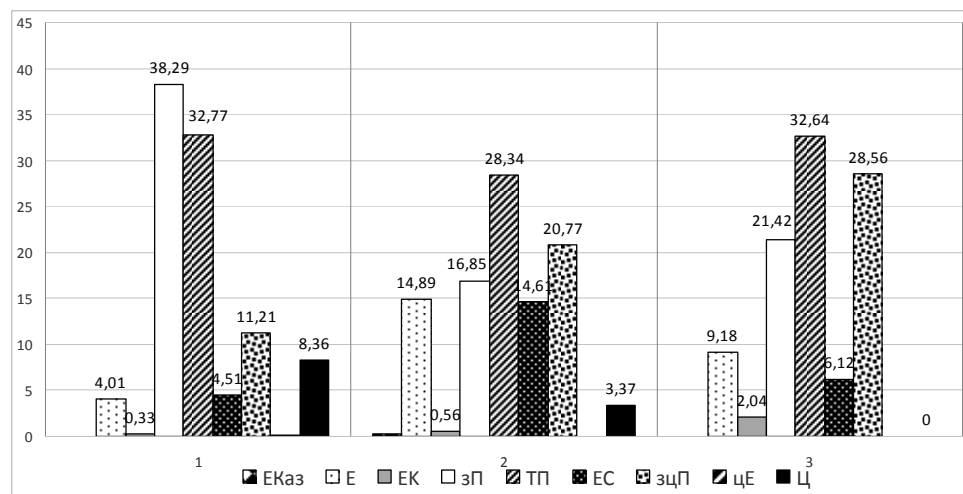


Рисунок 1 – Зоогеографическая структура жуужелиц (по обилию %)

В результате проведенного исследования выявленные виды жуужелиц были распределены между 2 классами жизненных форм. Комплексы жуужелиц в биоценозе 1 представлены 8 группами жизненных форм. Наибольшее число видов (15 или 34,88 %) отмечено среди стратобионтов скважников подстилочных. От первого биоценоза к третьему биотопу отмечено резкое уменьшение стратобионтов скважников подстилочных на примере *Leistus ferrugineus*, *L. terminatus*, *Nebria brevicollis*, *Trechus secalis*, *Patrobus atrorufus*, *Stomis pumicatus*, *Pt. strenuus*, *Calathus fuscipes*, *C. melanocephalus* и др. (таблица 1), что связано с вытоптанностью подстилки. От первого биоценоза к третьему возрастает незначительно число стратобионтов скважников поверхностно-подстилочных: *Notiophilus palustris*, *Loricera pilicornis*, *Bembidion properans*

и др. (таблица 1). Также отмечено увеличение доли геохортобионтов гарпалоидных: род *Amara* и *Harpalus*, что связано с увеличением ксерофильности и открытости биотопов (от первого к третьему). Для карабидокомплексов биоценоза 2 характерно доминирование по числу видов геохортобионтов гарпалоидных (11 или 25 %) и стратобионтов скважников поверхностно-подстилочных (10 или 22,73 %). Для биоценоза 3 отмечено наибольшее число видов среди стратобионтов зарывающихся подстилично-почвенных (7 или 28 %).

Согласно относительному обилию в карабидокомплексе биоценоза 1 преобладали стратобионты скважники подстилочные (48,49 %). Для карабидокомплекса биоценоза 2 наиболее обильными были стратобионты зарывающиеся подстилично-почвенные (39,6 %). В биоценозе 3 также преобладали стратобионты зарывающиеся подстилично-почвенные (26,52 %) (рисунок 2). Для всех трех биоценозов по спектру жизненных форм жуужелиц по обилию отмечена сходная тенденция, но при этом отмечено резкое увеличение в третьем биоценозе доли стратобионтов зарывающихся подстилично-почвенных: род *Pterostichus* (таблица 1).

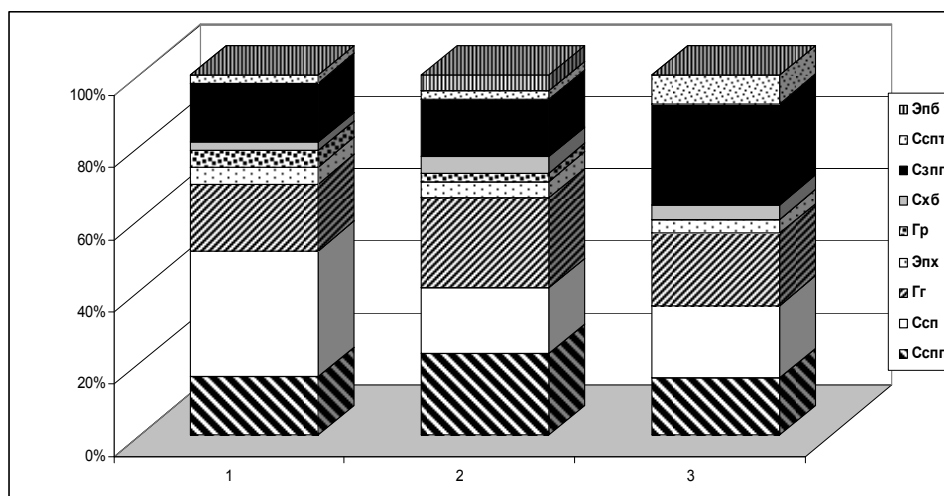


Рисунок 2 – Спектр жизненных форм имаго жуужелиц (обилие %)

По экологической приуроченности выявленные виды жуужелиц были распределены по 12 группам (рисунок 3). В биоценозе 1 по числу видов доминируют лесо-болотно-низинные (7 или 16,28 %) и лесо-луговые (7 или 16,28 %). Для биоценоза 2 по числу видов характерно преобладание лесо-луговых (8 или 18,18 %) и луго-полевых видов (7 или 15,91 %). В карабидокомплексе биоценоза 3 наибольшее число видов выявлено в составе лесо-луговой группы (5 или 20 %).

Согласно относительному обилию для карабидокомплекса биоценоза 1 отмечено доминирование лесо-луговых (27,76 %) и лесо-болотно-низинных (25,92 %) видов. В биоценозе 2 преобладали лесо-луговые (25 %), лесные (18,53 %) и луго-полевые (17,12 %) виды. В составе карабидокомплекса биоценоза 3 по обилию доминировали лесо-луговые (25,5 %), лесные (18,36 %) и прибрежные виды (17,34 %). Отмечено увеличение доли прибрежных видов: *Bembidion tenellum*, *Pterostichus anthracinus*, *Agonum scitulum*, *A. impressum* на фоне лесо-болотно-низинных: *Carabus granulatus*, *Loricera pilicornis*, *Bembidion mannerheimii*, *Patrobus atrorufus*, *Platynus assimilis*, *Badister sodalis* (рисунок 3). Интересно нахождение во второй линии большой доли луго-полевых видов: *Poecilus cupreus*, *P. versicolor*, *Calathus fuscipes*, *Synuchus vivalis*, *Amara aenea*, *Harpalus progrediens*, *H. tardus*. Отмечен рост от первой линии к третьей доли эвритопных видов: *Leistus terminatus*, *Clivina fossor*, *Dyschiriodes globosus*, *Pt. nigrita* и др. (таблица 1).

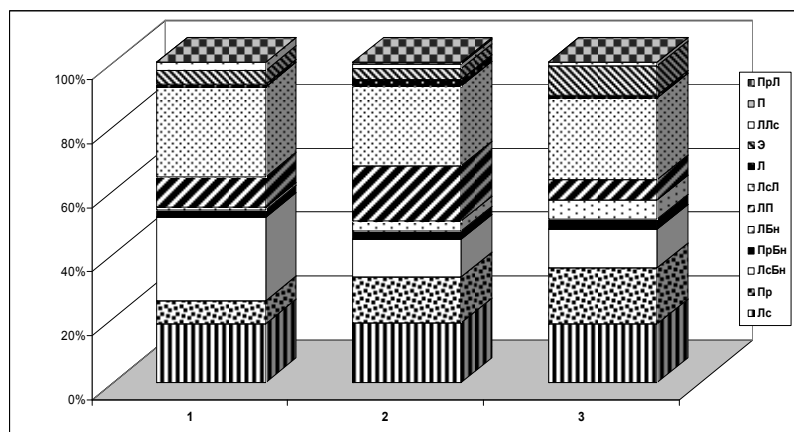


Рисунок 3 – Экологическая приуроченность жуужелиц (по обилию %)

По отношению к влажности в биоценозе 1 по числу видов преобладали мезофилы (16 или 37,21 %) и гигрофилы (12 или 27,91 %). В составе карабидокомплекса биоценоза 2 преобладали также мезофилы (16 видов или 36,36 %) и гигрофилы (11 видов или 25 %). В биоценозе 3 по числу видов доминировали мезофилы (10,40 %). Согласно относительному обилию в биоценозе 1 доминировали мезофилы (39,29 %) и гигрофилы (35,12 %). В составе карабидокомплекса биоценоза 2 также преобладали мезофилы (46,61 %) и гигрофилы (28,08 %). В биоценозе 3 преобладали мезофилы (44,88 %) и мезогигрофилы (23,45 %) (рисунок 4). Отмечено снижение доли гигрофильных видов в два раза на фоне возрастания мезогигрофилов и мезофильных видов. Доля мезоксерофильных видов остается на том же уровне (рисунок 4). Также отмечен незначительный рост от первой линии к третьей ксерофильных видов, что указывает на значительную степень трансформации биоценоза на третьей линии.

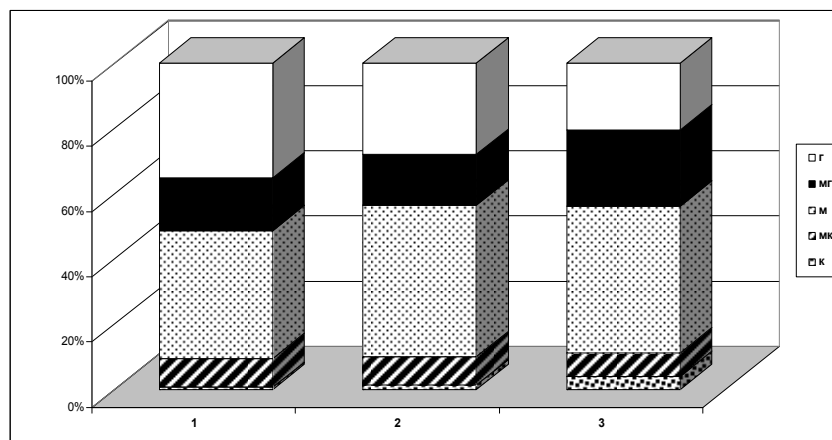


Рисунок 4 – Спектр гигропреферендумов жуужелиц (по обилию %)

При рассмотрении динамики активности жуужелиц в биоценозе 1 отмечено два пика активности (рисунок 5). Первый приходится на середину мая, и мы видим снижение численности формирующих его видов *Patrobis atrorufus* и *Poecilus versicolor*. Второй пик активности приходится на начало июля, здесь максимальная уловистость отмечена для видов: *Trechus secalis*, *P. atrorufus*, *Pterostichus niger*. В середине июня довольно высокая активность отмечена за счет таких видов как *Tr. secalis*, *Pt. niger*, *Platynus assimilis* (рисунок 5). В данном биоценозе отмечена наибольшая динамическая плотность жуужелиц (2,86 экз. на 10 лов/сут.).

Для биоценоза 2 отмечено два пика активности при незначительном повышении активности в конце июля. Первый приходится на середину мая, его формируют виды *Pt. anthracinus* и *P. versicolor* (рисунок 6). Начало подъема активности имаго отмечено с начала сентября за счет видов *Pt. melanarius* и второй генерации *Carabus nemoralis*. Она выходит на максимум в середине ноября за счет видов *Bembidion tenellum*, *Pt. anthracinus* и *C. nemoralis* (рисунок 6). Для данного биоценоза выявлены невысокие показатели динамической плотности жуужелиц (1,71 экз. на 10 лов/сут.).

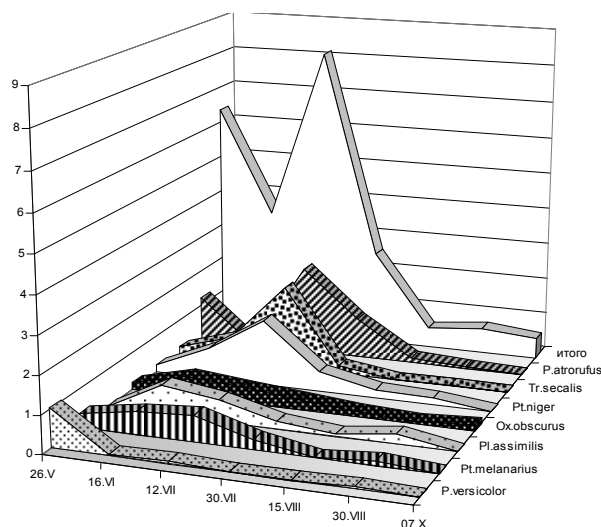


Рисунок 5 – Динамика активности жувелиц в биоценозе 1

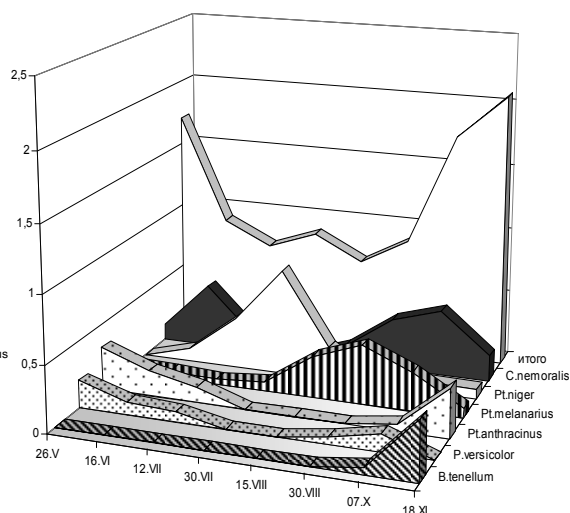


Рисунок 6 – Динамика активности жувелиц в биоценозе 2

Для биоценоза 3 отмечено два пика активности, причем второй осенний довольно слабо выражен. Первый пик активности довольно продолжительный во времени – с мая по начало июля, сформировался за счет видов *Harpalus rufipes*, *Badister sodalis*, *Pt. melanarius*, *Pt. vernalis* и *Pt. niger* (рисунок 7). Второй невысокий пик в середине октября образован видами: *C. nemoralis*, *B. tenellum*. Для данного биоценоза выявлены самые низкие показатели динамической плотности жувелиц (0,47 экз. на 10 лов/сут.).

Выводы. В результате изучения и анализа зооценотических характеристик карабидо-комплексов прибрежной древесно-кустарниковой растительности в городе Витебске выявленные виды жувелиц были отнесены к 9 типам ареалов (от 6 типов в биоценозе 3, до 8 – в биоценозах 1 и 2). Установлено преобладание западнопалеарктических (38,29 %), транспалеарктических (28,34–32,77 %) и западно-центрально-палеарктических видов (20,77–28,56 %). Выделено 9 типов жизненных форм. Выявлено уменьшение от 1 к 3 биоценозу стратобионтов скважников подстилочных (48,49–18,36 %) на фоне увеличения численности стратобионтов зарывающихся подстильно-почвенных (16,28–28 %) и геохортобионтов гарпалоидных (18,6–20 %). По экологической приуроченности жувелицы были распределены по 12 группам. Выявлено уменьшение от 1 к 3 биоценозу лесо-болотно-низинных (25,92–12,24 %) и луго-полевых (9,35–6,12 %) видов на фоне увеличения численности луго-болотно-низинных (0,84–6,12 %) и прибрежных видов (7,19–17,34 %). По гигропереферендумам жувелиц установлено уменьшение от 1 к 3 биоценозу гигрофилов (35,12–20,4 %) на фоне увеличения численности мезо гигрофилов (16,21–23,46 %), мезофиллов (39,29–44,88 %) и ксерофилов (0,67–4,08 %).

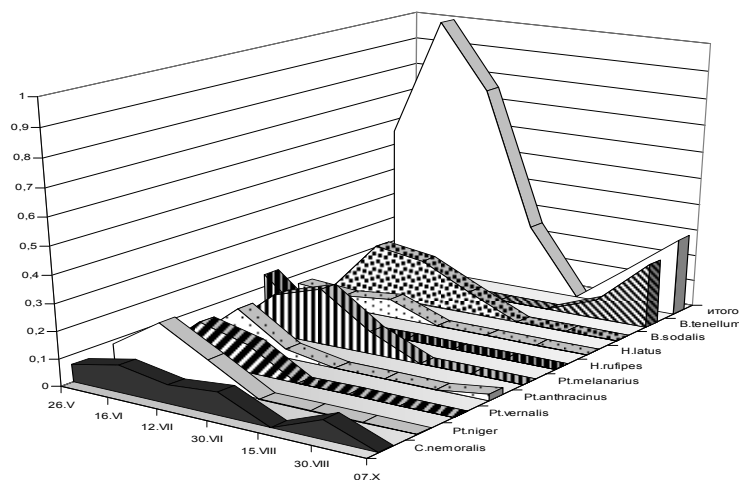


Рисунок 7 – Динамика активности жувелиц в биоценозе 3

Динамика активности описывается двухпиковыми и однопиковыми диаграммами, которые соответственно имеют виды с определенным типом активности. Максимальная динамическая плотность была обнаружена в первом биоценозе (2,86 экз. на 10 лов/сут.) и минимальная в третьем (0,47 экз. на 10 лов/сут.), что соответствует антропогенной нагрузке.

Литература

1. Kosewska, A. Role of urban forests as a source of diversity of Carabids (Coleoptera: Carabidae) in urbanised areas / A. Kosewska, M. Nietupski, M. Damszel // *Baltic Journal of Coleopterology*. – 2013. – Vol. 13, № 1. – P. 27–39.
2. Галиновский, Н.Г. Структура населения жесткокрылых-герпетобионтов (Insecta, Coleoptera) г. Минска : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.09 / Н.Г. Галиновский ; БГПУ им. М. Танка. – Минск, 2007. – 21 с.
3. Плискевич, Е.С. Карабидокомплексы (Coleoptera: Carabidae) прибрежных древесных насаждений в г. Витебске. Часть 1. Видовой состав, структура доминирования / Е.С. Плискевич, И.А. Солодовников // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*. – 2019. – № 3 (114). – С. 56–62.
4. Городков, К.Б. Типы ареалов насекомых тундры и лесных зон Европейской части СССР / К.Б. Городков // *Ареалы насекомых европейской части СССР, карты 179–221*. – Ленинград, 1984. – С. 3–20.
5. Catalogue of Palaearctic Coleoptera. Archostemata – Mxophaga – Adephaga: Vol. 1. Revised and updated edition / ed.: I. Löbl, D. Löbl. – Leiden/Boston : Koninklijke Brill NV, 2017. – XXXIV + 1443 p.
6. Солодовников, И.А. Жужелицы (Coleoptera, Carabidae) Белорусского Поозерья. С каталогом видов жужелиц Беларуси и сопредельных государств / И.А. Солодовников. – Витебск : УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008. – 325 с.
7. Checklist of the Ground-Beetles of Russia and Adjacent Lands (Insecta, Coleoptera, Carabidae) / O.L. Kryzhanovskij, I.A. Belousov, I.I. Kabak, B.M. Kataev [etc.]. – Sofia-Moscow : Pensoft Publishers, 1995. – 271 p.
8. Шарова, И.Х. Жизненные формы жужелиц (Coleoptera, Carabidae) / И.Х. Шарова – М., 1981. – 360 с.
9. Воронин, А.Г. Фауна и комплексы жужелиц (Coleoptera, Trachypachidae, Carabidae) лесной зоны Среднего Урала (эколого-зоогеографический анализ) / А.Г. Воронин. – Пермь : Изд-во Пермского ун-та, 1999. – 244 с.

Витебский государственный
университет им. П.М. Машерова

Поступила в редакцию 25.09.2019

УДК: 631.841.7:546.17-3/.175:634/.635

Особенности накопления нитрат- и нитрит-ионов плодовоовощными культурами в различные сроки внесения карбамида в почву после посадки

А.В. ХАДАНОВИЧ, Я.А. ДЕНИСЕНКО

В условиях однофакторного микрополевого опыта изучен характер накопления нитрат- и нитрит-ионов представителями семейства Тыквенные и семейства Пасленовые при разовом и трехкратном внесении в почву рассчитанных доз азотсодержащего удобрения карбамида. Установлено, что приемлемо внесение карбамида в почву в несколько этапов – через 10 дней после посадки растений, через 14 дней – до начала цветения и в период созревания плодов. Показана взаимосвязь содержания нитрат- и нитрит-ионов в растениях и их характер накопления в плодовоовощной продукции в соответствии с сезонами года.

Ключевые слова: нитрат-ионы, нитрит-ионы, минеральные удобрения, карбамид, ПДК, ионометрический метод.

The character of the accumulation of nitrate and nitrite ions by representatives of the Cucurbitaceae kind and the Solanaceae kind with a single and triple application of calculated doses of nitrogen-containing urea fertilizer into the soil was studied under the conditions of a one-factor microfield experiment. It has been established that the introduction of urea into the soil in several stages is most acceptable – 10 days after planting, 14 days before the flowering and during the ripening period. The relationship between the content of nitrate and nitrite ions in plants and their nature of accumulation in vegetables in accordance with the seasons of the year are shown.

Keywords: nitrate ions, nitrite ions, mineral fertilizers, urea, MPC, ionometric method.

Введение. Наряду с традиционным решением задач использования нитратного азота как источника азотного питания растений и оптимизации эколого-агрохимических условий, влияющих на формирование урожая и его качество, возникли вопросы экологических последствий аккумуляции нитратов в почве, воде, растениях, атмосфере, воздействия их на здоровье человека. Изучение вопросов, посвященных поступлению и трансформации соединений азота в системе «почва – растение», является актуальным [1].

Растения содержат различные азотсодержащие соединения, в частности, катионы аммония, нитрат- и нитрит-ионы, образующиеся в ходе ряда биохимических процессов. Источниками азота для растений являются азот, поступающий с атмосферными осадками, биологический азот, накапливаемый клубеньковыми бактериями и микроорганизмами. Наиболее эффективным и быстродействующим фактором, способствующим повышению качества растениеводческой продукции, является применение органических и минеральных удобрений, в числе которых немаловажное место отводится карбамиду ($\text{CO}(\text{NH}_2)_2$), содержащему до 46 % азота и применяемому в основном в качестве подкормки с заделкой в почву, реже – для внекорневой подкормки (тогда азот поступает в растение через листья) [2], [3].

Цель исследований – изучение характера накопления нитрат- и нитрит-ионов плодовоовощными культурами в различные сроки внесения карбамида в почву после посадки.

Объект исследования: образцы дерново-подзолистой супесчаной почвы приусадебного хозяйства г. Речица и плодовоовощные культуры, принадлежащие к следующим семействам: семейство тыквенные – Cucurbitaceae (тыква (кабачок) – *Cucurbita pepo* L.), семейство Пасленовые – Solanaceae (томат обыкновенный – *Solanum lycopersicum* L.).

С целью изучения характера накопления изучаемых ионов поставлен однофакторный микролевой опыт: растения высевались на делянках почвы площадью 10×10 м. В почву вносился карбамид по следующей схеме (таблица 1).

Выбор применения данного удобрения обусловлен эффективностью действия на легких дерново-подзолистых почвах в зоне достаточного увлажнения по сравнению с другими азотсодержащими удобрениями [4].

Таблица 1– Схема внесения в почву минерального удобрения (карбамида)

Семейство Пасленовые – <i>Solanaceae</i> (томат обыкновенный – <i>Solanum lycopersicum</i> L.)		Семейство тыквенные – <i>Cucurbitaceae</i> (кабачок – <i>Cucurbita pepo</i> L.)	
Однократное внесение удобрения	Трехкратное внесение удобрения	Однократное внесение удобрения	Трехкратное внесение удобрения
55 г/м ² (на 10 л воды)	через 10 дней после по- садки 25 г/м ² (на 10 л воды)	35 г/м ² (на 10 л воды)	через 10 дней после посад- ки 15 г/м ² (на 10 л воды)
	через 14 дней (до начала цве- тения): 25 г/м ² (на 10 л воды)		через 14 дней (до начала цветения): 15 г/м ² (на 10 л воды)
	Созревание плодов: 5 г/м ² (на 10 л воды)		Созревание плодов: 5 г/м ² (на 10 л воды)

Определение основных агрохимических характеристик почвы проводили по стандартным методикам, содержание нитрат-ионов в почве и плодовоовощной продукции – потенциометрическим методом, основанном на извлечении нитрат-ионов из анализируемого материала 1 %-ным раствором алюмокалиевых квасцов с последующим измерением их концентрации с помощью ионоселективного электрода. Определение содержания нитрит-ионов осуществлялось фотоколориметрическим методом, основанном на способности нитритов диазотировать сульфаниловую кислоту. Интенсивность окраски пропорциональна содержанию нитрит-ионов [5].

Результаты исследования и их обсуждение. В ходе однофакторного микрополевого опыта определены агрохимические характеристики почв. Содержание гумуса в изучаемой почве 2,41 % (для данного типа почв показатель гумуса лежит в пределах от 1,5 % до 4 %), содержание обменного калия – 71,2 мг/кг почвы, подвижного фосфора – 97,5 мг/кг почвы, емкость катионного обмена составила 3,47 мг-ка/100г почвы, значение pH почвенной вытяжки – 5,8 единиц. Для дерново-подзолистых почв характерно низкое содержание гумуса, обменного калия и подвижного фосфора и резкое снижение их количества с глубиной профиля. Большинство дерново-подзолистых почв характеризуется сравнительно низким содержанием усвояемых (минеральных) форм азота и подвижного фосфора.

Средние значения содержания нитрат-ионов в почвенных образцах с различными сроками внесения карбамида представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Содержание нитрат-ионов в почвенных образцах (n=3, p=0,95)

мг/кг

Почва	Концентрация нитрат-ионов	
	июль	сентябрь
1	68,7 ± 3,3	63,3 ± 2,8
2	89,3 ± 4,2	74,8 ± 3,1
3	76,3 ± 2,9	70,2 ± 3,2

Примечание: содержание нитрат-ионов в почве: 1 – без внесения удобрения; 2 – с однократным внесением удобрения; 3 – с трехкратным внесением удобрения.

Однократное внесение удобрения в почву способствовало увеличению содержания нитрат-ионов на 30 % и 18,2 % в июле и сентябре соответственно по сравнению с образцами почвы без внесения удобрения. Внесение в почву рассчитанной дозы карбамида в три приема повлекло за собой увеличение содержания изучаемых ионов на 11,1 % и 16,9 % в июле и сентябре соответственно. Результаты однофакторного дисперсионного анализа показывают, что различия являются значимыми ($F_{\text{факт.}}(7,13) > F_{\text{теор.}}(4,1)$). Количество нитрат-ионов в почве снижалось в осенний период на 7,9 %; 6,3 %; 8,0 % в почве без внесения удобрения, с однократным и трехкратным внесением карбамида соответственно по сравнению с летним периодом.

Количество исследуемых ионов в растительных культурах семейств Тыквенные (*Cucurbitaceae*) и Пасленовые (*Solanaceae*), выращенных на почвах с различными сроками внесения карбамида в почву, представлено в таблице 3.

Таблица 3 – Содержание нитрат-ионов в плодоовощной продукции, выращенной на почве с различными сроками внесения карбамида в летне-осенний периоды ($n = 3$, $p = 0,95$)

мг/кг

Исследуемые образцы растений	ПДК	Содержание нитрат-ионов		
		Без внесения удобрения	С однократным внесением удобрения	С последовательным внесением удобрения
Семейство Тыквенные – Cucurbitaceae				
Кабачок (Cucurbita pepo L.)	400	<u>265,1 ± 23,7</u>	<u>640,3 ± 41,2</u>	<u>374,3 ± 28,1</u>
		203,2 ± 19,7	480,3 ± 29,2	274,3 ± 18,1
Семейство Пасленовые – Solanaceae				
Томат (Solanum lycopersicum L.)	100	<u>31,4 ± 2,5</u>	<u>47,2 ± 4,2</u>	<u>36,6 ± 2,2</u>
		25,4 ± 1,5	39,1 ± 3,2	31,2 ± 1,9

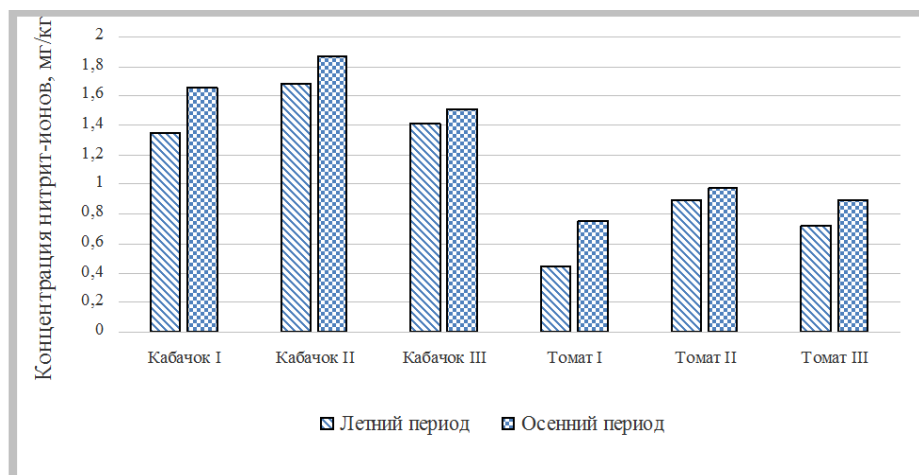
Примечание: в числителе данные в летний период; в знаменателе – в осенний период.

В период исследований максимальное содержание нитрат-ионов отмечено для кабачка (640,3 мг/кг) и для томата (47,2 мг/кг), выращенных на почве с однократным внесением минерального удобрения. Содержание исследуемых ионов в растительных образцах, выращенных на почве с внесением карбамида выше по сравнению с таковыми, выращенными на почве без внесения удобрения в летний и осенний периоды. Отмечено варьирование увеличения концентраций нитратов в растениях от 13 % до 27 % в зависимости от вида культуры.

Превышение нормы ПДК зафиксировано в пробах растений сем. Тыквенные, выращенных на участках почвы с однократным внесением карбамида на 140,3 мг/кг и 80,3 мг/кг в летний и осенний периоды соответственно, что связано с физиологическими особенностями данного вида.

Внесение карбамида в почву в различные сроки оказывает влияние на характер накопления в растениях исследуемых ионов. При однократном внесении минерального удобрения в почву для образцов семейства Тыквенные и семейства Пасленовые зафиксировано увеличение содержания нитратов на 141,5 % и 50,3 % в летний период и 36,2 % и 53,9 % в осенний период соответственно по сравнению с образцами, выращенными на удобренной почве. При внесении удобрения в почву в три приема увеличение содержания исследуемых ионов в кабачках и томатах составило 41,2 % и 11,6 % в летний период и 35,0 % и 22,8 % в осенний период соответственно по сравнению с содержанием изучаемых ионов в пробах растений, выращенных на удобренной почве.

В ходе эксперимента контролировали содержание нитрит-ионов в растениях (рисунок 1). Зафиксировано увеличение содержания ионов в образцах в осенний период, что связано с окислительно-восстановительными процессами, протекающими в растениях, меньшей физиологической активностью и накоплением промежуточных продуктов метаболизма, переходом растений в фазу созревания [6].



Растения, выращенные на почве: I – без внесения удобрения; II – с однократным внесением удобрения; III – с последовательным внесением удобрения

Рисунок 1 – Содержание нитрит-ионов в плодоовощной продукции в летне-осенний периоды

В осенний период наблюдалось возрастание содержания нитрит-ионов в растительных образцах представителей семейства Тыквенные и семейства Пасленовые, выращенных на почве с однократным внесением мочевины на 0,19 мг/кг и 0,08 мг/кг соответственно по сравнению с таковыми, выращенными в летний период.

При последовательном внесении удобрения в почву увеличение концентрации нитрит-ионов составило 0,1 мг/кг для представителей семейства Тыквенные и 0,17 мг/кг – для представителей семейства Пасленовые, по сравнению с летними образцами. Все данные статистически достоверно отличаются, так как $F_{факт}(8,02) > F_{теор.}(4,1)$. Результаты проведенного корреляционного анализа свидетельствуют о тесной корреляционной связи между содержанием нитрат- и нитрит-ионов в растительных образцах. При уровне значимости (т.е. вероятности допустимой ошибки в прогнозе) $\alpha = 0,05$ и заданном числе измерений n табличное значение $r_{крит} = 0,878$. По полученным данным соотношение $r_{расч}(0,993) \geq r_{крит}(0,878)$, таким образом, с уверенностью 95 % можно полагать, что между рассматриваемыми числовыми совокупностями существует корреляционная связь.

Накопление нитрат-ионов сельскохозяйственными культурами нельзя рассматривать обособлено от содержания нитратов в почвах, на которых они произрастают. Показателем, отражающим связь содержания нитратов в системе почва – растение, является коэффициент биологического накопления (КБН) [7], [8].

Рассчитаны коэффициенты биологического накопления образцов плодовоовощной продукции, как отношение содержания нитрат-ионов в растениях к содержанию их в почве (таблица 4). Значения коэффициентов биологического накопления для томата находились в пределах от 0,35 до 0,58; для кабачка – от 3,24 до 8,42 в зависимости от условий выращивания и сроков внесения удобрения. Наибольшие значения коэффициентов отмечены для представителей семейства Тыквенные, выращенных в летний и осенний периоды на почве с однократным внесением удобрения – 8,45 и 6,81 (июль и сентябрь) соответственно.

Таблица 4 – Значения коэффициентов биологического накопления в исследуемых образцах растений

Исследуемые образцы растений	Коэффициент биологического накопления					
	1		2		3	
Месяц	июль	сентябрь	июль	сентябрь	июль	сентябрь
Томат (<i>Solanum lycopersicum</i> L.)	0,39	0,37	0,51	0,48	0,35	0,32
Кабачок (<i>Cucurbita pepo</i> L.)	3,91	3,24	8,42	6,81	3,67	3,21

Примечание: значения КБН для растений, выращенных на почве: 1 – без внесения удобрения; 2 – с однократным внесением удобрения; 3 – с трехкратным внесением удобрения.

Внесение рассчитанной дозы удобрения в почву в три приема не повлекло за собой высокой степени поглощения растительными образцами нитрат-ионов из почвы. Значения КБН для представителей сем. Тыквенные составили 3,67 и 3,21 (июль и сентябрь) соответственно, что практически приближено к показателям для растений, выращенных на почве без внесения удобрения и в 2 раза ниже по сравнению со значениями КБН образцов, выращенных на почве с однократным внесением карбамида.

При хранении овощей содержание нитратов в продукции снижалось за счет восстановительных процессов и трансформации их в нитрит-ионы. Результаты представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Содержание нитрат- и нитрит-ионов в томате при хранении в августе 2019 г.

Исследуемые образцы растений	Содержание нитрат-ионов		
	1–10	11–20	21–31
Период времени (дни)			
Томат (<i>Solanum lycopersicum</i> L.)	$35,2 \pm 1,9$ $0,68 \pm 0,17$	$25,3 \pm 1,4$ $0,75 \pm 0,14$	$21,4 \pm 1,1$ $0,81 \pm 0,12$

мг\кг

Примечание: в числителе содержание нитрат-ионов; в знаменателе – нитрит-ионов.

Исследования показали, что при хранении в течение месяца происходило интенсивное уменьшение содержания нитрат-ионов в растениях на 28,1 % и 60,8 % и увеличение содержания нитрит-ионов на 9,3 %; 17,5 % через 10–20 и 20–31 дней соответственно.

Заключение. Результаты проведенного однофакторного микрополевого опыта показали, что внесение карбамида в почву в различные сроки после посадки растений наиболее приемлемо. Разница содержания нитрат-ионов в растениях семейства Тыквенные и семейства Пасленовые, выращенных на почве с внесением удобрения, по сравнению с растительными образцами, выращенными на почве без внесения удобрения, составила 141,5 % и 50,3 % в летний период и 36,2 % и 53,9 % в осенний период соответственно (при однократном внесении карбамида), и 41,2 % и 11,6 % в летний период; 35,0 % и 22,8 % в осенний период (при трехкратном внесении удобрения) соответственно. Наибольшее значение коэффициента биологического накопления зафиксировано для представителей семейства Тыквенные (Cucurbitaceae), выращенных в летний период на почве с однократным внесением карбамида.

При хранении плодовоовощных культур в течение месяца происходило интенсивное уменьшение содержания нитрат-ионов и пропорциональное увеличение нитрит-ионов в них.

Литература

1. Агрохимия и система применения удобрений: учебнометодическое пособие / С.Ф. Шекунова [и др.] ; под ред. И.Р. Вильдфлуша. – Горки : БГСХА, 2016. – 258 с.
2. Быстряков, В.П. Экологические основы бионеорганической и биоорганической химии: руководство к лабораторным занятиям / В.П. Быстряков. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2017. – 160 с.
3. Лесовая, Г.М. Оптимизация содержания нитратов в овощах и картофеле, выращиваемых на черноземе выщелоченном Кубани : автореф. дис. ... канд. с/х. наук : 06.01.04 / Г.М. Лессовая ; Рос. экон. акад. – М., 2004. – 26 с.
4. Верниченко, И.В. Ассимиляция различных форм азота растениями и роль микроэлементов: автореф. дис. ... канд. биол. наук : 06.01.04 / Г.М. Лессовая ; Рос. экон. акад. – М., 2001. – 56 с.
5. Минеев, В.Г. Агрохимия: учеб. пособие / В.Г. Минеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : МГУ, 2004. – 720 с.
6. Повышение плодородия почв и применение удобрений: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 14 февраля 2019 г. / Институт почвоведения и агрохимии ; редкол.: В.В. Лапа [и др.]. – Минск : ИВЦ Минфина, 2019. – 158 с.
7. Степура, М.Ф. Коэффициенты использования питательных веществ овощными культурами из различной разновидности дерново-подзолистой почвы и видов удобрений в условиях орошения и в его отсутствие / М.Ф. Степура // Научно-практический журнал : Земледелие и защита растений. – 2012. – № 5 (84). – С. 39–41.
8. Гиниятуллин, Р.Х. Интенсивность биологического поглощения тяжелых металлов в органах березы повислой в условиях промышленного загрязнения / Р.Х. Гиниятуллин // Лесной вестник. – 2016. – № 2. – С. 75–80.

Сравнительная оценка анатометрических параметров хвои сосны обыкновенной в разных типах леса

А.Н. Хох, В.Л. ШАЛАБОДА

Представлены результаты исследований влияния условий места произрастания на количественные признаки хвои сосны обыкновенной. Использование анатомического и статистического методов позволило провести комплексную оценку особенностей роста хвои в контрастных типах леса одной климатической зоны. Учитывая комплекс анатометрических признаков, можно определить тип местообитания. Однако при этом следует принимать во внимание тот факт, что исследование хвои необходимо проводить на достаточно большом материале (не менее 10 хвоинок). Чем более однороден по происхождению изучаемый материал, тем меньшими окажутся коэффициенты вариации.

Ключевые слова: место произрастания, сосна обыкновенная, анатомические признаки, экологические факторы, трахеиды, кластерный анализ, ширина годичного слоя.

The results of studies of the influence of the conditions of the place of growth on the quantitative characteristics of Scots pine needles are presented. The use of anatomical and statistical methods allowed conducting a comprehensive assessment of the characteristics of the growth of needles in contrasting forest types of one climatic zone. Considering the complexity of anatomical features, it is possible to determine the type of habitat. However, one should take into account the fact that the study of needles must be carried out on a sufficiently large quantity of materials (at least 10 needles). The more homogeneous the material being studied is, the lower the coefficients of variation are.

Keywords: place of growth, Scots pine, anatomical signs, environmental factors, tracheids, cluster analysis, tree layer width.

Введение. Сосна обыкновенная (*Pinus sylvestris* L.) – это вид-эвритоп с очень широким ареалом распространения. Благодаря низкой требовательности к богатству и влажности почвы леса этой формации равномерно размещены по всей территории Республики Беларусь и формируют сомкнутые насаждения в экстремальных для других лесобразующих пород условиях: на дюнных возвышениях или на болотах верхового типа.

Наиболее чувствительным к факторам окружающей среды органом у сосны обыкновенной является хвоя [1, с. 59]. На изменчивость ее анатомо-морфологических признаков указывалось многими авторами [2]–[4]. Варьирование размеров связывалось как с областями произрастания, экологическими формами, географической широтой, так и изменчивостью в пределах кроны. В настоящее время информация такого рода в основном находит практическое применение при реализации региональных экологических программ, ведении локального мониторинга лесов и разработке рекомендаций по проведению лесохозяйственных мероприятий, однако в судебно-экспертной практике при исследовании объектов растительного происхождения практически не используется. Хотя необходимо отметить, что в конце 80-ых гг. в Белорусском научно-исследовательском институте проблем криминологии, криминалистики и судебной экспертизы [5]–[6] были проведены исследования, в которых была предпринята попытка оценить доказательственное значение хвои как достаточно часто встречающегося вещественного доказательства по делам насильственной смерти, краж, дорожно-транспортных происшествий и др. Сейчас назрела необходимость актуализировать имеющуюся информацию и выявить те признаки хвои, на основании которых можно будет установить участок местности.

Целью наших исследований являлось изучение изменчивости анатометрических параметров хвои сосны обыкновенной в зависимости от локальных экологических условий местопроизрастания.

Материал и методика исследований. На 8 пробных площадях (далее – ПП), расположенных на территории Томашевского лесничества Брестского лесхоза, в насаждениях лишайникового (*Pinetum cladinosum*), верескового (*Pinetum callunosum*), мшистого (*Pinetum*

pleuroziosum), орлякового (*Pinetum pteridiosum*), черничного (*Pinetum myrtillosum*), долгомошного (*Pinetum polytrichosum*), багульникового (*Pinetum ledosum*) и осоково-сфагнового (*Pinetum caricoso-sphagnosum*) типов леса выбиралось 20 модельных деревьев.

В таблице 1 приведена краткая характеристика исследованных древостоев.

Таблица 1 – Таксационные показатели древостоев сосны обыкновенной на исследованных ПП

ПП	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
Квартал	144	118	5	72	26	15	204	64
Выдел	2	7	9	9	11	9	4	6
Состав	10С+С	9С1Б	10С	10С+Б	9С1Б	9С1Б	9С1Б	7С3Б
Средний возраст, лет	35	30	35	35	30	30	35	35
Высота, м	7	9	13	16	9	11	9	4
Диаметр, см	10	10	14	14	10	11	11	6
Тип леса	лш.	вер.	мш.	ор.	чер.	дм.	баг.	ос.-сф.
ТЛУ	A1	A2	A2	B2	B2	A4	A5	A5
Бонитет	4	3	1	1	2	2	4	5A
Полнота	0,7	0,7	0,7	0,9	0,7	0,7	0,9	0,8

Отбор образцов хвои сосны обыкновенной 1-го и 2-го года жизни (50 пар с дерева) проводился в конце вегетационного периода с ветвей 1-го порядка в средней части по всему диаметру кроны. Далее в лабораторных условиях измерялась длина хвои с точностью до 0,01 см с помощью гостированной масштабной линейки. Ширина и толщина хвои, длина и толщина центрального цилиндра, ширина устьиц, а также количество и расположение смоляных каналов определялось на поперечных срезах в средней части хвои с помощью стереоскопического микроскопа Leica S4E (30-кратное увеличение). Подсчет и измерение длины устьиц проводилось на верхнем и нижнем эпидермисе хвои. Вес хвои, высушенной в термостате при 105°C до сухого состояния, определялся с точностью до 0,01 г.

Площадь каждой хвоинки определялась по формуле Тирена [7, с. 300]:

$$S = \frac{\pi}{2} L(1,137a + b), \quad (1)$$

где L – длина хвои; a – ширина хвои; b – толщина хвои.

Для расчета количества устьиц в 1 мм² рассчитывалась длина дуги

$$l = \sqrt{a^2 + \frac{16b^2}{3}}, \quad (2)$$

где a – ширина хвои; b – толщина хвои.

Непосредственное вычисление количества устьиц в 1 мм² производилось по формуле:

$$N = \frac{N_1}{0,4l}, \quad (3)$$

где N_1 – количество устьиц, подсчитанное под микроскопом.

Эндогенную изменчивость оценивали по значению коэффициента вариации (CV, %) с помощью шкалы Мамаева: очень низкий – (CV ≤ 7 %); низкий – (CV 8–12 %); средний – (CV 13–20 %); повышенный – (CV 21–30 %); высокий – (CV 31–40 %); очень высокий – (CV > 40 %) [8].

Статистическая обработка данных проводилась с помощью пакетов прикладных программ Excel и Statistica. Для оценки разности средних значений признаков хвои на сравниваемых ПП применялся t-критерий Стьюдента.

Результаты исследований и их обсуждение. В таблице 2 представлены полученные данные по анатомометрическим показателям и массе хвои на исследованных пробных площадях.

Таблица 2 – Размеры хвои (мм) и масса (г) 50 пар хвоек сосны обыкновенной в разных типах леса

Хвоя		Тип леса															
Показатель	Год	лш.		вер.		мш.		ор.		чр.		дм.		бг.		ос.-сф.	
		М±m	CV, %	М±m	CV, %	М±m	CV, %	М±m	CV, %	М±m	CV, %	М±m	CV, %	М±m	CV, %	М±m	CV, %
Длина, мм	1	61,9±1,1	18	62,2±0,5	8	65,6±0,7	10	65,1±0,9	13	64,7±0,5	8	55,4±1,1	20	50,8±0,9	18	39,8±0,9	22
	2	61,1±0,9	15	63,9±0,6	9	65,1±0,6	9	65,6±0,6	12	64,2±0,8	12	43,1±0,8	19	50,1±1,1	22	38,9±1,0	24
Ширина, мм	1	1,54±0,01	6	1,6±0,01	6	1,63±0,01	4	1,58±0,01	6	1,69±0,01	6	1,52±0,01	7	1,4±0,01	7	1,4±0,01	7
	2	1,59±0,01	6	1,63±0,01	6	1,7±0,01	6	1,61±0,01	6	1,72±0,01	6	1,49±0,01	7	1,59±0,01	6	1,37±0,01	7
Толщина, мм	1	0,76±0,01	26	0,75±0,01	13	0,8±0,01	13	0,8±0,01	13	0,8±0,01	13	0,7±0,01	14	0,74±0,01	14	0,71±0,02	14
	2	0,75±0,01	13	0,73±0,03	41	0,77±0,01	13	0,76±0,01	13	0,77±0,01	13	0,71±0,01	14	0,73±0,01	14	0,72±0,01	7
Вес хвои, г	1	1,62±0,05	14	1,75±0,04	10	2,0±0,07	16	2,44±0,03	5	2,36±0,08	15	1,63±0,08	22	1,69±0,05	13	1,42±0,03	9
	2	1,73±0,08	21	1,86±0,06	14	2,41±0,04	7	2,68±0,10	17	2,61±0,06	10	1,65±0,06	16	1,71±0,02	5	1,35±0,04	13
Площадь хвои, мм²	1	242,1±6,2	5	250,9±2,3	5	271,2±2,8	10	264,4±2,6	10	274,4±1,1	4	211,2±2,2	10	199,6±1,4	7	145,1±7,6	18
	2	247,8±4,4	6	268,9±1,8	6	264,8±1,9	7	280,7±2,2	8	242,3±1,7	7	171,7±2,1	12	179,2±1,2	7	139,1±2,7	12
Площадь поперечного сечения (S _{поп}), мм²	1	1,17±0,02	18	1,20±0,02	17	1,27±0,02	16	1,25±0,03	24	1,32±0,02	15	1,06±0,02	19	1,04±0,03	28	1,02±0,02	20
	2	1,19±0,03	25	1,19±0,02	17	1,29±0,02	16	1,22±0,02	16	1,32±0,02	15	1,06±0,02	19	1,16±0,02	19	0,99±0,02	20
Площадь центрального цилиндра (S _{цп}), мм²	1	0,142±0,005	36	0,210±0,005	24	0,365±0,005	14	0,329±0,005	15	0,316±0,005	16	0,14±0,007	50	0,14±0,005	36	0,99±0,005	42
	2	0,11±0,005	45	0,224±0,005	22	0,384±0,004	10	0,340±0,005	15	0,290±0,002	7	0,13±0,005	38	0,16±0,006	38	0,13±0,005	38
S _{цп} /S _{поп}	1	0,12	0,18	0,29	0,26	0,24	0,13	0,13	0,13	0,24	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12	0,12
	2	0,09	0,19	0,30	0,28	0,22	0,12	0,15	0,13	0,22	0,12	0,12	0,15	0,13	0,13	0,13	0,13
Длина устьиц, мкм	1	45,3±0,11	2	32,9±0,1	3	33,3±0,1	3	33,1±0,08	2	35,8±0,1	3	32,8±0,1	3	33,2±0,1	3	43,1±0,1	3
	2	45,1±0,12	3	33,1±0,11	3	33,4±0,1	3	33,0±0,1	3	34,9±0,1	3	32,7±0,16	5	32,5±0,16	5	42,9±0,12	3
Ширина устьиц, мкм	1	35,6±0,11	4	22,1±0,14	6	25,3±0,09	4	22,3±0,13	6	24,1±0,08	3	22,1±0,13	6	25,2±0,12	5	34,8±0,12	5
	2	35,7±0,15	4	20,0±0,12	6	22,5±0,09	4	22,2±0,05	2	23,5±0,05	2	19,8±0,04	2	21,9±0,04	2	34,9±0,15	3
Количество устьиц, шт./мм²	1	90,4±0,45	5	93,5±0,67	7	98,7±0,5	5	94,3±0,6	6	99,6±0,33	3	93,6±0,56	6	93,2±0,1	1	91,8±0,71	5
	2	90,6±0,36	4	93,5±0,44	5	97,1±0,34	4	93,9±0,5	5	98,5±0,71	7	93,3±0,51	5	92,2±1,24	13	91,9±0,48	6
Диаметр смоляных ходов, мкм	1	123,4±4,9	40	138,6±5,2	38	290,7±6,1	21	241,8±3,0	12	218,7±4,1	19	138,6±5,2	38	117,4±4,9	42	108,4±3,8	45
	2	124,1±2,8	23	140,1±3,8	27	290,1±5,2	18	248,1±1,8	7	219,1±5,2	24	140,1±3,8	27	118,1±2,8	24	102,1±2,7	27
Количество смоляных ходов	1	11,8±0,1	18	11,6±0,07	6	12,1±0,09	7	12,3±0,1	8	12,0±0,1	8	10,8±0,06	6	10,5±0,08	8	10,1±0,02	2
	2	11,9±0,05	12	11,8±0,06	5	12,2±0,08	7	12,5±0,06	5	12,0±0,18	15	10,7±0,1	9	10,5±0,2	19	9,9±0,11	11

В результате проведенных исследований установлено, что большая длина хвои устойчиво сохраняется в местах лучшего обеспечения растений – сосняке мшистом, орляковом и черничном, а наименьшая – в сосняке осоково-сфагновом. Колебания длины хвои по возрасту незначительны, а потому длина хвои может служить стабильным показателем условий обитания (аналогичная ситуация наблюдается и для длины устьиц). Конечно, следует отметить, что длина хвои связана с другими показателями: шириной, толщиной, массой. Наибольший вес 50 пар хвоинок отмечен у деревьев сосняка орлякового и черничного, наименьший – осоково-сфагнового. У деревьев, произрастающих в насаждениях мшистого, орлякового и черничного типов леса, отмечены большие показатели не только массы и размеров, но и площади хвои, площади поперечного сечения и центрального цилиндра. В таблице 2 также приведено отношение площади центрального цилиндра к поперечному сечению хвои. Данный показатель является стабильным, характеризует пропорциональность развития внутренних тканей хвои, а также ее экологические особенности и адаптационные возможности к условиям внешней среды. В оптимальных условиях (сосняк мшистый, орляковый, черничный) хвоя отличается большими площадями центрального проводящего цилиндра и поперечного сечения и более высокой величиной отношения первой ко второй, в остальных случаях, как уменьшения, так и увеличения степени обводненности, отношение площади центрального цилиндра к площади поперечного сечения снижается.

Кроме того, в таблице 2 приведены данные о диаметре и количестве смоляных ходов, количестве устьиц в одном мм² и их длине. Необходимо отметить, что расположение ходов в основном периферическое, в редких случаях – паренхимное. Количество смоляных ходов на поперечном срезе в срединной части хвои довольно значительно варьирует, однако тенденция их большего количества для деревьев, произрастающих на почвах нормального увлажнения, имеется. В этих типах большее количество устьиц на единице поверхности и несколько меньшие их размеры. Длина устьиц связана с количеством их в ряду: чем меньше в ряду, тем устьица крупнее.

Статистическая обработка полученных данных подтверждает достоверность изменения анатомометрических показателей хвои сосны обыкновенной в различных условиях обитания (типах леса). В таблице 3 представлены расчеты средней эндогенной изменчивости анатомометрических параметров хвои по всем пробным площадям, а также различий между средними значениями пределов изменчивости для *Pinetum cladinusum* и *Pinetum caricoso-sphagnosum* и различий по каждому из исследованных показателей между хвоей 1-го и 2-го года для данных типов леса.

Таблица 3 – Средняя эндогенная изменчивость анатомометрических параметров (CV, %) по всем исследованным ВПП и рассчитанные значения t-критерия

Хвоя		t-критерий достоверности различий между <i>Pinetum cladinusum</i> и <i>Pinetum caricoso-sphagnosum</i>	t-критерий достоверности различий между хвоей 1-го и 2-го года в <i>Pinetum cladinusum</i>	t-критерий достоверности различий между хвоей 1-го и 2-го года в <i>Pinetum caricoso-sphagnosum</i>	CV, %
Показатель	Год				
Длина, мм	1	15,8***	0,56	0,70	15
	2	16,9***			15
Ширина, мм	1	9,9***	3,54***	2,12*	6
	2	15,6***			6
Толщина, мм	1	2,2*	0,71	4,49	15
	2	2,7**			16
Вес хвои, г	1	3,4***	1,17	1,40	13
	2	4,2***			13
Площадь хвои, мм ²	1	14,4***	0,75	1,59	9
	2	21,1***			8
Площадь поперечного сечения (S _{пс}), мм ²	1	4,2***	1,39	1,06	19
	2	5,5***			18
Площадь центрального цилиндра (S _{цц}), мм ²	1	2,8**	0,71	0,28	29
	2	2,4*			27
Длина устьиц, мкм	1	14,8***	1,23	1,28	3
	2	13,0***			3
Ширина устьиц, мкм	1	4,9***	0,54	0,52	5
	2	3,8***			3

Окончание таблицы 3

Количество устьиц, шт/мм ²	1	1,7	0,35	0,12	5
	2	2,2*			6
Диаметр смоляных ходов, мкм	1	2,4*	0,15	1,12	32
	2	5,7***			22
Количество смоляных ходов	1	16,7***	0,89	1,79	7
	2	16,6***			9

Примечание: * – уровень значимости $P \leq 0,05$, ** – $P \leq 0,01$, *** – $P \leq 0,001$

Различия между средними значениями пределов изменчивости для исследованных анатометрических параметров в насаждениях лишайникового (*Pinetum cladinosum*) и осоково-сфагнового (*Pinetum caricoso-sphagnosum*) типов леса показателей статистически значимы за исключением количества устьиц у хвои 1-го года (различия для 17 показателей статистически значимы при $p < 0,001$). В то же время разница между хвоей 1-го и 2-го года по каждому из исследованных показателей не значима (исключение составляет ширина хвои). Что касается эндогенной изменчивости, то она варьирует в довольно широких пределах. Так, для 9 анатометрических параметров из 25 исследованных характерно очень низкое значение коэффициента вариации, что составляет 37,5 % от общего количества. 3 параметра характеризуются низкими значениями (12,5 %), 8 – средними (33,3 %), 3 – повышенными (12,5 %) и лишь 1 высоким значением коэффициента вариации (4,2 %).

Для объединения сравниваемых типов леса в группы, обладающие сходными характеристиками, проводился кластерный анализ. Метрика для учета различий – обычное евклидово расстояние (Euclidean distance), алгоритм кластеризации – метод Уорда (Ward's method). Полученные результаты представлены на дендрограмме (рисунок 1).

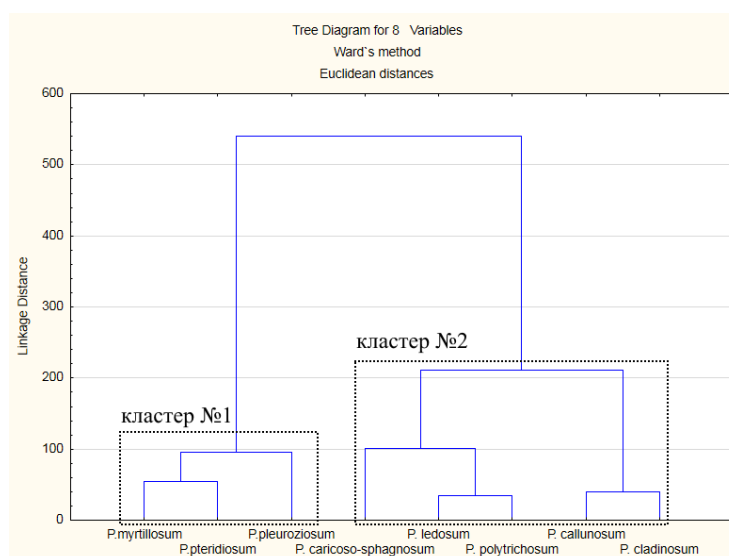


Рисунок 1 – Группировка исследованных типов леса по результатам кластерного анализа

Как можно видеть, на рисунке 1 отчетливо выделяются 2 кластера: 1-ый – сосняки мшистый (*Pinetum pleuroziosum*), орляковый (*Pinetum pteridiosum*) и черничный (*Pinetum myrtillosum*), т. е. это насаждения, произрастающие в наиболее оптимальных условиях (местах лучшего обеспечения растений); 2-ой – сосняки лишайниковый (*Pinetum cladinosum*), вересковый (*Pinetum callunosum*), долгомошный (*Pinetum polytrichosum*), багульниковый (*Pinetum ledosum*) и осоково-сфагновый (*Pinetum caricoso-sphagnosum*), т. е. это насаждения, произрастающие в условиях довольно резкого увеличения/уменьшения влажности почвы.

При этом, если рассматривать 2-ой кластер отдельно, можно отметить, что сосняки на почвах недостаточного (неустойчивого) и избыточного увлажнения также отделяются друг от друга и формируют 2 отдельных подкластера.

Заклучение. Таким образом, данные с характеристикой параметров хвои, приведенные в работе, могут быть использованы при определении условий произрастания сосны обыкновенной на территории Республики Беларусь.

Исследованиями установлено, что большие размеры, масса, площадь хвои, а также площадь поперечного сечения и центрального проводящего цилиндра, количество устьиц на единице поверхности наблюдаются у деревьев в мшистом, орляковом и черничном типах леса, то есть выросших в более оптимальных условиях. При худшем питании и водоснабжении величины этих показателей соответственно убывают. В тоже время, следует отметить тот факт, что в условиях увеличения ксероморфных признаков (в сосняке лишайниковом наименьшая влажность, в осоково-сфагновом – физиологическая сухость почвы) формируются более крупные устьица. Конечно, установление условий произрастания возможно только в случае исследования хвои по комплексу признаков и на достаточно большом (репрезентативном) материале. Чем более однороден по происхождению изучаемый материал, тем меньшими окажутся коэффициенты вариации. Но даже при достаточной однородности материала степень изменчивости может быть различной. Тем не менее, учитывая комплекс анатомометрических признаков можно не только полнее и достовернее провести исследование, но и оценить данные в экологическом отношении, т. е. определить тип местообитания (лесорастительную ассоциацию). Это в известной мере расширит круг решаемых задач как научных, так и экспертных, особенно в сочетании с другими исследованиями, например, дендрохронологическими [9]. Полученная информация (указание экотипа) может оказать помощь и в розыскной работе, направляя следствие на поиск участка, связанного с потенциальным местом преступлением.

Литература

1. Цандекова, О.Л. Анатомические и морфометрические характеристики *Pinus sylvestris* L., произрастающей на техногенно нарушенных землях угольного разреза «Кедровский» / О.Л. Цандекова, Е.Ю. Колмогорова // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – 2013. – № 10 (108). – С. 59–63.
2. Видякин, А.И. Изменчивость анатомо-морфологического строения хвои сосны в географических культурах Кировской области / А.И. Видякин // Лесоведение. – 1981. – № 5. – С. 18–25.
3. Рунова, Е.М. Комплексная оценка состояния загрязнения атмосферы по результатам биоиндикации сосны обыкновенной / Е.М. Рунова, Ф.Н. Шиверских // Актуальные проблемы лесного комплекса. – 2018. – № 51. – С. 155–157.
4. Tyukavina, O.N. Influence of growing conditions on morphological and anatomical characteristics of pine needles in the northern taiga / O.N. Tyukavina, N.A. Neverov, D.N. Klevtsov // Journal of forest science. – 2019. – V. 65, № 1. – P. 33–39.
5. Лобанок, И.Т. Биометрические параметры хвои сосны обыкновенной при судебно-биологическом исследовании / И.Т. Лобанок // Вопросы судебной экспертизы в практике правоохранительных органов БССР : тезисы докладов республиканской научно-практической конференции. – Мн. : НИИСЭ, 1985. – С. 41–42.
6. Лобанок И.Т. Дифференциация хвои в судебно-биологической экспертизе / И.Т. Лобанок // Роль судебной экспертизы в социалистическом правовом Государстве : тезисы научно-практической конференции. – Мн. : НИИСЭ, 1989. – С. 290.
7. Tiren, L. Über die Grösse der Nadelfläche einiger Kiefernbestände / L. Tiren // Mitteilungen aus der forstlichen Versuchs-Anstalt Schwedens. – 1927. – V. 23. – P. 295–336.
8. Методика изучения внутривидовой изменчивости древесных пород / А.И. Ирошников [и др.] – М., 1973. – 31 с.
9. Хох, А.Н. Исследование территориальной дифференциации древесно-кольцевых хронологий сосны обыкновенной с помощью кластерного анализа / А.Н. Хох, В.Б. Звягинцев // Криміналістичний вісник : наук.-практ. зб. ; голов. ред. В.В. Черней / ДНДЕКЦ МВС України ; НАВС. – К. : ПК «Типографія від «А» до «Я», 2018. – № 2 (30). – С. 373–382.

Влияние биомассы лишайника на всхожесть и первичный рост корневищных злаков

О.М. ХРАМЧЕНКОВА

Оценивали влияние измельченной биомассы лишайника кладония лесная на всхожесть и первичный рост проростков дикорастущих злаков – лисохвоста лугового и пырея ползучего. Показано, что всхожесть семян и первичный рост проростков лисохвоста лугового подавляется сильнее, чем пырея ползучего. Биомасса лишайника в количестве 0,01 г/см² на 22,1–29,1 % снижала энергию прорастания семян; на 21,5–25,8 % – всхожесть; на 40,9–66,7 % – длину корней; на 23,2–37,1 % – длину проростков; на 14,6–15,4 % – массу проростков лисохвоста лугового. При внесении 0,03–0,05 г/см² биомассы лишайника энергия прорастания семян лисохвоста лугового подавлялась на 53,1 %; всхожесть – на 54,8 %; рост корней – на 81,1 %; рост побегов – на 59,1 %; масса проростков снижалась на 47,4 %. Энергия прорастания и всхожесть семян пырея ползучего снижались на ¼ и на ½, соответственно только в присутствии биомассы лишайника в количестве 0,05 г/см². При этом рост корней снижался на 60,8–61,2 %; побегов – на 34,7–44,6 %; масса проростков – на 47,8 %.

Ключевые слова: кладония лесная, биомасса, лисохвост луговой, пырей ползучий, семена, энергия прорастания, всхожесть, длина корней, длина побегов, масса побегов, угнетение.

The effect of the crushed biomass of *Cladonia arbuscula* lichen on the germination and primary growth of rhizome cereals *Alopecurus pratensis* and *Elytrigia repens* was evaluated. Seed germination and primary growth of *Alopecurus pratensis* seedlings are suppressed more strongly than *Elytrigia repens*. Lichen biomass in the amount of 0,01 g/cm² decreased by 22,1–29,1 % – the energy of seed germination; 21,5–25,8 % – germination; 40,9–66,7 % – root length; by 23,2–37,1 % – the length of seedlings; 14,6–15,4 % – weight of seedlings of *Alopecurus pratensis*. When applying 0,03–0,05 g/cm² of lichen biomass, the seed germination energy of *Alopecurus pratensis* was suppressed by 53,1 %; germination – by 54,8 %; root growth – by 81,1 %; shoot growth – by 59,1 %; the mass of seedlings decreased by 47,4 %. Germination energy and germination of *Elytrigia repens* seeds decreased by ¼ and ½, respectively, only in the presence of lichen biomass in an amount of 0,05 g/cm². At the same time, root growth decreased by 60,8–61,2 %; shoots – by 34,7–44,6 %; the mass of seedlings is 47,8 %.

Keywords: *Cladonia arbuscula*, biomass, *Alopecurus pratensis*, *Elytrigia repens*, seeds, germination energy, germination, root length, shoot length, shoot mass, inhibition.

Введение. Бактерии, водоросли, грибы и грибоподобные организмы, а также высшие растения в процессе роста и развития выделяют в окружающую среду различные продукты своей жизнедеятельности. Назначение выводимых веществ может быть разным как для самих организмов, так и для окружающей их среды, а также для соседствующих с ними представителей различных таксонов. Среди всего прочего выделяются аллелопатически активные вещества, вызывающие угнетение роста и развития видов, не защищенных от аллелопатических агентов. Аллелопатически активные вещества, выделяемые в почву, влияют на прорастание семян и развитие проростков высших растений [1], [2]. Снижение энергии прорастания, падение всхожести, изменение морфометрических показателей и массы проростков являются внешними проявлениями аллелопатии и могут свидетельствовать о силе аллелопатического воздействия [1].

Эволюционно древние организмы, к которым относятся лишайники, используют выделяемые в окружающую среду вещества как для колонизации мест обитания, так и для повышения своей конкурентоспособности в биоцезах [3]. Для биомассы лишайников, экстрактов из нее и отдельных вторичных метаболитов показано наличие аллелопатической активности в отношении семян и проростков разных видов высших растений [4]–[7]. В последние десятилетия научный интерес к метаболитам лишайников вырос, что связано с их высокой биологической активностью. Подавляющее большинство лишайниковых веществ, для которых показаны антиоксидантные, фотозащитные, антибактериальные, противовоспалительные и многие другие свойства, не растворимы в воде, хотя при определенных условиях способны

образовывать водорастворимые соединения [8]. Химические свойства вторичных метаболитов лишайников таковы, что едва ли можно ожидать их значимого перехода в водорастворимую форму без сильных изменений pH раствора и высоких концентраций соответствующих катионов [9]. О собственно водорастворимых соединениях, выделяемых лишайниками в окружающую среду в прижизненных условиях, известно немного – во всяком случае, показано наличие и многообразие фенольных соединений [10].

Нами показано наличие как ростостимулирующего, так и аллелопатического влияния биомассы лишайников и экстрактов из них на всхожесть и первичный рост проростков зерновых злаков, овощных культур, древесных пород, а также рудеральных видов высших растений [11]–[15].

Целью настоящего исследования является оценка аллелопатического действия измельченной биомассы лишайника кладония лесная на всхожесть и первичный рост двух видов корневищных злаков – лисохвоста лугового и пырея ползучего.

Методы исследований. Для исследования были выбраны многолетние корневищные злаки – короткорневищный лисохвост луговой (*Alopecurus pratensis* L.) и длиннокорневищный пырей ползучий (*Elytrigia repens* (L.) Nevski) – рисунок 1.



Рисунок 1 – Объекты исследования [16]

Оба вида широко распространены в Беларуси, отличаются высокой семенной продуктивностью, способностью семян к прорастаню после очень короткого периода покоя. Общими свойствами обоих видов также являются: существенный вклад вегетативного размножения в расширение и возобновление популяций, высокая активность почек возобновления [16]. Созревшие семена лисохвоста лугового и пырея ползучего собирали в естественных местах обитания пригорода г. Гомеля, высушивали, после чего подвергали двухмесячной холодовой стратификации при температуре $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$, хранили в сухом темном месте при комнатной температуре. Перед началом эксперимента определяли всхожесть семян: $93,7 \pm 0,57\%$ для лисохвоста лугового и $96,8 \pm 0,92\%$ для пырея ползучего, на основании чего семена были признаны пригодными для исследования.

Биомассу кладонии лесной (*Cladonia arbuscula* (Wallr.) Flot.) (рисунок 1) отбирали на территории ГЛХУ «Гомельский лесхоз» в сухом сосняке, отбрасывали нижнюю часть подстилки – около 5 мм, сушили до воздушно-сухого состояния, измельчали при помощи лабораторной мельницы (максимальная длина частиц – 3 мм).

Семена дикорастущих злаков проращивали на свету в пластиковых контейнерах при температуре $24 \pm 3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Выполняли две серии опытов. В первой серии на дно контейнера укладывали 3 слоя фильтровальной бумаги, на поверхности верхнего слоя равномерно распределяли измельченную биомассу лишайника, в которую выкладывали семена проращиваемых видов растений. Во второй серии опытов на дно контейнера укладывали 2 слоя фильтровальной бумаги, на поверхности верхнего слоя равномерно распределяли измельченную биомассу лишайника, покрывали ее еще одним слоем фильтровальной бумаги, на поверхность которого выкладывали семена растений. Навески биомассы лишайника составляли 0,01; 0,03 и 0,05 г на 1 см^2 ложа прорастання семян. Для контрольных опытов использовали аналогичные подложки из фильтровальной бумаги без нанесения биомассы лишайника.

Для каждого варианта опытов проращивали по 50 семян в пятикратной повторности, для увлажнения среды проращивания использовали смесь Кнопа, разведенную водой в соотношении 1:10.

Учеты всхожести, взвешивание проростков, а также измерения длины корневой системы и длины побегов производили на 3, 5, 7, 10, 15 и 30-е сутки. Энергию прорастания семян лисохвоста лугового оценивали на 7-е сутки; пырея ползучего – на 5-е сутки; всхожесть обоих видов определяли на 15-е сутки. Полученные результаты обрабатывали с использованием стандартного программного продукта Статистика 7.0.

Результаты и их обсуждение. Присутствие в среде прорастания биомассы лишайника кладония лесная влияло на всхожесть семян и первичный рост проростков злаковых трав. Степень влияния зависела от количества внесенной биомассы лишайника, положения биомассы относительно семян, и отличалась видовой специфичностью: всходы лисохвоста лугового подавлялись сильнее, чем пырея ползучего.

Энергия прорастания семян характеризует единовременность начала их прорастания. Даже если семена и прорастают после даты определения энергии прорастания, они являются отстающими. В присутствии биомассы *Cladonia arbuscula* резко снижалась энергия прорастания и всхожесть лисохвоста лугового – рисунок 2.

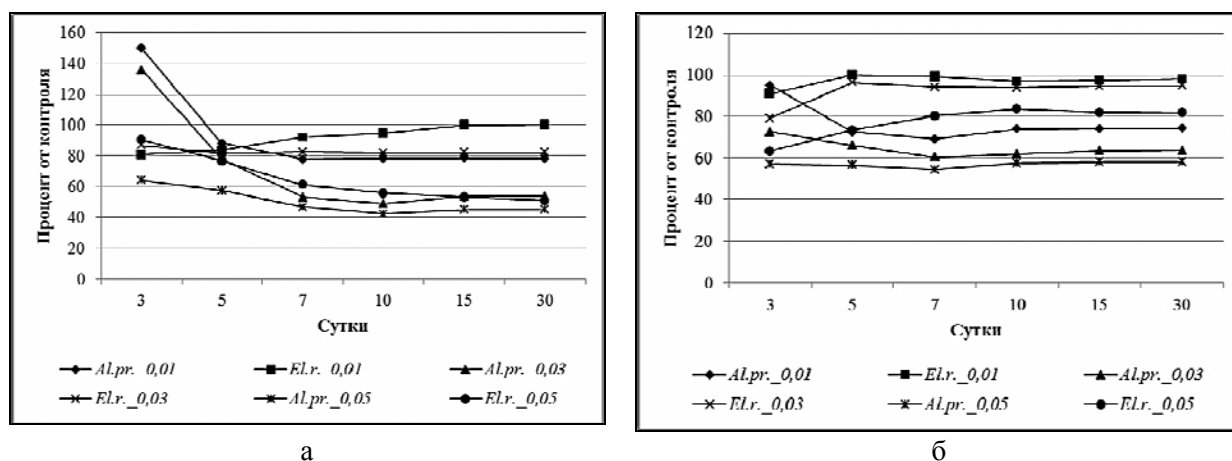


Рисунок 2 – Всхожесть семян лисохвоста лугового и пырея ползучего на пятые – тридцатые сутки опыта: а – биомасса лишайника находится на ложе прорастания; б – биомасса лишайника находится под ложем прорастания

Здесь и далее приняты следующие условные обозначения:

- Al.pr._0,01 – лисохвост луговой (*Alopecurus pratensis*); 0,01 г/см² измельченной биомассы кладонии лесной;
- Al.pr._0,03 – лисохвост луговой (*Alopecurus pratensis*); 0,03 г/см² измельченной биомассы кладонии лесной;
- Al.pr._0,05 – лисохвост луговой (*Alopecurus pratensis*); 0,05 г/см² измельченной биомассы кладонии лесной;
- El.r._0,01 – пырей ползучий (*Elytrigia repens*); 0,01 г/см² измельченной биомассы кладонии лесной;
- El.r._0,03 – пырей ползучий (*Elytrigia repens*); 0,03 г/см² измельченной биомассы кладонии лесной;
- El.r._0,05 – пырей ползучий (*Elytrigia repens*); 0,05 г/см² измельченной биомассы кладонии лесной.

В сериях опытов, где измельченная биомасса лишайника присутствовала на ложе прорастания семян, снижение энергии прорастания составляло $29,1 \pm 0,92\%$; $46,9 \pm 0,68\%$ и $53,1 \pm 0,96\%$ для вариантов 0,01; 0,03 и 0,05 г/см² биомассы соответственно – рисунок 2а. Снижение всхожести лисохвоста лугового в присутствии биомассы лишайника составляло $22,5 \pm 0,62\%$; $46,2 \pm 0,51\%$ и $54,8 \pm 0,88\%$ для вариантов 0,01; 0,03 и 0,05 г/см² биомассы соответственно.

В сериях опытов, где измельченная биомасса лишайника была отделена от семян лисохвоста лугового одним слоем фильтровальной бумаги, и прорастание происходило в водной среде, содержащей выщелачивания из кладонии лесной, но без непосредственного контакта с ней, снижение энергии прорастания и всхожести семян достоверно отличалось от приведенных выше значений и составляло $22,1 \pm 0,38 \%$; $39,5 \pm 0,82 \%$; $44,4 \pm 1,02 \%$ (энергия прорастания) и $25,8 \pm 0,52 \%$; $36,6 \pm 0,89 \%$; $41,9 \pm 0,73 \%$ (всхожесть) для вариантов 0,01; 0,03 и 0,05 г/см² биомассы соответственно – рисунок 2б.

Таким образом, установлено, что измельченная биомасса лишайника *Cladonia arbuscula* в количестве 100 г/м² примерно на четверть снижает энергию прорастания и всхожесть семян лисохвоста лугового и наполовину подавляет прорастание семян при внесении 300–500 г лишайника на квадратный метр. По нашим оценкам, насыпная плотность измельченной биомассы кладонии лесной составляет $342 \pm 4,62$ г/дм³, что дает представление об обсуждаемом количестве лишайника.

Энергия прорастания и всхожесть семян пырея ползучего снижались на $\frac{1}{4}$ и на $\frac{1}{2}$ соответственно только в присутствии биомассы лишайника в количестве 500 г/м² и при непосредственном контакте с семенами – рисунок 2.

Успешный рост первичных корней и побегов является залогом благополучия проростка, формирования в дальнейшем корневищ, почек возобновления и иных структур, позволяющих растениям конкурировать в фитоценозе и переживать неблагоприятные условия окружающей среды. Нами установлено угнетающее влияние биомассы лишайника *Cladonia arbuscula* на первичный рост корней и проростков лисохвоста лугового и пырея ползучего – рисунки 3 и 4. Можно говорить о зависящем от вносимого количества биомассы аллелопатическом подавлении роста корней и побегов лисохвоста лугового и пырея ползучего лишайником кладония лесная.

При внесении измельченной биомассы лишайника в количестве 0,01 г/см² на 30-е сутки роста корни лисохвоста лугового отставали от контроля на $40,9 \div 66,7 \%$; пырея ползучего – всего на $4,5 \div 8,2 \%$. При внесении большего количества биомассы лишайника (0,03 и 0,05 г/см²) корневые системы лисохвоста лугового росли хуже, чем у контрольных растений на $49,5 \div 73,5 \%$ и $72,4 \div 81,1 \%$ соответственно. Рост корней пырея ползучего активнее подавлялся (на $43,5 \div 61,2 \%$) при их непосредственном контакте с биомассой лишайника. Следует отметить, что корни проростков пырея ползучего «преодолевали» биохимический стресс, возникший от присутствия 0,01 г/см² биомассы лишайника в среде проращивания. При более высоких значениях содержания лишайниковой массы, корни проростков не справлялись с воздействием лишайниковых веществ и все больше отставали в росте от контрольных растений.

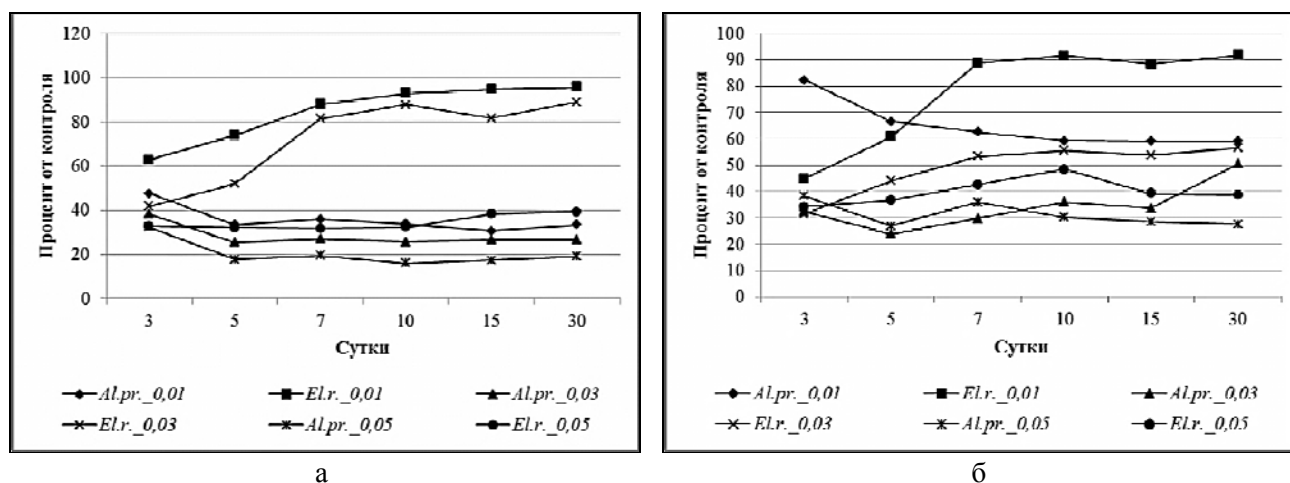


Рисунок 3 – Длина корней всходов лисохвоста лугового и пырея ползучего на пятые – тридцатые сутки опыта: а – биомасса лишайника находится на ложе прорастания; б – биомасса лишайника находится под ложем прорастания

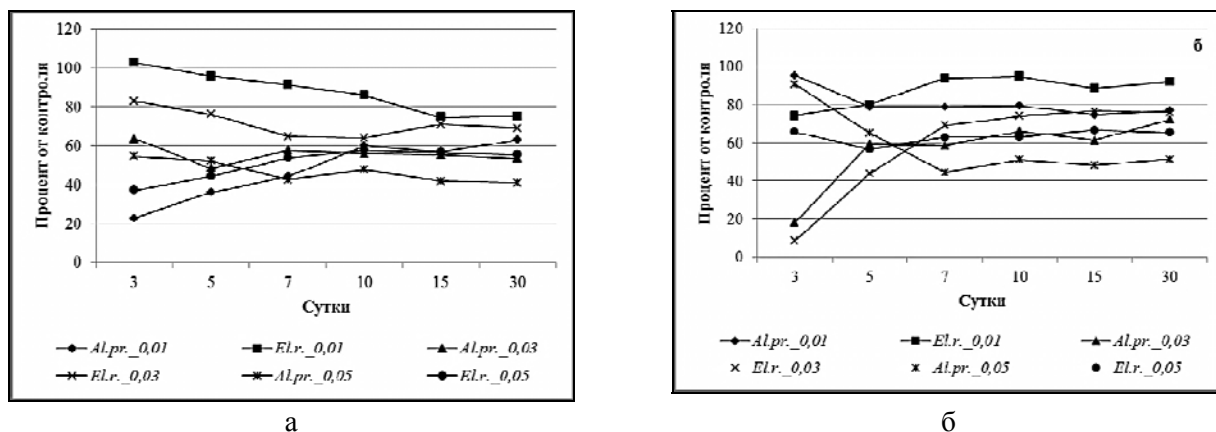


Рисунок 4 – Длина побегов всходов лисохвоста лугового и пырея ползучего на пятые – тридцатые сутки опыта: а – биомасса лишайника находится на ложе прорастания; б – биомасса лишайника находится под ложем прорастания

Рост побегов корневищных злаков угнетался несколько меньше – до 59 % у лисохвоста лугового и до 44,6 % у пырея ползучего – рисунок 4. На рост побега влияло не только количество внесенной в среду прорастания биомассы лишайника, но и ее расположение относительно проростков – в отсутствии прямого контакта проростка с лишайником ингибирование роста побега было на 10–15 % слабее.

При проращивании семян дикорастущих злаков в среде с биомассой лишайника мы обратили внимание на «щуплость» проростков – они явно имели меньшую массу, чем контрольные экземпляры – рисунок 5.

Присутствие биомассы лишайника в количестве 0,01 г/см² на ложе прорастания семян лисохвоста лугового и под ним вызывало снижение массы проростков в первую декаду проращивания и последующее ее наращивание, несмотря на отставание в росте корней и побегов. Присутствие биомассы лишайника в количестве 0,03 и 0,05 г/см² вызывало снижение массы проростков лисохвоста лугового, причем величины этого снижения коррелировали с отставанием в росте корней и побегов.

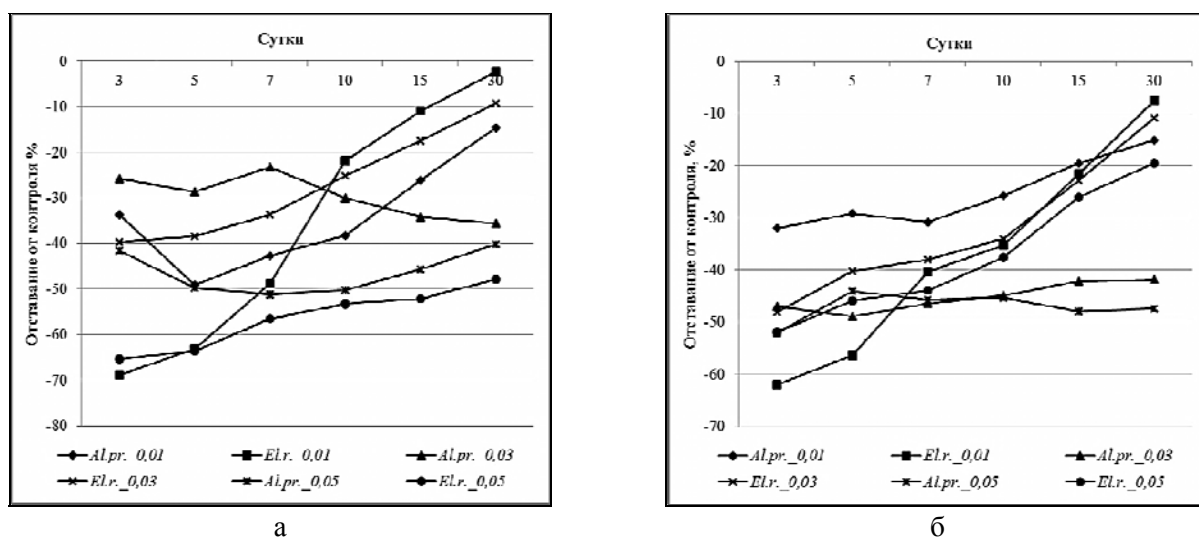


Рисунок 5 – Масса проростков лисохвоста лугового и пырея ползучего на пятые – тридцатые сутки опыта: а – биомасса лишайника находится на ложе прорастания; б – биомасса лишайника находится под ложем прорастания

Проростки пырея ползучего ликвидировали дефицит массы к 30-м суткам выращивания в случаях, когда биомасса лишайника была отделена от них и не справлялись с этой задачей при непосредственном контакте с лишайником в количестве 0,05 г/см².

Таким образом, ингибирующее влияние биомассы лишайника *Cladonia arbuscula* на всхожесть семян и первичный рост проростков лисохвоста лугового и пырея ползучего видоспецифично и зависит от количества внесенной биомассы.

Заключение. Оценивали влияние измельченной биомассы лишайника кладония лесная на всхожесть и первичный рост проростков дикорастущих злаков – лисохвоста лугового и пырея ползучего. Показано, что всхожесть семян и первичный рост проростков лисохвоста лугового подавляется сильнее, чем пырея ползучего. Внесение 0,01 г/см² биомассы лишайника в среду прорастания лисохвоста лугового на 22,1–29,1 % снижает энергию прорастания семян; на 21,5–25,8 % – их всхожесть; на 40,9–66,7 % – длину корней; на 23,2–37,1 % – длину проростков; на 14,6–15,4 % – их массу. При внесении 0,03–0,05 г/см² биомассы лишайника энергия прорастания семян лисохвоста лугового подавлялась до 46,9 % от контроля; всхожесть – до 45,2 %; рост корней – до 19,1 %; рост побегов – до 41,1 %; масса проростков снижалась на 47,4 %. Энергия прорастания и всхожесть семян пырея ползучего снижались на ¼ и на ½ соответственно только в присутствии биомассы лишайника в количестве 0,05 г/см². При этом рост корней снижался на 60,8–61,2 %; побегов – на 34,7–44,6 %; масса проростков – на 47,8 %.

Литература

1. Reigosa, M.J. Allelopathy: a physiological process with ecological implications / M.J. Reigosa, N. Pedrol, L. González. – Springer : Science & Business Media, 2006. – 638 p.
2. Rice, E.L. Allelopathy. Physiological ecology / E.L. Rice. – Orlando, FL : Academic Press, 1984. – 424 p.
3. Bhattacharyya, S. Lichen secondary metabolites and its biological activity / S. Bhattacharyya [et al.] // American journal of PharmTech research. – 2016. – Vol. 6 (6). – P. 29–44.
4. Favero-Longo, S.E. Lichen-plant interactions / S.E. Favero-Longo, R. Piervittori // Journal of plant interactions. – 2010. – Vol. 5. – P. 163–177.
5. Deines, L. Germination and seedling establishment of two annual grasses on lichen-dominated biological soil crusts / L. Deines [et al.] // Plant and Soil. – 2007. – Vol. 295 (1–2). – P. 23–35.
6. Peres, M.T.L.P. Allelopathic potential of orsellinic acid derivatives / M.T.L.P. Peres [et al.] // Braz. Arch. Biol. Technol. – 2009. – Vol. 52 (4). – P. 1019–1026.
7. Тарасова, В.Н. Лишайники: физиология, экология, лишеноиндикация: учебное пособие / В.Н. Тарасова, А.В. Сони́на, В.И. Андросова. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2012. – 368 с.
8. Ranković, B. Lichen secondary metabolites: bioactive properties and pharmaceutical potential / B. Ranković. – Heidelberg : Springer, 2015. – 201 p.
9. Huneck, S. Identification of lichen substances / S. Huneck, I. Yoshimura. – Berlin : Springer, 1996. – 493 p.
10. Zagoskina, N.V. Water-soluble phenolic compounds in lichens / N.V. Zagoskina [et al.] // Microbiology. – 2013. – Vol. 82 (4). – P. 445–452.
11. Храмченкова, О.М. Влияние биомассы эпифитных лишайников на прорастание семян злаковых культур / О.М. Храмченкова // Наука и инновации. – 2017. – № 5. – С. 68–72.
12. Храмченкова, О.М. Влияние биомассы лишайников на прорастание семян сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.) и березы повислой (*Betula pendula* Roth.) / О.М. Храмченкова // Проблемы лесоведения и лесоводства : сб. научн. тр. ИЛ НАН Беларуси. – Гомель : ИЛ НАН Беларуси, 2017. – Вып. 77. – С. 396–402.
13. Храмченкова, О.М. Влияние экстрактов из лишайников на прорастание семян сосны обыкновенной / О.М. Храмченкова // Бюллетень Брянского отделения РБО. – 2018. – № 2 (14). – С. 50–55.
14. Храмченкова, О.М. Влияние биомассы лишайников на прорастание семян корнеплодных культур / О.М. Храмченкова // Веснік ВДУ імя П.М. Машэрава. – 2019. – № 2 (103) – С. 82–86.
15. Храмченкова, О.М. Аллелопатическое действие биомассы лишайника на всходы рудеральных растений семейства капустные / О.М. Храмченкова // Теоретическая и прикладная наука. – 2019. – Т. 72, № 4. – С. 109–115.
16. Planetarium [Electronic resource]. – Access mode : <http://www.planetarium.ru>. – Data of access : 18.09.2019.

УДК 502.171(1-751.3):528.3(477.5)

Эколого-ценотические характеристики новых местонахождений *Carex secalina* (Cyperaceae) в Левобережной Лесостепи Украины

В.Л. ШЕВЧИК¹, И.В. СОЛОМАХА², Н.А. СМОЛЯР³, В.А. СОЛОМАХА², И.Н. ДАНИЛИК⁴

Сообщается о новых местонахождениях редкого вида национального и европейского уровней охраны *Carex secalina* Willd. ex Wahlenb. в Украине на территории Левобережной Лесостепи. Характеризуется его современное распространение и эколого-ценотические особенности в выявленных биотопах.

Ключевые слова: редкий вид, *Carex secalina*, эколого-ценотическая характеристика, биотоп, охрана, Левобережная Лесостепь.

New locations of rare species of national and European levels of protection of *Carex secalina* Willd. ex Wahlenb. in Ukraine on the territory of the Left-Bank Forest-Steppe are reported. Its modern distribution and ecological-coenotic features in the identified biotopes are characterized.

Keywords: rare species, *Carex secalina*, ecological-coenotic characteristics, habitat, conservationCpe, Left Bank Forest-steppe.

Введение. В процессе реализации важных природоохранных концепций сохранения биоразнообразия весьма актуальным является изучение, анализ, оценка современного распространения и эколого-биологических особенностей выживания созофитов, как чувствительных индикаторов состояния экосистем и их изменений, в том числе и под воздействием антропогенных факторов. Среди представителей рода *Carex* L. (Cyperaceae) флоры Украины 24 вида являются редкими и исчезающими растениями [1]. Нами в ходе экспедиционных исследований выявлены и охарактеризованы в эколого-ценотическом отношении новые местонахождения одного из них – *Carex secalina* Willd. ex Wahlenb. – на территории Левобережной Лесостепи Украины.

Материалы и методы исследований. Материалы (гербарные образцы, полные геоботанические описания, данные популяционных исследований) собраны на территории Левобережной Лесостепи в долинах рек Ворсклы, Сулы и их притоков. По физико-географическому районированию Украины регион исследований находится на юго-востоке Восточно-Европейской равнины [2], по геоботаническому – в пределах Европейско-Сибирской лесостепной области Восточноевропейской провинции [3].

В связи со значительной распаханностью (до 85 %) зональные типы растительности (широколиственные леса и луговые степи) почти не сохранились. Естественная и полустепная растительность лучше сохранилась в поймах рек, иногда на их террасах. Наибольшее распространение получили травяные сообщества – луговые и болотные, которые поддерживаются умеренным выпасанием и сенокошением.

Рекогносцировочные исследования проводили маршрутным методом. Описания участков растительности, в состав которой входит редкий вид *C. secalina*, осуществляли по общепринятым методикам. Пробные участки закладывали в естественных пределах фитоценозов. В исследуемых местонахождениях нами выполнены полные геоботанические описания. В сообществах для каждого вида указывается его участие в процентах (%) или наличие (+). Сбор гербария и его обработку осуществляли по стандартной методике. Названия таксонов приведены согласно чеклиста С.Л. Мосякина и М.М. Федорончука [4].

Результаты исследований и их обсуждение. *Carex secalina* – вид, включенный в третье издание Красной книги Украины [1], как уязвимый и находящийся на северной границе ареала. Он является редким в Европе [5], [6], [7] и включен в Приложение 1 Бернской конвенции [8], [9].

C. secalina – это многолетнее травянистое дерновинное растение, однодомный поликарпик [10]. Традиционно считалось, что *C. secalina* образует генеративные побеги с однополыми мужскими и женскими колосками. Несколько мужских колосков (обычно 2–3) распо-

ложены в верхней части побега, ниже их – такое же количество женских колосков. Однако недавно польские исследователи установили, что *C. secalina* свойственно значительно большее разнообразие структуры колосьев: кроме однополых, обнаружены двуполые, к тому же последние могут быть двухзональными (андрогинными и гинеандрическими) или даже тризональными [11]. То есть *C. secalina* отличается разнообразием структуры колосьев, которая в роде *Carex* диагностирует отдельные подроды [12].

Распространение вида характеризуется весьма значительными дизъюнкциями. В Европе он встречается в южной части Германии, Польши, Австрии, Венгрии, Украины и России; в Азии ареал расположен южнее Урала, через Казахстан простирается до Байкала [12], [7]. В Украине *C. secalina* спорадически встречается в Лесостепной и Степной зонах [8]. Этот вид произрастает на песчаных и супесчаных свежих и засоленных почвах речных долин и террас. Подавляющее большинство местонахождений приурочено к бассейну среднего течения реки Днепра: в лесостепной и степной частях Приднепровской низменности между городами Днепром и Киевом (Кировоградская, Днепропетровская, Полтавская, Черкасская, Черниговская и Киевская области) [13], [14], [8], [10], [15] (*KW*, *LW*, *LWS*). За пределами Приднепровской низменности вид известен по р. Ингулец и его притокам из Кривого Рога, и его окрестностей [16] (*KRW*). Также он отмечен в степной части бассейна р. Северский Донец: в южных регионах Харьковской и на крайнем востоке Луганской областей [8], [10]. На юге Украины указывается для пойм рек Дуная, Днестра и Днепра [17] и прибрежноморских территорий (остров в устье реки Днестр, Одесский порт, пересыпь Тилигульского лимана) [10], [18].

На сегодня известно всего около 25 местонахождений вида преимущественно по давним гербарным образцам XIX – первой половины XX столетия, не подтвержденные современными сборами. Позже, в конце XX – начале XXI в., вид отмечали Ю.Р. Шеляг-Сосонко и Д.В. Дубина [17] в Причерноморье, указывая местонахождение в низовьях рек Днестра (ранее известный локалитет), Дуная и Днепра (новые местонахождения). На Тилигульском лимане вид был обнаружен в приморской полосе, где его раньше собирал И.К. Пачосский, и в новых, достаточно удаленных от моря, локалитетах [19]. На Приднепровской низменности его находили в г. Кривой Рог и его окрестностях [16] (*KRW*), на железной дороге в г. Киев (С. Мосякин, *KW*), Днепропетровской области – у истоков р. Саксагань (ниже с. Малоалександровка) (Б.О. Барановский, В.П. Барановский, Л.А. Кармизова, 2012, *KW*). По гербарным сборам известные современные местонахождения *C. secalina* с территории Харьковской (в балке Гнилушка в окрестностях села Мартовое Печенежского района (И.А. Коротченко, 1996, *KW*; Д.А. Давидов, 2015, *KW*), Киевской (изредка на пойменном лугу возле реки Супий в окрестностях с. Панфилы Яготинского района (Д.А. Давидов, 2016, *KW*), Полтавской (на лугу в пределах заказника «Любка» Котелевского района (И.А. Коротченко, Е.Н. Байрак, 1993, *KW*; на пойме р. Удай в окрестностях с. Повстин Пирятинского района (А.А. Коваленко 2012, *KW*) областей.

Согласно Красной книге Украины [1] и информации из известных местонахождений в Украине все популяции *C. secalina* изолированы, представлены незначительными площадями и численностью особей. Вид встречается в фитоценозах союзов *Agropyron-Rumicion crispi* Nordhagen 1940, *Scorzonero-Juncion gerardii* (Wendelberger 1943) Vicherek 1972 и *Puccinellion limosae* (Klika 1937) Wendelberger 1943, 1950.

Обнаруженные нами новые местонахождения *C. secalina* являются одними из нескольких известных, в том числе и указанных выше, на территории Левобережной Лесостепи в пределах Полтавской области (А. Черная, *KW*; А.А. Коваленко, *KW*) [14].

Одно из них, обнаруженное в пойме р. Гнилая Оржица между селами Денисовка и Золотухи Оржицкого района Полтавской области. Выпасаемые и сенокосные луга на этом участке поймы составляют до 80 % площадей. В прибрежной части поймы рядом с распространенной ассоциацией *Schenoplectetum tabernomontani* среди луга на сниженных участках, которые пересыхают летом, с солонцеватыми илисто-торфяными накоплениями, с проективным покрытием травостоя до 40 % произрастают и содоминируют *Puccinellia distans* (Jacq.) Parl. (15 %), *Ranunculus sceleratus* L. (15), *Carex secalina* (7). Здесь, на несколько поднятых, торфянистых участках поймы, затапливаемых весной, произрастают *Puccinellia distans* (70) с содоминированием *Carex secalina* (15).

На пойме значительные площади занимают луга с проективным покрытием травостоя 95 %, где сообщества формируют *Puccinellia distans* (30 %) с *Alopecurus arundinaceus* Poir. (25), *Potentilla anserina* L. (5), *Juncus gerardii* Loisel. (25). На отдельных участках таких лугов содоминируют *Alopecurus arundinaceus* и *Lepidium latifolium* L. В комплексе свежих солонцеватых лугов часто в роли доминантов и содоминантов выступают *Alopecurus arundinaceus*, *Puccinellia distans*, *Carex distans* L., *Festuca regaliana* Pavl., *Triglochin maritimum* L., *Juncus gerardii*.

Обследованные нами участки с *C. secalina* приурочены к слабо-сточным снижениям поймы, которые регулярно затапливаются водой во время весенних наводнений и пересыхают летом. Общая их площадь составляет около 200 м². Большинство особей находятся в генеративном состоянии, имеют хорошо развитые генеративные стебли. Выявлены лишь единичные особи, хотя и хорошо развитые, но без генеративных стеблей. Возможно эти особи перешли в генеративное состояние во вторую половину лета.

Несмотря на то, что полный онтогенетический цикл у этого вида длится всего несколько лет (иногда по типу двулетников), вероятно, что он может иметь весьма различные показатели участия в данных фитоценозах, и является активным участником резких флуктуационных и дигрессионно-демутационных их изменений. Для выявления такого характера его поведения целесообразными являются многолетние наблюдения за ним в условиях конкретных локалитетов. Описанные местонахождения находятся на территории перспективного объекта Emerald Network Украины [20], создание которого предназначено обеспечить их охрану и сохранение.

Несколько местонахождений *C. secalina* нами выявлено на территории гидрологического заказника общегосударственного значения «Граково» (Полтавская область, Оржицкий район). Они приурочены к периферийным участкам обводненных систем эвтрофного высококотравного болота в хорошо увлажненных условиях с *Alopecurus arundinaceus*. В нижних подъярусах травостоя массово произрастают типичные галофиты: *Glaux maritima* L., *Triglochin maritimum*, *T. palustre* L., *Scorzonera parviflora* Jacq., *Trifolium fragiferum* L., *Taraxacum bessarabicum* (Hornem.) Hand.-Mazz., *Atriplex latifolia*.

Достаточно многочисленные ценопопуляции *C. secalina* обнаружены также на средних элементах рельефа поймы в группировках галофитных лугов также с доминированием *Puccinellia distans*. Их травостой невысокий (до 20 см), несколько разреженный (60–70 %) и имеет пятнистый характер. Значительное участие в растительном покрове типичных галофитов: *Limonium alutaceum* (Steven) O. Kuntze, *Taraxacum bessarabicum*, *Plantago salsa* Pall., *P. tenuiflora* Waldst. & Kit., *Juncus gerardii* и др. На одном из таких участков обнаружены единичные экземпляры регионально редких в Полтавской области галофитов – *Iris halophylla* Pall. и *Chartolepis intermedia* Boiss.

Все эти местонахождения дополняют существующую информацию о распространении *C. secalina* в бассейне нижней Сулы, где вид указывается в списке редких растений низовья реки [21] без указания конкретных местонахождений и их ценотической характеристики.

Несколько новых для Левобережной Лесостепи Украины местонахождений *C. secalina* приводим для низовья р. Ворскла, которые дополняют обнаруженные нами в 90-е гг. XX столетия [22] и зафиксированные в Красной книге Украины [1] местонахождения на пониженных участках поймы, которые сейчас находятся под охраной на территории регионального ландшафтного парка «Нижневорсклянский» [23].

Одно из них находится на территории гидрологического заказника местного значения «Ревущено», где *C. secalina* образует многочисленные ценопопуляции в группировках солонцеватой растительности с проективным покрытием (60–85 %). На таких участках доминируют *Puccinellia distans*, *Alopecurus arundinaceus*, *Festuca regaliana*, *Carex distans*, *Juncus gerardii*.

Флористическое ядро формируют типичные луговые виды: *Medicago romanica* Prodán, *M. lupulina* L., *Lotus ucrainicus* Klokov, *Trifolium pratense* L., *T. repens* L., *Daucus carota* L., *Taraxacum officinale* L., *Plantago lanceolata* L., *Achillea submillefolium* Klokov & Krytzka, *A. pannonica* Scheele, *Heracleum sibiricum* L., *Cychorium intybus* L., *Cerastium holosteoides* Fr., *Potentilla anserina* L., *P. reptans* L., *Lolium perenne* L., *Poa compressa* L., *Veronica arvensis* L., *Arenaria uralensis* Pall. ex Spreng., *Seseli campestre* Besser, *Holosteum umbellatum* L. И др. На

засоленный характер луговых сообществ указывают *Trifolium fragiferum*, *Taraxacum bessarabicum*, *Scorzonera parviflora*, *Triglochin maritimum*, *Glaux marina*, *Melilotus albus* Medik., *M. officinalis* (L.) Pall., *Ononis arvensis* L. В таких условиях встречается и *Fritillaria meleagroides* Patrin ex Schult. & Schult.f. – в разные годы разночисленными группами.

В этом местонахождении выявлено более 50 особей *C. secalina*, которые располагаются локальными группами по 7–10 особей. В дерновине насчитано до 90–120 элементарных побегов. Отмеченные особи разных возрастных состояний, большинство – генеративных.

Еще одно местонахождение *C. secalina* обнаружено нами на территории заповедного урочища «Шкурино». В этом локалитете вид приурочен как к группировкам, аналогичным предыдущему местонахождению, так и к биотопам с солончаковой растительностью с преобладанием *Puccinellia distans*, *Elytrigia elongata* (Host) Nevski, *Tripolium vulgare* Ness., *Limonium alutaceum* и участием *Triglochin maritimum*, *T. palustre* L., *Scorzonera parviflora*, *Plantago salsa*, *P. tenuiflora*, *P. maxima* Juss. ex Jacq., *P. cornuti* Gouan., *Atriplex prostrata* Boucher ex DC., *Althaea officinalis* L., *Spergularia media* (L.) C. Presl., а также регионально редкого вида – *Halimione verrucifera* (M. Bieb.) Aellen. В этом местонахождении обнаружены многочисленные ценопопуляции малораспространенного в регионе вида *Rhaponticum serratuloides* (Georgi) Bobrov., которые требуют уточнения своего природоохранного статуса [14]. Участие *C. secalina* в сообществах с проективным покрытием травостоя около 60 % составляет до 15–20 %. Обнаружено более 100 особей, которые в пространственном отношении размещаются локальными группами и сплошную. В среднем в дерновине насчитано 86 элементарных побегов. Большинство особей является генеративными.

Также нами проведены мониторинговые исследования известного ранее местонахождения *C. secalina* на территории гидрологического заказника местного значения «Любка» (Котелевский район, Полтавская область) [14], где она, как асектатор, участвует в формировании лугово-болотных фитоценозов галофитного типа в долине р. Мерла (притока р. Ворскла). Основное флористическое ядро и структура растительных сообществ аналогична описанным выше. Асектаторами на таких участках выступают и редкие виды растений, включенные в Красную книгу Украины: *Orchis palustris* Jacq., *Dactylorhiza incarnata* (L.) Soó, *Gladiolus tenuis* Gaudin, *Fritillaria meleagroides*. Ценопопуляция *C. secalina* представлена единичными особями и немногочисленными группами. Выявлено 27 особей, преимущественно генеративных (18), отмечены и молодые растения.

Установлено, что традиционное использование выявленных луговых и лугово-болотных участков в форме сенокосения и умеренного выпаса способствует поддержанию и развитию ценопопуляций *C. secalina* и приведенных выше созофитов. Однако, основными угрозами для них выступают: спонтанное зарастание луговых участков *Pyrus communis* L., *Crataegus* sp., *Elaeagnus angustifolia* L., несанкционированное выжигание сухой растительности, нестабильный гидрорежим из-за снижения уровня грунтовых вод и др., что обуславливает необходимость разработки и применения мероприятий экологического менеджмента.

Современные процессы галофитизации пойменных местностей в условиях нарушенного гидрорежима рек вследствие их зарегулирования и, в связи с этим, снижения уровня грунтовых вод в поймах рек, особенно минерализованных в их низовьях, очевидно благоприятны для распространения *C. secalina*, что является типичным лугово-болотным галофитом, на территории Левобережной Лесостепи Украины.

Отметим, что во флористическом составе всех охарактеризованных нами сообществ с участием *C. secalina* обязательно представлены синантропные виды – в основном как асектаторы или формируют агломерации. Чаще всего такими спутниками *C. secalina* выступают *Poa annua* L., *Bromus hordeaceus* L., *Sonchus arvensis* L., *Cirsium vulgare* (Savi) Ten., *Verbascum blattaria* L., *Lactuca serriola* L., *Ambrosia artemisifolia* L., *Conyza canadensis* (L.) Cronq., *Xanthium albinum* (Widder) H. Scholz и др.

На определенную устойчивость вида к антропогенному воздействию указывает и то, что *C. secalina* выдерживает достаточно интенсивное выпасание, в том числе и прямое объедание травоядными животными, а также вытаптывание, сенокосение, выжигание и др. По

результатам исследований установлено, что умеренное нарушение экотопов является непременным элементом исследованных в регионе Тилигульского лимана популяций этого вида [19]. В прилегающих существенно трансформированных экотопах она отсутствует, поэтому можно предположить, что *C. secalina* не выдерживает усиленного антропогенного воздействия и выпадает из фитоценозов.

В Польше *C. secalina* произрастает в таких же умеренно нарушенных экотопах [7]. На определенный щелочно-апофитно-рудеральный характер вида указывает также его произрастание на железной дороге в г. Киев, где он появился антропохорным путем (С. Мосякин, KW).

Выводы. Таким образом, местонахождение *C. secalina*, что является созофитом национального и международного уровней, в Левобережной Лесостепи приурочены к биотопу Д6.1 (континентальные солончаки). Для региона известны как давние, так и современные местонахождения этого вида. Результаты обобщенной информации о современном распространении *C. secalina* в Украине, эколого-ценотических особенностях и состоянии ценопопуляций в выявленных нами новых местонахождениях свидетельствуют об активных процессах галофитизации растительного покрова региона. Установлено, что вид выдерживает незначительное антропогенное влияние (умеренный выпас и выкашивание), которое целесообразно предусматривать и регулировать природоохранными менеджмент-планами территорий. В большинстве охарактеризованных нами местонахождениях *C. secalina* охраняется на территории объектов природно-заповедного фонда Полтавской области (гидрологических заказников «Граково», «Любка», «Ревущино» и заповедного урочища «Шедиево»). В долине р. Гнилая Оржица (бассейн р. Сула) планируется создание объекта Emerald Network Украины.

Литература

1. Червона книга України. Рослинний світ / за ред. Я.П. Дідуха. – К. : Глобалконсалтинг, 2009. – 900 с.
2. Екологічна енциклопедія. – К. : Центр екологічної освіти та інформації, 2006. – Т. 1. – 432 с.
3. Національний атлас України. – К. : ДНВП «Картографія», 2008. – 440 с.
4. Mosyakin, S.L. Vascular plants of Ukraine. A nomenclatural checklist / S.L. Mosyakin, M.M. Fedoronchuk / Ed. S.L. Mosyakin. – Kiev, 1999. – 345 p.
5. Chmiel, J. *Carex secalina* Willd. ex Wahlenb. – turzyca zytowata / J. Chmiel, M. Lembicz, W. Zukowski // Polska Czerwona Kniha Roslin. Paprotniki i rośliny kwiatowe. – Krakow, 2001. – P. 508–510.
6. Holub, J. Red list of vascular plant of the Czech Republic / J. Holub, F. Prochazka // Preslia. – 2000. – V. 72. – P. 187–230.
7. Zukowski, W. *Carex secalina* (Cyperaceae) a species critically endangered in Europe: from propagule germination to propagule production / W. Zukowski, M. Lembicz, P. Olejniczak. [et al.] // Acta Societatis Botanicorum Poloniae. – 2005. – 74, № 2. – P. 141–147.
8. Вініченко, Т.С. Рослини України під охороною Бернської конвенції / Т.С. Вініченко. – К. : Хімджест, 2006. – 176 с.
9. Конвенція про охорону дикої флори і фауни та природних середовищ існування в Європі (Берн, 1979 р.). – К. : Мінекобезпеки України, 1998. – 76 с.
10. Кречетович, В.І. Родина *Cyperaceae*. – Осокові / В.І. Кречетович // Флора УРСР. – 1940. – Т. 2. – С. 387–563.
11. Lembicz, M. Production and structure of unisexual and bisexual inflorescences in populations of *Carex secalina* (Cyperaceae) / M. Lembicz, A. Bogdanowicz, W. Zukowski // Polish botanical studies. – 2006. – Vol. 22. – P. 343–346.
12. Егорова, Т.В. Осоки (*Carex* L.) России и сопредельных государств (в пределах бывшего СССР) / Т.В. Егорова. – СПб. : Санкт-Петербург. гос. химико-фармацевт. акад., 1999. – 776 с.
13. Андрієнко, Т.Л. Заповідні куточки Кіровоградської землі / Т.Л. Андрієнко, П.С. Терещенко, М.Л. Клестов [та ін.]. – К. : Арктур-А, 1999. – 240 с.
14. Байрак, О.М. Атлас рідкісних та зникаючих рослин Полтавщини / О.М. Байрак, Н.О. Стецюк. – Полтава : Верстка, 2005. – 246 с.
15. Чопик, В.І. Конспект флори Середнього Придніпров'я. Судинні рослини / В.І. Чопик, М.М. Бортняк, Ю.О. Войтюк [та ін.]. – К. : Фітосоціоцентр, 1998. – 140 с.
16. Кучеревський, В.В. Конспект флори Правобережного степового Придніпров'я / В.В. Кучеревський. – Дніпропетровськ : Вид-во «Проспект», 2004. – 292 с.

17. Дубына, Д.В. Плавни Причерноморья / Д.В. Дубына, Ю.Р. Шеляг-Сосонко. – Киев : Наук. думка, 1989. – 272 с.
18. Пачоский, И.К. Херсонская флора / И.К. Пачоский. – Херсон, 1914. – Т. 1. – 548 с.
19. Мойсієнко, І.І. *Carex secalina* Willd. ex Wahlenb. (*Cyperaceae*) на Тилігульському лимані / І.І. Мойсієнко, В.А. Соломаха, Т.Д. Соломаха // Укр. ботан. журн. – 2009. – Т. 66, № 1. – С. 35–43.
20. Території, що пропонуються до включення у мережу Емеральд (Смарагдову мережу) України («тіньовий список», частина 2) / колектив авторів, під ред. К.А. Борисенко, А.А. Куземко. – Київ : «Lat & K», 2019. – 234 с.
21. Клестов, М.Л. Рослинний та тваринний світ пониззя річки Сули / М.Л. Клестов, Н.П. Гальченко, Прядко О.І. [та ін.] / під заг. ред. М.Л. Клестова, Н.П. Гальченко. – К. : Фітосоціоцентр, 2016. – 240 с.
22. Смоляр, Н.О. Рідкісні види флори регіонального ландшафтного парку «Нижньоворсклянський» (Полтавська область): анотований список / Н.О. Смоляр // Полтавський краєзнавчий музей: збірник наукових статей. Маловідомі сторінки історії, музеєзнавство, охорона пам'яток. – 2016. – Випуск XI / Редкол.: Ю.В. Волошин, А.М. Киридон, В.О. Мокляк [та ін.]. – Полтава : Дивосвіт, 2016. – С. 6–20.
23. Стецюк, Н.О. Созологічна оцінка рослинного світу пониззя р. Ворскли / Н.О. Стецюк // Заповідна справа в Україні. – Т.5, вип. 1. – Канів, 1999. – С. 10–13.

¹Київський національний
університет ім. Т. Шевченко

²Інститут агроекології
и природопользования НАН України

³Полтавський національний технічний
університет ім. Ю. Кондратюка

⁴Інститут екології Карпат
НАН України

Поступила в редакцію 21.10.2019

Информатика

УДК 004.934.2

Метод шумоочистки речевых сигналов на основе мел-частотных кепстральных коэффициентов с использованием фильтрации Калмана

С.М. ГОРОШКО, С.Н. ПЕТРОВ

Улучшение качества речи в системах автоматического распознавания с использованием фильтра Калмана является перспективной областью исследований. В подавляющем большинстве работ коэффициент линейного предсказания (*LPC*) используется в качестве параметрических векторов. Однако несколько исследований показали преимущество использования мел-частотных кепстральных коэффициентов (*MFCC*) в сравнении с *LPC* в системах распознавания речи. В данной статье проведен сравнительный анализ использования *LPC* и *MFCC* совместно с фильтром Калмана для определения акустических параметров зашумленного речевого сигнала в системах автоматического распознавания речи (*ASR*).

Ключевые слова: мел-частотные кепстральные коэффициенты, улучшение качества речи, извлечение характеристик, фильтр Калмана, автоматическое распознавание речи.

Improving speech quality in automatic recognition systems using the Kalman filter is a promising area of research. The vast majority of work done in this area uses linear prediction coefficients (*LPC*) as a parametric vector. However, several studies have shown the advantage of using mel-frequency cepstral coefficients (*MFCC*) in comparison with *LPC* in speech recognition systems. This article presents a comparative analysis of the use of *LPC* and *MFCC* in conjunction with the Kalman filter to determine the acoustic parameters of a noisy speech signal in automatic speech recognition (*ASR*) systems.

Keywords: mel-frequency cepstral coefficients, speech enhancement, feature extraction, Kalman filter, automatic speech recognition.

Введение. Автоматическое распознавание речи – это технология, обеспечивающая процесс преобразования речевых сигналов, произнесенных людьми, в текстовый поток данных [1]. Улучшение фундаментальных подходов и новых разработок привело к эволюции в области автоматического распознавания речи (*ASR*).

Традиционные системы распознавания обучаются речевым сигналам, записанным в чистой и бесшумной среде. Но в реальных условиях качество распознавания зависит от среды, через которую проходит акустический сигнал, что приводит к ухудшению функции распознавателей в шумных средах. Повышение разборчивости речи – это процесс цифровой обработки сигналов, который использует статистический характер речевых и шумовых сигналов для коррекции зашумленного речевого сигнала и получения высококачественного речевого сигнала. Обзор технологий шумоочистки речевых сигналов показал, что метод фильтрации с использованием фильтра Калмана дает превосходные результаты [2]. В данной работе фильтр Калмана использовался для уменьшения негативного воздействия случайных шумов в извлеченных параметрах речевых признаков.

С развитием вычислительной техники были разработаны различные методы извлечения полезных параметров из речевого сигнала [3]. В статье сравнивается эффективность метода *MFCC* и *LPC* наряду с использованием фильтра Калмана при подавлении шума. Реализация во временной области речевого сигнала, хотя и содержит в себе всю акустическую информацию, с трудом поддается анализу. Выделение функций позволяет выявить определенную статистически значимую информацию из речевого сигнала при использовании относительно небольшого числа параметров. Основное внимание уделено разработке фильтра с помощью полученных параметров, частотная характеристика которых эквивалентна спектральной плотности мощности речевого сигнала.

Математическая модель алгоритма обработки зашумленных речевых сигналов.

Линейное предсказание – вычислительная процедура, позволяющая по некоторому набору предшествующих отсчётов цифрового сигнала предсказать текущий отсчёт. Формирование речевого сигнала можно упрощенно представить в виде БИХ-фильтра. Суть метода состоит в том, чтобы выразить каждый кадр как смесь предыдущих кадров. Для сглаживания переходов в речевом спектре каждые 3 мс синтезатор обновляет параметры *LPC*, проводя интерполяцию между параметрами предыдущего и следующего кадра [4]. Передаточная функция изменяющегося во времени фильтра задается уравнением 1:

$$H(z) = \frac{G}{1 + \sum a_p z^{-p}}, \quad (1)$$

где G – коэффициент усиления, a_p – коэффициенты *LPC* фильтра, p – порядок фильтрации.

Алгоритм вычисления коэффициентов представлен на рисунке 1.

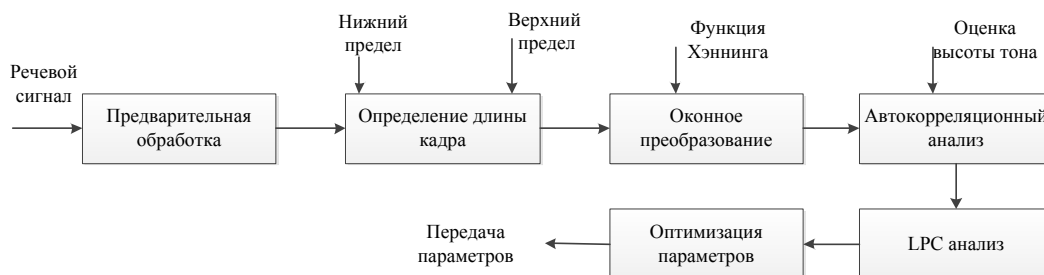


Рисунок 1 – Вычисление параметров *LPC*

Мел-частотные кепстральные коэффициенты (*MFCC*) были представлены в речевом анализе Дэвисом и Мермельштейном в 1980-х гг. [5]. Использование шкалы мела было обусловлено тем фактом, что люди могут различать небольшие изменения высоты тона на более низких частотах. Функции *MFCC* соответствуют энергиям банка логарифмических фильтров с использованием шкалы мела. Частота в масштабе мела определяется уравнением 2:

$$Mel(f) = 2595 \log\left(1 + \frac{f}{700}\right). \quad (2)$$

Векторы *MFCC* составляют около 39 векторов, включая 13 статических коэффициентов и 26 динамических коэффициентов, которые определяются разностью 1-го и 2-го порядка статических коэффициентов. Динамические коэффициенты фиксируют изменения коэффициентов во времени и часто не используются для распознавания речи. Алгоритм вычисления *MFCC* показан на рисунке 2.

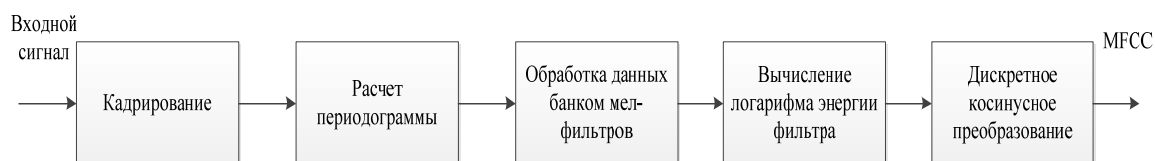


Рисунок 2 – Вычисление *MFCC*

Фильтр Калмана представляет собой математическую процедуру, разработанную Рудольфом Эмилем Калманом. Это алгоритм оптимальной рекурсивной обработки данных с использованием механизма коррекции предсказания. Алгоритм прогнозирует будущее состояние, используя предварительные аппроксимации, а затем корректирует дополнительный член, который пропорционален расчетной ошибке.

В случае обработки речи [1] принятый сигнал состоит из полезного сигнала и фоновый шума. Пусть полученный сигнал задается уравнением 3:

$$Z_n = x_n + v_n, \quad (3)$$

где Z_n – полученный сигнал, x_n – входной речевой сигнал, v_n – аддитивный фоновый шум.

Входной вектор моделируется с использованием авторегрессионной модели, заданной уравнением 4:

$$x_n = \sum_{k=1}^m a_k x_{(n-k)} + w_n. \quad (4)$$

Вышеприведенное уравнение может быть записано в форме состояния-пространства, как указано в уравнении 5:

$$x_{n+1} = A_{n+1,n} x_n + B \cdot w_{n+1}, \quad (5)$$

где w_{n+1} – шум процесса, $A_{n+1,n}$ – транспонированная матрица состояний, представлена как

$$A_{n+1,n} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & \dots & -a_1 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выходной вектор можно задать как уравнение 6:

$$Z_n = H \cdot x_n + v_n, \quad (6)$$

где H – состояние выходного вектора, v_n – внешний шум.

Результаты экспериментов. В данной работе проводилось моделирование с помощью *MATLAB 2017a*. Речевые сигналы, необходимые для анализа, были отобраны из речевой базы данных *NOIZEUS* [6]. База данных состоит из 30 предложений *IEEE sentence database* в не зашумленной форме, а также в зашумленной форме с различными шумами реального мира с определенными уровнями отношения сигнал/шум (*SNR*) 0, 5, 10 и 15 дБ. Частота дискретизации составляет 8 кГц.

Целью метода выделения признаков является воссоздание спектральных характеристик мощности речевого сигнала. Фильтр, разработанный с использованием параметров *LPC*, имеет частотную характеристику, эквивалентную спектральной огибающей мощности кадра речевого сигнала (рисунок 3).

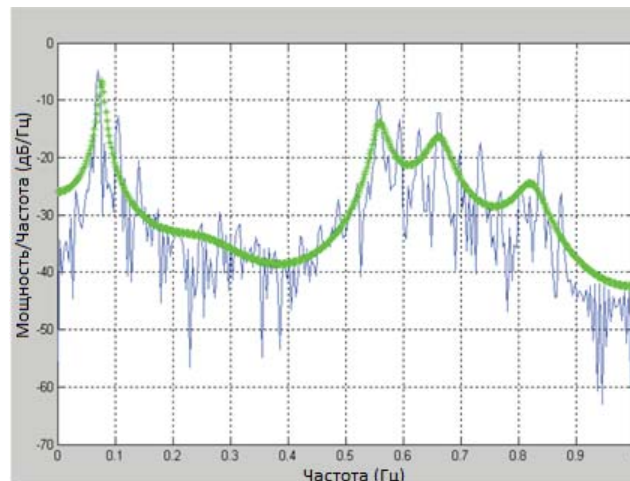


Рисунок 3 – Частотная характеристика фильтра *LPC* для первого входного кадра

Целью работы является вычисление параметров *LPC* из зашумленного речевого кадра, уточнение этих параметров с помощью фильтра Калмана, а затем восстановление речевого кадра из оценочных параметров. На рисунке 4 показан график зашумленного речевого кадра (1) и речевого кадра на выходе фильтра (2), а также график спектральной плотности мощности не зашумленного речевого кадра (3). Из графика можно сделать вывод, что при низкой энергии *LPC* оцениваемые параметры аналогичны параметрам зашумленного кадра. Это показывает, что *LPC* не может различать невокализованную речь (с низкой энергией) и шумы.

Тот же процесс извлечения функций *MFCC* из искаженного шумами сигнала и уточнения этих параметров с помощью фильтра Калмана дает лучшие результаты, чем *LPC* для большего уровня шумов (0 дБ и 5 дБ).

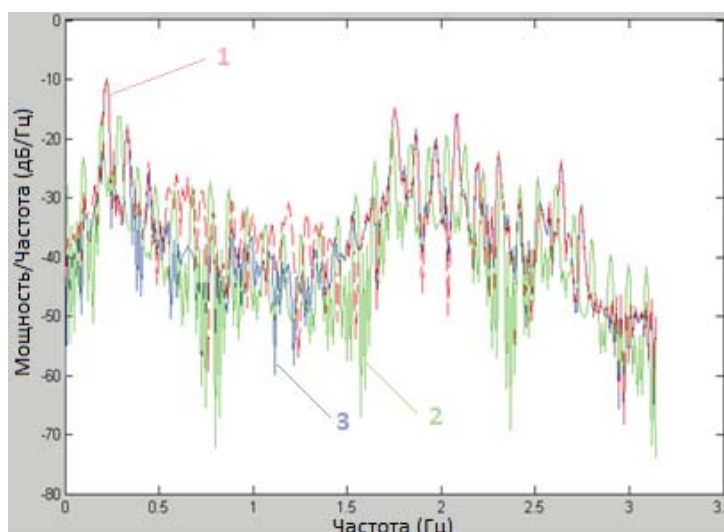


Рисунок 4 – Спектральная плотность мощности тестовых сигналов

Для получения результатов использовался речевой сигнал «sp02» из базы данных с наложением трех типов помех, а именно: шум аэропорта, шум ж/д станции и шум ресторана для 4 разных уровней (0,5, 10, 15 дБ). Параметры получены из чистого речевого сигнала и зашумленных модификаций для получения значений отношения сигнал/шум. Результаты моделирования приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты моделирования

Тип шума	SNR зашумленного сигнала (дБ)	SNR параметров			
		LPC		MFCC	
		До фильтрации	После фильтрации	До фильтрации	После фильтрации
Шум самолета	0	6,6252	6,8338	11,0347	14,1640
	5	10,9283	11,0109	12,3598	13,5350
	10	11,4412	11,6609	14,9375	15,3048
	15	20,1894	20,3872	22,0625	16,9968
Шум ж/д станции	0	7,0742	7,2136	9,0765	11,3361
	5	12,3574	12,5487	14,1404	15,4818
	10	13,7955	13,8855	19,2336	16,8116
	15	27,9943	28,9882	25,9601	17,8780
Шум помещения	0	8,3061	8,5388	12,2778	14,8871
	5	12,9780	12,9901	16,8215	16,9546
	10	26,8417	26,9910	25,9173	17,8637
	15	28,6348	29,2603	28,0637	18,1613

Параметры, которые были улучшены после фильтрации, выделены жирным шрифтом. На основе этих данных можно сделать вывод, что фильтр Калмана улучшает параметры *MFCC* значительно лучше, чем *LPC*, в более шумных условиях. Следует отметить, что *LPC* демонстрирует лучшие результаты при очень низком уровне шумов. В точке, близкой к 11–12 дБ, *MFCC* и *LPC* дают приблизительно одинаковые результаты.

Заключение. Получены практические результаты для параметрических векторов, основанных на мел-частотных кепстральных коэффициентах (*MFCC*) и коэффициентах линейного предсказания (*LPC*), и соответствующие оценки эффективности работы системы для различных параметров модели. В статье показано, что *MFCC* в сочетании с фильтрацией Калмана дает более точные результаты при распознавании речевого сигнала, однако при очень низком уровне шумов *LPC* предпочтительней.

Литература

1. Сорокин, В.Н. Распознавание личности по голосу: аналитический обзор / В.Н. Сорокин, В.В. Вьюгин, А.А. Тананыкин // Информационные процессы. – 2012. – Т. 12, № 1. – С. 1–30.
2. Джалолов, У.Х. Регуляризация задачи идентификации объекта в условиях зашумленности полезного сигнала / У.Х. Джалолов, Р.М. Бандишоева, У.А. Турсунбадалов // Вестник Таджикского технического университета. – 2016. – № 1 (33). – С. 20–26.
3. Спажакин, Ю.Г. Современные средства проектирования систем голосовой биометрии / Ю.Г. Спажакин // Методы и устройства передачи и обработки информации. – 2016. – № 10 – С. 69–79.
4. Козырев, М.О. Оконные функции и преобразование Фурье / М.О. Козырев, М.Ю. Орлов // Инновационные научные исследования: теория, методология, практика : сб. статей IX Международной научно-практической конференции. – Пенза, 2017 – С. 21–25.
5. Гришунов, С.С. Основные математические методы выделения речевых особенностей в системах распознавания диктора / С.С. Гришунов, Ю.С. Белов // Наука, техника и образование. – 2015. – № 3 (3). – С. 53–58.
6. NOIZEUS: A noisy speech corpus for evaluation of speech enhancement algorithms [Electronic resource] : UN Bibliogr. Inform. System. – Mode of access : <https://ecs.utdallas.edu/loizou/speech/noizeus/>. – Date of access : 24.06.2019.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 09.07.2019

Концепция рекомендательной системы «Подбор решений, отвечающих предназначению человека»

Н.Б. ОСИПЕНКО¹, А.Н. ОСИПЕНКО²

Статья описывает концепцию рекомендательной системы, ориентированной на принятие решений с учетом индивидуального предназначения человека. Особенности миссии человека оцениваются исходя из результатов психологического тестирования, антропометрических и паспортных данных. Предлагается схема автоматизации индивидуального подхода при подборе подходящих для человека вариантов решений, а также ряд схем, расшифровывающих отдельные ее блоки. Частичная апробация этой концепции осуществлена на примере принятия решений о профориентации человека с помощью соответствующего сайта.

Ключевые слова: концепция рекомендательной системы, автоматизация индивидуального подхода, предназначение человека, психологические тесты, темы человеческой деятельности, автоматизация профориентации.

In the article the concept of a recommendation system focused on decision-making taking into account the individual purpose of the person is described. Features of the human mission are evaluated based on the results of psychological testing, anthropometric and passport data. The scheme of automation of an individual approach at selection of the options of decisions suitable for the person, and also a number of schemes decoding its separate blocks are offered. Partial approbation of this concept is carried out on the example of decision-making on career guidance of the person by means of the corresponding site.

Keywords: concept of recommendation system, automation of individual approach, purpose of the person, psychological tests, themes of human activity, automation of career guidance.

Введение. Если в предыдущие десятилетия ведущими заказчиками и генераторами интернет-контента для пользователей были разнообразные фирмы-производители и их рекламодатели, зависящие от полученной при этом прибыли, то сейчас, в связи с огромным объемом предложений, заказчиком постепенно становится сам пользователь, ориентирующийся на свои глубинные интересы, а не просто реагирующий на примитивные желания, возбуждаемые у него навязчивым и агрессивным маркетингом. Время бездумного потребительства уходит, и люди начинают задумываться о необходимости принятия более осмысленных решений, отвечающих их индивидуальной миссии. Поэтому создание человеко-ориентированных рекомендательных систем, учитывающих предназначение человека за счет психологического тестирования, анализа антропометрических, паспортных и иных данных, становится наиболее актуальным в ближайшее время. При этом возникает ряд проблем: среди выбранных экспертов могут оказаться либо случайные дилетанты, либо просто специалисты, не соответствующие типу личности клиента, наконец, даже при индивидуальном консультировании советы даются не конкретной индивидуальности, а некому осредненному абстрактному человеку в воображении консультанта. Таким образом, огромное количество, ненадежное качество и безадресность экспертных рекомендаций во многом дискредитируют идею помощи человеку в принятии решений посредством Интернета. Чтобы справиться с этой проблемой необходимо создание хорошо методологически продуманной интеллектуальной среды, подготавливающей человеку подходящий лично ему набор альтернативных решений по той или иной жизненной проблеме. С этой целью в статье предлагается концепция клиент-серверного web-приложения для предоставления пользователю Интернета возможности прохождения серии тестов для навигации индивидуальных решений в рамках заданной тематики. Частичная реализация этой концепции была осуществлена на примере задачи профориентации [1], [2]. Методологические аспекты автоматизации поддержки принятия решений, а также общая идея выбора подходящих для пользователя вариантов решений в заданной проблематике описаны в [3]. В работе [4] на примере конкретной производственной проблемы была продемонстрирована роль человеческого фактора и актуальность того, соответствует или нет осуществляемая человеком трудовая деятельность его предназначению.

Автоматизация индивидуального подхода при подборе подходящих для человека вариантов решений. Общая схема этого подхода представлена на рисунке 1.

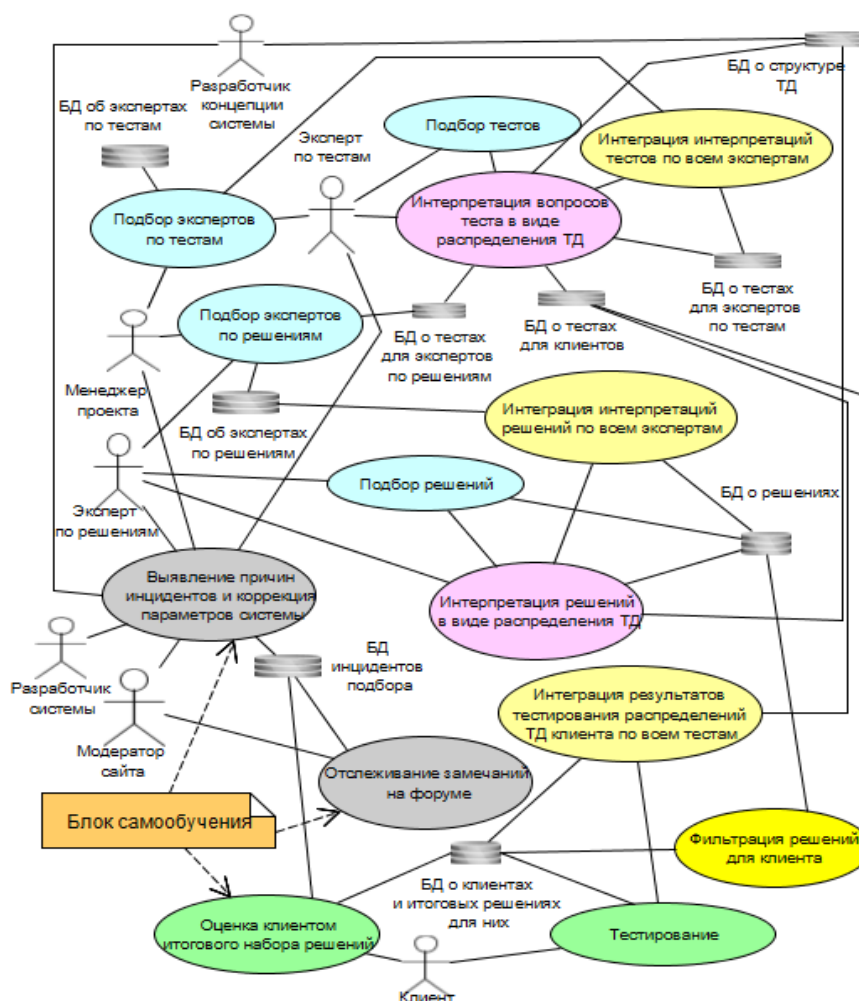


Рисунок 1 – Схема автоматизации индивидуального подхода при подборе решений

Ведущими управляющими агентами при разработке системы являются: разработчик концепции, разработчик системы и менеджер проекта. Клиент может пройти тесты и оценить итоговые результаты. Менеджер проекта занят подбором нужных экспертов по тестам и решениям. Эксперты по тестам занимаются подбором вопросов и их интерпретацией в виде распределения тем деятельности (ТД) [1]–[3]. Эксперты по решениям занимаются подбором решений и их интерпретацией в виде распределения ТД. Оба вида экспертов задействованы в выявлении причин инцидентов и коррекции параметров системы.

Схема блока тестирования пользователя, приведенного на рисунке 1, представлена на рисунке 2, а схема блока фильтрации результатов – на рисунке 3.

Разработчик системы обучает экспертов структуре тем деятельности, а эксперты в итоге интерпретируют вопросы тестов или решения посредством структуры ТД.

Схема блока самообучения приложения, приведенного на рисунке 1, представлена на рисунке 4. Этот блок будет разрабатываться на основе полученной статистики по рекомендациям заданной тематики (в частности, профориентации) и отзывам на них пользователей. В блоке самообучения приложения принимают участие все персонажи: разработчик концепции системы, разработчик системы, менеджер, эксперты по тестам и решениям. Клиент может оценить полученные решения, что показано на рисунке 4. Все негативные оценки и замечания на форуме собираются, выявляются причины инцидента, разрабатываются рекомендации по коррекции параметров системы, и разработчик вносит эти коррекции.

Применительно к решаемой в настоящей работе задаче общая схема автоматизации индивидуального подхода при подборе подходящих для человека вариантов решений в некоторой тематике конкретизирована на рисунке 5 в виде схемы программной реализации клиент-серверного web-приложения, обеспечивающего индивидуальный подход при подборе профессий и сфер деятельности. Программное решение доступно желающим в Интернете по ссылке <http://gsu-psychoanalysis.tk/web/>. В качестве вариантов решений в базе данных используются рекомендуемые сферы деятельности и профессии. В настоящее время в базе данных используется 326 профессий и 18 сфер деятельности: аграрно-экологическая, проектирование полезных форм, психолого-терапевтическая, духовно-религиозная, информационная сфера услуг, естественнонаучная, культуры и искусств, медико-оздоровительная, общественно-научная, педагогическая, игровая и бытовая сферы услуг, техническое творчество, экономическая, государственно-правовая, материальное производство, идеологическая, философская [1]–[3].

В алгоритме автоматизации выбора профессий, реализованного в качестве прототипа разрабатываемой рекомендательной системы и описываемого в настоящей работе, можно выделить несколько этапов. На первом этапе рассчитывается на основе известного в кругах психологов алгоритма квадрата Пифагора обобщенная психоматрица человека. На втором этапе выделяются значимые и незначимые для человека темы и сферы деятельности, а также профессии. Знание последних при выборе профессии помогает избежать тяжелых психологических последствий от занятий неинтересным делом. Затем клиенту предлагается пройти психологическое тестирование на серии тестов и получить более точные рекомендации по выбираемым решениям.

Закключение. Описанная выше концепция рекомендательной системы позволяет создавать разнообразные программные комплексы для поддержки принятия решений человеком с учетом его индивидуальной миссии. В целом этот принцип индивидуального подхода ориентирован на создание интеллектуальных сред человеко-машинного типа, в которых, в отличие от интенсивно распространяющихся сейчас систем искусственного интеллекта, решающее слово в принятии решения будет отведено человеку. При этом можно будет с помощью прямых и косвенных данных принимать в расчет не только индивидуальные предназначения людей, но и миссии всех социальных организмов (фирм, населенных пунктов, наций). Особая роль в этой ситуации будет отведена выработке механизмов согласования интересов всех участников оптимизируемого системного образования.

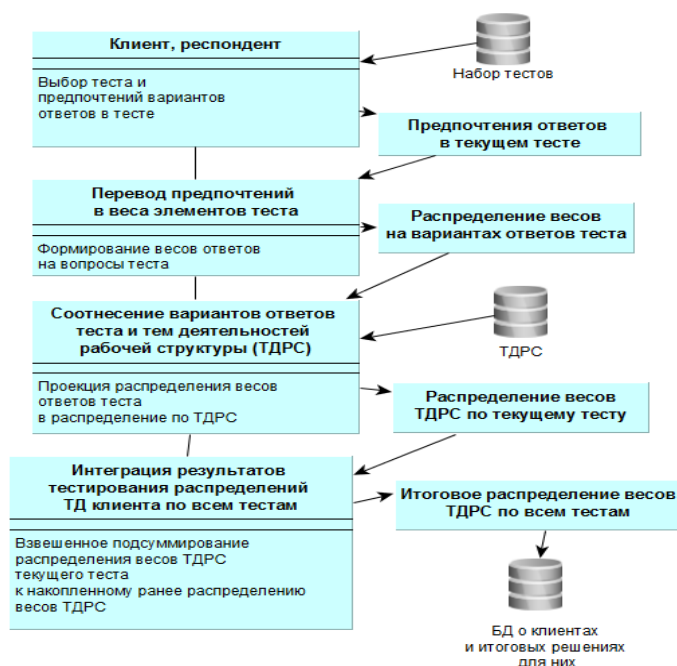


Рисунок 2 – Схема блока тестирования пользователя

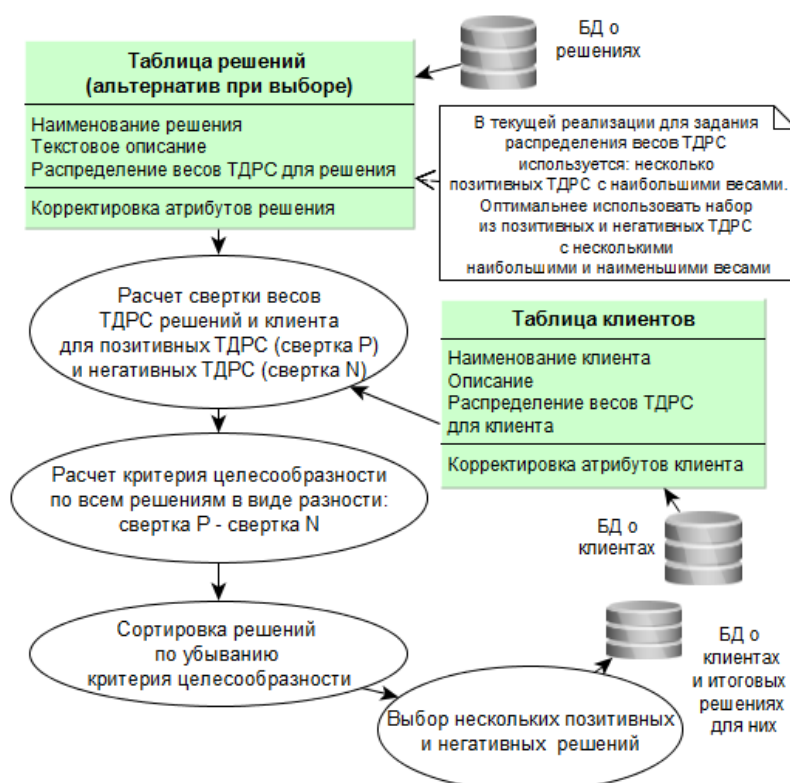


Рисунок 3 – Схема фильтрации результатов

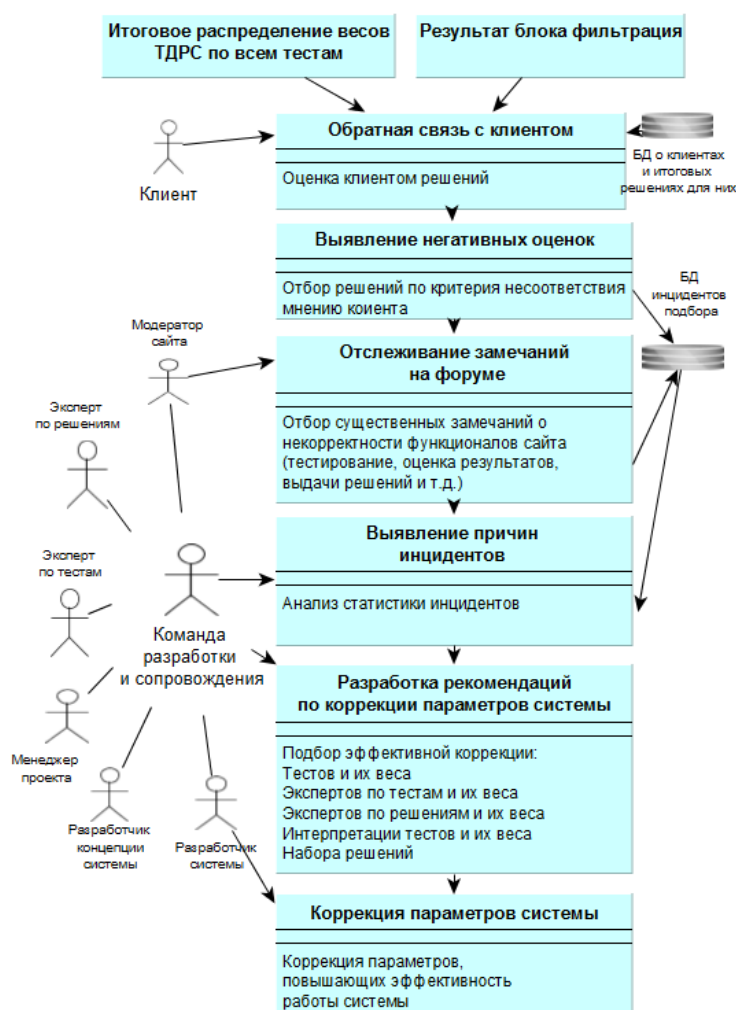


Рисунок 4 – Схема самообучения приложения

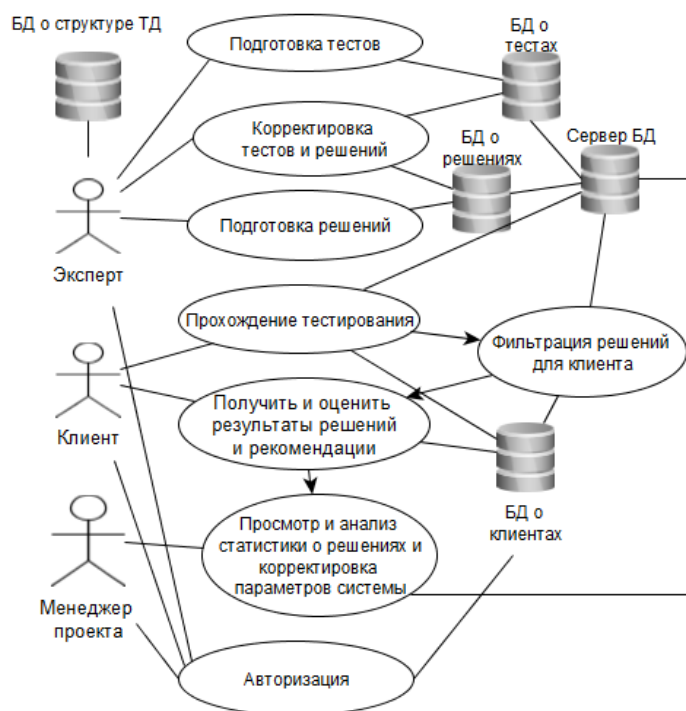


Рисунок 5 – Схема программной реализации клиент-серверного web-приложения, обеспечивающего индивидуальный подход при подборе профессий и сфер деятельности

Литература

1. Осипенко, А.Н. Web-приложение для выбора сферы деятельности / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко, Ю.А. Слепенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 87–94.
2. Осипенко, Н.Б. Метод синтеза результатов психологических тестирований в задаче принятия стратегических решений на примере профориентации / Н.Б. Осипенко, А.Н. Осипенко, Ю.А. Слепенко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2018. – № 3 (108). – С. 112–116.
3. Осипенко, Н.Б. Методологические аспекты автоматизации поддержки принятия стратегических решений / Н.Б. Осипенко, А.Н. Осипенко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2016. – № 6 (99). – С. 59–64.
4. Осипенко, Н.Б. Пример применения метода корреляционно-регрессионного анализа в производственной проблеме / Н.Б. Осипенко, А.Н. Осипенко, М.Н. Васенда, С.П. Жогаль, С.И. Жогаль // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 59–64.

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

Поступила в редакцию 19.08.2019

Математика

УДК 004.94:624.132.3

Компьютерное моделирование контактного взаимодействия индентора с грунтом при внедрении с вращением

М.Х. АБДУЛКАДЕР

При проектировании современных землеройных машин одной из актуальных задач является необходимость расчетов контактного взаимодействия деформируемых твердых тел с грунтом. Однако данный параметр зависит от большого количества факторов, которые не всегда поддаются учету. В работе с применением программы ABAQUS рассмотрено внедрение индентора с шаровидной формой с его одновременным вращением относительно нормали к поверхностям соприкасающихся тел. Выполнено сравнение напряжений, получающихся при расчетах для упругой модели деформирования грунта и с применением модели Друкера-Прагера.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, конечно-элементное моделирование, индентор, модель Друкера-Прагера, ABAQUS.

When designing modern earthmoving machines, one of the urgent tasks is the need to calculate the contact interaction of deformable solids with soil. However, this parameter depends on a large number of factors that are not always accountable. In the work using the ABAQUS program, the implementation of an indenter with a spherical shape with its simultaneous rotation relative to the normal to the surfaces of the contacting bodies is considered. The stresses obtained in the calculations for the elastic model of soil deformation and using the Drucker-Prager model are compared.

Keywords: contact interaction, finite element modeling, indenter, Drucker-Prager model, ABAQUS.

Запросы современной техники, связанные с созданием конструкций, обладающих прочностной надежностью при малой материалоемкости, приводят к необходимости разработки методов расчетов на прочность с учетом контактных деформаций. На базе уточнения физических и механических представлений о механизмах разрушения твердых тел в течение последних трех десятилетий был сформирован раздел механики деформируемого твердого тела, получивший название механики разрушения. Проектирование таких технических объектов, как землеройные машины, предполагает учет особенностей напряженно-деформированного состояния грунта в результате взаимодействия с рабочими органами машин. Поэтому в последнее время были предприняты попытки численно смоделировать процесс разрушения грунтов и дальнейшего деформирования разрушаемого слоя. Сложность компьютерного моделирования деформаций грунтов связана с их упругопластическими свойствами [1]. В данном случае она дополняется необходимостью решения динамической контактной задачи.

Основным способом решения таких задач является метод конечных элементов. С его использованием в статье [2] рассмотрено взаимодействие сферы с локальными неоднородностями различной формы, решение выполнено в осесимметричной постановке. В работах [3], [4], [5] было проведено исследование взаимодействия с почвой сельскохозяйственных орудий. В статье [6] представлено исследование разрушения твердых пород дисковым резцом. В диссертации [7], сравнивая результаты теоретических расчетов и экспериментов, автором было показано, что расширенная модель Друкера-Прагера адекватно описывает процесс деформации грунта при его взаимодействии с режущим инструментом. В работе [8] выполнено моделирование взаимодействия шин с грунтом. В работе [9] рассматривается динамическая модель внедрения жесткой гладкой сферы в однородное упругопластическое упрочняемое твердое тело. Во всех ранее рассмотренных работах анализировалось внедрение тел в грунт

для случая их поступательного перемещения. Целью представленной работы является сравнение напряженно-деформированного состояния грунта, получаемого на основе упругой и упругопластической моделей, для случая винтового движения индентора.

Модель Друкера-Прагера. Для решений на основе критерия прочности Друкера-Прагера [10] уравнение поверхности текучести (рисунок 1) имеет следующий вид:

$$\sqrt{J_2} + \beta I_1 - \sigma_y = 0, \quad (1)$$

где J_2 – второй инвариант девиаторной части тензора напряжений; β , σ_y – константы материала;

$$\beta = \frac{2 \sin(\varphi)}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}; \quad \sigma_y = \frac{6c \cos(\varphi)}{\sqrt{3}(3 - \sin(\varphi))}, \quad (2)$$

где I_1 – первый инвариант тензора напряжений; φ – угол внутреннего трения; c – напряжение когезии между частицами материала.

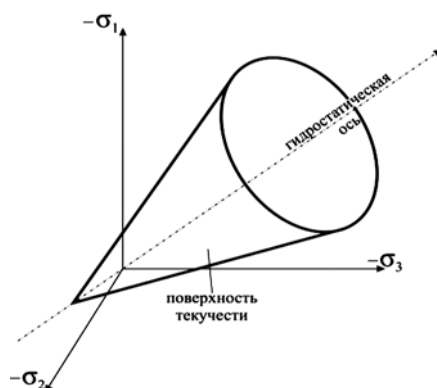


Рисунок 1 – Графическое изображение поверхности текучести в осях главных напряжений в соответствии с критерием Друкера-Прагера

Таким образом, форма поверхности текучести задается уравнением:

$$\sqrt{J_2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sin \varphi}{(3 \pm \sin \varphi)} I_1 - \frac{2\sqrt{3}c \cos \varphi}{(3 \pm \sin \varphi)} = 0. \quad (3)$$

Значения параметров c и φ определяются в ходе испытаний [11].

Из-за сложности аналитического решения задачи о деформировании грунтов при их контактом взаимодействии с иными телами решаются в основном с использованием численных методов. Модель Друкера-Прагера реализована в программных комплексах конечно-элементного анализа.

Конечно-элементная модель. Рассматривалось вдавливание сферического металлического индентора диаметром 20 мм в деформируемое основание (рисунок 2а). Материал индентора считался линейно упругим, изотропным с модулем упругости $E_i = 2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\nu_i = 0,3$. При моделировании основания использовалась модель Друкера-Прагера. Параметры материала приняты равными $c = 2,9$ МПа, $\varphi = 32^\circ$. Расчеты выполнялись для значений модуля упругости основания $E_f = 2 \cdot 10^8$ Па при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$.

Для расчета напряженно-деформированного состояния использован программный комплекс ABAQUS. При создании конечно-элементной модели применен восьмиузловой конечный элемент C3D8, который использует линейную интерполяцию в каждом направлении и представляет собой элемент первого порядка. На рисунке 2б представлены конечные элементы индентора и фрагмента основания, моделирующих контактную пару.

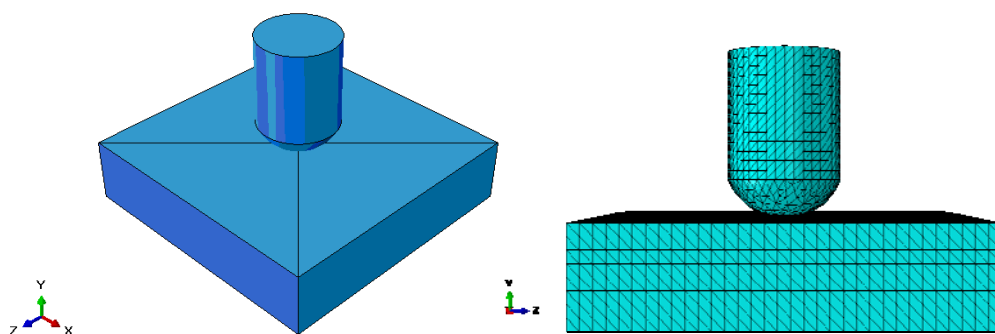


Рисунок 2 – Рассматриваемая система: а – геометрическая модель; б – сетка конечных элементов

При создании контактной пары использован контакт типа «поверхность–поверхность», которая представлена на рисунке 3. Общее число элементов модели – около 88000, и общее число узлов около 136000.

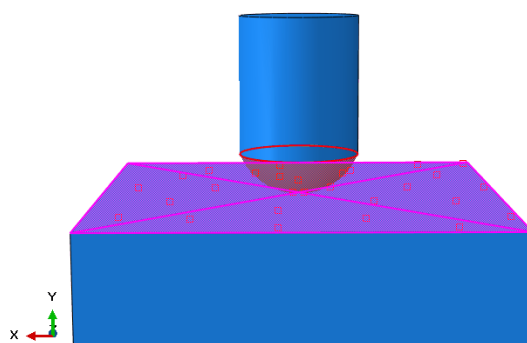


Рисунок 3 – Модель контактной пары в среде программы ABAQUS

Выполнены расчеты напряженно-деформируемого состояния для случая действия распределенного давления 5000 Па, приложенного к верхней грани геометрической модели индентора. Помимо этого индентору придавалось вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, соответствующей 60 об/мин. Такие граничные условия соответствуют винтовому движению индентора.

На рисунке 4 показаны схемы распределения эквивалентных напряжений в грунте. Они показывают, что максимальные эквивалентные напряжения в случае модели Друкера-Прагера составляют 58 МПа, а при упругой модели – 65 МПа.

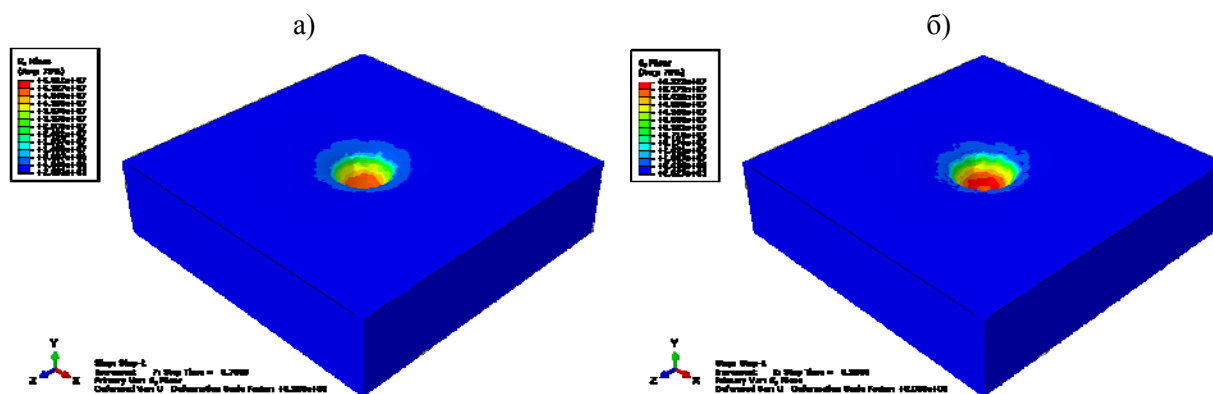


Рисунок 4 – Эквивалентные напряжения: а) модель Друкера-Прагера; б) упругая модель

На рисунке 5 показаны схемы распределения первых главных напряжений, из которых следует, что минимальные их значения одинаковы для обоих случаев. В то же самое время максимальные первые главные напряжения для модели Друкера-Прагера составляют 6,9 МПа, а для упругой модели – около 8 МПа.

Также результаты вычислений показали, что углубление индентора в результате совместного действия распределенного давления и сообщения индентору вращения для моделей Друкера-Прагера и упругой составило соответственно 1,05 и 0,68 мм. Такой результат обусловлен меньшей жесткостью материала по модели Друкера-Прагера и его пластическим течением.

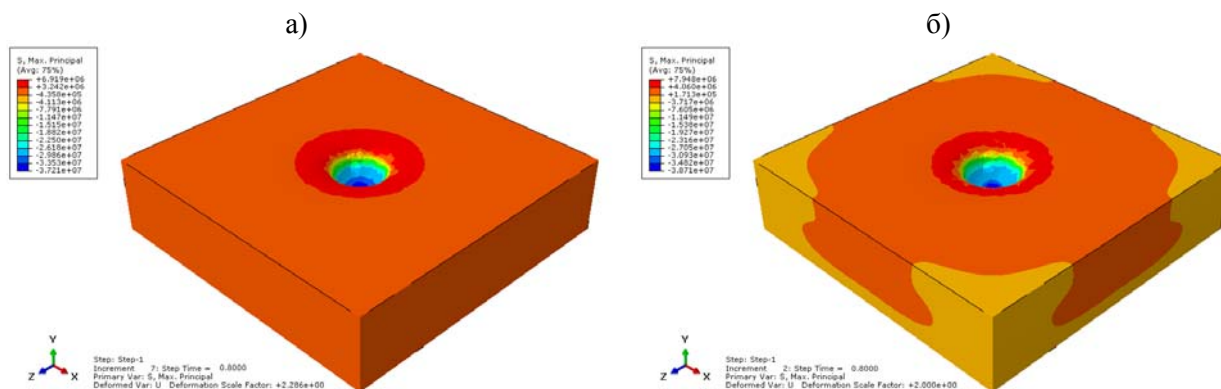


Рисунок 5 – Первые главные напряжения σ_1 : а) модель Друкера-Прагера; б) упругая модель

Таким образом, результаты исследования показывают, что учет упругопластических деформаций, которые возникают в грунте, приводит к уменьшению значений напряжений по сравнению с упругой моделью. При этом максимальные напряжения снижаются на 60–80 % и более. Полученные результаты следует принимать во внимание при разработке моделей взаимодействия рабочего инструмента строительной техники с разрушаемым и перемещаемым грунтом.

Литература

1. Березин, И.М. Определение условий пластического течения некомпактных материалов / И.М. Березин, А.Г. Залазинский // *Фундаментальные исследования*. – 2013. – № 8. – С. 19–231.
2. Георгиевский П.Ю. Нестационарное взаимодействие сферы с атмосферными температурными неоднородностями при сверхзвуковом обтекании / П.Ю. Георгиевский, В.А. Левин // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 1993. – № 4. – С. 174–183.
3. Armin, A. Mechanics of soil-blade interaction: thesis for the degree of doctoral of philosophy / A. Armin. – Saskatoon, 2014. – 173 p.
4. Ibrahmi, A. Soil-blade orientation effect on tillage forces determined by 3D finite element models / A. Ibrahmi, H. Bentaher, A. Maalej // *Spanish journal of agricultural research*. – 2014. – Vol. 12, № 4. – P. 941–951.
5. Mootaz, A.E. Simulation of soil-blade interaction for sandy soil using advanced 3D finite element analysis / A.E. Mootaz, R. Hamilton, J.T. Boyle // *Soil and tillage research*. – 2004. – Vol. 75, № 1. – P. 61–73.
6. Numerical analysis of dynamic response mechanism of rock by TBM disc cutter [Electronic Resource] / S. Wang, S. Yan, Z. Xu, Y. Yang // *The Electronic journal of geotechnical engineering*. – 2014. – Vol. 19. – Access mode : <http://www.ejge.com/2014/Ppr2014.901ma.pdf>. – Date of access : 15.08.2016.
7. Brown, O.F. Finite element analysis of blade-formation interactions in excavation: thesis for the degree of Master of Science in mining engineering / O.F. Brown. – Rolla, 2014. – 104 p.
8. Hybrid soft soil tire model (HSSTM). Part I: tire material and structure modelling: technical report / Sh. Taheri, C. Sandu, S. Taheri, D. Gorsich. – Blacksburg : Virginia Polytechnic Institute and State University, 2015. – 41 p.
9. Максименко, А.А. Динамическая модель упругопластического контактного взаимодействия гладких тел / А.А. Максименко, Н.В. Котенева // *Известия Томского политехнического университета*. – 2007. – Т. 310, № 2. – С. 64–66.
10. Drucker, D.C. Soil mechanics and plastic analysis or limit design / D.C. Drucker, W. Prager // *Quarterly of applied mathematics*. – 1952. – Vol. 10, № 2. – P. 157–165.
11. Болдырев, Г.Г. Определение параметров моделей грунтов / Г.Г. Болдырев, И.Х. Идрисов, Д.Н. Валеев // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. – 2006. – № 3. – С. 20–25.

Конечные группы, факторизуемые тремя попарно перестановочными подгруппами

С.В. БАЛЫЧЕВ, А.Ф. ВАСИЛЬЕВ, В.М. СЕЛЬКИН

Исследуются свойства конечных групп, представимых в произведение своих трех попарно перестановочных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, подгруппа, произведение попарно перестановочных подгрупп, w -сверхразрешимая группа, сильно сверхразрешимая группа.

The properties of finite groups representable in the product of their three pairwise permutable subgroups are studied.

Keywords: finite group, subgroup, product of pairwise permutable subgroups, w -supersoluble group, strongly supersoluble group.

1. Введение. Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Изучение групп, представимых в произведение своих двух или нескольких подгрупп, является классическим направлением в теории групп. Наиболее изученным является случай, когда группа факторизуется своими двумя подгруппами. Намного меньше работ посвящено исследованию ситуаций, когда группа факторизуется тем или иным способом своими тремя подгруппами. Отметим некоторые результаты в этом направлении. Согласно О. Кегелю [1] группа G называется трижды факторизуемой, если $G = AB = BC = AC$, где A, B, C – некоторые подгруппы группы G . В [1] была доказана нильпотентность группы G при условии нильпотентности подгрупп A, B и C и сверхразрешимость G при условии, что A и B нильпотентны, а C сверхразрешима. Л.С. Казарин [2] с использованием классификации конечных простых неабелевых групп установил разрешимость G , если A, B и C разрешимы. В работе [3] было начато исследование свойств групп $G = AB = BC = AC$, у которых подгруппы A, B и C принадлежат насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Эти исследования были продолжены в работах [4]–[7]. С трижды факторизуемыми группами тесно связаны группы со следующим способом перемножения подгрупп. Пусть группа G факторизуется своими тремя подгруппами A, B и C следующим образом: $G = ABC = \{abc \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$, причем $AB = BA, BC = CB$ и $CA = AC$. Обозначим через $M = AB, N = BC$ и $L = AC$. Тогда $G = MN = NL = LM$. Отсюда видно, что многие результаты, полученные для трижды факторизуемых групп, можно распространить на группы вида $G = ABC$. Этот факт отмечен в более общем виде в работе [8]. Например, из приведенной выше теоремы Л.С. Казарина следует, что если AB, BC и CA – разрешимые подгруппы группы $G = ABC$, то G также разрешима. Обратный перенос теорем о свойствах групп вида $G = ABC$ на группы с факторизацией $G = MN = NL = LM$ является не столь очевидным. Поэтому изучение факторизаций $G = ABC$, где A, B и C – попарно перестановочные подгруппы группы G , представляет независимый интерес, что также подчеркивается недавними работами [9]–[10].

Основной целью настоящей работы является доказательство следующих результатов.

Теорема А. Пусть группа $G = ABC$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A, B, C . Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если подгруппы AB, AC, BC w -сверхразрешимы и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G также w -сверхразрешима.

(2) Если подгруппы AB, AC, BC сверхразрешимы и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w -сверхразрешима.

(3) Если подгруппы AB, AC, BC сверхразрешимы и коммутант группы G нильпотентен, то G также сверхразрешима.

(4) Если подгруппы AB , AC , BC сильно сверхразрешимы и G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то G сильно сверхразрешима.

Используя теорему А можно получить новые результаты о свойствах групп $G = ABC$ в терминах свойств строения и вложения факторов A , B и C .

Теорема В. Пусть группа $G = ABC$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A , B , C . Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если подгруппы A , B , и C w -сверхразрешимы и P -субнормальны в соответствующих произведениях AB , AC , BC и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w -сверхразрешима.

(2) Если подгруппы A , B , и C сверхразрешимы и P -субнормальны в соответствующих произведениях AB , AC , BC и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w -сверхразрешима.

(3) Если подгруппы A , B , и C сверхразрешимы и P -субнормальны в соответствующих произведениях AB , AC , BC и коммутант группы G нильпотентен, то G w -сверхразрешима.

(4) Если подгруппы A , B , и C сильно сверхразрешимы и субмодулярны в соответствующих произведениях AB , AC , BC , причем G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то G является $sm\mathfrak{A}$ -группой.

2. Определения, обозначения и необходимые результаты.

В работе нами используются стандартные обозначения, определения и необходимые результаты, которые при необходимости можно найти в монографиях [11]–[13].

Нам потребуются определения следующих классов конечных групп, тесно связанных с классом всех сверхразрешимых групп.

В работе [14] были введены следующие два определения.

Определение 2.1. Подгруппа H группы G называется P -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G,$$

такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ – простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Определение 2.2. Группа G называется w -сверхразрешимой, если любая силовская подгруппа группы из G является P -субнормальной в G .

Обозначается через $w\mathfrak{A}$ класс всех w -сверхразрешимых групп.

Теорема 2.3 ([14, теорема 2.3]). Любая w -сверхразрешимая группа разрешима.

Теорема 2.4 ([14, теорема 2.6). Класс $w\mathfrak{A}$ является наследственной насыщенной формацией.

Для группы G обозначим через $\text{Syl}(G)$ множество всех ее силовских подгрупп.

Теорема 2.5 ([14, теорема 2.10]). Формация $w\mathfrak{A}$ является локальной и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \text{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ для любого простого p .

Нам потребуются еще свойства w -сверхразрешимых групп из [14], которые мы соберем в следующем предложении.

Предложение 2.6. Пусть G – w -сверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Любая метанильпотентная подгруппа группы G является сверхразрешимой.

(2) Группа G является дисперсивной по Оре.

(3) Обобщенный коммутант группы G нильпотентен.

Согласно [14] обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

В работе [15] исследовались свойства групп, представимых в произведение своих P -субнормальных подгрупп. Нам потребуется следующий результаты.

Теорема 2.6 ([15, теорема 2.10]). Пусть группа $G = AB$ – произведение разрешимых подгрупп A и B . Если A и B P -субнормальны в G , то G разрешима.

Теорема 2.7 ([15, теорема 4.10]). Пусть группа $G = AB$ – произведение w -сверхразрешимых подгрупп A и B . Если A и B P -субнормальны в G и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w -сверхразрешима.

Отметим, что в настоящее время формация всех w -сверхразрешимых групп активно применяется при решении различных проблем теории групп, в частности, при изучении факторизаций групп, см., например, работы [15]–[17].

Нам потребуется определение и свойства еще одного класса групп, тесно связанного с классом всех сверхразрешимых групп.

Определение 2.8 [18]. Подгруппа H группы G называется субмодулярной в G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$ такая, что H_{i-1} – модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \dots, s$.

В [19] изучался класс всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами (обозначается через $sm\mathfrak{U}$), а также его подкласс $s\mathfrak{U}$ сильно сверхразрешимых групп, т. е. всех сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами.

Пусть $\mathfrak{B}$ – класс всех абелевых групп экспоненты, свободной от квадратов простых чисел.

Теорема 2.9 [19, теорема A]. Класс $s\mathfrak{U}$ всех сильно сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B}$ для любого простого числа p .

Теорема 2.10 [19, теорема B]. Группа G сильно сверхразрешима тогда и только тогда, когда G метанильпотентна и любая силовская подгруппа из G субмодулярна в G .

Теорема 2.11 [19, теорема C]. Класс $sm\mathfrak{U}$ всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid Syl(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B})$ для любого простого числа p .

В работе [20] исследовались группы, представимые в произведение своих субмодулярных подгрупп из классов $sm\mathfrak{U}$ и $s\mathfrak{U}$. Нам потребуются следующие результаты из [20], которые мы сформулируем в следующем предложении.

Предложение 2.12. Пусть группа $G = AB$ – произведение субмодулярных подгрупп A и B . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если $A \in sm\mathfrak{U}$, $B \in sm\mathfrak{U}$, причем G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то $G \in sm\mathfrak{U}$.

(2) Если $A \in s\mathfrak{U}$, $B \in s\mathfrak{U}$, причем G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то $G \in sm\mathfrak{U}$.

(3) Если $A \in s\mathfrak{U}$, $B \in s\mathfrak{U}$ и коммутант G нильпотентен, то $G \in s\mathfrak{U}$.

3. Доказательства теорем A и B.

Докажем теорему A. Установим справедливость утверждения (1). Предположим противное. Пусть $G = ABC$, где AB , AC , BC – собственные попарно перестановочные w -сверхразрешимые подгруппы G , является контрпримером минимального порядка к (1). Так как по теореме 2.3 подгруппы AB , AC , BC разрешимы, то по отмеченной выше теореме Л.С. Казарина группа G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G . Ввиду леммы 2.1, теоремы 2.4 все условия утверждения (1) выполняются для факторгруппы G/N . Так как $|G/N| < |G|$, то в силу выбора группы G получаем, что $G/N \in w\mathfrak{U}$. Так как класс $w\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией, то в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$. В этом случае N является p -группой для некоторого простого числа p и $N = C_G(N) = F(G)$. Кроме того, $G = NM$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G и $N \cap M = 1$. Отметим также, что $N = G^{w\mathfrak{U}}$, а значит, $M \in w\mathfrak{U}$.

Обозначим следующие подгруппы группы G :

$$R_1 = NAB, R_2 = NAC, R_3 = NBC.$$

Докажем, что по крайней мере две из обозначенных подгрупп, неравны G . Допустим противное. Пусть, например, $R_1 = R_2 = G$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$, то AB и AC являются максимальными подгруппами в G , дополняющие N . Ввиду того, что ядра $\text{Core}_G(AB) = \text{Core}_G(AC) = 1$, то по известной теореме Оре AB и AC – сопряженные максимальные подгруппы в G . Но это противоречит тому, что $(AB)(AC) = ABC = G$. Проводя аналогичные рассуждения для других пар подгрупп R_i , где $i = 1, 2, 3$, получаем, что по крайней мере две из них отличны от группы G . Будем считать, что $R_1 \neq G$ и $R_2 \neq G$.

Покажем, что R_i являются w -сверхразрешимыми подгруппами для $i = 1, 2$. Согласно тождеству Дедекинда

$$R_1 = NAB \cap G = NAB \cap ABC = AB(R_1 \cap C).$$

Так как $w\mathcal{U}$ – наследственная формация, то $R_1 \cap C \in w\mathcal{U}$. Ввиду $|R_1| < |G|$ по индукции следует, что $R_1 \in w\mathcal{U}$. Аналогично доказывается, что $R_2 \in w\mathcal{U}$. Тогда по (2) предложения 2.6 следует R_1 и R_2 дисперсивны по Оре. Откуда и из $G = R_1 R_2$ нетрудно заметить, что G также дисперсивна по Оре. Из отмеченных выше свойств минимальной нормальной подгруппы N в G следует, что N является силовой p -подгруппой G , где p – наибольший простой делитель порядка группы G .

Так как $N = C_G(N)$, то $O_{p'}(R_i) = 1$ и $F_p(R_i)$, для $i = 1, 2$. Согласно теореме 2.5 формация $w\mathcal{U}$ имеет локальный экран f такой, что

$$f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \text{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$$

для любого простого p . Тогда по лемме 4.5 из [12] $R_i / F_p(R_i) = R_i \cap M \in f(p)$.

Заметим, что $M = (R_1 \cap M)(R_2 \cap M)$. По условию $G/N \cong M$ является А-группой, т. е. в ней все ее силовские подгруппы абелевы.

Пусть $q \in \pi(M)$. Тогда по лемме 11.6 из [12] найдутся такие силовские q -подгруппы M_q , $(R_1 \cap M)_q$ и $(R_2 \cap M)_q$ в M , R_1 и R_2 соответственно, что $M_q = (R_1 \cap M)_q(R_2 \cap M)_q$. Так как M_q – абелева группа и $R_i \cap M \in \mathfrak{A}(p-1)$, то нетрудно видеть, что $M_q \in \mathfrak{A}(p-1)$. Следовательно, любая силовская подгруппа из M принадлежит $f(p)$. Откуда и из $G/N \in w\mathcal{U}$ следует, что $G \in w\mathcal{U}$. Получили противоречие. Утверждение (1) доказано.

Так как любая сверхразрешимая группа является w -сверхразрешимой, то утверждение (2) непосредственно следует из (1).

Установим справедливость (3). Пусть для группы $G = ABC$ выполняются все условия утверждения (3). Так как $G \in \mathfrak{NA} \subseteq \mathfrak{NA}$, то для G выполняются все условия (2). Следовательно, G является w -сверхразрешимой. Так как G метанильпотентна, то ввиду (1) предложения 2.6 она является сверхразрешимой. Утверждение (3) доказано.

Установим справедливость утверждения (4). Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения (1) с учетом теорем 2.8–2.10. Теорема доказана.

Доказательство теоремы В. Установим справедливость утверждения (1). Пусть группа $G = ABC$ удовлетворяет условиям утверждения (1). Тогда подгруппы A и B w -сверхразрешимы и P -субнормальны в AB . Из нильпотентности обобщенного коммутанта G следует нильпотентность обобщенного коммутанта AB . Тогда по теореме 2.7 подгруппа AB также w -сверхразрешима. Аналогично доказывается w -сверхразрешимость подгрупп AC и BC . Теперь утверждение следует из (1) теоремы А. Утверждение (2) непосредственно следует из (1). Утверждение (3) следует из (2) с учетом утверждения (1).

Утверждения (3) и (4) доказываются аналогично (1) с учетом (1) предложения 2.6.

Утверждение (4) доказывается аналогично (1) с применением (1) из предложения 2.12.

4. Заключительные замечания.

Группа G называется произведением своих n попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$, если $G = A_1 A_2 \dots A_n$ и $A_i A_j = A_j A_i$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Если $n \geq 3$, то, обозначая через $B = A_3 \dots A_n$, мы получим факторизацию $G = A_1 A_2 B$. Индукцией по n с помощью теоремы А получаем следующий результат.

Теорема С. Пусть группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если подгруппа $A_i A_j$ w -сверхразрешима для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G также w -сверхразрешима.

(2) Если подгруппа $A_i A_j$ сверхразрешима для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G также w -сверхразрешима.

(3) Если подгруппа $A_i A_j$ сверхразрешима для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и коммутант группы G нильпотентен, то G также сверхразрешима.

(4) Если подгруппа $A_i A_j$ сильно сверхразрешима для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то G сильно сверхразрешима.

Отметим некоторые направления дальнейших исследований групп, факторизуемых своими тремя подгруппами.

Проблема 1. Верны ли аналоги результатов теорем А и В для факторизаций вида $G = MN = NL = LM$? Например, верно ли, что группа $G = MN = NL = LM$ является w -сверхразрешимой, если M, N, L — w -сверхразрешимые подгруппы и обобщенный коммутант группы G нильпотентен?

Сформулируем еще две открытые проблемы. Необходимые определения и результаты, связанные с ними, можно найти в монографии [21].

Проблема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Описать все $\mathfrak{F}$, которые содержат каждую группу $G = MN = NL = LM$, где M, N и L — $\mathfrak{F}$ -субнормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы группы G .

Проблема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Описать строение групп $G = ABC$, у которых A, B и C — $\mathfrak{F}$ -субнормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы в G .

Литература

1. Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach faktorisierte endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1965. – 87. – S. 42–48.
2. Казарин, Л.С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами / Л.С. Казарин // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 34, № 7–8. – С. 947–950.
3. Васильев, А.Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.
4. Васильев, А.Ф. О перечислении локальных формаций с условием Кегеля / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 7. – С. 86–93.
5. Ballester-Bolinchés, A. Finite trifactorized groups and formations / A. Ballester-Bolinchés, A. Martínez-Pastor, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 2000. – Vol. 226, № 2. – P. 990–1000.
6. Ballester-Bolinchés, A. On formations with the Kegel property / A. Ballester-Bolinchés, L.M. Ezquerro // J. Group Theory. – 2005. – № 8. – P. 605–611.
7. Васильев, А.Ф. Арифметические графы и классы групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сиб. мат. журн. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 55–73.
8. Амберг, Б. Конечные группы с кратными факторизациями / Б. Амберг, Л.С. Казарин, Б. Хефлинг // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 1251–1263.
9. Busetto, G. The fitting length of finite soluble groups I. – Hall subgroups / G. Busetto, E. Jabara // Arch. Math. (Basel). – 2016. – Vol. 106, № 5 – P. 409–416.
10. Jabara, E. Some results on finite trifactorized groups [Electronic resource] / E. Jabara // São Paulo J. Math. Sci. – 2018. – Access mode : <https://doi.org/10.1007/s40863-018-0091-2>. – Date of access : 15.06.2019.
11. Ballester-Bolinchés, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinchés, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin/New York : Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.
12. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
13. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
14. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

15. Васильев, А.Ф. О произведениях P -субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.
16. Ballester-Bolinches, A. Some results on Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, A.A. Heliel, M.M. Al-Shomrani // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2017. – V. 40, is. 3. – P. 1341–1351.
17. Ballester-Bolinches, A. On Products of Generalised Supersoluble Finite Groups [Electronic resource] / A. Ballester-Bolinches, W.M. Fakieh, M.C. Pedraza-Aguilera // Mediterr. J. Math. – Access mode : <https://doi.org/10.1007/s00009-019-1323-0>. – Date of access : 24.03.2019.
18. Zimmermann, I. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.
19. Васильев, В.А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.
20. Васильев, В.А. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп / В.А. Васильев // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. – 2016. – № 2 (91). – С. 17–21.
21. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 2003. – 254 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 04.10.2019

О пересечении не $\mathfrak{F}$ -подгрупп в группах с операторами

Р.В. БОРОДИЧ, М.В. СЕЛЬКИН, Р.А. КУЧЕРОВ

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал и не принадлежащих формации F , индексы которых делятся на простые числа из π . Установлены свойства соответствующей подгруппы.

Ключевые слова: конечная группа, абнормальная подгруппа, $\mathfrak{F}$ -корадикал.

In this work, we study the structure of a subgroup equal to the intersection of the kernels of all abnormal maximal A -acceptable subgroups that do not contain $\mathfrak{F}$ -coradical and do not belong to the formation F , whose indices are divided by primes from π . The properties of the corresponding subgroup are established.

Keywords: finite group, abnormal subgroup, $\mathfrak{F}$ -coradical.

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Исследование пересечений максимальных подгрупп является одной из классических задач теории групп. Начало этого направления связано с работой Г. Фраттини [1]. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографии [2] и [3]).

В настоящей работе элементы теории пересечений максимальных подгрупп рассматриваются в группах с операторами, что позволяет по-новому взглянуть на обобщенные подгруппы Фраттини. В связи с этим возникает естественная задача, связанная с исследованием влияния свойств этих подгрупп на строение самой группы.

Подгруппа H группы G называется:

– пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$;

– абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Класс групп называют нормально наследственным (S_n -замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G .

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

- 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;
- 2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

- 1) $f(G)$ – формация;
- 2) $f(G) \subseteq f(G^\phi) \cap f(\text{Ker } \phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G ;
- 3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p -группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G .

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной ($\mathfrak{F}$ -абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M .

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \mapsto \text{Aut}(G)$, где $\text{Aut}(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Заметим, что максимальная A -допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A -допустимых подгрупп A -допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A -допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Обозначим через:

- $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп;
- $\Delta_\pi(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп, индексы которых не делятся на простые числа из π ;
- $\overline{D}_\Delta^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$;
- $D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , индексы которых делятся на простые числа из π ;
- $\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, индекс каждой из которых делится на простые числа из π .

В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G .

Пусть P – множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$; $p' = P \setminus \{p\}$. Подгруппа H группы G называется S_π -подгруппой, если $|G:H|$ не делится на числа из π .

Через $O_\pi(G)$ обозначают наибольшую нормальную π -подгруппу группы G .

Теорема 1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – локальная S_π -замкнутая формация, содержащая все нильпотентные группы, $\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$ и $\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ – π -разрешимая подгруппа. Тогда в $\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ найдется π' -подгруппа V , нормальная в G , такая, что $\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка. Подгруппа $\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ не принадлежит $\mathfrak{F}$, так как в противном случае в качестве подгруппы V можно взять единичную подгруппу.

Так как $\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$, то, используя результат работы [4], заключаем, что $G \neq \overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Но $\overline{D}_\Delta^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq \overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Следовательно, $\overline{D}_\Delta^{\mathfrak{F}}(G, A) \subset \overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Поэтому в группе G найдется максимальная абнормальная A -допустимая подгруппа M , не принадлежащая $\mathfrak{F}$ и не содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал, такая, что $G = M \overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Если

$|\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)| - \pi$ -число, то $|G:M| = |\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)| \cdot |\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap M| - \pi$ -число. Получили противоречие с тем, что $G = M \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) = M$. Значит, порядок подгруппы $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ делится на простые числа из π' .

Пусть Σ – множество всех максимальных абнормальных A -допустимых в группе G подгрупп, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал, индекс каждой из которых в G есть π -число.

Предположим, что в $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ существует нормальная в G π' -подгруппа $V \neq 1$. Пусть в G/V найдется хотя бы одна подгруппа M/V , такая, что $M \in \Sigma$ и $M/V \in \mathfrak{F}$. Тогда $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – замкнутая относительно инвариантных подгрупп формация. Опять получили противоречие с предположением. Если в G/V существует максимальная абнормальная A -допустимая подгруппа H/V , не содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал, индекс которой в G/V есть π -число, не принадлежащая $\mathfrak{F}$ и не принадлежащая Σ , то $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $H/V \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Значит, $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/V, A) = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V$. Так как $G/V \neq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/V, A) = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V$, то для G/V по предположению теоремы верна. И тогда в $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V$ будет существовать нормальная в G/V π' -подгруппа V^*/V такая, что $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V/V^*/V \in \mathfrak{F}$. Следовательно, V^* - π' -подгруппа и $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V^* \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению.

Пусть $\Delta(G, A) \neq 1$. Если $M/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, где $M \in \Sigma$, то $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая формация. А поэтому согласно работы [4] подгруппа $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ принадлежит $\mathfrak{F}$, что противоречит предположению. Следовательно, в фактор-группе $G/\Delta(G, A)$ каждая абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа $M/\Delta(G, A)$, где $M \in \Sigma$, не принадлежит формации $\mathfrak{F}$, т. е., $G/\Delta(G, A) \neq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/\Delta(G, A)) = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Delta(G, A)$. Так как $|G/\Delta(G, A)| < |G|$, то в $G/\Delta(G, A)$ существует нормальная π' -подгруппа $V^*/\Delta(G, A)$, такая, что $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Delta(G, A)/V^*/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Если положить, что $\mathfrak{F}$ – формация всех π' -групп, то на основании работы [4] имеем, что $V^* = V_1^* \times V_2^*$, где V_1^* – π -подгруппа, а V_2^* – π' -подгруппа, то есть, получили, что в G существует нормальная π' -подгруппа, что противоречит предположению.

Итак, в дальнейшем предполагаем, что $\Delta(G, A) = 1$.

Пусть N_1 – минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Так как в группе G не существует инвариантных π' -подгрупп, $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) - \pi$ -разрешимая подгруппа и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то N_1 – собственная π -подгруппа $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Так как $\Delta(G, A) = 1$, то в группе G существует абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа M , такая, что $G = MN_1$. Если M – абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал, то $M \in \mathfrak{F}$, так как $|G:M| = |N_1| - \pi$ -число. Отсюда следует, что $G/N_1 \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G/\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то есть, всякая абнормальная максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, является подгруппой, содержащей $\mathfrak{F}$ -корадикал, что противоречит выбору подгруппы $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$.

Следовательно, M – абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа группы G , содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал. Итак, каждая абнормальная максимальная A -допустимая в груп-

ле G подгруппа, не содержащая нормальную подгруппу N_1 , содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал. Следовательно, N_1 является $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной нормальной подгруппой группы G , то есть, $G/C_G(N_1) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, где p делит порядок N_1 . Так как $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая формация, то

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)C_G(N_1)/C_G(N_1) &\cong \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/C_G(N_1) \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \\ &= \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/C_{\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)}(N_1) \in f(p) \cap \mathfrak{F}, \end{aligned}$$

где p делит $|N_1|$.

Пусть L/H – произвольный главный фактор подгруппы $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, такой, что $L \subseteq N_1$. Так как $C_{\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)}(N_1) \subseteq C_{\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)}(L/N)$, то $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/C_{\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)}(L/N) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, где p делит $|L/N|$. Значит, подгруппа N_1 является $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной в подгруппе $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Предположим, что $M_G \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} M_G(M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A))/M_G &\cong M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap M_G = \\ &= M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Но $M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cong \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1$, так как

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1 &= G \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1 = MN_1 \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1 = \\ &= (M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A))N_1/N_1 \cong M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap N_1 = M \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A). \end{aligned}$$

Так как N_1 – $\mathfrak{F}$ -гиперцентральная в $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ подгруппа и $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1 \in \mathfrak{F}$, то $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению.

Следовательно, $M_G \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq 1$. Так как $N_1 \cap M_G \cap \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) = 1$, то в $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ существует минимальная нормальная в G π -подгруппа $N_2 \neq N_1$.

Покажем, что для G/N_1 и G/N_2 условия теоремы выполняются. Пусть найдутся одновременно хотя бы по одной подгруппе $M_k/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $M_l/N_2 \in \mathfrak{F}$, где $M_k \in \Sigma$, $M_l \in \Sigma$. Тогда $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_2 \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая формация. Следовательно, $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению.

Пусть теперь в G/N_1 найдется хотя бы одна абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа $M_i/N_1 \in \mathfrak{F}$, $M_i \in \Sigma$, а в G/N_2 все M_j/N_2 не принадлежат $\mathfrak{F}$, где $M_j \in \Sigma$. Тогда $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G/N_2, A) = \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_2$ и для G/N_2 теорема верна, то есть, в $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_2$ существует нормальная в G/N_2 π' -подгруппа V^*/N_2 , такая, что $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_2/V^*/N_2 \cong \overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V^* \in \mathfrak{F}$. Но и $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1 \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1 \cap V^* \in \mathfrak{F}$. Если бы $N_1 \subseteq V^*$, то $N_2/N_2 \neq N_1N_2/N_2 \subseteq V^*/N_2$ и N_1N_2/N_2 – π' -подгруппа. Но это противоречит тому, что N_1 – π -подгруппа. Следовательно, $N_1 \cap V^* = 1$. Поэтому $\overline{D}_{\Delta_{\#}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Опять получили противоречие с предположением. Точно такие рассуждения можно провести, если предположить, что в G/N_2 найдется хотя бы одна абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа $M/N_2 \in \mathfrak{F}$, где $M \in \Sigma$, а в G/N_1 всякая абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа H/N_1 не принадлежит $\mathfrak{F}$, где $H \in \Sigma$.

Значит, в G/N_1 и G/N_2 не найдется ни одной абнормальной максимальной A -допустимой подгруппы, не содержащей $\mathfrak{F}$ -корадикал, принадлежащей формации $\mathfrak{F}$ и имеющей своим индексом в соответствующей фактор-группе π -число, то есть, $G/N_1 \neq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/N_1, A) = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1$ и $G/N_2 \neq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/N_2, A) = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_2$. Используя предположение, получаем, что в $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1$ и $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_2$ существуют нормальные соответственно в G/N_1 и G/N_2 π' -подгруппы V_1/N_1 и V_2/N_2 такие, что $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_1/V_1/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N_2/V_2/N_2 \in \mathfrak{F}$. Отсюда имеем, что $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $V_1 \cap V_2 = V \neq 1$. Подгруппа N_1 не содержится в подгруппе V_2 , так как N_1 – π -подгруппа, а V_2/N_2 – π' -подгруппа. Аналогично N_2 не содержится в V_1 , так как N_2 – π -подгруппа, а V_1/N_1 – π' -подгруппа. Следовательно, $V_1 \cap V_2$ – π' -подгруппа. А по предположению в $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ не существует нормальных в G π' -подгрупп. Значит, $V_1 \cap V_2 = 1$ и $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с предположением. Теорема полностью доказана.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – формация нильпотентных групп, то из теоремы 1 получаем следующее.

Следствие 1.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, и в группе G существует нильпотентная абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа, индекс которой в G есть π -число. Если $\overline{\Delta}_{\pi}(G, A)$ – π -разрешимая подгруппа, тогда в группе G существует нормальная π' -подгруппа V , такая, что $\overline{\Delta}_{\pi}(G, A)/V \in \mathfrak{N}$.

Следствие 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, содержащая все нильпотентные группы, $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$ и $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – π -разрешимая подгруппа. Тогда в $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$ найдется π' -подгруппа V , нормальная в G , такая, что $\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)/V \in \mathfrak{F}$.

Следствие 1.3. Пусть в группе G существует нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа, индекс которой в G есть π -число. Если $\overline{\Delta}_{\pi}(G)$ – π -разрешимая подгруппа, тогда в группе G существует нормальная π' -подгруппа V , такая, что $\overline{\Delta}_{\pi}(G)/V \in \mathfrak{N}$.

Теорема 2. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная π -подгруппа группы G и $N \subseteq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то либо $N \in \mathfrak{F}$, либо $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется.

Если $N = 1$, то $N \in \mathfrak{F}$. Значит, можно предположить, что в N существует минимальная нормальная в G подгруппа K , отличная от единицы. Так как $N/K \subseteq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/K \subseteq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/K, A)$, то для фактор-группы G/K теорема выполняется. Следовательно, в G/K либо $G^{\mathfrak{F}}K/K \subseteq N/K$, либо $N/K \in \mathfrak{F}$. Если $G^{\mathfrak{F}}K/K \subseteq N/K$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$, что противоречит предположению теоремы. Отсюда заключаем, что $N/K \in \mathfrak{F}$.

Предположим, что $K \subseteq \Delta(G, A)$. Тогда из [4] подгруппа N принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Значит, K не содержится в $\Delta(G, A)$.

Если предположить, что всякая абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K , содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал, то из [4] получаем, что $N \in \mathfrak{F}$. Снова получили противоречие. Следовательно, в группе G существует такая абнор-

максимальная A -допустимая подгруппа H , не содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал, что $G = HK$. Если $H \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq N$, что противоречит предположению. Поэтому подгруппа H не принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Так как K – π -подгруппа, то H – абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал и не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$, индекс которой в G есть π -число. Но по условию $N \subseteq \overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Значит, $G = H$. Полученное противоречие полностью доказывает теорему.

Если группа операторов A является единичной, то из теоремы 2 можно получить результаты М.В. Селькина [3], В.В. Шлыка [5], Л.И. Шидова [6], В.А. Ведерникова и Е.Т. Огаркова [7].

Теорема 3. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация. Если N – нормальная A -допустимая π -подгруппа группы G и $N / N \cap D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, тогда $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка, для которого теорема не выполняется.

Если $N \cap D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) = 1$, то теорема верна. Пусть K – минимальная нормальная в G подгруппа, отличная от 1, содержащаяся в $N \cap D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Так как $N / K / N / K \cap D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G / K, A) = N / K / N / K \cap D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / K = N / K / N \cap D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / K \cong N / N \cap D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то для фактор-группы G / K теорема справедлива, то есть, $N / K \in \mathfrak{F}$. Если $K \subseteq \Delta(G, A)$, то на основании работы [4] подгруппа N принадлежит $\mathfrak{F}$, что противоречит предположению. Значит, K не содержится в $\Delta(G, A)$.

Если предположить, что всякая абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K , содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал, то, используя результат работы [4], получаем, что $N \in \mathfrak{F}$. Снова получили противоречие. Следовательно, в группе G существует такая абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа H , не содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал, что $G = HK$. Если $H \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq N$, что противоречит предположению. Поэтому подгруппа H не принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Так как K является π -подгруппой группы G , то H – абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не содержащая $\mathfrak{F}$ -корадикал и не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$, индекс которой в G есть π -число. Откуда следует, что $K \subseteq N$. Полученное противоречие полностью доказывает теорему.

Следствие 3.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная π -подгруппа группы G и $N / N \cap D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Если A – единичная группа операторов, то из теоремы 3 следуют соответствующие результаты работ [3], [5], [8].

Заключение. Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A -допустимой относительно некоторой группы операторов A , а так же не всякая максимальная A -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [9].

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
4. Бородич, Е.Н. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. – 2012. – Сер. 1. – С. 54–62.
5. Шлык, В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.
6. Шидов, Л.И. О максимальных подгруппах конечных групп / Л.И. Шидов // Сиб. матем. журн. – 1971. – Т. 12, № 3. – С. 682–683.
7. Ведерников, В.А. Об обобщённой подгруппе Фраттини конечной группы / В.А. Ведерников, Т.Т. Огарков // IV Всесоюз. симпозиум по теории групп. – Новосибирск, 1973. – С. 22–23.
8. Ведерников, В.А. Конечные группы с обобщённой подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюз. алгебраич. коллоквиум. – Гомель, 1968. – С. 44.
9. Бородич, Р.В. Об $\mathfrak{F}$ -достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 07.10.2019

О периодических решениях многомерных систем второго порядка с параметром

Ю.М. ГРЕБЕНЦОВ¹, В.Н. ЛАПТИНСКИЙ²

Изучены актуальные вопросы конструктивной теории периодических решений одного класса линейных многомерных дифференциальных систем второго порядка с параметром. Получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности периодического решения, приведён алгоритм его построения, а также установлены новые структурные свойства решения. Выведены оценки области локализации решения и его производной.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, периодическое решение, алгоритм.

Actual issues of the constructive theory of periodic solutions of one kind of linear multidimensional second order differential system with the parameter are studied in the article. Sufficient coefficient conditions of existence and uniqueness of periodic solution have been obtained, the algorithm for its construction has been developed as well as new structural properties of its solution have been determined. The estimators for the area of localization of the solution and its first derivative have been derived.

Keywords: linear differential system, periodic solution, algorithm.

Рассмотрим задачу о периодических решениях (с периодом ω) системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda A(t)x + \lambda B \frac{dx}{dt} + f(t), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$, $f(t)$ – непрерывные ω -периодические матрицы соответствующих размерностей, B – постоянная матрица, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В научной литературе в настоящее время не существует универсальных методов исследования периодических решений. Поэтому вполне естественной является разработка соответствующих методов применительно к отдельным классам систем. К настоящему времени, благодаря усилиям многих исследователей, разработано значительное количество достаточно общих методов анализа широкого круга систем (см. монографии [1]–[8] и приведённую в них библиографию). Эффективно проверяемые условия существования и удобные для практического применения алгоритмы построения периодических решений дают конструктивные методы [2], [4]–[8]. Под конструктивными методами понимают определенные методы построения решений различных классов уравнений, исследования существования и свойств точных и приближенных решений. Основной характеристикой конструктивных методов является возможность с их помощью доводить решение задачи до конечного результата (вплоть до численных значений), а также практически проверять те теоретические предпосылки и условия, которые обеспечивают правомочность применения этих методов к конкретным классам задач [8, с. 3].

Данная работа посвящена конструктивному анализу на основе применения методов [6], [7] линейной многомерной периодической системы (1); она выполнена по материалам, изложенным в [9]. Получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи, выведена оценка области локализации решения и разработан алгоритм его построения, включая оценку погрешностей приближенных решений. На основе используемой формы решения и его приближений выполнен анализ его структурных свойств. Результаты работы представляют собой дополнение и развитие [6], [7] в смысле структурных свойств периодических решений дифференциальных систем. Их полное изложение, включая иллюстрационные модели, дано в [9].

Известно (см., например, [10, с. 216]), что вместо задачи о периодических решениях можно рассматривать соответствующую эквивалентную краевую задачу. Для системы

$$\begin{aligned} \frac{dx(t, \lambda)}{dt} &= y(t, \lambda), \\ \frac{dy(t, \lambda)}{dt} &= \lambda A(t)x(t, \lambda) + \lambda B y(t, \lambda) + f(t) \end{aligned} \quad (2)$$

периодические краевые условия имеют вид

$$x(0, \lambda) = x(\omega, \lambda), \quad y(0, \lambda) = y(\omega, \lambda). \quad (3)$$

Следуя подходу [7], решение периода ω системы (1) (то есть задачи (2), (3)) отыскиваем в виде

$$x(t, \lambda) = c(\lambda) + z(t, \lambda), \quad (4)$$

где $c(\lambda)$ – постоянный вектор, $z(t, \lambda)$ – ω -периодическая векторная функция, подчинённая интегральному условию

$$\int_0^\omega A(\tau)z(\tau, \lambda)d\tau = 0. \quad (5)$$

Тогда задача (2), (3) примет вид

$$\frac{dz(t, \lambda)}{dt} = y(t, \lambda), \quad (6)$$

$$\frac{dy(t, \lambda)}{dt} = \lambda A(t)z(t, \lambda) + \lambda B y(t, \lambda) + p(t, \lambda), \quad (7)$$

$$y(0, \lambda) = y(\omega, \lambda), \quad (8)$$

$$z(0, \lambda) = z(\omega, \lambda), \quad (9)$$

где $p(t, \lambda) = f(t) + \lambda A(t)c(\lambda)$.

Условие (5) в этом случае соответствует методу Фурье и его модификации [6, гл. 4] при $A(t) \neq \text{const}$. Соотношение (4) определяет новые структурные свойства периодических решений линейных систем второго порядка. Тем самым, рассматриваемый подход позволяет использовать функциональные свойства матрицы $A(t)$. Задача (6)–(9), очевидно, эквивалентна задаче (2), (3) в представлении (4).

Используя уравнение (6) и функциональное условие (5), выведем векторное интегральное уравнение для функции $z(t, \lambda)$ на основе регуляризатора

$$\int_0^\omega A(\tau)z(\tau, \lambda)d\tau = \int_0^\omega A(\sigma)d\sigma z(t, \lambda) - \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma \right) dz(\tau, \lambda) + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma \right) dz(\tau, \lambda).$$

Обозначим

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^\omega A(\sigma)d\sigma.$$

Тогда на основании условия (5) получим

$$\tilde{A}(\omega)z(t, \lambda) = \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma \right) dz(\tau, \lambda) - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma \right) dz(\tau, \lambda). \quad (10)$$

Пусть

$$\det \tilde{A}(\omega) \neq 0. \quad (11)$$

Используя условие (11), из (10) в силу (6) получим

$$z(t, \lambda) = \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma \right) y(\tau, \lambda)d\tau - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma \right) y(\tau, \lambda)d\tau$$

или в следующем виде:

$$z(t, \lambda) = \int_0^\omega K(t, \tau)y(\tau, \lambda)d\tau, \quad (12)$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\tau A(\sigma)d\sigma, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}(\omega) \int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma, & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Перейдем к функции $y(t, \lambda)$. Для этого воспользуемся граничным условием (9), которое на основании (6) примет вид

$$\int_0^{\omega} y(\tau, \lambda) d\tau = 0. \quad (13)$$

Левую часть в соотношении (13) по аналогии с (5) запишем в виде

$$\int_0^{\omega} y(\tau, \lambda) d\tau = y(t, \lambda)\omega - \int_0^t \tau dy(\tau, \lambda) + \int_t^{\omega} (\omega - \tau) dy(\tau, \lambda).$$

Тогда (13) примет вид

$$y(t, \lambda) = \int_0^t \frac{\tau}{\omega} dy(\tau, \lambda) - \int_t^{\omega} \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) dy(\tau, \lambda). \quad (14)$$

Соотношение (14) в силу (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} y(t, \lambda) = & \int_0^t \frac{\tau}{\omega} [\lambda A(\tau)z(\tau, \lambda) + \lambda By(\tau, \lambda) + p(\tau, \lambda)] d\tau - \\ & - \int_t^{\omega} \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) [\lambda A(\tau)z(\tau, \lambda) + \lambda By(\tau, \lambda) + p(\tau, \lambda)] d\tau \end{aligned}$$

или

$$y(t, \lambda) = \int_0^{\omega} \varphi(t, \tau) [\lambda A(\tau)z(\tau, \lambda) + \lambda By(\tau, \lambda) + p(\tau, \lambda)] d\tau, \quad (15)$$

где

$$\varphi(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\omega}, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ \frac{\tau}{\omega} - 1, & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Далее, воспользовавшись уравнением (7) и соотношениями (5), (8), (13), получим

$$\lambda \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau c(\lambda) + \int_0^{\omega} f(\tau) d\tau = 0.$$

Отсюда на основании условия (11) получим при $\lambda \neq 0$

$$c(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Таким образом, при выполнении условия (11) всякое решение краевой задачи (2), (3) в представлении (4) является решением интегральной задачи (12), (15), (16).

Докажем обратное: всякое непрерывное решение задачи (12), (15), (16) является решением краевой задачи (2), (3). Дифференцируя тождества (12), (15), получим соответственно (6) и (7).

Установим, что решение полученной интегральной задачи удовлетворяет граничным условиям (8) и (9). Используя соотношение $dy(\tau, \lambda) = (\lambda A(\tau)z(\tau, \lambda) + \lambda By(\tau, \lambda) + p(\tau, \lambda)) d\tau$ в тождестве (15) и выполняя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} y(t, \lambda) = & \int_0^t \frac{\tau}{\omega} dy(\tau, \lambda) - \int_t^{\omega} \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) dy(\tau, \lambda) = \frac{\tau}{\omega} y(\tau, \lambda) \Big|_0^t - \\ & - \frac{1}{\omega} \int_0^t y(\tau, \lambda) d\tau - \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) y(\tau, \lambda) \Big|_t^{\omega} - \frac{1}{\omega} \int_t^{\omega} y(\tau, \lambda) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда на основании полученного соотношения (6) имеем (9).

Воспользуемся соотношением $dz(\tau, \lambda) = y(\tau, \lambda) d\tau$ в тождестве (12) и выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}
z(t, \lambda) &= \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dz(\tau, \lambda) - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dz(\tau, \lambda) = \\
&= \tilde{A}^{-1}(\omega) \tilde{A}(\omega) z(t, \lambda) - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega A(\tau) z(\tau, \lambda) d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем интегральное условие (5).

Далее, интегрируя полученное соотношение (7), имеем при $t = \omega$

$$y(\omega, \lambda) - y(0, \lambda) = \lambda \int_0^\omega A(\tau) z(\tau, \lambda) d\tau + \lambda B \int_0^\omega y(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^\omega p(\tau, \lambda) d\tau. \quad (17)$$

Используя (16), имеем

$$\int_0^\omega p(\tau, \lambda) d\tau = 0,$$

на основании изложенного выражение (17) примет вид (8).

Таким образом, полученная интегральная задача эквивалентна краевой задаче (2), (3) в представлении (4).

Решение системы уравнений (12), (15) будем искать в виде

$$z(t, \lambda) = z_0(t) + \lambda z_1(t) + \dots + \lambda^k z_k(t) + \dots, \quad (18)$$

$$y(t, \lambda) = y_0(t) + \lambda y_1(t) + \dots + \lambda^k y_k(t) + \dots. \quad (19)$$

Подставляя (18), (19) в (12), имеем

$$\begin{aligned}
&z_0(t) + \lambda z_1(t) + \dots + \lambda^k z_k(t) + \dots = \\
&= \int_0^\omega K(t, \tau) [y_0(\tau) + \lambda y_1(\tau) + \dots + \lambda^k y_k(\tau) + \dots] d\tau,
\end{aligned}$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$z_k(t) = \int_0^\omega K(t, \tau) y_k(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Аналогично из уравнения (15) получим, используя (16), (19),

$$y_0(t) = \int_0^\omega \varphi(t, \tau) g(\tau) d\tau, \quad (21)$$

$$y_k(t) = \int_0^\omega \varphi(t, \tau) A(\tau) z_{k-1}(\tau) d\tau + B \int_0^\omega \varphi(t, \tau) y_{k-1}(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где $g(\tau) = f(\tau) - A(\tau) \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega f(\tau) d\tau$.

Изучим вопрос сходимости рядов (18), (19). Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|A(t)\|, \quad \beta = \|B\|, \quad \sigma = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|g(t)\|, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \|u\|_C = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|u(t)\|,$$

где $u(t) \in \mathbb{C}([0, \omega], R^n)$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матрицы, например, любая из норм, приведённых в [10, с. 21].

Выполнив оценки по норме в (20), получим последовательно

$$\begin{aligned}
\|z_k(t)\| &= \left\| \int_0^\omega K(t, \tau) y_k(\tau) d\tau \right\| \leq \\
&\leq \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \left\{ \left\| \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) y_k(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) y_k(\tau) d\tau \right\| \right\} \leq \\
&\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left\| \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) y_k(\tau) \right\| d\tau + \int_t^\omega \left\| \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) y_k(\tau) \right\| d\tau \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left\| \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right\| \|y_k(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left\| \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right\| \|y_k(\tau)\| d\tau \right\} \leq \\
&\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \|y_k(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \|y_k(\tau)\| d\tau \right\} \leq \\
&\leq \gamma \left(\int_0^t \alpha \tau \|y_k(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \alpha (\omega - \tau) \|y_k(\tau)\| d\tau \right) \leq \\
&\leq \gamma \left(\alpha \int_0^t \tau d\tau \|y_k\|_C + \alpha \int_t^\omega (\omega - \tau) d\tau \|y_k\|_C \right) = \\
&= \gamma \alpha \frac{1}{2} [t^2 + (\omega - t)^2] \|y_k\|_C \leq \gamma \alpha \frac{\omega^2}{2} \|y_k\|_C.
\end{aligned}$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|z_k\|_C \leq \gamma \alpha \frac{\omega^2}{2} \|y_k\|_C, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

На основании (23) имеем

$$\|z_0\|_C + \varepsilon \|z_1\|_C + \dots + \varepsilon^k \|z_k\|_C + \dots \leq \gamma \alpha \frac{\omega^2}{2} (\|y_0\|_C + \varepsilon \|y_1\|_C + \dots + \varepsilon^k \|y_k\|_C + \dots).$$

Далее имеем из (21)

$$\begin{aligned}
\|y_0(t)\| &\leq \left\| \int_0^t \frac{\tau}{\omega} g(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_t^\omega \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) g(\tau) d\tau \right\| \leq \\
&\leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \|g(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left| \frac{\tau}{\omega} - 1 \right| \|g(\tau)\| d\tau \leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} d\tau \sigma + \int_t^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega} \right) d\tau \sigma \leq \frac{\sigma \omega}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|y_0\|_C \leq \frac{\omega \sigma}{2}. \quad (24)$$

Аналогично для $\|y_k(t)\|$ имеем, используя (22)

$$\begin{aligned}
\|y_k(t)\| &\leq \left\| \int_0^t \frac{\tau}{\omega} A(\tau) z_{k-1}(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_t^\omega \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) A(\tau) z_{k-1}(\tau) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| B \int_0^t \frac{\tau}{\omega} y_{k-1}(\tau) d\tau \right\| + \left\| B \int_t^\omega \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) y_{k-1}(\tau) d\tau \right\| \leq \\
&\leq \int_0^t \left\| \frac{\tau}{\omega} A(\tau) z_{k-1}(\tau) \right\| d\tau + \int_t^\omega \left\| \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) A(\tau) z_{k-1}(\tau) \right\| d\tau + \\
&+ \int_0^t \left\| \frac{\tau}{\omega} B y_{k-1}(\tau) \right\| d\tau + \int_t^\omega \left\| \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) B y_{k-1}(\tau) \right\| d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \|A(\tau)\| \|z_{k-1}(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left| \frac{\tau}{\omega} - 1 \right| \|A(\tau)\| \|z_{k-1}(\tau)\| d\tau + \\
&+ \|B\| \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \|y_{k-1}(\tau)\| d\tau + \|B\| \int_t^\omega \left| \frac{\tau}{\omega} - 1 \right| \|y_{k-1}(\tau)\| d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \alpha \|z_{k-1}(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega} \right) \alpha \|z_{k-1}(\tau)\| d\tau + \\
&+ \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \beta \|y_{k-1}(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega} \right) \beta \|y_{k-1}(\tau)\| d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} [\alpha \|z_{k-1}(\tau)\| + \beta \|y_{k-1}(\tau)\|] d\tau + \int_t^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) [\alpha \|z_{k-1}(\tau)\| + \beta \|y_{k-1}(\tau)\|] d\tau \leq \\ &\leq \frac{\omega}{2} [\alpha \|z_{k-1}(\tau)\|_C + \beta \|y_{k-1}(\tau)\|_C]. \end{aligned}$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|y_k\|_C \leq \frac{\omega}{2} (\alpha \|z_{k-1}\|_C + \beta \|y_{k-1}\|_C), \quad k=1,2,\dots \quad (25)$$

На основании (23) из (25) имеем следующую оценку:

$$\|y_k\|_C \leq q \|y_{k-1}\|_C, \quad k=1,2,\dots, \quad (26)$$

где

$$q = \frac{\omega}{2} \left(\gamma \alpha^2 \frac{\omega^2}{2} + \beta \right).$$

Из неявной оценки (26) имеем явную оценку

$$\|y_k\|_C \leq q^k \|y_0\|_C, \quad k=1,2,\dots \quad (27)$$

Используя оценку (27), получим из (23)

$$\|z_k\|_C \leq \gamma \alpha \frac{\omega^2}{2} q^k \|y_0\|_C, \quad k=0,1,2,\dots \quad (28)$$

Очевидно, при выполнении условия

$$0 < \varepsilon q < 1 \quad (29)$$

справедлива оценка ряда (19)

$$\|y_0\|_C + \varepsilon \|y_1\|_C + \dots + \varepsilon^k \|y_k\|_C + \dots \leq \frac{\|y_0\|_C}{1 - \varepsilon q}. \quad (30)$$

Аналогично на основании (28) получим мажорантный ряд для функционального ряда (18):

$$\|z_0\|_C + \varepsilon \|z_1\|_C + \dots + \varepsilon^k \|z_k\|_C \leq \gamma \alpha \omega^2 \frac{\|y_0\|_C}{2(1 - \varepsilon q)}. \quad (31)$$

Используя (24), из (30), (31) получим конструктивные оценки.

Таким образом, при выполнении условия (29) ряды (18), (19) сходятся равномерно по $t \in [0, \omega]$. Так как эти ряды сходятся равномерно, то на основании [11, с. 160], их суммы представляют собой решение системы интегральных уравнений (12), (15).

На основании изложенного справедлива

Теорема. Пусть выполнено условие (11). Тогда при $0 < |\lambda| < 1/q$ ω -периодическое решение системы (1) существует и единственно. Это решение представимо в виде (4), при этом справедливы оценки

$$\|z(t, \lambda)\| \leq \gamma \alpha \omega^2 \frac{\|y_0\|_C}{2(1 - \varepsilon q)}; \quad \|dz(t, \lambda)/dt\| \leq \frac{\|y_0\|_C}{1 - \varepsilon q}.$$

Эта теорема даёт не только коэффициентные условия существования и единственности периодического решения уравнения (1), но и удобный для применений алгоритм его построения. Благодаря соотношению (4), имеем важные структурные свойства решения, а также оценки областей локализации решения и его производной. Заметим, что только метод [7] даёт новые структурные свойства типа (4) ω -периодического решения.

Таким образом, при выполнении условия (11) система (1) имеет единственное ω -периодическое решение для достаточно малых значений $\varepsilon \neq 0$.

Замечание. Рассмотрение систем с переменной матрицей $B(t)$ периода ω не приводит к принципиальным трудностям в анализе задачи, а лишь связано с существенным увеличением объёма выкладок и усложнением соответствующего алгоритма [9].

Литература

1. Еругин, Н.П. Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н.П. Еругин. – Минск : Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.
2. Гребеников, Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. – М. : Наука, 1979. – 431 с.
3. Проскуряков, А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / А.П. Проскуряков. – М. : Наука, 1977. – 256 с.
4. Самойленко, А.М. Численно-аналитические методы исследования периодических решений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев : Вища шк., 1976. – 180 с.
5. Бойчук, А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А. Бойчук. – Киев : Наукова думка, 1990. – 96 с.
6. Лаптинский, В.Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. Лаптинский, В.Н. Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптинский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 5. – С. 25–30.
8. Самойленко, А.М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев : Наукова думка, 1992. – 279 с.
9. Лаптинский, В.Н. Конструктивный анализ и структурные свойства периодических решений линейных многомерных систем второго порядка с параметром / В.Н. Лаптинский, Ю.М. Гребенцов. – Могилев : Могилевский гос. ун-т продовольствия, 2017. – 54 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларуси ; № 41).
10. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
11. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М. : ИЛ, 1954. – 500 с.

¹Могилевский государственный
университет продовольствия

²Институт технологии металлов
НАН Беларуси

Поступила в редакцию 07.10.2019

Анализ ожидаемого дохода в открытой марковской сети обслуживания с ограниченным числом заявок и случайным временем их ожидания в очередях

Д.Я. Копать, М.А. МАТАЛЫЦКИЙ

Объектом исследования в данной статье является открытая марковская сеть массового обслуживания (СеМО) с доходами, ограниченным числом заявок и случайным их временем ожидания в очередях. Параметры обслуживания сети постоянны, маршрут заявок определяется произвольной стохастической матрицей вероятностей переходов. Заявки выбираются на обслуживание в соответствии с дисциплиной FIFO. Состояние сети описывается цепью Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний. С помощью асимптотического анализа при большом числе заявок найден полный ожидаемый доход в такой сети. Для этого выведено и решено дифференциальное уравнение в частных производных для плотности распределения ожидаемого дохода исследуемой сети. Получена и решена система обыкновенных дифференциальных уравнений для ожидаемого дохода сети, рассчитан модельный пример.

Ключевые слова: ожидаемый доход, диффузионная аппроксимация, ограниченное число заявок, плотность распределения ожидаемого дохода.

The object of research in this paper is an open Markov queueing network (QN) with revenues, with a bounded number of customer, random waiting time in the queue. The network service parameters are constant, the route of customers is determined by an arbitrary stochastic transition probability matrix. Customers are selected for service in accordance to the FIFO discipline. The network state is described by a Markov chain with continuous time and a finite number of states. With the help of asymptotic analysis the expected revenues in such a network have been found. A partial differential equation for the distribution density of the expected customers of the studied network is derived and solved. Systems of ordinary differential equations for the expected network customers have been obtained and solved. A model example has been calculated.

Keywords: expected revenues, diffusion approximation, limited number customers, distribution density for the expected revenue.

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО, общее число заявок в которой ограничено величиной K , состоящую из n СМО $S_0, S_1, \dots, S_n$. Система S_i содержит m_i идентичных линий обслуживания, $i = \overline{1, n}$. Состояние сети описывается вектором

$$\vec{k}(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t)), \quad (1)$$

где $k_i(t)$ – число заявок в системе S_i в момент времени t , $i = \overline{1, n}$. В систему S_j поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ_{0i} , $i = \overline{1, n}$. Если поступившая в S_j заявка находит хотя бы одну линию обслуживания свободной от других заявок, то она немедленно начинает обслуживаться и время обслуживания является показательной случайной величиной (СВ) с параметром $\mu_i(m_i, k_i(t))$, $i = \overline{1, n}$. В противном случае заявка становится в очередь и ожидает начала обслуживания, причём длительность обслуживания ограничена СВ, имеющей показательную функцию распределения с параметром $\theta_i(m_i, k_i(t))$, $i = \overline{1, n}$. Заявка, время ожидания которой в очереди S_i истекло, переходит в систему S_j с вероятностью q_{ij} , $q_{ii} = 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, n}$. После окончания обслуживания в системе S_i заявка немедленно поступает в систему S_j с вероятностью p_{ij} , $i, j = \overline{0, n}$, $p_{00} = 0$, $\sum_{j=0}^n p_{ij} = 1$, $i = \overline{0, n}$. Обозначим через $V(\vec{k}, t)$ – полный ожидаемый доход, который получит сеть за время t , если в начальный момент времени она находится в состоянии $(\vec{k}, t_0)$. Очевидно, что $V(\vec{k}, t) = \sum_{i=0}^n V_i(\vec{k}, t)$, где $V_i(\vec{k}, t)$ – ожидаемый доход, который получает система S_i за время t , если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $\vec{k}$.

2. Разностно-дифференциальное уравнение для ожидаемого дохода сети.

Рассмотрим все возможные переходы СеМО из состояния $(\vec{k}, t)$ за короткий промежуток времени Δt :

– в случае 1) доход сети составит $R\Delta t + V(\vec{k}, t)$, где R – доход сети в единицу времени, что соответствует сохранению размещения заявок по системам сети;

– в случае 2) доход сети составит $r_{0i} + V(\vec{k} - I_i, t)$;

– в случае 3):

если заявка покидает сеть, получив обслуживание в i -той СМО, то доход сети составит $-R_{i0} + V(\vec{k} + I_i, t)$;

если заявка покидает сеть по истечении времени ожидания в i -той СМО, то доход сети составит $-H_{i0} + V(\vec{k} + I_i, t)$;

– в случае 4):

если заявка перейдёт в j -тую СМО, получив обслуживание в i -той СМО, то доход сети составит $R_{ij} + V(\vec{k} + I_i - I_j, t)$;

если заявка перейдёт в j -тую СМО по истечении времени ожидания в i -той СМО, то доход сети составит $r_{ij} + V(\vec{k} + I_i - I_j, t)$;

– в случаях 5)–6) изменение дохода сети не произойдёт.

Используя формулу полной вероятности, получим следующую систему разностных уравнений для доходов:

$$\begin{aligned} V(\vec{k}, t + \Delta t) = & \left\{ 1 - \left[\lambda_{0i}(t) + \sum_{j=1}^n \left(\mu_j(m_j, k_j(t)) + \theta_j(k_j(t)) \right) u(k_j(t)) \right] \Delta t + o(\Delta t) \right\} \times \\ & \times \left[R\Delta t + V(\vec{k}, t) \right] + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\mu_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) p_{i0}(t) \Delta t + o(\Delta t) \right) \times \right. \\ & \times \left[-R_{i0} + V(\vec{k} + I_i, t) \right] + \left(\theta_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) q_{i0} \Delta t + o(\Delta t) \right) \times \\ & \times \left[-H_{i0} + V(\vec{k} + I_i, t) \right] + \left(\lambda_{0i} + o(\Delta t) \right) \left[r_{0i} + V(\vec{k} - I_i, t) \right] \left. \right\} + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left(\mu_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) p_{ij}(t) \Delta t + o(\Delta t) \right) \left[R_{ij} + V(\vec{k} + I_i - I_j, t) \right] + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left(\theta_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) q_{ij}(t) \Delta t + o(\Delta t) \right) \left[r_{ij} + V(\vec{k} + I_i - I_j, t) \right] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Перенеся $V(\vec{k}, t + \Delta t)$ в левую часть уравнения, поделив обе части полученного равенства Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем следующее утверждение:

Теорема 1. Ожидаемый доход сети удовлетворяют следующему РДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\vec{k}, t)}{dt} = & \sum_{i=1}^n \left[\mu_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) p_{i0}(t) (V(\vec{k} + I_i, t) - V(\vec{k}, t)) + \right. \\ & + \theta_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) q_{i0} (V(\vec{k} + I_i, t) - V(\vec{k}, t)) + \lambda_{0i} (V(\vec{k} - I_i, t) - V(\vec{k}, t)) \left. \right] + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \mu_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) p_{ij}(t) (V(\vec{k} + I_i - I_j, t) - V(\vec{k}, t)) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \theta_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) q_{ij}(t) (V(\vec{k} + I_i - I_j, t) - V(\vec{k}, t)) + \\ & - \sum_{i=1}^n \left[R_{i0} \mu_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) p_{i0}(t) - H_{i0} \theta_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) p_{i0} + r_{0i} \lambda_{0i}(t) \right] + \\ & + \sum_{i,j=1}^n R_{ij} \mu_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) p_{ij}(t) + \sum_{i,j=1}^n r_{ij} \theta_i(m_i, k_i(t)) u(k_i(t)) q_{ij}(t) + R. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка для плотности распределения дохода.

Решить РДУ (2) аналитически при большом числе n не представляется возможным. Исследование этой системы будем проводить, используя методику, описанную в [1]–[4]. Перейдем

к относительным переменным и будем исследовать вектор $\xi(t) = \left(\frac{k_1(t)}{K}, \frac{k_2(t)}{K}, \dots, \frac{k_n(t)}{K} \right)$.

Возможные значения вектора $\xi(t)$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$G = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\}$, в котором они располагаются в узлах n -мерной ре-

шетки на расстоянии $\varepsilon = \frac{1}{K}$ друг от друга. При увеличении значений K «плотность заполнения» множества G возможными значениями рассматриваемого вектора $\xi(t)$ увеличивается,

и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение в области G . При этих предположениях можно считать, что полный ожидаемый доход сети непрерывно изменяется в зависимости от начального состояния $(\vec{x}, t)$. Поэтому можем ввести в рассмотрение функцию плотности распределения (концентрации) ожидаемого дохода $\rho(\vec{x}, t)$ в области G . По аналогии, например, с плотностью распределения массы:

$$\rho = \frac{m}{V} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(x_1 \leq \xi_{n+1} \leq x_1 + \varepsilon, \dots, x_n \leq \xi_{2n} \leq x_n + \varepsilon)}{\varepsilon^n},$$

плотность распределения дохода определяется как следующий предел:

$$\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(x_1 \leq \xi_{n+1} \leq x_1 + \varepsilon, \dots, x_n \leq \xi_{2n} \leq x_n + \varepsilon)}{\varepsilon^n}. \quad (3)$$

Очевидно, что плотность распределения дохода $\rho(\vec{x}, t)$ по аналогии с плотностью распределения вероятности будет обладать следующими свойствами:

$$1) \iint \dots \int_G \rho(\vec{x}, t) d\vec{x} = V_{sum};$$

2) доход сети при условии изменения вектора состояния сети по области D :

$$V(\xi \in D, t) = \iint \dots \int_D \rho(\vec{x}, t) d\vec{x}.$$

Кроме того, доход сети в определенном состоянии $\xi(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$V(\xi, t) \Big|_{\xi(t)=(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0.$$

Из (3) следует, что для $V(\vec{k}, t)$ справедлива следующая аппроксимация при $K \rightarrow \infty$:

$$V(\vec{k}, t) = V(\vec{x}K, t) = \varepsilon^n \rho(\vec{x}, t) \text{ или } \rho(\vec{x}, t) = K^n V(\vec{x}K, t). \quad (4)$$

Тогда $\frac{\partial V(\vec{k}, t)}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon^n \rho(\vec{x}, t))}{\partial t} = \varepsilon^n \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t}$. Кроме того, при $K \rightarrow \infty$ доходы $R, R_{i0}, H_{i0},$

r_{0i}, R_{ij}, r_{ij} , удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам

$$K^n R = r, K^n r_{0i} = r_{0i}^{(1)}, K^n R_{i0} = R_{i0}^{(1)}, K^n R_{ij} = R_{ij}^{(1)}, K^n H_{i0} = H_{i0}^{(1)}, K^n r_{ij} = r_{ij}^{(1)}. \quad (5)$$

Уравнение (2) для плотности распределения дохода с учетом (5), (4) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = & K \left[\sum_{i=1}^n \left[\mu_i(l_i, x_i(t)) p_{i0}(t) (\rho(\vec{x} + e_i, t) - \rho(\vec{x}, t)) + \right. \right. \\ & + \theta_i(l_i, x_i(t)) u(x_i(t)) q_{i0}(\rho(\vec{x} + e_i, t) - \rho(\vec{x}, t)) + \lambda_{0i}(\rho(\vec{x} - e_i, t) - \rho(\vec{x}, t)) \Big] + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \mu_i(l_i, x_i(t)) p_{ij}(t) (\rho(\vec{x} + e_i - e_j, t) - \rho(\vec{x}, t)) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \theta_i(l_i, x_i(t)) q_{ij}(t) (\rho(\vec{x} + e_i - e_j, t) - \rho(\vec{x}, t)) + \end{aligned}$$

$$-R_{i0}^{(1)}\mu_i(l_i, x_i(t))p_{i0}(t) - H_{i0}^{(1)}\theta_i(x_i(t))p_{i0} + r_{0i}^{(1)}\lambda_{0i}(t) + \left. + \sum_{i,j=1}^n R_{ij}^{(1)}\mu_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))p_{ij}(t) + \sum_{i,j=1}^n r_{ij}^{(1)}\theta_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))q_{ij}(t) + r \right], \quad (6)$$

где $e_i = \varepsilon l_i$, $i = \overline{1, n}$. Полагая, что $\rho(\bar{x}, t)$ дифференцируема по t и дважды кусочно-непрерывно дифференцируема по x_i , $i = \overline{1, n}$, разложим функции $\rho(\bar{x} + e_i - e_j, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(\bar{x}, t)$, используя члены до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x} \pm e_i, t) &= \rho(\bar{x}, t) \pm \varepsilon \frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i^2} + o(\varepsilon^2), \\ \rho(\bar{x} + e_i - e_j, t) &= \rho(\bar{x}, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial^2 \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_j^2} \right) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \left[\mu_i(l_i, x_i(t))p_{i0}(t) \left(\frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i^2} + o(\varepsilon^2) \right) + \right. \\ &+ \theta_i(l_i, x_i(t))q_{i0} \left(\frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i^2} + o(\varepsilon^2) \right) + \\ &+ \lambda_{0i} \left(-\frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i^2} + o(\varepsilon^2) \right) \Big] + \sum_{i,j=1}^n \mu_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))p_{ij}(t) \times \\ &\times \left(\left(\frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_j^2} \right) \right) + o(\varepsilon^2) \Big] + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \theta_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))q_{ij}(t) \times \\ &\times \left(\left(\frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_j^2} \right) \right) + o(\varepsilon^2) \Big] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[-R_{i0}^{(1)}\mu_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))p_{i0}(t) - H_{i0}^{(1)}\theta_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))p_{i0} + \lambda_{0i}r_{0i}^{(1)} \right] + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n R_{ij}^{(1)}\mu_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))p_{ij}(t) + \sum_{i,j=1}^n r_{ij}^{(1)}\theta_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))q_{ij}(t) + r \Big]. \end{aligned}$$

Таким образом, получили следующее утверждение.

Теорема 2. Плотность распределения дохода сети с точностью до $O(\varepsilon^2)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^n A_i(\bar{x}, t) \frac{\partial \rho(\bar{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^n B_{ij}(\bar{x}, t) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} - \\ &- \sum_{i=1}^n \left[R_{i0}^{(1)}\mu_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))p_{i0}(t) - H_{i0}^{(1)}\theta_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))p_{i0} + r_{0i}^{(1)}\lambda_{0i} \right] + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n R_{ij}^{(1)}\mu_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))p_{ij}(t) + \sum_{i,j=1}^n r_{ij}^{(1)}\theta_i(l_i, x_i(t))u(x_i(t))q_{ij}(t) + r, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
A_i(\vec{x}, t) &= \mu_i(l_i, x_i(t)) p_{i0} + \theta_i(l_i, x_i(t)) q_{i0} + \lambda_{0i} + \\
&+ \sum_{j=1}^n \mu_j(l_j, x_j(t)) p_{ji}^*(t) + \theta_j(l_j, x_j(t)) u(x_j(t)) q_{ji}^*(t). \\
B_{ij}(\vec{x}, t) &= \sum_{j=0}^n \mu_j(l_j, x_j(t)) p_{ji}^{**}(t) + \theta_j(l_j, x_j(t)) u(x_j(t)) q_{ji}^{**}(t), \\
p_{ji}^* &= \begin{cases} p_{ji}, j \neq i, \\ p_{ii} - 1, j = i, \end{cases} \quad p_{ji}^{**} = \begin{cases} p_{ji}, j \neq i, \\ 1 - p_{ii}, i = j, \end{cases} \quad q_{ji}^* = \begin{cases} q_{ji}, j \neq i, \\ q_{ii} - 1, j = i, \end{cases} \quad q_{ji}^{**} = \begin{cases} q_{ji}, j \neq i, \\ 1 - q_{ii}, j = i. \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Нахождение ожидаемого дохода сети. Учитывая, что $B_{ij}(\vec{x}, t)$, представляют собой функции порядка $O(\varepsilon)$, выражение $\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^n B_{ij}(\vec{x}, t) \frac{\partial^2 \rho(\vec{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j}$ можно отнести к $O(\varepsilon^2)$. Поэтому уравнение (7) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^n A_i(\vec{x}, t) \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \left[R_{i0}^{(1)} \mu_i(l_i, x_i(t)) p_{i0}(t) - H_{i0}^{(1)} \theta_i(l_i, x_i(t)) p_{i0} + \lambda_{i0} r_{0i}^{(1)} \right] + \\
&+ \sum_{i,j=1}^n R_{ij}^{(1)} \mu_i(l_i, x_i(t)) p_{ij}(t) + \sum_{i,j=1}^n \theta_j(l_j, x_j(t)) q_{ji}(t) r_{ji}^{(1)} + r. \quad (8)
\end{aligned}$$

Проинтегрировав обе части этого уравнения по $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в области G и разделив обе части уравнения на объем области G , равный $m(G)$, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m(G)} \iint \dots \int_G \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} d\vec{x} &= - \frac{1}{m(G)} \sum_{i=1}^n \iint \dots \int_G A_i(\vec{x}, t) \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial x_i} d\vec{x} - \\
&- \frac{K}{m(G)} \sum_{i=1}^n \left[R_{i0}^{(1)} p_{i0}(t) \iint \dots \int_G \mu_i(l_i, x_i(t)) d\vec{x} - H_{i0}^{(1)} p_{i0} \iint \dots \int_G \theta_i(l_i, x_i(t)) d\vec{x} + r_{0i}^{(1)} \lambda_{0i} \right] + \\
&+ \frac{K}{m(G)} \sum_{i,j=1}^n R_{ij}^{(1)} p_{ij}(t) \iint \dots \int_G \mu_i(l_i, x_i(t)) d\vec{x} + \frac{K}{m(G)} \sum_{i,j=1}^n q_{ji}(t) r_{ji}^{(1)} \iint \dots \int_G \theta_j(l_j, x_j(t)) d\vec{x} + r.
\end{aligned}$$

Будем считать, что в левой части этого равенства допустима перемена порядка интегрирования и дифференцирования (мы предполагаем, что в замкнутой области G функция $\rho(\vec{x}, t)$ является непрерывной):

$$\frac{1}{m(G)} \iint \dots \int_G \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} d\vec{x} = \frac{1}{m(G)} \frac{\partial}{\partial t} \iint \dots \int_G \rho(\vec{x}, t) d\vec{x} = \frac{d}{dt} \overline{v_G}(t),$$

где $\overline{v_G}(t)$ – среднее по $\vec{x}$ значение дохода при условии изменения начального состояния $(\vec{x}, t)$ в области G .

Рассмотрим интегралы в правой части (8). При расчете этих интегралов используем интегрирование по частям, а также предположим, что выполняются граничные условия:

$$A_i(\vec{x}, t) \rho(\vec{x}, t) \Big|_{\vec{x} \in \Gamma(G)} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\Gamma(G)$ – граница области G , т. е. $A_i(\vec{x}, t) \rho(\vec{x}, t) \Big|_{x_i=1-x_1-x_2-\dots-x_{i-1}-x_{i+1}-\dots-x_n} = 0$, которые означают, что не допускается поток дохода через границу области G или, что в граничных точках области G поставлены отражающие экраны. Тогда, учитывая, что $\frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial x_i}$ не зависят от x_j , $j = \overline{1, n}$, получаем:

$$\frac{1}{m(G)} \iint \dots \int_G A_i(\vec{x}, t) \frac{\partial v(\vec{x}, t)}{\partial t} d\vec{x} = - \frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \overline{v_G}(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Из курса математического анализа известно [5], что $m(G) = \frac{1}{n!}$. Таким образом приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{v}_G(t) = & \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i(\bar{x}, t)}{\partial x_i} \overline{v}_G(t) - \\ & -Kn! \sum_{i=1}^n \left[R_{i0}^{(1)} p_{i0}(t) \iint_G \dots \int \mu_i(l_i, x_i(t)) d\bar{x} - H_{i0}^{(1)} p_{i0} \iint_G \dots \int \theta_i(l_i, x_i(t)) d\bar{x} + r_{i0}^{(1)} \lambda_{0i} \right] + \\ & +Kn! \sum_{i,j=1}^n R_{ij}^{(1)} p_{ij}(t) \iint_G \dots \int \mu_i(l_i, x_i(t)) d\bar{x} + Kn! \sum_{i,j=1}^n q_{ji}(t) r_{ji}^{(1)} \iint_G \dots \int \theta_j(l_j, x_j(t)) d\bar{x} + r. \end{aligned}$$

Его решение имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} \overline{v}_G(t) = & e^{\int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i(\bar{x}, z)}{\partial x_i} dz} \left(\overline{v}_G(0) - \right. \\ & -Kn! \sum_{i=1}^n \left[R_{i0}^{(1)} p_{i0}(t) \iint_G \dots \int \mu_i(l_i, x_i(t)) d\bar{x} - H_{i0}^{(1)} p_{i0} \iint_G \dots \int \theta_i(l_i, x_i(t)) d\bar{x} + r_{i0}^{(1)} \lambda_{0i} \right] + \\ & \left. +Kn! \sum_{i,j=1}^n R_{ij}^{(1)} p_{ij}(t) \iint_G \dots \int \mu_i(l_i, x_i(t)) d\bar{x} + Kn! \sum_{i,j=1}^n q_{ji}(t) r_{ji}^{(1)} \iint_G \dots \int \theta_j(l_j, x_j(t)) d\bar{x} + r \right). \quad (9) \end{aligned}$$

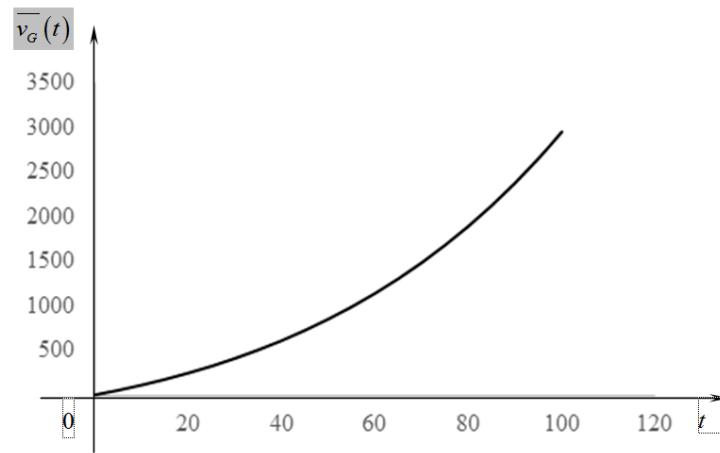


Рисунок – График ожидаемого дохода сети на интервале времени [0; 100]

Пример 1. Рассмотрим сеть, состоящую из $n = 4$ СМО, количество заявок в которой ограничено величиной $K = 10000$. Количество линий обслуживания в каждой из систем равно $m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 1, m_4 = 4$. Интенсивности поступления заявок равны $\lambda_{01} = 7, \lambda_{02} = 5, \lambda_{03} = 4, \lambda_{04} = 2$. Доходы от поступления заявок равны $r_{0i}^1 = 5, i = \overline{1, 4}$. Доход от сохранения состояния сети равен $r = 5$. Выражения для интенсивности обслуживания имеют вид: $\mu_i(l_i, x_i(t)) = l_i x_i(t), i = \overline{1, 4}$. Параметр ф.р. времени ожидания начала обслуживания имеет вид: $\theta_i(l_i, x_i(t)) = 0,3 l_i x_i(t), i = \overline{1, 4}$. Вероятности переходов заявок после завершения обслуживания и времени ожидания равны

$$q_{20} = p_{20} = 0,4,$$

$$\begin{aligned} q_{31} = p_{31} = 0,1, q_{21} = p_{21} = 0,1, q_{23} = p_{23} = p_{24} = q_{24} = 0,25; q_{30} = p_{30} = 0,4, p_{10} = q_{10} = 0,3, q_{40} = \\ = p_{40} = 0,3, q_{41} = p_{41} = 0,1, q_{42} = p_{42} = 0,3, p_{10} = q_{10} = 0,3, q_{12} = p_{12} = 0,2, q_{13} = p_{13} = \\ = 0,25, q_{14} = p_{14} = 0,25, q_{43} = p_{43} = 0,3, q_{13} = q_{14} = p_{13} = p_{14} = 0,25, q_{32} = p_{32} = 0,3 \end{aligned}$$

Доходы от таких переходов:

$$R_{ij}^1 = i(j+1), i, j = \overline{1, 4}, r_{ij}^1 = 0,5i(j+1), i, j = \overline{1, 4}, H_{i0}^1 = 0,5i, .$$

Положим также $\overline{v}_G(0) = 0$. На рисунке представлен график ожидаемого дохода сети на интервале времени [0; 100].

Литература

1. Медведев, Г.А. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация / Г.А. Медведев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – № 6. – С. 199–203.
2. Китурко, О.М. Асимптотический анализ общего ожидаемого дохода замкнутой структуры массового обслуживания с однотипными заявками и ее применение / О.М. Китурко, М.А. Матальцкий, Т.В. Русилко // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление. – 2013. – № 2. – С. 99–111.
3. Китурко, О.М. Асимптотический анализ доходов в замкнутой НМ-сети с переменным числом приоритетных и беспriorитетных заявок / О.М. Китурко, М.А. Матальцкий // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 3. – С. 38–44.
4. Матальцкий, М.А. Математический анализ НМ-сетей и их применение в транспортной логистике: монография / М.А. Матальцкий, О.М. Китурко. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2015. – 231 с.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Рипол Классик, 1955. – Т. 3. – С. 674–675.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 10.10.2019

О решетке локально нормальных классов Фиттинга

А.В. МАРЦИНКЕВИЧ

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс конечных групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным в $\mathfrak{X}$ или локально нормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$ -радикал $\mathfrak{F}$ -максимален в G . Пусть π – непустое множество простых чисел, $\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех конечных разрешимых π -групп и $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп. Тогда, в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{X}$ -нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют π -нормальным и нормальным соответственно. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ классы Фиттинга, то пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$, называют решеточным объединением $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Множество всех π -нормальных классов Фиттинга, частично упорядоченное по включению, с операциями « $\vee$ » и « $\wedge$ » (« $\wedge$ » – операция пересечения) образует решетку. В настоящей работе доказано, что множество всех π -нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден не π -нормальным классом Фиттинга π -групп, является подрешеткой решетки всех π -нормальных классов Фиттинга.

Ключевые слова: класс Фиттинга, локально нормальный класс Фиттинга, решетка классов Фиттинга.

Let $\mathfrak{X}$ be nonempty class of finite groups. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is called normal in $\mathfrak{X}$ or locally normal if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ and for every group $G \in \mathfrak{X}$ its $\mathfrak{F}$ -radical is $\mathfrak{F}$ -maximal subgroup of G . Let π be nonempty set of primes, $\mathfrak{S}_\pi$ is the class of all finite and soluble π -groups and $\mathfrak{S}$ is the class of all finite and soluble groups. If $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi$ and $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, then $\mathfrak{X}$ -normal Fitting class $\mathfrak{F}$ is called π -normal and normal respectively. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be Fitting classes. The lattice join $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ of Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is the intersection of all those Fitting classes which contain $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$. The set of all π -normal Fitting classes, partially ordered by inclusion, together with the operations « $\vee$ » and « $\wedge$ » (« $\wedge$ » – is an operation of intersection) forms a lattice. In this paper we prove that the set of all π -normal Fitting classes, each of them is generated by non π -normal Fitting class of π -groups, is the sublattice of the lattice of all π -normal Fitting classes.

Keywords: Fitting class, locally normal Fitting class, lattice of Fitting classes.

1. Введение. В настоящей работе все рассматриваемые группы конечны и разрешимы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполнены следующие условия:

- (1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $N \in \mathfrak{F}$;
- (2) если $N_1 \triangleleft G$ и $N_2 \triangleleft G$, $N_1 \in \mathfrak{F}$ и $N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G существует единственная максимальная нормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа G . Её обозначают $G_{\mathfrak{F}}$ и называют $\mathfrak{F}$ -радикалом G .

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным в классе групп $\mathfrak{X}$ или *локально нормальным* [1, определение IX.2.3(b)], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$ -радикал является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой G .

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным в классе $\mathfrak{S}_\pi$ всех π -групп или просто π -нормальным (обозначают $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$) [2] (см. также [1, теорема X.3.7]), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π -группы G её $\mathfrak{F}$ -радикал является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой G . В случае, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, π -нормальный класс Фиттинга называют нормальным [3].

Нормальные классы Фиттинга являются ключевыми объектами в исследованиях структуры классов Фиттинга и их характеристики (см., например, [1, X.3]). В теории нормальных классов Фиттинга известна теорема Блессеноля-Гашюца [3, теорема 6.2] о том, что пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга. Кроме того, Кусаком [4, теорема 4.1] установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$, порожденный объединением неединичных нормальных классов Фиттинга

$\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, является неединичным и нормальным. Таким образом, множество всех нормальных классов Фиттинга, частично упорядоченное по включению, с операциями « $\vee$ » и « $\wedge$ » (« $\wedge$ » – операция пересечения) образует решетку.

Значительный интерес к изучению решеток классов Фиттинга обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, как установлено Лаушем [5, следствие 2.5] (см. также [1, теорема X.4.14]), решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга изоморфна решетке подгрупп некоторой абелевой группы (в общем случае бесконечной) и, следовательно, является модулярной. Во-вторых, до настоящего времени остаётся открытым вопрос С.Ф. Каморникова и А.Н. Скибы [6, проблема 14.47] о том, обладает ли решетка всех разрешимых классов Фиттинга свойством модулярности.

В работе [2] нами получено развитие и обобщение результата Лауша: доказано, что решетка всех π -нормальных классов Фиттинга (в общем случае неразрешимых) модулярна (см. [2, теорема 4.3]).

Наряду с изучением свойств решеток нормальных классов Фиттинга актуальна общая задача описания подрешеточного строения решеток этих классов. Решение такой задачи неизбежно приводит к разработке методов построения подрешеток нормальных классов Фиттинга.

В настоящей работе мы описываем построение подрешетки решетки всех π -нормальных классов Фиттинга (в частности, подрешетки всех нормальных классов Фиттинга). Основной результат работы представляет следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть π – некоторое бесконечное множество простых чисел. Множество всех π -нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден не π -нормальным классом Фиттинга π -групп, является подрешеткой решетки всех π -нормальных классов Фиттинга.

Следствие 1.2. Множество всех нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден ненормальным классом Фиттинга, является подрешеткой решетки всех нормальных классов Фиттинга.

Обозначения и терминология являются стандартными. В случае необходимости её можно найти [1], [7].

2. Предварительные сведения. Символами π , p будем обозначать некоторое множество простых чисел, простое число и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ соответственно. Через Z_p будем обозначать циклическую группу порядка p .

Напомним следующие общепринятые обозначения классов групп:

- $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп;
- $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;
- $\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π -групп;
- $\mathfrak{S}_{\pi'}$ – класс всех разрешимых π' -групп, в частности, если обозначить $\{p\}'$ символом p' , то класс всех p' -групп будем обозначать $\mathfrak{S}_{p'}$.

Подгруппа H называется *нормально вложенной* в группу G , если H изоморфна некоторой нормальной подгруппе группы G .

В работе [8] определены операторы Локетта « $*$ » и « $*$ ». Каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует класс $\mathfrak{F}^* = \left(G : (G \times G)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}) \langle (g^{-1}, g) : g \in G \rangle \right)$. Класс $\mathfrak{F}_* = \cap \{ \mathfrak{X} : \mathfrak{X} \text{ — класс Фиттинга, } \mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^* \}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта*, если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Лемма 2.1. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга, то справедливы следующие утверждения:

- (a) [1, теорема X.1.8(b)] если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$;
- (b) [1, теоремы X.1.15 и X.1.8(a)] $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^*$;
- (c) [1, предложение X.1.13] $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}^*$;
- (d) [4, теорема 2.8] $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})_* = \mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{H}_*$.

Произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга и операция умножения ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Решеточным объединением $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ двух классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется пересечение всех таких классов Фиттинга, которые содержат их объединение.

Отображение C классов групп в классы групп называется операцией замыкания, если классы групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют следующим трём условиям:

- (a) $\mathfrak{F} \subseteq C\mathfrak{F}$;
- (b) $C\mathfrak{F} = C(C\mathfrak{F})$;
- (c) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $C\mathfrak{F} \subseteq C\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{F} = C\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ – C -замкнутый класс групп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп и S_n – операция замыкания, тогда $S_n \mathfrak{F} = (G : G \trianglelefteq H \text{ для некоторой группы } H \in \mathfrak{F})$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют гомоморфом, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф и $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ – насыщенный гомоморф.

Через $\text{Fit}\mathcal{S}$ (мы обозначаем $\text{Fit}\{\mathcal{S}\}$ как $\text{Fit}\mathcal{S}$) будем обозначать наименьший класс Фиттинга, который содержит заданное множество групп $\mathcal{S}$. Тогда решеточное объединение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ можно определить следующим образом: $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \text{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – не π -нормальный класс Фиттинга π -групп. Через $N^\pi(\mathfrak{F})$ будем обозначать наименьший π -нормальный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$. При $\pi = \mathbb{P}$ мы получаем, что $N(\mathfrak{F})$ – это наименьший нормальный класс Фиттинга, содержащий ненормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Очевидно, что Fit и N^π – операции замыкания.

Через $G \wr H$ будем обозначать регулярное сплетение групп G и H , $G^\natural$ – базисную группу $G \wr H$.

Для характеристики π -нормальных классов Фиттинга будем использовать следующую лемму.

Лемма 2.2 [1, теорема X.3.7]. Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел. Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга π -групп, то следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{S}_\pi$;
- (b) для каждого $p \in \pi$ и $G \in \mathfrak{F}$ существует натуральное число n такое, что $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F}$;
- (c) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$.

Лемма 2.3 [1, теорема X.1.9(a), (b)]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}$ для любой группы G .

Лемма 2.4 [1, предложение X.2.1(a)]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Локетта и G – группа. Если $G \notin \mathfrak{F}$, то $(G \wr H)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^\natural$ для всех групп H .

Мы используем следующую модификацию теоремы Хаука [1, теорема IX.2.1].

Лемма 2.5 (см. [1, теорема IX.2.1]). Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга π -групп, множество $\sigma = \{p \in \pi : \text{для некоторых } G \in \mathfrak{X}, p \mid |G / G_{\mathfrak{Y}}|\}$ и множество $\tau = \{p \in \pi : \text{для некоторых } G \in \mathfrak{Y}, p \mid |G / G_{\mathfrak{X}}|\}$. Пусть $\sigma \cap \tau \subseteq \omega \subseteq \pi$ и класс $N_\omega(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = (G \in \mathfrak{S}_\pi : G / (G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}}) \in \mathfrak{N}_\omega)$. Тогда $N_\omega(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ – класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

Лемма 2.6 [2, лемма 4.1]. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга. Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}^*$, то $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = S_n(G : G = G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}})$.

Лемма 2.7 [4, теорема 2.9]. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга и $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = S_n(G : G = G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}})$. Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

3. Доказательство теоремы 1.1. Предварительно докажем леммы, которые мы будем использовать для доказательства теоремы 1.1.

Лемма 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Для любого натурального числа n мы определим следующее множество групп $\mathcal{S}_n$: $\mathcal{S}_0 = \{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}\}$, $\mathcal{S}_n = \{H : H \text{ нормально вложена в } R = MN, \text{ где } M \trianglelefteq R, N \trianglelefteq R, M \in \mathcal{S}_{n-1}, N \in \mathcal{S}_{n-1}\}$. Тогда справедливо следующее утверждение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \cup\{\mathcal{S}_n : n = 1, 2, \dots\}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \cup\{\mathcal{S}_n : n = 1, 2, \dots\}$. По определению класса Фиттинга получаем $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, то остаётся показать, что $\mathcal{S}$ – класс Фиттинга.

Пусть $H \trianglelefteq G$ и $G \in \mathcal{S}$. Тогда существует натуральное число n такое, что $G \in \mathcal{S}_n$. Из определения множества $\mathcal{S}_n$ получаем $H \in \mathcal{S}_{n+1}$. Предположим, что существуют подгруппы $M \in \mathcal{S}$ и $N \in \mathcal{S}$ такие, что $M \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq G$ и $G = MN$. Тогда найдутся натуральные числа i и j такие, что $M \in \mathcal{S}_i$ и $N \in \mathcal{S}_j$. Пусть $m = \max\{i, j\}$. Очевидно, что $M \in \mathcal{S}_m$ и $N \in \mathcal{S}_m$. Следовательно, $G \in \mathcal{S}_{m+1}$. Так как $\mathcal{S}_{m+1} \subseteq \mathcal{S}$, то $\mathcal{S}$ является классом Фиттинга. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (a) $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y} \vee \mathfrak{X}$;
- (b) $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = \text{Fit}\{G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}} : G - \text{группа}\}$;
- (c) $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee \mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \vee \mathfrak{Z})$;
- (d) если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}^*$, то $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* = \mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^*$.

Доказательство. (a) Доказательство данного утверждения следует из определения решеточного объединения классов Фиттинга.

(b) Пусть множество групп $\mathcal{S} = \text{Fit}\{G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}} : G - \text{группа}\}$. Очевидно, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{S}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathcal{S}$. Значит, $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \text{Fit}\mathcal{S}$.

По лемме 3.1 получаем $\mathcal{S} \subseteq \cup\{\mathcal{S}_n : n = 1, 2, \dots\} = \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. Таким образом, $\text{Fit}\mathcal{S} \subseteq \text{Fit}(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) = \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ и $\text{Fit}\mathcal{S} = \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$.

(c) Утверждение (c) верно ввиду утверждения (b).

(d) Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$, то по утверждению (a) леммы 2.1 $\mathfrak{X}^* \subseteq (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^*$ и $\mathfrak{Y}^* \subseteq (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^*$. Значит, $\mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^* \subseteq (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^*$.

По условию теоремы $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}^*$. Следовательно, $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}^*$. По утверждениям (a) и (b) леммы 2.1 имеем $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* \subseteq \mathfrak{Y}^* \subseteq \mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^*$. Таким образом, $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* \subseteq \mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^*$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если $\mathfrak{F}$ – не π -нормальный класс Фиттинга π -групп, то $N^{\pi}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*$, где $(\mathfrak{S}_{\pi})_*$ – наименьший π -нормальный класс Фиттинга.

Доказательство. По определению класса групп $N^{\pi}(\mathfrak{F})$ получаем, что $\mathfrak{F} \subseteq N^{\pi}(\mathfrak{F})$. Ввиду [9, следствие 2] $(\mathfrak{S}_{\pi})_* \subseteq N^{\pi}(\mathfrak{F})$. Значит, $\mathfrak{F} \cup (\mathfrak{S}_{\pi})_* \subseteq N^{\pi}(\mathfrak{F})$, и по определению операции замыкания $\text{Fit}(\mathfrak{F} \cup (\mathfrak{S}_{\pi})_*) \subseteq \text{Fit}(N^{\pi}(\mathfrak{F}))$. Таким образом, $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_* \subseteq N^{\pi}(\mathfrak{F})$.

По утверждению (b) леммы 2.1 $\mathfrak{F} \subseteq ((\mathfrak{S}_{\pi})_*)^* = \mathfrak{S}_{\pi}$. Отсюда по утверждению (d) леммы 3.2 $(\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*)^* = \mathfrak{F}^* \vee ((\mathfrak{S}_{\pi})_*)^* = \mathfrak{S}_{\pi}$. Ввиду леммы 2.2 ((c) $\Leftrightarrow$ (a)) $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*$ является π -нормальным классом Фиттинга, содержащим $\mathfrak{F}$. Из определения класса $N^{\pi}(\mathfrak{F})$ следует, что $N^{\pi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*$. Таким образом, $N^{\pi}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*$. Лемма доказана.

Мы используем следующую модификацию теоремы из [4].

Лемма 3.4 [4, теорема 2.1]. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга π -групп. Если $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = (G \in \mathfrak{S}_{\pi} : G = G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}})$, то для некоторого множества простых чисел $\sigma \subseteq \pi$ справедливо, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_{\sigma}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\sigma}$.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга π -групп такие, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{Y} \not\subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Докажем, что $N^\pi(\mathfrak{X}) \vee N^\pi(\mathfrak{Y}) = N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$.

Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$, то по определению операции замыкания N^π получаем $N^\pi(\mathfrak{X}) \subseteq N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$ и $N^\pi(\mathfrak{Y}) \subseteq N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$. Значит, $\text{Fit}(N^\pi(\mathfrak{X}) \cup N^\pi(\mathfrak{Y})) \subseteq \text{Fit}(N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})) = N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$. Следовательно, $N^\pi(\mathfrak{X}) \vee N^\pi(\mathfrak{Y}) \subseteq N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$.

Так как операция решеточного объединения ассоциативна (см. утверждение (с) леммы 3.2) и по лемме 3.3 получаем, что $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_* = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*) = \mathfrak{X} \vee N^\pi(\mathfrak{Y})$.

По утверждению (b) леммы 2.1 $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq ((\mathfrak{S}_\pi)_*)^* = \mathfrak{S}_\pi$. Таким образом, по утверждению (d) леммы 3.2 $((\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*)^* = (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* \vee \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по лемме 2.2 ((с) $\Leftrightarrow$ (a)) $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*$ – π -нормальный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. По определению класса $N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$ получаем $N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \subseteq (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_* = \mathfrak{X} \vee N^\pi(\mathfrak{Y})$. Ввиду того, что $\mathfrak{X} \subseteq N^\pi(\mathfrak{X})$, имеем $N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X} \vee N^\pi(\mathfrak{Y}) \subseteq N^\pi(\mathfrak{X}) \vee N^\pi(\mathfrak{Y})$.

Итак, $N^\pi(\mathfrak{X}) \vee N^\pi(\mathfrak{Y}) = N^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$ и объединение π -нормальных классов Фиттинга $N^\pi(\mathfrak{X})$ и $N^\pi(\mathfrak{Y})$ – π -нормальный класс Фиттинга.

Докажем, что $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \not\subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Предположим от противного, что $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ для некоторых не π -нормальных классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

Покажем, что без ограничения общности классы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ можно считать классами Локетта.

Ввиду утверждений (b) и (d) леммы 2.1 $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})_* = \mathfrak{X}_* \vee \mathfrak{Y}_* \subseteq \mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^* \subseteq (\mathfrak{X}_* \vee \mathfrak{Y}_*)^*$. По утверждению (b) леммы 2.1 $(\mathfrak{X}_* \vee \mathfrak{Y}_*)^* = ((\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})_*)^* = (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $(\mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^*)^* = (\mathfrak{X}_* \vee \mathfrak{Y}_*)^* = \mathfrak{S}_\pi$. По лемме 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (с)) $\mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Учитывая утверждение (b) леммы 2.1 и лемму 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (с)), имеем $(\mathfrak{X}^*)^* = \mathfrak{X}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$ и $(\mathfrak{Y}^*)^* = \mathfrak{Y}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$. Таким образом, $\mathfrak{X}^* \not\subseteq \mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{Y}^* \not\subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, без ограничения общности в качестве классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ можно взять классы Локетта.

Пусть σ – некоторое множество простых чисел такое, что $\sigma \subseteq \pi$. Предположим, что классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию леммы 3.4. Тогда $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\sigma$.

Если $\sigma' = \emptyset$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Получили противоречие.

Если $\sigma' \neq \emptyset$, то $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma$ и по утверждению (a) леммы 2.1 $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* \subseteq (\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma)^*$. Так как $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, то по лемме 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (с)) $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma)^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Значит, $(\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma)^* = \mathfrak{S}_\pi$. Ввиду леммы 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (с)) $\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Так как $\mathfrak{S}_\sigma$ – насыщенный гомоморф, то по [10, лемма 3] $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Получили противоречие.

Пусть $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ не удовлетворяют условию леммы 3.4. Выберем группу $G \in \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ такую, что $G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}} < G$. Множество простых делителей факторгруппы $G/G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}}$ конечно, однако π – некоторое бесконечное множество простых чисел. Следовательно, мы можем выбрать $p \in \pi$ такое, что $(p, |G/G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}}|) = 1$. Тогда ввиду леммы 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (b)) существует натуральное число n такое, что $K = G^{(n)} \wr Z_p \in \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. Так как $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Локетта и $G^{(n)} \notin \mathfrak{X}$ и $G^{(n)} \notin \mathfrak{Y}$, то по лемме 2.4 $K_{\mathfrak{X}} = ((G^{(n)})_{\mathfrak{X}})^{\natural}$ и $K_{\mathfrak{Y}} = ((G^{(n)})_{\mathfrak{Y}})^{\natural}$. Применяя лемму 2.3, получаем $K_{\mathfrak{X}} = ((G_{\mathfrak{X}})^{(n)})^{\natural}$ и $K_{\mathfrak{Y}} = ((G_{\mathfrak{Y}})^{(n)})^{\natural}$. Следовательно, $K/K_{\mathfrak{X}}K_{\mathfrak{Y}} \cong (G/G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}})^{(n)} \wr Z_p \notin \mathfrak{N}_\pi$. По лемме 2.5 получаем, что $K \notin \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. Таким образом, полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \not\subseteq \mathfrak{S}_\pi$.

Так как $N^\pi(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $N^\pi(\mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, то по [9, лемма 16] $N^\pi(\mathfrak{X}) \cap N^\pi(\mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{S}_\pi$.

По лемме 3.3 имеем $N^\pi(\mathfrak{X}) \cap N^\pi(\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{X} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*) \cap (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*)$. Ввиду $\mathfrak{X} \subseteq ((\mathfrak{S}_\pi)_*)^* = \mathfrak{S}_\pi$, по лемме 2.6 $\mathfrak{X} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_* = S_n(G : G = G_{\mathfrak{X}} G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*})$. Следовательно, по утверждениям (а) и (с) леммы 3.2 и лемме 2.7 $(\mathfrak{X} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*) \cap (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*) = (\mathfrak{X} \cap (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*)) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*$.

Остается показать, что $\mathfrak{X} \cap (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*)$ не является π -нормальным классом Фиттинга.

Действительно, по утверждению (с) леммы 2.1 и по утверждению (d) леммы 3.2 $(\mathfrak{X} \cap (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*))^* = \mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{X}^*$. Так как $\mathfrak{X} \not\leq \mathfrak{S}_\pi$, то по лемме 2.2((а) $\Leftrightarrow$ (с)) имеем $(\mathfrak{X} \cap (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*))^* = \mathfrak{X}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$. Таким образом, $\mathfrak{X} \cap (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*) \not\leq \mathfrak{S}_\pi$. Теорема доказана.

Заключение. В работе описано построение подрешетки решетки всех π -нормальных классов Фиттинга с помощью не π -нормальных классов Фиттинга.

Литература

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Воробьев, Н.Т. Конечные π -группы с нормальными инъекторами / Н.Т. Воробьев, А.В. Марцинкевич // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 790–797.
3. Blesensohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blesensohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118, № 1. – S. 1–8.
4. Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 1. – P. 37–47.
5. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – P. 67–72.
6. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Издание 14 / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск : Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 1999. – 135 с.
7. Guo, W. Theory of classes groups / W. Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.
8. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.
9. Савельева, Н.В. О проблеме существования максимальных подклассов минимального π -нормального класса Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 29–37.
10. Савельева, Н.В. Максимальные по сильному π -вложению классы Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 157–168.

УДК 514.765.1

Эквивалентные связности на редуктивных несимметрических пространствах

Н.П. МОЖЕЙ

В работе исследуется задача описания эквивалентных связностей на гладком многообразии. В общем случае эта проблема является довольно сложной, поэтому она рассматривается в более узком классе многообразий – в классе редуктивных однородных пространств. Такое пространство всегда допускает инвариантную связность. Целью данной работы является описание всех инвариантных эквивалентных связностей на трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространствах вместе с их тензорами кручения и тензорами Риччи. Определены основные понятия: изотропно-точечная пара, редуктивное и симметрическое пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквивалентная (локально эквивалентная) связность. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований. В статье для трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств определено, при каких условиях связность является эквивалентной (локально эквивалентной). Также выписаны в явном виде сами связности, их тензоры кручения, тензоры Риччи.

Ключевые слова: эквивалентная связность, группа преобразований, тензор Риччи, редуктивное пространство, симметрическое пространство, тензор кручения.

The question of description of equiaffine connections on a smooth manifold is studied. In general, the purpose of the research is quite complicated, therefore, it is considered in a narrower class of manifolds – in the class of reductive homogeneous spaces. Such a space always admits an invariant connection. The purpose of the work is the description of all invariant equiaffine connections on three-dimensional reductive nonsymmetric homogeneous spaces together with their torsion tensors and Ricci tensors. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, reductive and symmetric space, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine (locally equiaffine) connection are defined. We considered the case of the unsolvable Lie group of transformations. In the article for three-dimensional reductive nonsymmetric homogeneous spaces, it is determined under what conditions a connection is equiaffine (locally equiaffine). In addition, the connections, their torsion tensors and Ricci tensors are written out in explicit form.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, Ricci tensor, reductive space, symmetric space, torsion tensor.

Введение. Цель работы – описать все эквивалентные связности на редуктивных несимметрических однородных пространствах размерности 3. Случай аффинных связностей рассматривался в работе [1]. Аффинная связность является эквивалентной, если допускает параллельную форму объема (см. [2]). Для трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств определим, при каких условиях связность является эквивалентной (локально эквивалентной), также выпишем в явном виде сами связности, их тензоры кручения и тензоры Риччи.

В работе исследуется класс однородных пространств аффинной связности с кручением, получивших название «редуктивных», у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения, введенный в рассмотрение П.К. Рашевским [3]. Этот класс интересен, например, тем, что все геодезические на редуктивных пространствах являются однородными. Симметрические пространства – это пространства аффинной связности без кручения, при параллельном переносе у которых сохраняется тензор кривизны. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах независимо изучались П.К. Рашевским, М. Куритой, Э.Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу и др. Сами редуктивные несимметрические однородные пространства описывались в работе [1], в данной работе изучаются эквивалентные (локально эквивалентные) связности на таких пространствах, найдены также тензоры кручения и тензоры Риччи.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$ (см., например, [4, с. 89–91]). Пусть $\bar{g}$ –

алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ (второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Симметрическое* пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, где σ – инволютивный автоморфизм, такой, что $\sigma(g) = s_o g s_o^{-1}$, $g \in \bar{G}$, s_o – симметрия M , o – неподвижная точка s_o . Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, его собственными значениями являются 1 и -1 , $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для -1 , $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, тогда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Если первых два условия выполняются, а последнее условие нет, то соответствующее однородное пространство является редуктивным, но не является симметрическим.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$ -инвариантным, инвариантные аффинные связности на $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [5, т. 2, с. 177–179]. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность. Тензор кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m$, $R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. В этом случае имеет место первое тождество Бьянки:

$$R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{m}.$$

Определим тензор Риччи $\text{Ric} \in \text{Inv}T_2(\mathfrak{m})$:

$$\text{Ric}(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}.$$

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквивалентной*, если $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$).

Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквивалентна. Действительно, по определению,

$$\text{Ric}(y, z) - \text{Ric}(z, y) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z - R(x, z)y\}.$$

С учетом первого тождества Бьянки получаем

$$\text{Ric}(y, z) - \text{Ric}(z, y) = \text{tr}\{x \mapsto -R(y, z)x\} = -\text{tr}R(y, z).$$

Поскольку $\text{tr}(AB - BA) = 0$, имеем

$$\text{Ric}(y, z) - \text{Ric}(z, y) = -\text{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \text{tr}\Lambda([y, z]) = \text{tr}\Lambda([y, z]).$$

Следовательно, тензор Ric симметрический тогда и только тогда, когда $\text{tr}\Lambda([y, z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Под *эквивалентной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Описание эквивалентных связностей на редуктивных несимметрических однородных пространствах. Определим пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n, u_1, u_2, u_3\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \mathfrak{g}$), причем алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \dots, e_n$, а $\{u_1, u_2, u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [1], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$; α – параметр, если

на него накладываются дополнительные условия, то они выписаны сразу после таблицы умножения, в противном случае предполагается, что параметр пробегает все $\mathbb{R}$.

Теорема [1]. Трёхмерные редуцированные несимметрические однородные пространства $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$), имеют вид:

– $\mathfrak{g}$ разрешима:

1.1.7.		e_1	u_1	u_2	u_3	1.3.3		e_1	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	u_1	$-u_2$	0		e_1	0	$-u_2$	u_1	0
	u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0		u_1	u_2	0	e_1+u_3	0
	u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0		u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0
	u_3	0	0	0	0		u_3	0	0	0	0

1.8.2.		e_1	u_1	u_2	u_3	1.3.4		e_1	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	0	u_1	u_2		e_1	0	$-u_2$	u_1	0
	u_1	0	0	u_1	u_2		u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0
	u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3		u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0
	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0		u_3	0	0	0	0

2.2.1.4.		e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
	e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
	u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
	u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
	u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

– $\mathfrak{g}$ не является разрешимой:

3.3.2.		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	3.3.3.		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0		e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
	e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0		e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
	e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0		e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0		u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	u_1
	u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0		u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
	u_3	0	0	0	0	0	0		u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0

4.2.2.		e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	0	0	0	$(1/2)u_1$	$(1/2)u_2$	u_3
	e_2	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	$-u_2$	0
	e_3	0	$-2e_3$	0	e_2	0	u_1	0
	e_4	0	$2e_4$	$-e_2$	0	u_2	0	0
	u_1	$-(1/2)u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
	u_2	$-(1/2)u_2$	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
	u_3	$-u_3$	0	0	0	0	0	0

5.2.2.		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
	e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
	e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
	e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1
	e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1
	u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2
	u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	$-\alpha u_1$	$-\alpha u_2$	0
									$ \alpha \leq 1, \alpha \neq -1$

5.2.3.		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
	e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
	e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
	e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1+\alpha e_4$
	e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	$u_2+\alpha e_5$
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1-e_4
	u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2-e_5
	u_3	0	0	0	$-u_1-\alpha e_4$	$-u_2-\alpha e_5$	$-\alpha u_1+e_4$	$-\alpha u_2+e_5$	0
									$\alpha \neq 0$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [1].

Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Информация о тензорах кручения и тензорах Риччи приведена в доказательстве теоремы 2.

Теорема 2. Пусть $(\bar{g}, g)$ – трехмерное редутивное несимметрическое однородное пространство (приведенное в теореме 1). Локально эквиваффинные связности (при $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$) имеют следующий вид:

Пара $(\bar{g}, g)$	Локально эквиваффинная связность (без кручения)
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ p_{3,2}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,3}-q_{2,3} \end{pmatrix}$
1.3.3, 1.3.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -1/2 & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & -p_{2,3} & 0 \\ p_{2,3} & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{1,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & -4p_{1,3}/3 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & -p_{1,3}/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & q_{1,3} & r_{1,3} \\ -1/2 & -p_{1,3}/3 & 2q_{1,3} \\ 0 & -1/2 & -2p_{1,3}/3 \end{pmatrix}$
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$
3.3.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
4.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{2,3}-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,3}-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2q_{2,3}-\alpha+1 \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{2,3}-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,3}-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2q_{2,3} \end{pmatrix}$

Эквиваффинные связности имеют вид:

Пара $(\bar{g}, g)$	Эквиваффинная связность (без кручения)
1.1.7	Совпадает с локально эквиваффинной связностью
1.3.3, 1.3.4	Совпадает с локально эквиваффинной связностью
1.8.2	Совпадает с локально эквиваффинной связностью
2.21.4	Совпадает с локально эквиваффинной связностью
3.3.2	Совпадает с локально эквиваффинной связностью
3.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2p_{1,3} \end{pmatrix}$
4.2.2	не допускает эквиваффинной связности

Окончание	
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (3\alpha-1)/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3\alpha-1)/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(\alpha+1)/4 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha+1)/4 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha+1)/2 \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Доказательство. Определяем, при каких значениях параметров $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (соответственно, $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$), $T = 0$ (Λ является связностью без кручения), проверяем, когда тензор Риччи является симметрическим. Для получения указанного результата обратим внимание, что аффинная связность имеет вид:

Пара	Аффинная связность
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.3, 1.3.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}+p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1}+q_{1,2} & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1}+2q_{1,2}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.3.2, 3.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
4.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+q_{2,3}+1 \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+q_{2,3}+\alpha \end{pmatrix}$

а тензор кручения:

Пара	Тензор кручения
1.1.7	$(0, 0, p_{3,2} - q_{3,1} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{2,2}, 0)$
1.3.3	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.3.4	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.8.2	$(2p_{1,2} - 1, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{1,2} - 1, 0), (q_{1,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{1,2} - 1)$
2.21.4	$(2p_{1,2} - 1, 0, 0), (0, 2p_{1,2} - 1, 0), (0, 0, 2p_{1,2} - 1)$

Окончание

3.3.2	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
3.3.3	$(0, 0, 2p_{3,2}), (p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 0, 0), (0, p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 0)$
4.2.2	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (0, 0, 0), (0, 0, 0)$
5.2.2	$(0, 0, 0), (q_{2,3} - r_{1,1} - \alpha, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{1,1} - \alpha, 0)$
5.2.3	$(0, 0, 0), (q_{2,3} - r_{1,1} - \alpha, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{1,1} - \alpha, 0)$

Тензор Риччи в случае 1.1.7 имеет вид

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & p_{3,2}q_{2,3} - 1 + r_{2,2} - p_{3,2}r_{2,2} + r_{3,3}p_{3,2} & 0 \\ p_{1,3}q_{3,1} - 1 - r_{1,1} - q_{3,1}r_{1,1} + r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} + q_{2,3}r_{3,3} - r_{2,2}q_{2,3} \end{pmatrix}$$

и является симметрическим при $p_{1,3}q_{3,1} - r_{1,1} - q_{3,1}r_{1,1} + r_{3,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3} + r_{2,2} - p_{3,2}r_{2,2} + r_{3,3}p_{3,2}$. В случаях 1.3.3 и 1.3.4 тензор Риччи является симметрическим при $p_{13}p_{32} - p_{23}p_{31} + r_{11} - p_{31}r_{12} - p_{32}r_{11} + r_{33}p_{32} = 0$, а в случае 1.8.2 – при $2p_{13}p_{12} - q_{12}p_{12} + r_{11} + 2q_{12} = 0$. В случае 3.3.2 тензор Риччи симметрический при $p_{13}p_{32} + r_{11} - p_{32}r_{11} + r_{33}p_{32} = 0$, а в случае 3.3.3 – при $p_{13}p_{32} - p_{32}r_{11} + r_{33}p_{32} + p_{32} = 0$. В случае 2.21.4 тензор Риччи имеет вид

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{12}^2 + 2p_{12} \\ 0 & 2p_{12}^2 - 2p_{12} & 0 \\ -2p_{12}^2 + 2p_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и является симметрическим, в случае 4.2.2 тензор Риччи нулевой, в случае 5.2.2 тензор Риччи примет вид

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_{23}^2 + 2q_{23} - 2\alpha q_{23} \end{pmatrix},$$

а в случае 5.2.3 – вид

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_{23}^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть, например, $(\bar{g}, g)$ – трехмерное однородное пространство 5.2.2 (либо 5.2.3), тогда инвариантная аффинная связность и тензор кручения имеют вид, приведенный в таблицах, тензор Риччи является симметрическим, то есть связность является эквивалентной при $3r_{1,1} + q_{2,3} + 1 = 0$ в случае 5.2.2, при $3r_{1,1} + q_{2,3} + \alpha = 0$ в случае 5.2.3 ($\text{tr}\Lambda(x) = 0$, $x \in \bar{g}$) и $r_{1,1} = q_{2,3} - \alpha$ ($T = 0$). Имеем также $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{g}$, т. е. связность является локально эквивалентной. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями получаем, что локально эквивалентные (эквивалентные) связности имеют вид, приведенный в теореме.

Заключение. Таким образом, для всех трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований определено, при каких условиях связность является эквивалентной (локально эквивалентной); найдены в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложение в общей теории относительности (которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств), в ядерной физике и физике элементарных частиц (поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах), а также при конструировании математических моделей реальных процессов.

Литература

1. Можей, Н.П. Трёхмерные редуцированные несимметрические однородные пространства / Н.П. Можей // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2017. – № 3 (102). – С. 141–148.
2. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Great Britain : Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.
3. Рашевский, П.К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением / П.К. Рашевский // Труды семин. по векторн. и тенз. анализу. – 1969. – № 8. – С. 82–92.
4. Онищик, А.Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
5. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2-х т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 23.10.2019

Приближения на классах Липшица суммами Фейера рядов Фурье одной системы алгебраических дробей Чебышёва-Маркова

П.Г. ПОЦЕЙКО

Работа посвящена изучению приближений суммами Фейера рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышёва-Маркова на классах $MH^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in [-1,1]$, функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица порядка γ с константой M . Приводятся ранее известные работы, относящиеся к исследованиям асимптотически точных верхних граней отклонений полиномиальных сумм Фейера на классах Липшица, а также некоторых рациональных методов приближений. Устанавливаются асимптотически точные верхние грани отклонений последовательностей сумм Фейера рациональных рядов Фурье-Чебышёва на классах $MH^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in [-1,1]$.

Ключевые слова: ряд Фурье-Чебышёва, частичные суммы, суммы Фейера, асимптотические оценки, точные константы.

The paper is devoted to the study of approximations by Fejér means of Fourier series on one system of Chebyshev-Markov algebraic fractions on classes $MH^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in [-1,1]$, of functions satisfying Lipschitz condition of order γ with a constant M on a segment $[-1,1]$. The previously known works relating to the studies of asymptotically exact upper bounds of deviations of polynomial Fejér means on Lipschitz classes, as well as some rational methods of approximation are given. Asymptotically exact upper bounds of deviations of sequences of Fejér means of rational Fourier-Chebyshev series on classes $MH^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in [-1,1]$ are established.

Keywords: Fourier-Chebyshev series, partial sums, Fejér means, asymptotic estimates, exact constants.

Введение. Одна из важнейших задач теории приближений функций формулируется следующим образом. Пусть задан какой-либо класс M непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций и оператор U_n (метод приближения), ставящий в соответствие каждой функции $f \in M$ некоторый многочлен степени не выше n , значение которого в точке x обозначим через $U_n(f, x)$. Требуется определить верхнюю грань

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(U_n, M) = \sup_{f \in M} \|f - U_n(f, \cdot)\|_{C[a,b]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

уклонений функции f от их приближений U_n в равномерной метрике (см. [1]). Первые результаты в этом направлении принадлежат А.Н. Колмогорову [2]. С.М. Никольским [3] (см., также [4, с. 205]) установлены асимптотически точные оценки верхних граней уклонений тригонометрических сумм Фейера на классах Липшица. Ли Лорх [5] уточнил асимптотическую формулу С.М. Никольского. Наконец, С.А. Теляковский [6] получил её полное асимптотическое разложение отдельно для чётных и нечётных n . И.М. Ганзбург и А.Ф. Тиман [7] нашли асимптотически точную оценку верхних граней отклонений сумм Фейера полиномиальных рядов Фурье-Чебышёва на классах $MH^{(\gamma)}[-1,1]$, $0 < \gamma \leq 1$, в зависимости от положения точки x на отрезке $[-1,1]$. А.В. Ефимовым [8] установлено выражение главного члена уклонения функции от её сумм Фейера и сумм Фурье, а также асимптотически точные равенства для верхних граней этих уклонений, распространенных на классы H_2^α и $W'H_2^\alpha$. Г.К. Лебедь и А.А. Авдеенко [9] получили аналогичные результаты в интегральной метрике.

Первый результат, выражающий порядок убывания последовательности $\mathcal{E}_n$ в рациональном случае, принадлежит В.Н. Русаку [10]. В качестве классов выбирались классы периодических функций f , имеющих r -ю производную $f^{(r)}$ в смысле Вейля, $r > 0$, и $\text{Var}(f^{(r)}, [0, 2\pi]) \leq 1$, а в качестве оператора U_n – рациональный оператор Валле Пуссена.

Е.А. Ровбой получен аналогичный результат для функций f , имеющих на отрезке $[a, b]$ производную $f^{(r)}$ в смысле Римана-Лиувилля, $r > 0$, и $\text{Var}(f^{(r)}, [a, b]) \leq 1$ (см. [11]), а также установлены точные в некоторых случаях оценки величины $\mathcal{E}_n$ на классах $V(M, [a, b], \omega)$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f , имеющих ограниченную вариацию с заданным модулем непрерывности (см. [12]).

К настоящему времени задача нахождения асимптотически точных верхних граней является классической, и имеются глубокие исследования для различных классов функций и широкого круга методов приближений.

В [13] авторами были построены и исследованы ряды Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышёва-Маркова, которая является обобщением классической системы полиномов Чебышёва первого рода. В частности, был построен интеграл Дирихле и изучены его аппроксимационные свойства в приближениях индивидуальных функций. В [14] на основании полученных ранее результатов были введены суммы Фейера рациональных рядов Фурье-Чебышёва и также проведено исследование аппроксимационных свойств полученного метода. В частности, установлен характер сходимости последовательностей сумм Фейера для непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций, и установлены условия, которым должен удовлетворять параметр, чтобы сходимость имела место.

В настоящей работе продолжим изучение аппроксимационных свойств, введённых в [14] сумм Фейера. Будут установлены асимптотически точные верхние грани уклонений изучаемого метода приближений на классах $MH^{(\gamma)}[-1, 1]$, $0 < \gamma \leq 1$, функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица порядка γ с константой M .

1. Суммы Фейера рациональных рядов Фурье-Чебышёва на отрезке. Напомним основные сведения о суммах Фейера рационального ряда Фурье-Чебышёва. Пусть задана частичная сумма порядка $2n$ ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышёва-Маркова для чётной функции $f \in C[-1, 1]$:

$$s_{2n}(f, x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=0}^n c_{2k} M_{2k}(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Среднее арифметическое частичных сумм $s_{2n}(f, x)$

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_{2k}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

назовём суммами Фейера рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышёва-Маркова.

Справедлива

Теорема 1 [14]. Если функция f определена и абсолютно суммируема с весом

$$\rho(x, a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad a \geq 0,$$

на отрезке $[-1, 1]$, то суммы Фейера $\sigma_{2n}: f \rightarrow \mathfrak{R}_{2n}(a)$, где $\mathfrak{R}_{2n}(a)$ – множество функций вида

$$\frac{p_{2n}(x)}{(1+a^2x^2)^n}, \quad p_{2n}(x) \in \mathfrak{P}_{2n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Кроме этого оператор $\sigma_{2n}(\cdot, \cdot)$ является положительным, точным для единицы и для него имеет место представление

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv, \quad x = \cos u, \quad (2)$$

где

$$\varphi(u, v) = \int_u^v \lambda(y) dy, \quad \lambda(y) = \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2 \cos 2y + \alpha^4}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (3)$$

Следствие 1. Положив в (2) $\alpha = 0$, получим

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^2[(n+1)(v-u)]}{\sin^2(v-u)} dv, \quad x = \cos u.$$

Другими словами, переходя к полиномиальному случаю, выражение (2) представляет собой суммы Фейера тригонометрических рядов Фурье чётной функции $f(\cos u)$.

Рассмотрим последовательность сумм Фейера

$$\{\sigma_{2n}(f, x, \alpha_n)\}_{n=0}^{n=+\infty}. \quad (4)$$

Заметим, что и здесь, и везде в дальнейшем для каждого индекса n может выбираться соответствующее α_n . Однако, мы не будем указывать эту зависимость, так как все приведённые оценки являются равномерными относительно α , $\alpha \in [0, 1]$.

Следствие 2 [14]. Если выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\ln(n+1)} (1 - \alpha_n) = \infty,$$

то последовательность сумм Фейера (1) сходится к $f(x)$ равномерно на всем отрезке $[-1, 1]$.

2. Приближения на классах $MH^{(\gamma)}[-1, 1]$ суммами Фейера. В данном разделе настоящей работы рассматривается класс $MH^{(\gamma)}[-1, 1]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица, степени γ , $0 < \gamma \leq 1$, с константой M , то есть условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|^\gamma, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1].$$

Изучим асимптотическое поведение верхних граней

$$\mathcal{E}_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) = \sup_{f \in MH^{(\gamma)}[-1, 1]} |f(x) - \sigma_{2n}(f, x, \alpha)|, \quad (5)$$

уклонений последовательностей сумм Фейера $\sigma_{2n}(f, x, \alpha)$ от функции $f \in MH^{(\gamma)}[-1, 1]$. Следующая теорема устанавливает асимптотическое поведение величины (5).

Теорема 2. Для приближений на классах $MH^{(\gamma)}[-1, 1]$, $0 < \gamma \leq 1$, при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\mathcal{E}_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) = \frac{M}{\pi} \frac{2\Gamma(\gamma)}{1-\gamma} \sin \frac{\pi\gamma}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2(n+1)\lambda(u)} \right)^\gamma + O \left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^\gamma}{(n+1)\lambda(u)} \right) + \delta_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha), \quad (6)$$

если $0 < \gamma < 1$, и

$$\mathcal{E}_{2n}^{(1)}(x, \alpha) = \frac{M}{\pi} \frac{\sqrt{1-x^2} \ln(n+1)}{(n+1)\lambda(u)} + O \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n+1)\lambda(u)} \right) + \delta_{2n}^{(1)}(x, \alpha), \quad (7)$$

если $\gamma = 1$, равномерно относительно $x \in [-1, 1]$, где для $|x| \leq 1$

$$\begin{cases} \delta_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) = O \left(\frac{|x|^\gamma}{[2(n+1)\lambda(u)]^{2\gamma}} \right), & 0 < \gamma < 1/2, \\ \delta_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) = O \left(\frac{|x|^\gamma}{(n+1)\lambda(u)} \right), & \gamma > 1/2, \\ \delta_{2n}^{(1/2)}(x, \alpha) = O \left(\frac{\sqrt{x} \ln(n+1)}{(n+1)\lambda(u)} \right). \end{cases} \quad (8)$$

При этом:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{2n}^{(\gamma)}(\pm 1, \alpha) &\sim \frac{M}{\pi} \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma) \sin \pi\gamma}{1-2\gamma} \cdot \frac{1}{[2(n+1)\beta]^{2\gamma}}, \quad 0 < \gamma < 1/2, \\ \delta_{2n}^{(\gamma)}(\pm 1, \alpha) &\sim \frac{M}{\pi} \frac{2^{\gamma-1}}{(n+1)\beta} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2\gamma-2} t}{\cos^2 t} dt, \quad \gamma > 1/2, \\ \delta_{2n}^{(\frac{1}{2})}(\pm 1, \alpha) &\sim \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{2}(n+1)\beta}, \quad \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Доказательство. Из (2) с учётом π -периодичности подынтегральной функции следует, что

$$\sigma_{2n}(f, x, \alpha_n) = \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{|v-u| \leq \pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv, \quad x = \cos u.$$

Воспользовавшись точностью оператора $\sigma_{2n}(\cdot, x)$ для единицы, находим

$$f(x) - \sigma_{2n}(f, x, \alpha_n) = \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{|v-u| \leq \pi/2} [f(\cos u) - f(\cos v)] \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_{2n}(f, x, \alpha_n)| &= \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)} \left| \int_{|v-u| \leq \pi/2} [f(\cos u) - f(\cos v)] \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{|v-u| \leq \pi/2} |f(\cos u) - f(\cos v)| \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv \leq \\ &\leq \frac{M}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{|v-u| \leq \pi/2} |\cos u - \cos v|^\gamma \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv. \end{aligned}$$

С другой стороны, это неравенство обращается в точное равенство для функции $f_x^*(y) = M|x-y|^\gamma$, принадлежащей классу $MH^\gamma[-1, 1]$, $0 < \gamma \leq 1$. Поэтому из (5) и последней оценки следует, что

$$\mathcal{E}_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) = \frac{M}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{|v-u| \leq \pi/2} |\cos u - \cos v|^\gamma \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv.$$

Поскольку $\cos u - \cos v = 2 \sin^2((v-u)/2) \cos u + \sin(v-u) \sin u$, то:

$$\mathcal{E}_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) = \frac{M}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{|v-u| \leq \pi/2} \left| 2 \sin^2 \frac{v-u}{2} \cos u + \sin(v-u) \sin u \right|^\gamma \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv.$$

В интеграле справа выполним замену переменного интегрирования по формуле $v-u=t$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) &= \frac{M}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos u + \sin t \sin u \right|^\gamma \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, t)]}{\sin^2 t} dt = \\ &= \frac{M}{\pi(n+1)\lambda(u)} \left(\int_{-\pi/2}^0 + \int_0^{\pi/2} \right) \left| 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos u + \sin t \sin u \right|^\gamma \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(u, t)]}{\sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(\pm u, t) = \int_0^t \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2 \cos 2(y \pm u) + \alpha^4} dy.$$

Наконец, выполнив в первом интеграле замену $t \sim -t$, придём к выражению

$$\mathcal{E}_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) = I_{n+1}(+u) + I_{n+1}(-u), \quad (10)$$

где

$$I_{n+1}(\pm u) = \frac{M}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_0^{\pi/2} \left| 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos u \pm \sin t \sin u \right|^\gamma \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(\pm u, t)]}{\sin^2 t} dt. \quad (11)$$

Учитывая, что

$$|A \pm B|^\gamma = |A|^\gamma + \theta |B|^\gamma, \quad (0 \leq \theta \leq 1), \quad (12)$$

получим

$$I_{n+1}(\pm u) = \frac{M}{\pi(n+1)\lambda(u)} \left[|\sin u|^\gamma J_{n+1}^{(1)}(\pm u) + \theta \cdot 2^{-\gamma} |\cos u|^\gamma J_{n+1}^{(2)}(\pm u) \right], \quad (13)$$

где

$$J_{n+1}^{(1)}(\pm u) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(\pm u, t)]}{\sin^{2-\gamma} t} dt, \quad J_{n+1}^{(2)}(\pm u) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(\pm u, t)]}{\sin^{2-2\gamma} t \cos^{2\gamma} \frac{t}{2}} dt.$$

Проведём исследование каждого из двух интегралов по отдельности. Нетрудно заметить, что их асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ зависит исключительно от значений, принимаемых переменной интегрирования в непосредственной близости нуля.

Рассмотрим интеграл $J_{n+1}^{(1)}(\pm u)$. Из равенства

$$\frac{1}{\sin^{2-\gamma} t} - \frac{1}{t^{2-\gamma}} = O(t^\gamma), \quad \left(0 < \gamma \leq 1, 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

находим

$$J_{n+1}^{(1)}(\pm u) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(\pm u, t)]}{t^{2-\gamma}} dt + o(1), \quad t \rightarrow 0,$$

где величина $o(1) \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$. Асимптотическое равенство $\varphi(\pm u, t) = \lambda(u)t$ справедливое при $t \rightarrow 0$ приводит последний интеграл к виду

$$J_{n+1}^{(1)}(\pm u) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2[(n+1)\lambda(u)t]}{t^{2-\gamma}} dt + o(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Выполнив замену переменного по формуле $(n+1)\lambda(u)t = v$, получим

$$J_{n+1}^{(1)}(\pm u) = [(n+1)\lambda(u)]^{1-\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}(n+1)\lambda(u)} \frac{\sin^2 v}{v^{2-\gamma}} dv + o(1).$$

Как известно, [4] (см., также [15, с. 116]), при $0 < \gamma < 1$ и выполнении условий следствия 2, при $n \rightarrow \infty$ последний интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}(n+1)\lambda(u)} \frac{\sin^2 v}{v^{2-\gamma}} dv \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(\gamma)}{(1-\gamma)2^\gamma} \sin \frac{\pi\gamma}{2}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{1}{2} \ln(n+1), & \gamma = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$J_{n+1}^{(1)}(\pm u) = \begin{cases} [(n+1)\lambda(u)]^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma)}{(1-\gamma)2^\gamma} \sin \frac{\pi\gamma}{2} + o(1), & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{1}{2} \ln(n+1) + O(1), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (14)$$

Займёмся теперь интегралом $J_{n+1}^{(2)}(\pm u)$. Прежде всего исследуем случай, когда $0 < \gamma \leq 1/2$. Имеем

$$J_{n+1}^{(2)}(\pm u) = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} \right)^\gamma \frac{\sin^2[(n+1)\varphi(\pm u, t)]}{\sin^{2-2\gamma} t} dt. \quad (15)$$

Учитывая асимптотические соотношения $\operatorname{tg} t/2 \sim t/2$ и $(1+t^2/4)^\gamma \sim 1+\gamma t^2/4$, справедливые при $t \rightarrow 0$, а также принимая во внимание рассуждения при исследовании асимптотического поведения интеграла $J_{n+1}^{(1)}(\pm u)$, находим, что

$$J_{n+1}^{(2)}(\pm u) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2[(n+1)\lambda(u)t]}{t^{2-2\gamma}} dt + o(1).$$

Выполнив в последнем интеграле уже известную замену переменного $(n+1)\lambda(u)t = v$, приходим к соотношению

$$J_{n+1}^{(2)}(\pm u) = [(n+1)\lambda(u)]^{1-2\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}(n+1)\lambda(u)} \frac{\sin^2 v}{v^{2-2\gamma}} dv + o(1).$$

При $n \rightarrow \infty$ интеграл справа имеет следующие асимптотики

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}(n+1)\lambda(u)} \frac{\sin^2 v}{v^{2-2\gamma}} dv \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(2\gamma) \sin \pi\gamma}{(1-2\gamma)2^{2\gamma}}, & 0 < \gamma < 1/2, \\ \frac{1}{2} \ln(n+1), & \gamma = 1/2. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$J_{n+1}^{(2)}(\pm u) = \begin{cases} [(n+1)\lambda(u)]^{1-2\gamma} \frac{\Gamma(2\gamma) \sin \pi\gamma}{(1-2\gamma)2^{2\gamma}} + o(1), & 0 < \gamma < 1/2, \\ \frac{1}{2} \ln(n+1) + O(1), & \gamma = 1/2. \end{cases} \quad (16)$$

Теперь исследуем интеграл $J_{n+1}^{(2)}(\pm u)$, когда $\gamma > 1/2$. В этом случае из (15) получим

$$J_{n+1}^{(2)}(\pm u) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2\gamma-2} t}{\cos^{2\gamma} t/2} dt + O\left(\frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Выполнив в последнем интеграле замену $t/2 \sim t$, придём к соотношению

$$J_{n+1}^{(2)}(\pm u) = \begin{cases} 2^{2\gamma-2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2\gamma-2} t}{\cos^2 t} dt + O\left(\frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\right), & \gamma > 1/2, \\ 1 + O\left(\frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\right), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (17)$$

Теперь из (14), (16) и (17) с учетом (10) и (13) непосредственно следует (6), (7) и (8). Из (11), (12) и тех же соотношений следует (9). Это завершает доказательство теоремы 2.

Следствие 3. Положив в формулировке теоремы 2 значение параметра $\alpha = 0$, получим результат А.Ф. Тимана и И.М. Ганзбурга [7].

Заключение. В работе изучены аппроксимационные свойства сумм Фейера рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышёва-Маркова. Установлены асимптотически точные верхние грани уклонений на классах $MH^{(\gamma)}[-1,1]$, $0 < \gamma \leq 1$, функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица с показателем γ и константой M (теорема 2). Данный результат является обобщением классического результата И.М. Ганзбурга и А.Ф. Тимана на рациональные функции с двумя геометрически различными полюсами.

Литература

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – Москва : Наука, 1977. – 511 с.
2. Kolmogoroff, A. Zur Größenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen / A. Kolmogoroff // Ann. Math. (2). – 1935. – Vol. 36, № 2. – С. 521–526.
3. Никольский, С.М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4, № 6. – С. 501–508.
4. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон, М.-Л. : ГИТТЛ, 1949. – 684 с.
5. Lorch, L. On approximation by Fejér means to periodic functions satisfying a Lipschitz condition / Lee Lorch // Canad. Math. Bull. – 1962. – Vol. 5. – P. 21–27.
6. Теляковский, С.А. О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера / С.А. Теляковский // Укр. матем. журн. – 1969. – Т. 21, № 3. – С. 334–343.

7. Ганзбург, И.М. Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами / И.М. Ганзбург, А.Ф. Тиман // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22, № 6. – С. 771–810.
8. Ефимов, А.В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера / А.В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22, № 1. – С. 81–116.
9. Лебедь Г.К. О приближении периодических функций суммами Фейера / Г.К. Лебедь, А.А. Авдеенко // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – Т. 35, вып. 1. – С. 83–92.
10. Русак, В.Н. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки / В.Н. Русак // Матем. сб. – 1985. – Т. 128, № 4. – С. 492–515.
11. Ровба, Е.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана-Лиувилля, рациональными операторами / Е.А. Ровба // Доклады АН Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 6. – С. 18–22.
12. Ровба, Е.А. Приближения рациональными операторами Джексона функций ограниченной вариации / Е.А. Ровба // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений – 2001 : труды института математики НАН Беларуси. – Минск, 2001. – Т. 9. – С. 119–122.
13. Rouba, Y. On one system of rational Chebyshev-Markov fractions // Y. Rouba, P. Patseika, K. Smatrytski / Analysis Math. – 2018. – Vol. 44, is. 1. – P. 115–140.
14. Поцейко, П.Г. Суммы Фейера рационального ряда Фурье-Чебышёва и аппроксимации функции $|x|^s$ / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 3. – С. 18–34.
15. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. – М. : Наука, 1980. – 463 с.

On the π -decomposable norm of a finite group

V.M. SELKIN, A.A. POBILOVSKY, S.I. ZINCHUK, D.A. YROSHENKO

Let G be a finite group and $\pi \subseteq P$. Then G is called: π -decomposable if $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$; meta- π -decomposable if G is an extension of a π -decomposable group by a π -decomposable group. We use $\mathfrak{N}_\pi$ to denote the class of all finite π -decomposable groups. Let $N_\pi(G)$ be the intersection of the normalizers of the π -decomposable residuals of all subgroups of G , that is, $N_\pi(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi})$. We say that $N_\pi(G)$ is the π -decomposable norm of G . We study the basic properties of the π -decomposable norm of G . In particular, we prove that G is meta- π -decomposable if and only if $G/N_\pi(G)$ is meta- π -decomposable.

Keywords: finite group, π -decomposable group, π -soluble group, π -decomposable residual of a group, π -decomposable norm of a group.

Пусть G является конечной группой и $\pi \subseteq P$. Тогда группа G называется: π -разложимой, если $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$; мета- π -разложимой если G является расширением π -разложимой группы по π -разложимой группе. Мы используем $\mathfrak{N}_\pi$ для обозначения класса всех конечных π -разложимых групп. Пусть $N_\pi(G)$ пересечение нормализаторов π -разложимых радикалов подгрупп группы G : $N_\pi(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi})$. Мы говорим, что $N_\pi(G)$ является π -разложимой нормой группы G . Мы изучаем базисные свойства π -разложимой норма группы G . В частности, мы доказали, что G является мета- π -разложимой тогда и только тогда, когда $G/N_\pi(G)$ является мета- π -разложимой группой.

Ключевые слова: конечная группа, π -разложимая группа, π -разрешимая группа, π -разложимый радикал группы, π -разложимая норма группы.

1. Introduction. Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, $\mathbb{P}$ is the set of all primes, $\pi \subseteq P$ and $\pi' = P \setminus \pi$.

The group G is said to be: π -decomposable (respectively p -decomposable) if $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$ (respectively $G = O_p(G) \times O_{p'}(G)$); meta- π -decomposable if G is an extension of a π -decomposable group by a π -decomposable group. We use $\mathfrak{N}_\pi$ to denote the class of all π -decomposable groups; $\mathfrak{N}_{\{p\}}$ is the class of all p -decomposable groups.

Various classes of π -decomposable and meta- π -decomposable groups have been studied in many papers and, in particular, in the recent papers [1]–[6]. In this paper, we consider some new properties and applications of such groups.

If $1 \in \mathfrak{F}$ is the class of groups, then $G^\mathfrak{F}$ is the $\mathfrak{F}$ -residual of G , that is, the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathfrak{F}$. In particular, $G^{\mathfrak{N}}$ is the nilpotent residual of G ; $G^{\mathfrak{N}_\pi}$ is the π -decomposable residual of G .

Recall that the norm $N(G)$ of G is the intersection of the normalizers of all subgroups of G . This concept was introduced by R. Baer [7] (see also [8]) and the norm and the generalized norm of a group has been studied by many authors. In particular, in the recent paper [9] the following analogues of the subgroup $N(G)$ were introduced: (i) $S(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}})$; (ii) let $1 = S_0(G) \leq S_1(G) \leq \dots \leq S_n(G) \leq \dots$, where $S_{i+1}(G)/S_i(G) = S(G/S_i(G))$ for all $i = 0, 1, 2, \dots$. Then $S_\infty(G) = S_n(G)$, where let n is the smallest n such that $S_n(G) = S_{n+1}(G)$.

The basic properties and some applications of the subgroups $S(G)$ and $S_\infty(G)$ were considered in [9]. In this paper we consider the following generalizations of the subgroups $S(G)$ and $S_\infty(G)$.

Definition 1.1. Let $N_{\pi(G)}$ be the intersection of the normalizers of the π -decomposable residuals of all subgroups of G , that is, $N_\pi(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi})$. We say that $N_\pi(G)$ is the π -decomposable norm of G . If $\pi = \{p\}$, we write $N_p(G)$ instead of $N_{\{p\}}(G)$ and say that $N_p(G)$ is the p -decomposable norm of G .

Definition 1.2. Let

$$1 = N_\pi^0(G) \leq N_\pi^1(G) \leq N_\pi^2(G) \leq \dots \leq N_\pi^n(G) \leq \dots,$$

where

$$N_\pi^{i+1}(G) / N_\pi^i(G) = N_\pi(G / N_\pi^i(G)),$$

for all $i = 0, 1, 2, \dots$. And let n be the smallest n such that $N_\pi^n = N_\pi^{n+1}$. Then we write $N_\pi^\infty(G) = N_\pi^n(G)$ and say that $N_\pi^\infty(G)$ is the π -decomposable hypernorm of G .

Obviously, $N_\pi(G)$ and $N_\pi^\infty(G)$ are characteristic subgroups of G .

Before continuing, consider the following example.

Example 1.3. (i) Let $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, where $Q \rtimes R$ is a non-abelian group of order 6 and P is a simple $F_5(Q \rtimes R)$ -module which is faithful for $Q \rtimes R$. Let $\sigma = \{\{2, 5\}, \{2, 5\}'\}$. Then G every proper non- π -decomposable subgroup H of G is either of the form $V \rtimes Q^x$, where $V \leq P$, or of the form $(Q \rtimes R)^y$ for some $x, y \in G$. In the former case we have $H^{\mathfrak{N}_\pi} = V$ and $N_G(V) = PQ^x = PQ$. In the second case we have $((Q \rtimes R)^y)^{\mathfrak{N}_\pi} = Q^y$ and $N_G(Q^y) = (Q \rtimes R)^y$. Moreover,

$$\bigcap_{y \in G} (Q \rtimes R)^y = (Q \rtimes R)_G \leq C_G(P) = P$$

and so $N_\pi(G) = 1 = N_\pi^\infty(G)$.

(ii) Let G and σ are the same as in (i). Let $A = G \times C_2$. Let $B = (Q \rtimes R)C_2$, where C_2 is a group of order 2. Then $B^{\mathfrak{N}_\pi} = Q$, $C_2 \leq N_\pi(A)$ and $N_A(Q) = B < A$. Hence $1 < N_\pi(A) = C_2 = N_\pi^\infty(G) < G$.

Our main goal here is to prove the following results.

Theorem 1.4. For any group G , the subgroup $N_\pi(G)$ is σ -separable.

Theorem 1.5. The group G is meta- π -decomposable if and only if $G / N_\pi(G)$ is meta- π -decomposable.

Theorem 1.6. Suppose that G is p -soluble and all elements of G of order p are in $N_p(G)$.

If $p > 2$, then $l_p(G) \leq 1$.

2. Proofs of the results. First we prove the following facts about the subgroups $N_\pi(G)$ and $N_\pi^\infty(G)$.

Lemma 2.1. If E is a subgroup of G , then $N_\pi(G) \cap E \leq N_\pi(E)$.

Proof. First observe that

$$N_\pi(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi}) \leq \bigcap_{H \leq E} N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi}),$$

so

$$E \cap N_\pi(G) = E \cap \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi}) = \bigcap_{H \leq E} N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi}) = N_\pi(E).$$

The lemma is proved.

Lemma 2.2. If N is a normal subgroup of G , then $N_\pi(G)N / N \leq N_\pi(G / N)$.

Proof. For any subgroup H / N of G / N we have $(H / N)^{\mathfrak{N}_\pi} = H^{\mathfrak{N}_\pi} N / N$. Then for every $x \in N_\pi(G)$ we have $x \in N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi})$, so $x \in N_G(H^{\mathfrak{N}_\pi} N)$ and hence xN normalizes $(H / N)^{\mathfrak{N}_\pi}$. Thus $N_\pi(G)N / N \leq N_\pi(G / N)$. The lemma is proved.

Lemma 2.3. *If N is a normal subgroup of G and $N \leq N_\pi^\infty(G)$, then $N_\pi^\infty(G/N) = N_\pi^\infty(G)/N$.*

Proof. Since $N \leq N_\pi^\infty(G)$, for some i we have $N \leq N_\pi^i(G)$. Let $N^i/N = N_\pi^i(G/N)$ for all $i=1,2,\dots$, and let $N^\infty/N = N_\pi^\infty(G/N)$. First we claim that $N^1 \leq N_\pi^{i+1}(G)$. Let $H/N_\pi^i(G)$ be any subgroup of $G/N_\pi^i(G)$ and $x \in N^1$. Then xN normalizes $(H/N)^\pi = H^\pi N/N$, that is, $(H^\pi)^\pi N/N = H^\pi N/N$ and so $(H^\pi)^\pi N = H^\pi N$, which implies that $(H^\pi)^\pi N_\pi^i(G) = H^\pi N_\pi^i(G)$ since $N \leq N_\pi^i(G)$. But then $(H^\pi)^\pi N_\pi^i(G)/N_\pi^i(G) = H^\pi N_\pi^i(G)/N_\pi^i(G)$ and so $xN_\pi^i(G)$ normalizes $(H/N_\pi^i(G))^\pi$. Hence $xN_\pi^i(G) \in N_\pi^{i+1}(G)/N_\pi^i(G) = N_\pi(G/N_\pi^i(G))$. Thus $N^1 \leq N_\pi^{i+1}(G)$. Moreover, if $N^n \leq N_\pi^{i+n}(G)$, then similarly we can show that $N^{n+1} \leq N_\pi^{i+n+1}(G)$, so $N^\infty \leq N_\pi^\infty(G)$.

Conversely, $N_\pi^1(G) \leq N^1$ by Lemma 2.2. And if for some n we have $N_\pi^n(G) \leq N^n$, then for every $x \in N_\pi^{n+1}(G)$ and for every subgroup $H/N_\pi^n(G)$ of $G/N_\pi^n(G)$ we as above get that $(H^\pi)^\pi N_\pi^n(G) = H^\pi N_\pi^n(G)$ and so $(H^\pi)^\pi N^n = H^\pi N^n$ and hence $x \in N^{n+1}$. Thus $N_\pi^{n+1}(G) \leq N^{n+1}$ and so $N_\pi^\infty(G) \leq N^\infty$. Hence $N_\pi^\infty(G) = N^\infty$. The lemma is proved.

Proof of Theorem 1.4. It is enough to show that $N_\pi(G)$ is π -separable. Let $X = N_\pi(G)$. Then the group X has the following property: the π -decomposable residual of every subgroup of X is normal in X . We show that every group with such a property is π -separable. Assume that this is false and let X be a counterexample of minimal order. Let M be a maximal subgroup of X and let $N = M^{\pi_\pi}$ be the π -decomposable residual of M . Then N is normal in G . If $N \neq 1$, then X/N and N are π -separable since the hypothesis evidently holds for X/N and N and so in this case X is π -separable by the choice of X . Therefore every maximal subgroup M of X is π -decomposable and so G is minimal non- π -decomposable group. Then G is a Schmidt group by the Belonogov result [10] and so soluble. This contradiction completes the proof of the result.

Proof of Theorem 1.5. It is enough to show that if $G/N_\pi(G)$ is meta- π -decomposable, then also G is meta- π -decomposable. Assume that this is false and let G be a counterexample of minimal order. Then $N_\pi(G) \neq 1$.

Let R be a minimal normal subgroup of G . Then $RN_\pi(G)/R \leq N_\pi(G/R)$ by Lemma 2.2. Moreover,

$$G/RN_\pi(G) \simeq (G/N_\pi(G)/(RN_\pi(G)/N_\pi(G))) \in \mathfrak{N}_\pi$$

since the class of all meta- π -decomposable groups is a homomorph. Therefore the hypothesis holds for G/R , so the choice of G implies that G/R is meta- π -decomposable. Hence

$$(G/R)^{\pi_\pi} = G^{\pi_\pi}R/R \simeq G^{\pi_\pi}/(G^{\pi_\pi} \cap R),$$

is π -decomposable. Therefore $R \leq G^{\pi_\pi}$ and G^{π_π}/R is π -decomposable. If G has a minimal normal subgroup $N \neq R$, then G^{π_π}/L is also π -decomposable and so $G^{\pi_\pi} \simeq G^{\pi_\pi}/(R \cap L)$ is π -decomposable and so G is meta- π -decomposable, contrary to the choice of G . Therefore R is the unique minimal normal subgroup of G , so $R \leq N_\pi(G)$ since $N_\pi(G) \neq 1$. It is clear also that $R \not\leq \Phi(G)$ and so for some maximal subgroup M of G we have $G = RM$ and $M_G = 1$. Moreover, $M^{\pi_\pi} \neq 1$ since G is not meta- π -decomposable and R is π -decomposable in view of Theorem 1.4 and the inclusion $R \leq N_\pi(G)$. Now observe that $R \leq N_G(M^{\pi_\pi})$ and so M^{π_π} is normal in G . Hence $M_G \neq 1$. This contradiction completes the proof of the result.

Proof of Theorem 1.6. Assume that this theorem is false and let G be a counterexample of minimal order.

(1) For every proper subgroup E of G we have $l_p(E) \leq 1$.

Let x be an element of E of order p . Then $x \in N_p(G) \cap E \leq N_p(E)$ by Lemma 2.1. Therefore the hypothesis holds for E , so $l_p(E) \leq 1$ by the choice of G .

(2) $O^{p'}(G) = G$, so for some normal subgroup V of G we have $|G:V| = p$.

Assume that $O^{p'}(G) < G$. Then $l_p(O^{p'}(G)) \leq 1$ by Claim (1) and so $O^{p'}(G)/O_{p',p}(O^{p'}(G))$ is a p' -group, where $O_{p',p}(O^{p'}(G))$ is characteristic in $O^{p'}(G)$ and hence normal in G . But then $G/O_{p',p}(G)$ is a p' -group and so $l_p(G) \leq 1$. This contradiction completes the proof of the fact that $O^{p'}(G) = G$ and so we have (2) since G is p -soluble.

(3) $O_{p'}(G) = 1$. Hence $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$.

Assume that $O_{p'}(G) \neq 1$. Then for every element $a/O_{p'}(G)$ of $G/O_{p'}(G)$ order p , there is an element x of G of order p such that $a/O_{p'}(G) = x/O_{p'}(G)$. Then $x \in N_p(G)$, so $a/O_{p'}(G) = x/O_{p'}(G) \in N_p(G/O_{p'}(G))$ by Lemma 2.2. Therefore the hypothesis holds for $G/O_{p'}(G)$ and so $l_p(G/O_{p'}(G)) \leq 1$ by the choice of G . But then $l_p(G) \leq 1$, a contradiction. Hence $O_{p'}(G) = 1$, so $O_{p',p}(G) = O_p(G)$. Therefore we have $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$ since G is p -soluble by hypothesis.

(4) G is q -nilpotent for every prime $q \neq p$.

Assume that this is false and let A be a minimal non- q -nilpotent subgroup of G . Then A is a q -closed Schmidt group by [11, IV, Satz 5.4] and, by [12, V, Theorem 26.1], for a Sylow q -subgroup Q of A we have $Q = A^{\mathfrak{N}}$. It is clear that, in fact, $Q = A^{\mathfrak{N}_{\{p\}}}$ and so $\Omega_1(O_p(G)) \leq N_G(Q)$. Then $Q \leq C_G(\Omega_1(O_p(G)))$ and so $Q \leq C_G(O_p(G))$ by [11, IV, Satz 5.12], contrary to (3). Hence we have (4).

The final contradiction. From Claim (4) we get that G is p -closed. But then $l_p(G) = 1$, contrary to the choice of G . This final contradiction completes the proof of the result.

References

1. Guo W. On σ -supersoluble groups and one generalization of CLT -groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – V. 512 (1). – P. 92–108.
2. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – V. 436. – P. 1–16.
3. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – V. 495 (1). – P. 114–129.
4. Chi Z. On Σ_i^σ -closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Ukrainian Math. J. – 2018. – № 12. – P. 1707–1716.
5. Chi, Z. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Commun. Algebra – 2019. – № 47 (1). – P. 957–968.
6. Chi, Z. A generalization of the Kramer's theory / Z. Chi, A.N. Skiba // Acta Math. Hungarica. – 2019. – V. 158, is. 1. – P. 87–99.
7. Baer, R. Der Kern eine charakteristische Untergruppe / R. Baer // Compos. Math. – 1935. – V. 1. – P. 254–283.
8. Baer, R. Norm and hypernorm / R. Baer // Publ. Math. Debrecen. – 1956. – V. 4. – P. 347–350.
9. Shen, Z. On the norm of the nilpotent residuals of all subgroups of a finite group / Z. Shen, W. Shi, G. Qian // J. Algebra. – 2012. – V. 352. – P. 290–298.
10. Belonogov, V.A. Finite groups all of whose 2-maximal subgroups are π -decomposable / V.A. Belonogov // Trudi Instituta Matematiki i Mekhaniki Uro RAN. – 2014. – V. 20 (2). – P. 29–43.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1967. – 793 p.
12. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow : Nauka, 1978. – 272 p.

УДК 517.538.5+517.538.6

Критерий единственности и детерминантные представления многочленов Эрмита-Паде первого рода

А.П. СТАРОВОЙТОВ, Н.В. РЯБЧЕНКО

В работе введены новые понятия: вполне нормальный индекс и вполне совершенная система функций. С помощью этих понятий доказан критерий единственности решения задачи Эрмита-Паде, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита-Паде 1-го рода для произвольной системы степенных рядов. Полученные результаты дополняют хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита-Паде.

Ключевые слова: задача Эрмита-Паде, многочлены Эрмита-Паде, нормальный индекс, совершенная система функций, определители Ганкеля.

New concepts are introduced in the work. They are quite normal index and a quite perfect system of functions. Using these concepts, the criterion for the uniqueness of the solution of the Hermite-Padé problem is proved, explicit determinant representations of type I Hermite-Padé polynomials for an arbitrary system of power series were obtained. The results obtained complement and generalize the well-known result in the theory of Hermite-Padé approximations.

Keywords: Hermite-Padé polynomials, normal index, perfect system, Hadamard determinant, Hankel determinant.

1. Введение. Постановка задачи. Для произвольного фиксированного натурального числа k рассмотрим набор $f = (f_1, \dots, f_k)$ степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами. Множество k -мерных мультииндексов (индексов), т. е. упорядоченных k натуральных чисел, обозначим $\mathbb{N}^k$. Порядок индекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ это сумма $|n| := n_1 + \dots + n_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{N}^k$, и рассмотрим следующую задачу Эрмита-Паде (см. [1; гл. 4, § 1], [2]–[4]).

Задача ЭП. Для f и индекса n найти такой набор неравных тождественно нулю одновременно многочленов $A_1 = A_n^1, \dots, A_k = A_n^k$, что $\deg A_1 \leq n_1 - 1, \dots, \deg A_k \leq n_k - 1$ и

$$L_n(z) := \sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) = c_n z^{|n|-1} + \dots \quad (1.2)$$

В случае, когда $f = (f_1, 1)$ решение поставленной задачи получено Паде, который нашел явный вид многочленов A_1, A_2 (их называют многочленами Паде). Например, если положить $n_1 = m + 1$, $n_2 = n + 1$, то [2, гл. 4, § 1.1, теорема 1.1.1]

$$A_1(z) = \begin{vmatrix} f_{n-m+1}^1 & f_{n-m+2}^1 & \dots & f_n^1 & f_{n+1}^1 \\ f_{n-m+2}^1 & f_{n-m+3}^1 & \dots & f_{n+1}^1 & f_{n+2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m-1}^1 & f_{n+m}^1 \\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

Здесь и далее при $i < 0$ считаем, что $f_i^j = 0$.

Если f состоит из набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные комплексные числа, то решения поставленной задачи в явном виде были найдены Эрмитом в его известной рабо-

те [4], посвященной доказательству трансцендентности числа e . В этом случае искомые многочлены были представлены Эрмитом в виде интегралов Коши.

Хорошо известно (см. [1, гл. 4, § 1]), что решение задачи Эрмита-Паде существует, но не единственно. В частности многочлены A_j находятся с точностью до мультипликативного множителя: если набор $A = (A_1, \dots, A_k)$ удовлетворяет необходимым условиям, то для любого отличного от нуля комплексного числа λ набор $\lambda A = (\lambda A_1, \dots, \lambda A_k)$ также удовлетворяет условиям задачи. Эта неединственность может быть и более существенной.

Пример 1.1. Пусть $k=1$, $n=(3,3)$, a

$$f(z) = \frac{1}{2-4z} = \frac{1}{2} + z + 2z^2 + 4z^3 + 8z^4 + \dots$$

Тогда любое решение задачи ЭП представимо в виде: $(\lambda A_1, \lambda A_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$,

$$A_1(z) = a + bz - (4a + 2b)z^2, \quad A_2(z) = \frac{1}{2}a + (a + \frac{1}{2}b)z,$$

где a, b произвольные действительные числа, неравные нулю одновременно.

Принято говорить [1], что задача Эрмита-Паде имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде: λA , где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а $A = (A_1, \dots, A_k)$ – некоторое фиксированное решение.

Определение 1.1. Если $A = (A_1, \dots, A_k)$ – решение задачи ЭП с индексом $n \in \mathbb{N}^k$, то многочлены $A_1, \dots, A_k$ называют многочлены Эрмита-Паде 1 рода (Latin Type) для набора (системы) f степенных рядов (1.1).

Центральными понятиями в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы [1, гл. 4, § 1].

Определение 1.2. Индекс $n \in \mathbb{N}^k$ называется нормальным для f , если для любого решения задачи ЭП с индексом n

$$\deg A_j = n_j - 1, \quad j = 1, \dots, k.$$

Определение 1.3. Система f называется совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{N}^k$ являются нормальными для f .

При $k=2$, $f = (f_1, 1)$ критерий нормальности индекса $(n_1, n_2) := (m+1, n+1)$ выражается условием [4]:

$$H_{n+1, m} \cdot H_{n, m+1} \neq 0, \quad (1.4)$$

где определители Адамара $H_{n, m}$ определяются равенствами

$$H_{n, m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1}^1 & f_{n-m+2}^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m-1}^1 \end{vmatrix}.$$

Известно, что если индекс n нормальный для f , то задача ЭП имеет единственное решение. Следующий пример показывает, что уже при $k=2$ нормальность индекса n не является необходимым условием единственности решения поставленной задачи.

Пример 1.2. Пусть $k=2$, $n=(3,3)$, $f = (f_1, 1)$, a

$$f_1(z) = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4}z = \frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32} + \dots$$

Тогда любое решение задачи ЭП можно записать в виде: $(\lambda A_1, \lambda A_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, где

$$A_1(z) = 8 - 4z, \quad A_2(z) = -4 - 2z + z^2.$$

При этом индекс $n = (3,3)$ не является нормальным, так как $\deg A_1 = 1$.

Нашей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс n и систему f , определенную равенством (1.1), при которых решение задачи ЭП является единственным.

2. Основные определения и обозначения. Набор $f = (f_1, \dots, f_k)$ может состоять, вообще говоря, из формальных степенных рядов. Уже по этой причине поставленная задача является чисто алгебраической и, следовательно, имеет алгебраическое решение. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что радиусы сходимости всех рядов (1.1) не равны нулю.

Введем необходимые обозначения. Для фиксированного мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ и $j = 1, \dots, k$ определим матрицы-столбцы порядка $(|n| - 1) \times 1$

$$F_i^j = \begin{pmatrix} f_{1-i}^j & f_{2-i}^j & \dots & f_{|n|-i-1}^j \end{pmatrix}^T, \quad i = 1, \dots, n_j,$$

и матрицы порядка $(|n| - 1) \times n_j$

$$F^j = \begin{pmatrix} F_1^j & F_2^j & \dots & F_{n_j}^j \end{pmatrix},$$

где C^T является матрицей, транспонированной к матрице C . Далее рассмотрим матрицу порядка $(|n| - 1) \times |n|$

$$F_n = \begin{pmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k \end{pmatrix}$$

и функциональные матрицы-строки порядка $1 \times |n|$

$$E_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & \dots & z^{n_1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & z & \dots & z^{n_2-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$E_k(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & z & \dots & z^{n_k-1} \end{pmatrix},$$

$$E(z) = E_1(z) + E_2(z) + \dots + E_k(z).$$

Если в матрице F_n добавить в качестве последней строки строку $E_j(z)$, то получим квадратную матрицу порядка $|n| \times |n|$. Определитель этой матрицы обозначим через $A_j(z)$. Тогда при $j = 1, 2, \dots, k$

$$A_j(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & \dots & 0 & \dots & f_0^j & 0 & \dots & 0 & \dots & f_0^k & \dots & 0 \\ f_1^1 & \dots & 0 & \dots & f_1^j & f_0^j & \dots & 0 & \dots & f_1^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_j-1}^1 & \dots & f_{n_j-n_1}^1 & \dots & f_{n_j-1}^j & f_{n_j-2}^j & \dots & f_0^j & \dots & f_{n_j-1}^k & \dots & f_{n_j-n_k}^k \\ f_{n_j}^1 & \dots & f_{n_j-n_1+1}^1 & \dots & f_{n_j}^j & f_{n_j-1}^j & \dots & f_1^j & \dots & f_{n_j}^k & \dots & f_{n_j-n_k+1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & \dots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \dots & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-3}^j & \dots & f_{|n|-n_j-1}^j & \dots & f_{|n|-2}^k & \dots & f_{|n|-n_k-1}^k \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & z & \dots & z^{n_j-1} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

Если в определителе (2.1) последнюю строку заменить матрицей-строкой

$$F_i^n = \begin{pmatrix} f_{i+|n|-2}^1 & f_{i+|n|-3}^1 & \dots & f_{i+|n|-n_1-1}^1 & \dots & f_{i+|n|-2}^k & f_{i+|n|-3}^k & \dots & f_{i+|n|-n_k-1}^k \end{pmatrix},$$

то полученный определитель обозначим через $d_{n,i}$.

Определение 2.1. Индекс $n \in \mathbb{N}^k$ назовем вполне нормальным для f , если ранг матрицы F_n равен $|n| - 1$.

В примере 1.1 индекс $n = (3, 3)$ не является нормальным и не является вполне нормальным, а в примере 1.2 этот индекс не является нормальным, но является вполне нормальным для рассматриваемых в этих примерах систем функций.

Определение 2.2. Систему f назовем вполне совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{N}^k$ являются вполне нормальными для f .

Далее будет показано, что любая совершенная система f является вполне совершенной. Из примера 1.2 следует, что обратное утверждение вообще говоря неверно.

3. Критерий единственности задачи Эрмита-Паде. Сформулируем и докажем основную теорему данной работы.

Теорема 1. Для того, чтобы для заданного индекса $n \in \mathbb{N}^k$ задача Эрмита-Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным для f , т. е. $\text{rang } F_n = |n| - 1$.

В случае, если индекс n является вполне нормальным, при определенном выборе мультипликативного множителя справедливы следующие детерминантные представления:

$$A_j(z) := \det \begin{bmatrix} F_n & E_j(z) \end{bmatrix}^T = \det \begin{bmatrix} F_n \\ E_j(z) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, k; \quad (3.1)$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} d_{n,i} z^{i+|n|-2}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Пусть

$$A_j(z) = b_0^j + b_1^j z + \dots + b_{n_j-1}^j z^{n_j-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Опираясь на равенство (1.2), запишем в матричной форме систему уравнений для определения коэффициентов многочлена $A_j(z)$:

$$F_n \times b^T = \theta^T, \quad (3.3)$$

где

$$b = (b_0^1 \ b_1^1 \ \dots \ b_{n_1-1}^1 \ \dots \ b_0^k \ b_1^k \ \dots \ b_{n_k-1}^k) -$$

матрица-строка порядка $1 \times |n|$, а θ – матрица-строка порядка $1 \times |n|$, все элементы которой равны нулю.

Система линейных уравнений (3.3) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений. Поэтому из теоремы Кронекера-Капелли следует, что система (3.3) имеет ненулевое решение, а множество всех линейно независимых решений этой системы состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rang } F_n = |n| - 1$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на комплексное число $\lambda \neq 0$. Заметим, что если все коэффициенты рядов (1.1) действительные числа, то решения системы (3.3) также будут действительными числами. Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем теперь равенства (3.1), (3.2). Так как $\text{rang } F_n = |n| - 1$, то при некотором $p \in \{1, 2, \dots, |n|\}$ определитель, полученный из матрицы F_n , вычеркиванием в ней p -го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = |n|$. Тогда систему (3.3) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & 0 & \dots & 0 & \dots & f_0^k & 0 & \dots & 0 \\ f_1^1 & f_0^1 & \dots & 0 & \dots & f_1^k & f_0^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n_k-1}^1 & f_{n_k-2}^1 & \dots & f_{n_k-n_1}^1 & \dots & f_{n_k-1}^k & f_{n_k-2}^k & \dots & f_1^k \\ f_{n_k}^1 & f_{n_k-1}^1 & \dots & f_{n_k-n_1+1}^1 & \dots & f_{n_k}^k & f_{n_k-1}^k & \dots & f_2^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{|n|-3}^1 & f_{|n|-4}^1 & \dots & f_{|n|-n_k-2}^1 & \dots & f_{|n|-3}^k & f_{|n|-4}^k & \dots & f_{|n|-n_k-1}^k \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-3}^1 & \dots & f_{|n|-n_k-1}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-3}^k & \dots & f_{|n|-n_k}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^1 \\ \vdots \\ b_{n_k-1}^1 \\ \vdots \\ b_0^k \\ \vdots \\ b_{n_k-2}^k \end{pmatrix} = -b_{n_k-1}^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_0^k \\ f_1^k \\ \vdots \\ f_{|n|-n_k-1}^k \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Обозначим главный определитель системы (3.4) через $H_n^{n_k}$. По нашему предположению $H_n^{n_k} \neq 0$. Если бы $b_{n_k-1}^k = 0$, то система (3.4) имела бы единственное нулевое решение. Тогда бы и система (3.3) имела только нулевое решение. Поэтому $b_{n_k-1}^k \neq 0$. Решая систему (3.4) по правилу Крамера, получим решение, которое символически можно записать в виде:

$$\det[F_n \ E(z)]^T = A_1(z) + \dots + A_k(z), \quad (3.5)$$

где $A_j(z)$ определяются равенствами (3.1), которые в развернутом виде совпадают с (2.1). В случае, если бы вместо $p = |n|$ вычеркивали столбец матрицы F_n с другим номером, рассуждая аналогичным образом, пришли бы к символической записи решения в виде (3.5).

Докажем, что многочлены $A_j(z)$, $j = 1, \dots, k$, определенные равенствами (2.1) и (3.1) действительно являются искомыми многочленами. Разложив определитель в (2.1) по элементам последней строки, получим, что $\deg A_j(z) \leq n_j - 1$. Остается доказать выполнение условий (1.2). Заметим, что

$$L_n(z) = \sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & 0 & \dots & 0 & \dots & f_0^k & 0 & \dots & 0 \\ f_1^1 & f_0^1 & \dots & 0 & \dots & f_1^k & f_0^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-3}^1 & \dots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-3}^k & \dots & f_{|n|-n_k-1}^k \\ \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i & \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^{i+1} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^{i+n_1-1} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i & \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^{i+1} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^{i+n_k-1} \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе из последней строки вычтем: первую строку, умноженную на 1, вторую строку, умноженную на z , и так далее вплоть до предпоследней строки, умноженной на $z^{|n|-2}$. Тогда

$$L_n(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & 0 & \dots & 0 & \dots & f_0^k & \dots & 0 \\ f_1^1 & f_0^1 & \dots & 0 & \dots & f_1^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-3}^1 & \dots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & \dots & f_{|n|-n_k+1}^k \\ \sum_{i=|n|-1}^{\infty} f_i^1 z^i & \sum_{i=|n|-1}^{\infty} f_{i-1}^1 z^i & \dots & \sum_{i=|n|-1}^{\infty} f_{i-n_1+1}^1 z^i & \dots & \sum_{i=|n|-1}^{\infty} f_i^k z^i & \dots & \sum_{i=|n|-1}^{\infty} f_{i-n_k+1}^k z^i \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}}{z^{i+|n|-2}}.$$

При преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Равенство (3.2) и теорема 1 доказаны.

Заметим, что если хотя бы один ряд в (1.1) является формальным, то и ряд (3.2) является формальным.

4. Замечание и некоторые следствия. Если индекс $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ является вполне нормальным, то его n_j -ая компонента определяет число коэффициентов ряда f_j , которое учитывается при построении многочленов A_j и функции L_n .

Все предыдущие утверждения также остаются в силе, если некоторые компоненты индекса n равны нулю. Пусть, например, $n_j = 0$. В этом случае в матрице F_n отсутствует блок F^j и, следовательно, при построении многочленов A_j (см. равенства (3.1)) коэффициенты ряда f_j не учитываются, а порядок мультииндекса n определяется остальными ненулевыми компонентами.

В частности, если $n = (n_1, n_2, 0, \dots, 0)$, то при построении многочленов $(A_j)_{j=1}^k$ учитываются только коэффициенты рядов f_1, f_2 , и если $f_2(z) \equiv 1$, то, например, многочлен A_1 согласно равенству (3.1) с точностью до мультипликативного множителя представим в виде:

$$A_1(z) = \begin{vmatrix} f_{n_2}^1 & f_{n_2-1}^1 & \cdots & f_{n_2-n_1+1}^1 \\ f_{n_2+1}^1 & f_{n_2}^1 & \cdots & f_{n_2-n_1+2}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_2+n_1-2}^1 & f_{n_2+n_1-3}^1 & \cdots & f_{n_2-1}^1 \\ 1 & z^2 & \cdots & z^{n_1-1} \end{vmatrix}.$$

Это полностью согласуется с равенством (1.3). В этом случае $A_j(z) \equiv 0$ при $j = 3, \dots, k$. Если же $n = (n_1, 0, \dots, 0)$, то из (3.1) следует, что с точностью до мультипликативного множителя $A_1(z) = z^{n_1-1}$, $A_j(z) \equiv 0$ при $j = 2, \dots, k$.

Заметим также, что если индекс n не является вполне нормальным, то многочлены A_j , определенные равенствами (3.1), не являются решениями задачи Эрмита-Паде, так как все они тождественно равны нулю. В частности, в примере 1.1 $A_1(z) = a + bz - (4a + 2b)z^2$. Однако, если A_1 находится по формуле (3.1), то получим, что $A_1(z) \equiv 0$.

Из (3.1) вытекает критерий нормальности индекса $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ для системы f при любых натуральных k .

Следствие 4.1. Индекс n будет нормальным для f тогда и только тогда, когда

$$\prod_{j=1}^k H_n^{n_j} \neq 0, \quad (3.6)$$

где $H_n^{n_j}$ – определитель, полученный из определителя (2.1) вычеркиванием последней строки и столбца, в котором находится элемент z^{n_j-1} .

Нетрудно заметить, что если $f = (f_1, 1)$ и $(n_1, n_2) = (n+1, m+1)$ то (3.6) равносильно $H_{n+1, m} \cdot H_{n, m+1} \neq 0$. Поэтому следствие 4.1 согласуется с критерием нормальности (1.4).

Литература

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Соколин. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
2. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986. – 502 с.
3. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суевин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.
4. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. – 1873. – V. 77. – P. 18–293.

УДК 539.374

Свободные колебания трехслойной круговой пластины на инерционном основании при действии температуры

Д.В. ЛЕОНЕНКО

Рассмотрены свободные колебания трехслойной круглой пластины на упругом инерционном основании под действием температуры. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета принята гипотеза ломаной нормали. Заполнитель – легкий. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Для упругого инерционного основания принята гипотеза Винклера. Найдены аналитические решения соответствующих начально-краевых задач и проведен их численно-сравнительный анализ.

Ключевые слова: колебания, круговая пластина, температура, основание.

Free vibrations of a three-layer circular plate in an elastic inertial foundation under the action of temperature are considered. To describe the kinematics of the package, asymmetric across its thickness, the hypotheses of broken normal are assumed. The filler is light. The displacement continuity conditions are used on the boundaries of contact. The Winkler hypothesis is accepted for the elastic inertial foundation. Analytical solutions of the corresponding initial-boundary-value problems are found, and their numerical-comparative analysis is carried out.

Keywords: vibrations, circular plate, temperature, foundation.

1. Введение. Широкое применение трехслойных конструкций обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Расчеты многослойных, в том числе трехслойных элементов конструкций, приведены в монографиях [1], [2]. В работах [3]–[5] рассмотрено деформирование трехслойных оболочек и стержней в температурном поле. Колебания круговой трехслойной пластины на безынерционном основании в изотермической постановке приведено в статье [6].

Здесь приводится постановка и решение краевой задачи о свободных колебаниях трехслойной круговой пластины, связанной с инерционным основанием, при действии температуры.

2. Постановка краевой задачи. Рассмотрим свободные симметричные колебания сплошных несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин круговой формы с легким заполнителем, скрепленных с упругим инерционным основанием. Тонкие наружные слои являются несущими, они выполнены из достаточно прочного материала. Менее прочный легкий заполнитель большой толщины разносит несущие слои на заданное расстояние по высоте пластины и обеспечивает совместную работу несущих слоев. В отличие от жесткого заполнителя, легкий заполнитель не работает в тангенциальном направлении.

Выполним постановку задачи с использованием гипотез, введенных в [2] для трехслойных круговых пластин, не связанных с упругим основанием. Решение задачи проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z . За координатную примем срединную плоскость заполнителя, ось z направим перпендикулярно вверх, к слою 1. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси z , считается слоем 1, следующий несущий слой – слоем 2, а заполнитель – слоем 3 (рисунок 1).

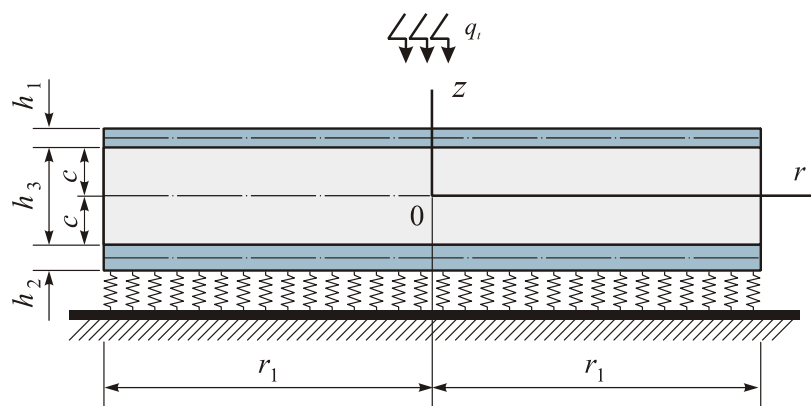


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого заполнителя ($h_3 = 2c$) справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

К наружной поверхности первого несущего слоя подводится тепловой поток интенсивности q_t . К нижней поверхности второго несущего слоя приложена реакция инерционного основания Винклера q_r . На контур пластины ($r = r_1$) действуют силы и моменты T_r^1 , H_r^1 , M_r^1 , Q^1 .

Искомые функциями являются:

w – прогиб срединной плоскости заполнителя пластины;

ψ – относительный сдвиг в заполнителе;

u – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя.

Так как рассматривается осесимметричная задача, то искомые функции не зависят от координаты φ , то есть $u = u(r, t)$; $\psi = \psi(r, t)$; $w = w(r, t)$.

Считаем поверхность $z = -c - h_2$ и контур пластины теплоизолированными. Это допущение позволяет с достаточной точностью вычислять неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , по формуле (1.111) из [2]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\},$$

где $\tau = at / H^2$; $s = z / H$; $a = \lambda / C$; $\lambda = \lambda_k h_k / H$; $C = \rho_k C_k h_k / H$; $a_k = \lambda_k / (C_k \rho_k)$ – температуропроводность k -го слоя; λ_k , C_k – коэффициенты теплопроводности и теплоемкости k -го слоя; ρ_k – плотность материала k -го слоя.

Температуру в слоях пластины в дальнейшем считаем известной и постоянной во времени.

Так как задача осесимметрична, тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:

$$u_{\varphi}^{(k)} = 0 \quad (k=1, 2, 3 - \text{номер слоя}).$$

Радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ выразим через искомые функции соотношениями:

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Для получения уравнений движения используем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [7]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W - A) dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta W - \delta A) dt = 0, \quad (2)$$

где $A = A_1 + A_2$ – суммарная потенциальная энергия реакции упругого основания и контурных усилий, W – потенциальная энергия деформации, K – кинетическая энергия системы.

Вариации потенциальной энергии реакции упругого основания и потенциальной энергии контурных усилий T_r^1 , H_r^1 , M_r^1 , Q^1 , воздействующих на контур пластины,

$$\delta A_1 = - \iint_S (-q_r) \delta w r dr d\varphi; \quad \delta A_2 = -r_1 \int_0^{2\pi} (T_r^1 \delta u + H_r^1 \delta \psi + M_r^1 \delta w_{,r} + Q^1 \delta w) d\varphi. \quad (3)$$

Суммарная вариация кинетической энергии трехслойного пакета равна:

$$\delta K = \iint_S [M_0 \dot{u} \delta \dot{u} + M_1 \dot{\psi} \delta \dot{\psi} + M_2 \dot{w}_{,r} \delta \dot{w}_{,r} + M_0 \dot{w} \delta \dot{w}] r dr d\varphi, \quad (4)$$

где

$$M_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 2\rho_1 c, \quad M_1 = \rho_1 h_1 c^2 + \rho_2 h_2 c^2 + \frac{2}{3} \rho_3 c^3, \\ M_2 = \rho_1 h_1 (c^2 + c h_1 + h_1^2 / 3) + \rho_2 h_2 (c^2 + c h_2 + h_2^2 / 3) + \frac{2}{3} \rho_3 c^3.$$

Вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi. \quad (5)$$

Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой

$$q_r = \kappa_0 w + m_f \ddot{w}, \quad (6)$$

где κ_0 – коэффициент жесткости, m_f – массовый член (удельная масса) упругого основания.

Связь напряжений и деформаций в слоях принимаем в соответствии с законом Гука

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (k=1, 2, 3), \\ s_{rz}^{(3)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \quad (7)$$

где s_α^k , ε_α^k – девиаторы напряжений и деформаций соответственно; σ^k – шаровое напряжение в k -ом слое; θ^k – объемная деформация k -ом слое; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования; T_k – известная температура k -го слоя; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Используя соотношения (7), (2)–(5), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую свободные поперечные колебания круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим инерционным основанием Винклера (6):

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w - M_0^* \ddot{w} = 0, \quad (8)$$

где M_0^* – удельная масса пластины и основания:

$$M_0^* = M_0 + m_f.$$

Здесь коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 , L_3 совпадают с соотношениями, введенными в [2] для термоупругой пластины. В системе (8) учли только массовый член M_0 , отвечающий поперечным колебаниям.

В качестве начальных примем следующие условия ($t = 0$)

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (9)$$

Начально-краевая задача замыкается присоединением к (8) граничных и начальных условий (9).

3. Решение начально-краевой задачи. Упростим систему (8), приведя ее к виду

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r,$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r,$$

$$\Delta \Delta w + \kappa^4 w + M^4 \ddot{w} = 0.$$

Здесь

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad M^4 = M_0^* D,$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Так как перемещения в центре пластины ($r = 0$) конечны, то принимаем $C_2 = C_4 = 0$.

Для решения задачи составляем ряды:

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad (10)$$

и требуем выполнения начальных условий движения (9).

Собственные колебания пластины описываются системой собственных функций:

$$v(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right],$$

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[J_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (I_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\lambda_n r)) \right]. \quad (11)$$

Собственные числа λ_n вычисляются из характеристических уравнений, составленных для конкретных граничных условий закрепления пластины.

После вычисления параметров λ_n частоты собственных колебаний вычисляются по формулам:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad \beta_n^4 = \lambda_n^4 + \kappa^4. \quad (12)$$

Здесь следует отметить, что частоты колебаний в каждом из рассмотренных случаев будут зависеть от собственных чисел, геометрических и упругих параметров слоев пластины, а также от коэффициента жесткости основания.

Функция времени

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t), \quad (13)$$

где A_n и B_n – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

Коэффициенты A_n, B_n следуют из (9)

$$A_n = \int_0^{r_1} f(r) v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{r_1} g(r) v_n r dr.$$

Таким образом, перемещения при свободных колебаниях описываются выражениями (10) с учетом систем функций (11) и выражений (13).

4. Численные результаты Числовые результаты получены для круговых трехслойных пластин со следующими характеристиками: радиус пластины $r_1 = 1$; толщины слоев: $h_1 = h_2 = 0,02$; $h_3 = 0,1$; материал несущего слоя – алюминиевый сплав Д16Т, материал заполнителя – фторопласт. При численном исследовании считаем, что все слои пластины нагреваются равномерно на одинаковую температуру.

Частоты собственных колебаний, вычисленные с помощью выражений (12), зависят от геометрических и упругих параметров слоев пластины, а также от коэффициента жесткости основания.

Первые 15 частот для пластины из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т приведены в таблице 1.

Таблица 1– Собственные частоты для заземленной по контуру пластины, с^{-1}

Номер n	Собственная частота ω_n			Номер n	Собственная частота ω_n		
	T = 293 К	T = 343 К	T = 393 К		T = 293 К	T = 343 К	T = 393 К
0	265	262	261	8	10609	10204	9937
1	574	556	544	9	13103	12604	12274
2	1203	1159	1129	10	15852	15247	14848
3	2110	2031	1978	11	18862	18143	17668
4	3284	3160	3077	12	22134	21290	20733
5	4722	4542	4424	13	25667	24689	24043
6	6399	6155	5994	14	29463	28339	27598
7	8384	8065	7854				

С увеличением температуры частоты уменьшаются. На первую частоту повышение температуры на 50 К влияет незначительно (порядка 1,1 %). Повышение температуры еще на 50 К уменьшает частоты еще примерно на 0,4 %.

По мере роста номера частоты влияние температуры усиливается. Так, для следующих 14 частот при увеличении температуры на 100 К уменьшение величины частот достигает до 6,3 %. Таким образом, следует отметить, что температура не оказывает существенного влияния на частоты собственных колебаний.

Перемещения пластины на инерционном основании Винклера при свободных колебаниях найдены с помощью выражений (10) с учетом систем функций (11) и выражения (13).

На рисунке 2 показана зависимость прогиба центра пластины из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т на инерционном основании Винклера при различных температурах: 1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 343$ К, 3 – $T = 393$ К. Колебания возбуждены приданием каждой точке пластины в начальный момент времени одинаковой скорости 1 м/с. Увеличение температуры на 100 К приводит к увеличению максимальных амплитуд до 12 %. Это объясняется уменьшением упругих характеристик материалов с ростом температуры, что ведет к уменьшению жесткости конструкции. Таким образом, температурное воздействие достаточно слабо влияет на частоты собственных колебаний, увеличение амплитудных значений перемещений достигает 10–12 %, поэтому численное исследование собственных колебаний можно проводить для изотермической пластины.

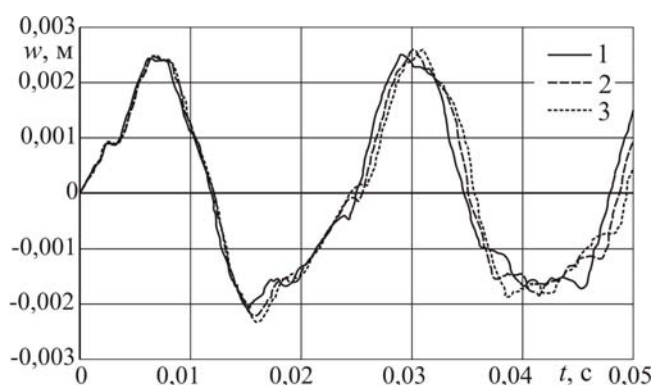


Рисунок 2 – Изменение прогиба центра пластины во времени при различных температурах

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость прогиба центра пластины на инерционном основании Винклера при различных параметрах удельной массы упругого основания ($\kappa_0 = 50$ МПа/м): 1 – $m_f = 0$ (безынерционное основание), 2 – $m_f = 500$ кг/м², 3 – $m_f = 1000$ МПа/м, 4 – $m_f = 1500$ кг/м².

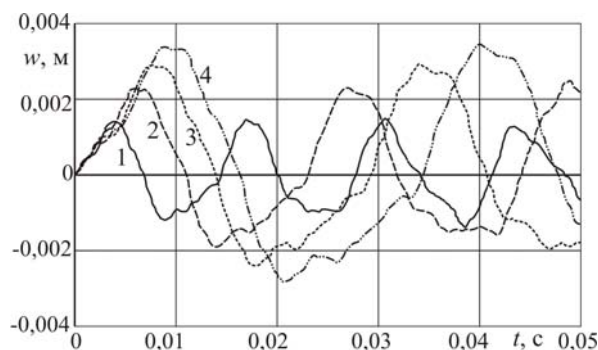


Рисунок 3 – Изменение прогиба центра пластины во времени при различной инерционности основания

Увеличение инерционности основания приводит к увеличению амплитуд колебаний и уменьшению периода. Увеличение удельной массы основания с 500 до 1000 кг/м² приводит к увеличению амплитуд до 47 %, а увеличение удельной массы с 1000 до 1500 кг/м² – к увеличению амплитуд до 25 %.

Таким образом, увеличение инерционности основания нелинейно сказывается на амплитудах колебаний.

Заключение. Предложенная методика исследования свободных колебаний трехслойных круговых пластин на упругом основании позволяет учитывать в инженерных расчетах воздействие температуры и инерционность основания. Численные расчеты показали их значительное влияние на амплитудно-частотные характеристики системы «пластина-основание».

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T18P-090).

Литература

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
3. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
4. Леоненко, Д.В. Термосиловое нагружение трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем на упругом основании / Д.В. Леоненко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2018. – № 6 (111). – С. 67–73.
5. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
6. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 86–93.
7. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

УДК 537.862; 537.872.31

Излучение заряженной частицы, движущейся через плоскую периодическую структуру, образованную параллельными нитями

И.В. МОРОЗ, Е.А. ГУРНЕВИЧ

Теоретически рассмотрено излучение, возникающее при движении заряженной частицы через периодическую структуру, состоящую из двух плоских дифракционных решеток с разными периодами, образованных параллельными нитями. Получено аналитическое выражение для спектрально-углового распределения излучения. Показано, что угловое распределение излучения в случае наличия двух дифракционных решеток существенно более узкое по сравнению со случаем одной решетки. Кроме того, появляется возможность управлять интенсивностью излучения путем относительного параллельного сдвига решеток. Полученные результаты имеют большое значение для исследования и развития источников излучения, основанных на объемных лазерах на свободных электронах.

Ключевые слова: терагерцовое излучение, периодическая структура, лазеры на свободных электронах.

The radiation of a charged particle moving in a periodic structure is analyzed theoretically. The considered structure consists of two planar diffraction gratings with different periods which are formed by parallel conducting wires. The analytical expression for the spectral-angular distribution of radiation is obtained. It is shown that the angular distribution of radiation can be made narrower by using two gratings instead of one, and radiation intensity can be manipulated by parallel relative shift of gratings. The results obtained are of great importance for the research and development of high power radiation sources based on volume free-electron lasers.

Keywords: terahertz radiation, periodic wire structure, free-electron lasers.

Введение. В настоящее время во всем мире ведется интенсивная разработка новых мощных источников излучения, способных работать в широком спектральном диапазоне от микроволнового и терагерцового до оптического и рентгеновского, а также с возможностью перестройки частоты. Это обусловлено широкой областью применения такого излучения для исследовательских и практических целей: в биологии и химии, для неионизирующей диагностики и медицины, для космических исследований, для современных систем безопасности и высокоскоростной связи, для экологического мониторинга и др. [1], [2].

Разработка лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) является одним из перспективных направлений создания перестраиваемых и высокоэффективных источников излучения. Наряду с классическими схемами ЛСЭ (вигтлер, ондулятор и др.) активно исследуются и разрабатываются и другие его реализации (строфотрон – ЛСЭ на колеблющихся в поперечно-неоднородном электростатическом поле электронах, флимагроны – ЛСЭ основанные на черенковском и переходном излучении частиц и др.). Отдельный интерес представляют т. н. объемные ЛСЭ (ОЛСЭ), впервые предложенные в [3]–[6]. Отличительной чертой ОЛСЭ является наличие объемной распределенной обратной связи, позволяющей уменьшить размер устройства и пороговые токи, необходимые для начала генерации. Впервые генерация излучения в такого типа устройствах была получена на экспериментальном прототипе «ОЛСЭ-10» [7], [8], разработанном в НИУ «Институт ядерных проблем» БГУ. Излучение генерировалось электронным пучком, проходящим вблизи одной дифракционной решетки (излучение Смита-Парселла), а другая дифракционная решетка использовалась для формирования распределенной обратной связи.

Для создания источников электромагнитного излучения может использоваться и используется не только индуцированное, но и спонтанное излучение. По этой причине и для общего понимания процессов, происходящих в ОЛСЭ, представляет интерес рассмотреть спонтанное излучение частицей в системе, подобной той, что описана в [7], [8]. В данной статье рассматривается один из возможных вариантов такой системы, представляющий собой две плоские дифракционные решетки, образованные параллельными нитями (рисунок 1). Физические принципы, лежащие в основе работы данной системы, аналогичны описанным в [7], [8], однако в рассматриваемом случае возможно точное аналитическое решение задачи о излучении, что расширяет возможности теоретического исследования и увеличивает его предсказательную силу. Также достоинствами такой системы являются возможность выхода излучения под углом к плоскости структуры и более высокие допустимые электрические поля (меньшее обострение поля на металлических элементах, и, соответственно, более низкая вероятность электрического пробоя).



Рисунок 1 – Геометрия рассматриваемой задачи

Спектрально-угловое распределение спонтанного излучения заряженной частицы, пролетающей через дифракционную решетку, образованную параллельными нитями. Рассмотрим сначала излучение заряженной частицы, движущейся вблизи одной плоской решетки, образованной параллельными нитями (рисунок 2а). Предположим, что частица движется перпендикулярно осям проволок ($\mathbf{v} = (0, 0, v)$).

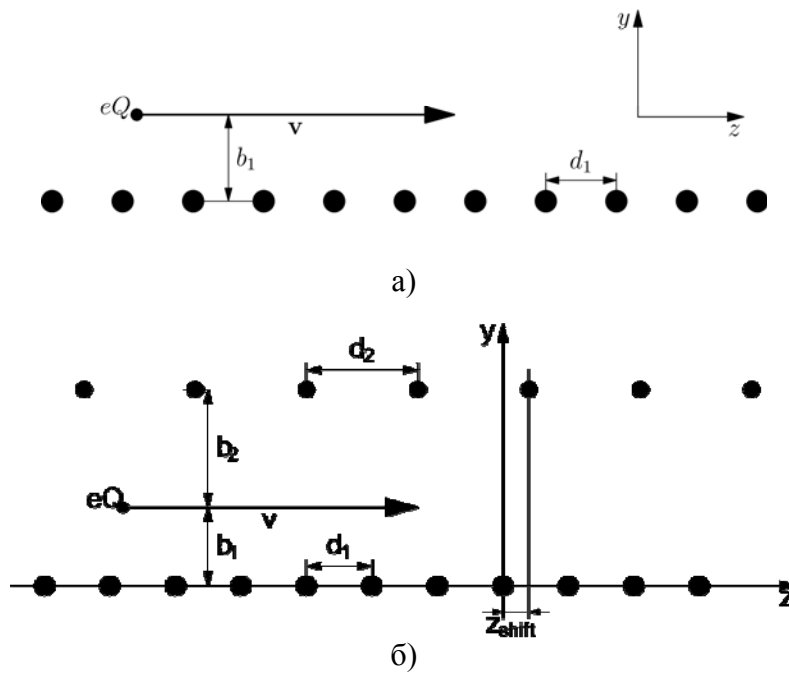


Рисунок 2 – Схематическое представление геометрии задачи для случая одной дифракционной решетки (а) и случая двух дифракционных решеток (б)

Для описания процесса излучения фотонов релятивистской частицей воспользуемся методом, описанным в [9]. Следуя ему, число фотонов, испускаемых частицей в элемент телесного угла $d\Omega$ в интервале частот $d\omega$, определяется выражением

$$\frac{d^2 N}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 Q^2 \omega}{4\pi^2 \hbar c^3} \left| \int \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}(t), \omega) \mathbf{v}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2, \quad (1)$$

где ω – частота излучения, e – элементарный заряд, Q – заряд частицы, $\hbar$ – постоянная Планка, c – скорость света, $\mathbf{k}$ – волновой вектор излученного фотона, $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}(t), \omega)$ – решение однородных уравнений Максвелла, описывающее процесс рассеяния плоской волны единичной амплитуды с волновым вектором $-\mathbf{k}$ на рассматриваемой решетке, $\mathbf{r}(t)$ – траектория частицы, $\mathbf{v}(t)$ – скорость частицы.

Для нахождения $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}(t), \omega)$ в (1) необходимо решить задачу рассеяния плоской волны на исследуемой структуре. Ограничимся случаем изотропного рассеяния электромагнитной волны на отдельной нити. Так как в подынтегральном выражении стоит скалярное произведение электрического вектора на скорость частицы, а скорость частицы имеет только z -компоненту, то достаточно найти z -компоненту вектора $\mathbf{E}$. В соответствии с приведенным в [10] выражением, E_z будет иметь вид:

$$E_z = \frac{k_x k_z}{k_\rho k} e^{-ikr} + \pi F_0 \frac{k_x}{k} e^{-ik_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_z n d_1} H_1(k_\rho \sqrt{(z - n d_1)^2 + b_1^2}) \frac{z - n d_1}{\sqrt{(z - n d_1)^2 + b_1^2}},$$

где k_ρ – компонента вектора $\mathbf{k}$, лежащая в плоскости yz , $\rho = (y, z)$, H_1 – функция Ганкеля первого рода первого порядка, F_0 – амплитуда рассеяния электромагнитной волны на отдельной нити (с учетом многократного перерассеяния на всех остальных нитях), b_1 – прицельный параметр, d_1 – период решетки. Так как решетка предполагается бесконечной, то амплитуда рассеяния F_0 для всех проволок одинаковая, и в соответствии с [1] для амплитуды справедливо следующее уравнение:

$$F_0 = f_0 + i\pi f_0 F_0 \sum_{n \neq 0} e^{-ik_z n d_1} H_0(k_\rho |n| d_1),$$

где f_0 – амплитуда рассеяния на одной нити (без учета перерассеяния). Аналитическое выражение для f_0 при известных диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостях нити можно найти в [11], [12], а метод нахождения суммы рассмотрен в [10]. После подстановки E_z в (1) получим:

$$\frac{d^2 N}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 Q^2}{\hbar c} |F_0|^2 \frac{k_x^2}{k_\rho^2} \frac{\omega}{\omega^2 - k_\rho^2 v^2} e^{-2\frac{b_1}{v} \sqrt{\omega^2 - k_\rho^2 v^2}} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i n d_1 (k_z - \frac{\omega}{v})} \right|^2.$$

Сумму в этом выражении можно найти, рассмотрев сначала сумму с конечным числом слагаемых $2N$, а затем перейдя к пределу $N \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(N\alpha)}{N\alpha^2} \rightarrow \pi \delta(\alpha)$, выражение для спектрально-углового распределения числа фотонов, испущенных частицей на единице длины пути, будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 N}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 Q^2}{\hbar c} |F_0|^2 \frac{k_x^2}{k_\rho^2} \frac{\omega}{\omega^2 - k_\rho^2 v^2} e^{-2\frac{b_1}{v} \sqrt{\omega^2 - k_\rho^2 v^2}} \frac{2\pi}{d_1} \delta(d_1 (\frac{\omega}{v} - k_z) - 2\pi M), \quad (2)$$

где M – целое число. Из выражения (2) следует, что при заданной энергии частицы число испущенных фотонов экспоненциально убывает с увеличением прицельного параметра b_1 . Фактически, число испускаемых фотонов пропорционально величине $e^{\frac{-4\pi b_1}{\lambda \beta \gamma}}$, как и для обычного излучения Смита-Парселла. Таким образом, для получения максимальной интенсивности излучения необходимо выполнение условия $b_1 \ll \frac{4\pi}{\lambda \beta \gamma}$ (при фиксированной энергии частицы необходимо уменьшать прицельный параметр, либо при заданном b_1 следует увеличивать энергию частицы).

Спектрально-угловое распределение спонтанного излучения заряженной частицы, пролетающей через две дифракционные решетки, образованные параллельными нитями. Рассмотрим теперь структуру, состоящую из двух параллельных решеток (рисунок 2б). Решетки могут быть сдвинуты друг относительно друга и иметь различный период. В этом случае при нахождении амплитуд необходимо учесть перерассеяние на каждой решетке, а в выражение для числа фотонов необходимо подставлять результирующее поле от двух решеток.

Для простоты предположим, что отношение периодов решеток есть рациональное число. Тогда с учетом перерассеяния система уравнений для нахождения амплитуд рассеяния для каждой решетки (F_{01} и F_{02}) будет иметь вид:

$$\begin{cases} F_{01} = f_{01} + i\pi f_{01} (F_{01} \sum_{n \neq 0} e^{-ik_z n d_1} H_0(k_\rho |n| d_1) + \\ + F_{02} \sum_n e^{-i(k_y(b_1+b_2)+k_z(z_{shift}+nd_2))} H_0(k_\rho \sqrt{(z_{shift}+nd_2)^2 + (b_1+b_2)^2})); \\ F_{02} = f_{02} + i\pi f_{02} (F_{02} \sum_{n \neq 0} e^{-ik_z n d_2} H_0(k_\rho |n| d_2) + \\ + F_{01} \sum_n e^{i(k_y(b_1+b_2)-k_z(nd_1-z_{shift}))} H_0(k_\rho \sqrt{(nd_1-z_{shift})^2 + (b_1+b_2)^2})); \end{cases}$$

где индексы 1 и 2 обозначают отношение соответствующих величин к первой (нижней на рисунке 2б) или второй (верхней на рисунке 2б) решеткам, z_{shift} – смещение одной дифрак-

ционной решетки относительно другой (максимальная его величина равна меньшему из периодов). Аналогично первому случаю продольная компонента поля будет иметь вид:

$$E_z = \frac{k_x k_z}{k_\rho k} e^{-ikr} + \pi F_{01} \frac{k_x}{k} e^{-ik_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_z n d_1} H_1(k_\rho \sqrt{(z - n d_1)^2 + b_1^2}) \times \\ \times \frac{z - n d_1}{\sqrt{(z - n d_1)^2 + b_1^2}} + \pi F_{02} \frac{k_x}{k} e^{-ik_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_y (b_1 + b_2) - ik_z (n d_2 + z_{shift})} \times \\ \times H_1(k_\rho \sqrt{(z - n d_2 - z_{shift})^2 + b_2^2}) \frac{z - n d_2 - z_{shift}}{\sqrt{(z - n d_2 - z_{shift})^2 + b_2^2}}$$

В результате выражение для спектрально-углового распределения примет вид:

$$\frac{d^2 N}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 Q^2 k_x^2}{\hbar c k_\rho^2} \frac{\omega}{\omega^2 - k_\rho^2 v^2} \{ |F_{01}|^2 e^{-\frac{b_1}{v} \sqrt{\omega^2 - k_\rho^2 v^2}} \frac{2\pi}{d_1} \delta(d_1 (\frac{\omega}{v} - k_z) - 2\pi M_1) + \\ + |F_{02}|^2 e^{-\frac{b_2}{v} \sqrt{\omega^2 - k_\rho^2 v^2}} \frac{2\pi}{d_2} \delta(d_2 (\frac{\omega}{v} - k_z) - 2\pi M_2) + \\ + 2\text{Re}(F_{01} F_{02}^* e^{-ik_y (b_1 + b_2) - iz_{shift} (\frac{\omega}{v} - k_z)}) \frac{2\pi}{d_2} \delta(d_1 (\frac{\omega}{v} - k_z) - 2\pi M_3) \} \quad (3)$$

Результаты и обсуждение. Полученные выражения (2) и (3) позволяют рассчитать спектрально-угловое распределение и интенсивность излучения заряженной частицы, движущейся через одну или две дифракционные решетки, образованные параллельными нитями. Рассмотрим для примера генерацию излучения в терагерцовом диапазоне. Пусть в структуре, образованной идеально проводящими проволочками, $d_1 = d_2 = 0,15$ мм, $b_1 = b_2 = 0,2$ мм, $Q = 1$ (электрон, позитрон), $R = 15$ мкм – радиус нити, $L = 0,1$ м – длина структуры, $\gamma = 5$ – Лоренц-фактор частицы.

Угловое распределение излучения частицы на частоте, соответствующей максимуму интенсивности, представлено на рисунке 3а для случая одной дифракционной решетки (1,07 ТГц) и на рисунке 3б для случая двух решеток (1,02 ТГц). Здесь используется общепринятая сферическая система координат с полярным углом θ , который отсчитывается от положительного направления оси z , и азимутальным углом φ , отсчитываемым от оси x (рисунки 2а и 2б). Для наглядности на рисунках 3в и 3г также приведены угловые распределения в системе координат, в которой ось z направлена в максимум интенсивности излучения.

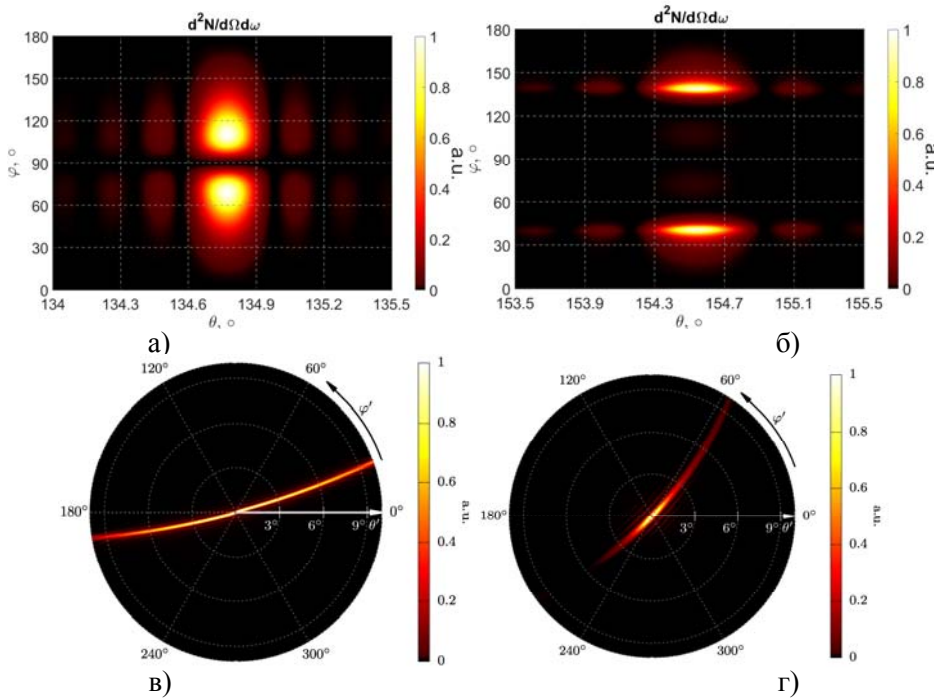


Рисунок 3 – Угловое распределение спонтанного излучения заряженной частицы для случаев одной дифракционной решетки (а, в) и двух дифракционных решеток (б, г)

Можно видеть, что в случае двух решеток излучение фотонов происходит более направленно. Схожее поведение наблюдается в этом случае и для спектрального распределения: спектр имеет более выраженный пик, интенсивность которого может быть существенно выше, чем для случая одной решетки (рисунок 4). Так, для одной решетки число фотонов, испущенных частицей (электрон, позитрон) в узком диапазоне частот (0,01 ТГц) вблизи максимума спектра на длине пути 10 см составляет $N_{ph} = 3.6 \cdot 10^{-4}$, в то время как для двух решеток это число равно $N_{ph} = 8.1 \cdot 10^{-4}$, что приблизительно в 2.2 раза выше.

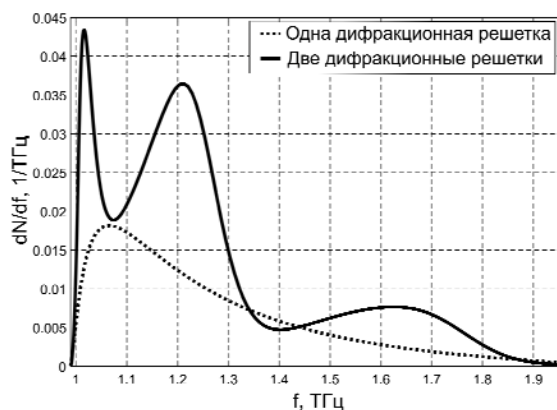


Рисунок 4 – Спектр спонтанного излучения заряженной частицы в рассматриваемых структурах

Отдельно обратим внимание на важное свойство системы из двух дифракционных решеток, позволяющее перераспределять излучение, испущенное в направлениях «вверх» и «вниз» (см. рисунок 5а). Для одной решетки отношение числа фотонов, испущенных «вверх», к числу фотонов, испущенных «вниз», в рассматриваемом приближении изотропного рассеяния, очевидно, равно единице. Такая же ситуация наблюдается и для случая двух одинаковых решеток при их несмещенном положении ($z_{shift} = 0$). Однако параллельный сдвиг решеток приводит к перераспределению излучения, и, в результате, можно добиться того, что интенсивность излучения в одном из этих направлений будет в несколько раз выше интенсивности излучения в противоположном направлении (при фиксированной частоте). Рассчитанная зависимость отношения числа фотонов, испущенных «вверх», к числу фотонов, испущенных «вниз», от относительного сдвига решеток приведена на рисунке 5б.

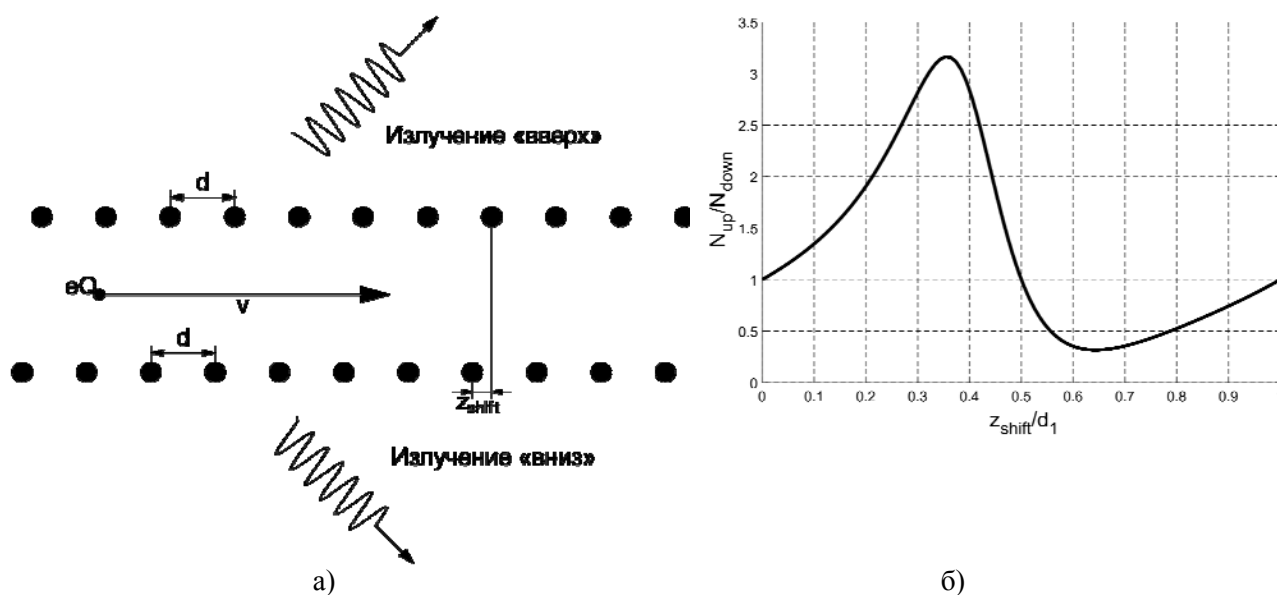


Рисунок 5 – а) Излучение в направлении «вверх» и «вниз» от решеток; б) Отношение числа фотонов испущенных «вверх» к числу фотонов испущенных «вниз» для рассматриваемой структуры из двух дифракционных решеток

Заключение. В данной работе рассмотрено спонтанное излучение, возникающее при движении релятивистских заряженных частиц через одну или две дифракционные решетки, образованные периодически расположенными нитями. Получены выражения для спектрально-углового распределения излучения в приближении изотропного рассеяния электромагнитной волны на отдельной нити. Показано, что структура, состоящая из двух решеток, позволяет получить более узкое угловое распределение излучения, а также обеспечивает существенно более эффективную генерацию фотонов по сравнению со случаем одной решетки. Для системы из двух решеток показана возможность управления интенсивностью излучения в различных направлениях («вверх» и «вниз» относительно плоскости решетки) за счет относительного сдвига решеток. Полученные результаты имеют важное значение для разработки мощных источников электромагнитного излучения, в частности, в терагерцовом диапазоне.

Литература

1. Hafez, H.A. Intense terahertz radiation and their applications / H.A. Hafez, X. Chai, A. Ibrahim [et al.] // *Journal of Optics*. – 2016. – Vol. 18, № 9. – 093004 (48 pp.).
2. Lewis, R.A. A review of terahertz sources / R.A. Lewis // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 2014. – Vol. 47, № 37. – 374001 (11 pp.).
3. Baryshevsky, V.G. Parametric beam instability of relativistic charged particles in a crystal / V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk // *Physics Letters A*. – 1984. – Vol. 102, № 3. – P. 141–144.
4. Baryshevsky, V.G. Surface parametric radiation of charged particles / V.G. Baryshevsky // *Doklady Academy of Science USSR*. – 1988. – Vol. 299. – P. 6–9.
5. Baryshevsky, V.G. Parametric (quasi-Cerenkov) X-ray free electron lasers / V.G. Baryshevsky, K.G. Batrakov, I.Ya. Dubovskaya // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 1991. – Vol. 24, № 8. – P. 1250.
6. Baryshevsky, V.G. Volume free electron lasers / V.G. Baryshevsky // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. – 2000. – Vol. 445, № 1–3. – P. 281–283.
7. Baryshevsky, V.G. First lasing of a volume FEL (VFEL) at a wavelength range 4–6mm / V.G. Baryshevsky, K.G. Batrakov, A.A. Gurinovich [et al.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. – 2002. – Vol. 483, № 1–2. – P. 21–23.
8. Baryshevsky, V.G. Experimental observation of radiation frequency tuning in «OLSE-10» prototype of volume free electron laser / V.G. Baryshevsky, K.G. Batrakov, V.A. Evdokimov [et al.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. – 2006. – Vol. 252, № 1. – P. 86–91.
9. Baryshevsky, V.G. Parametric x-ray radiation in crystals: theory, experiment and applications. / V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk, A.P. Ulyanenko // *Springer Science & Business Media*. – 2005. – Vol. 213. – P. 1–71.
10. Baryshevsky, V.G. Dynamical diffraction theory of waves in photonic crystals built from anisotropically scattering elements / V.G. Baryshevsky, E.A. Gurnevich // *Journal of Nanophotonics*. – 2012. – Vol. 6, № 1. – P. 061713.
11. Wait, J.R. Scattering of a plane wave from a circular dielectric cylinder at oblique incidence / J.R. Wait // *Canadian Journal of Physics*. – 1955. – Vol. 33, № 5. – P. 189–195.
12. Nikolsky, V.V. Electrodynamics and radio wave propagation / V.V. Nikolsky, T.B. Nikolskaya // *Textbook for universities*. – 1989. – 543 p.

Краткие сообщения

УДК 512.548

Косые элементы в полиадических группах специального вида

А.М. ГАЛЬМАК¹, Ю.И. КУЛАЖЕНКО², М.В. СЕЛЬКИН³

Основным результатом сообщения является теорема, позволяющая для каждого элемента l -арной группы специального вида указать его косой элемент, выразив его через косые элементы n -арной группы, на декартовой степени которой построена указанная l -арная группа.

Ключевые слова: n -арный группоид, n -арная группа, косой элемент.

The main result of the article is the theorem in which any skew element of l -ary group of a special kind is specified by the elements of n -ary group, l -ary group of a special kind being defined on Cartesian power of the given n -ary group.

Keywords: n -ary groupoid, n -ary group, skew element.

Введение. Полиадическим группоидом специального вида называют [1] универсальную алгебру $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с одной l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s(n-1) + 1$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η следующим образом.

Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ = (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l -арную операцию

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ = \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\dots \\ \dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \dots))).$$

При $s = 1$ n -арная операция $\eta_{1, \sigma, k}$ совпадает с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$.

Частными случаями полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ являются l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A , а также две полиадические операции Э. Поста [3], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Обе операции Э. Поста являются частными случаями l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$.

В [1] доказано, что если n -арная операция η ассоциативна, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Основной результат. Напомним определения некоторых используемых в работе понятий.

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \rightarrow A$ называют [4] n -арной полугруппой, если операция η ассоциативна, то есть в A для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$ выполняется тождество ассоциативности

$$\eta(\eta(a_1 \dots a_n)a_{n+1} \dots a_{2n-1}) = \eta(a_1 \dots a_i \eta(a_{i+1} \dots a_{i+n})a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}).$$

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \rightarrow A$ называют n -арной квазигруппой, если для всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = b.$$

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \rightarrow A$ называют n -арной группой [5], если она является и n -арной полугруппой и n -арной квазигруппой.

Ясно, что полугруппы (квазигруппы, группы) – это n -арные полугруппы (n -арные квазигруппы, n -арные группы) при $n = 2$.

В [1] доказано, что если n -арная операция η является ассоциативной, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной, то есть, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа. Для полиадических групп аналогичный результат получен в [6]: если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

l -арную группу $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ естественно называть l -арной группой специального вида.

Согласно В. Дёрнте [5], элемент b n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется косым элементом для элемента $a \in A$, если для любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1} b \underbrace{a \dots a}_{n-i}) = a.$$

Если b косой элемент для элемента a , то употребляют обозначение $b = \bar{a}$. Таким образом, по определению

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-i}) = a.$$

Можно показать, что для того, чтобы элемент b n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ являлся косым для $a \in A$, достаточно выполнения равенства из определения косого элемента только для некоторого $i = 1, 2, \dots, n$.

Выше отмечалось, что, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, то в случае тождественности подстановки σ^{l-1} универсальная алгебра $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является l -арной группой. В связи с этим результатом возникает задача нахождения косых элементов в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Следующая теорема полностью решает эту задачу, так как позволяет для каждого элемента этой l -арной группы указать его косой элемент, выразив его через косые элементы n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$.

Теорема 1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ элемент $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}}), j = 1, 2, \dots, k,$$

является косым для $\mathbf{a}$, то есть

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} = & (\eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(1)} \dots a_{\sigma^{l-2}(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(1)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(1)}}), \dots \\ & \dots, \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(k)} \dots a_{\sigma^{l-2}(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(k)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(k)} \dots a_{\sigma(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(k)}})). \end{aligned}$$

Для $n = 2$ результат, аналогичный теореме 1, доказан в [7].

Следующее следствие получается из теоремы 1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$ ($s \geq 1$). Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ $(2s+1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{2s+1, \sigma, k} \rangle$ элемент

$$\bar{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma^{2s-1}(1)}} \dots \overline{a_{\sigma(1)}}), \dots, \eta(\overline{a_{\sigma^{2s-1}(k)}} \dots \overline{a_{\sigma(k)}}))$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Полагая в следствии 1 $s = 1$ и формально считая, что $\eta(a) = a$ для любого $a \in A$, получим

Следствие 2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^3 = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ тернарной группы $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ элемент $\bar{\mathbf{a}} = (\overline{a_{\sigma(1)}}, \dots, \overline{a_{\sigma(k)}})$

является косым для $\mathbf{a}$.

Литература

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А.М. Об операции $[\]_{l, \sigma, k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
6. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.
7. Гальмак, А.М. Многместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

¹Могилёвский государственный университет продовольствия

²Белорусский государственный университет транспорта

³Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.09.2019

УДК 599.362.5:591.471.4

Предварительные сведения о патологиях мозгового отдела черепа выхухоли (*Desmana moschata*), обитающей на территории Украины

А.А. САВАРИН¹, А.А. КРАВЦОВ²

В черепе выхухоли ($n = 4$), обитающей в р. Вир Сумской области Украины, выявлены истончение костей и нарушение облитерации швов мозгового отдела, усиление сосудистого рисунка.

Ключевые слова: Украина, *Desmana moschata*, череп, патологии.

Thinning of bones and violation of obliteration of neurocranial sutures, enriched vascular pattern were revealed in the skull of the Russian desman ($n = 4$) living in the river Vir of Sumy region of Ukraine.

Keywords: Ukraine, *Desmana moschata*, skull, pathologies.

Введение. Выхухоль (*Desmana moschata*) – один из вымирающих видов европейской фауны, занесен в Красный список МСОП, России и Украины [1], исчез с территории Беларуси в 20 в. Различные аспекты биологии и экологии данного вида насекомоядных млекопитающих (Lipotyphla) освещены в многочисленных публикациях, включая монографии [2], [3], [4] и др. Однако сведения о патологических изменениях черепа выхухоли отсутствуют. Нельзя исключать попыток реакклиматизации вида на территории Беларуси, завоза особей, возможно, и из Украины. В этой связи анализ патоморфологических изменений черепа имеет не только теоретическое, но и практическое значение: результаты реакклиматизации будут определяться уровнем жизнеспособности особей, их физиологическим статусом. Цель работы – обратить внимание специалистов на выявленные патологии, поиск причин их образования.

Результаты и их обсуждение. На наличие явных патологий проанализировано 4 черепа выхухоли, особи которых 20.11.2018 г. найдены мертвыми в браконьерских сетях у береговой линии р. Вир вблизи г. Белополье Сумской области. Возраст зверьков: 1 – до года, 3 – взрослые особи. Географические координаты места находки: 51.159690, 34.286947. Река Вир – мелководная, глубиной до 2 м. Местообитание выхухоли – участки реки, обильно заросшие околководной и водной растительностью (рисунок 1).



Рисунок 1 – Участок обитания выхухоли на р. Вир

Следует заметить, что обитание выхухоли в р. Вир ранее указывалось и другими исследователями [5].

Анализ внешней и внутренней поверхностей свода позволил выявить следующие патоморфологические изменения:

1. *Истончение участков лобных костей* (во всех случаях). Длина участков – 0,5–1,0 см (рисунок 2). Патофизиологический процесс не привел к расширению соответствующего отдела черепа: межглазничная ширина изменяется в пределах 8,90–9,11 мм, что соответствует значению этого промера и в других географических популяциях.

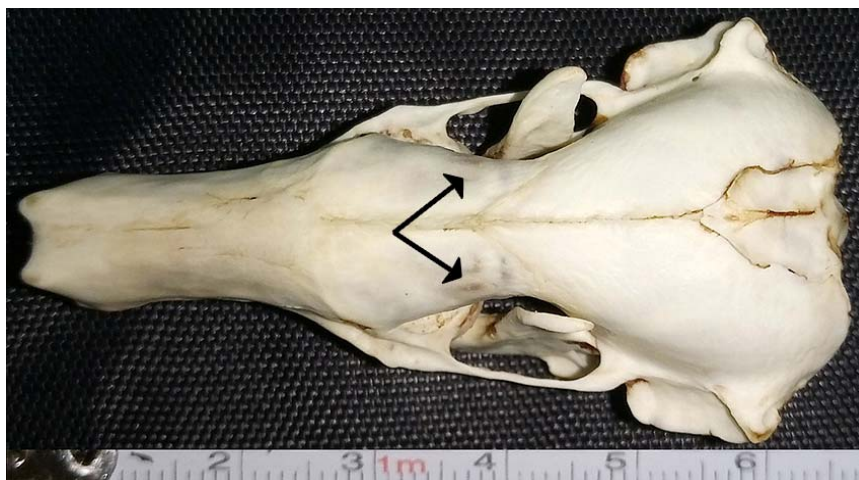
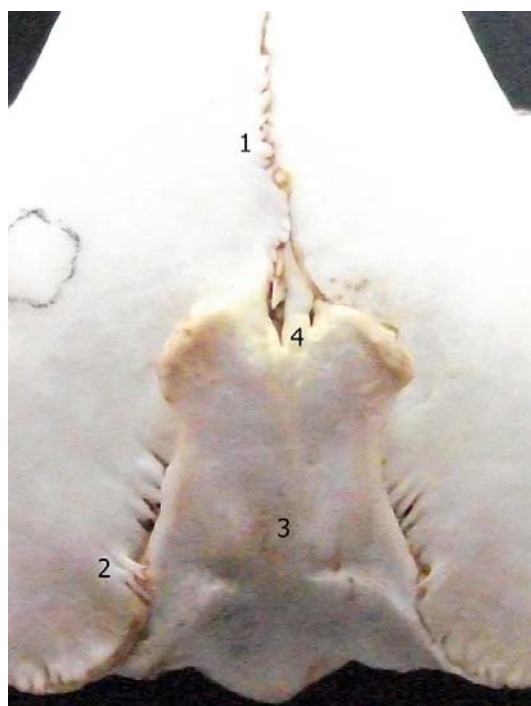


Рисунок 2 – Истонченные участки лобных костей (указано более темной окраской) (экз. № 1, коллекция зоологического музея Запорожского национального университета)

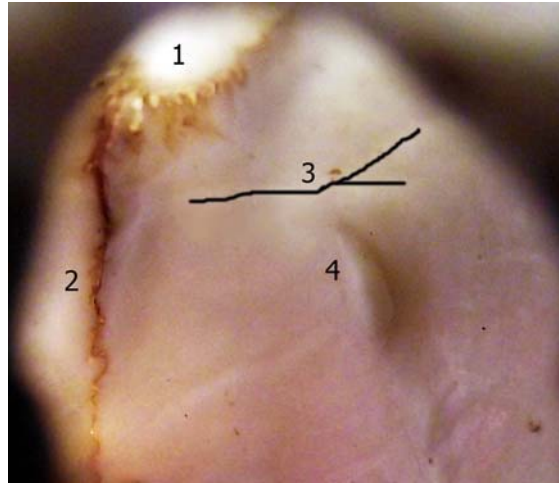
2. *Нарушение облитерации швов черепа вокруг межтеменной кости* (в 3 случаях). Так, в одном из черепов (сеголеток) сагиттальный шов был явно расширенным, изогнутым (рисунок 3, 1). В затылочной части теменная кость имеет зубцевидные выросты, аномально заходящие на межтеменную кость (рисунок 3, 2). Более длинный рассеченный зубец – в верхней части межтеменной кости (рисунок 3, 4). Образование таких выростов – компенсационный процесс по сшиванию костей черепа при увеличении просвета швов. При осмотре внутренней поверхности свода через затылочное отверстие четко выявляются перфорированные участки.



Обозначения: 1 – сагиттальный шов, 2 – теменная кость, 3 – межтеменная кость, 4 – зубцевидный вырост межтеменной кости (экз. № 2)

Рисунок 3 – Расхождение швов мозгового отдела

3. *Усиление сосудистого рисунка на внутренней поверхности обеих теменных костей* (в одном случае, взрослая особь) (рисунок 4). Бороздки сосудистой системы были расширенными и разнонаправленными в верхней и нижней части теменных костей. В этом же черепе в средней части теменной кости – отложения солей кальция протяженностью до 4 мм (рисунок 4, 2). Причины отложений солей кальция могут быть разнообразными: эндокринные и метаболические нарушения, сосудистые, паразитарные заболевания и др.



Обозначения: 1 – межтеменная кость, 2 – сагиттальный шов, 4 – отложения солей кальция (экз. № 3)

Рисунок 4 – Усиление сосудистого рисунка (3, *прорисовано*) на внутренней поверхности теменных костей

Указанные морфологические изменения черепа (истончение костей и нарушение облитерации швов мозгового отдела, усиление сосудистого рисунка на внутренней поверхности свода) доказывают протекание патофизиологических процессов в нейрокраниуме. Малая выборка не позволяет судить о степени их влияния на популяционные характеристики (возрастную структуру, смертность и др.). Подобные изменения черепа являются обычными и в популяциях насекомоядных млекопитающих Беларуси (крот европейский, еж белогрудый) [6].

Заключение. Истончение участков лобных костей и нарушение срачивания швов у межтеменной кости обнаружены в 4-х и 3-х случаях соответственно. Данный факт свидетельствует о необходимости продолжения исследования популяций выхухоли, обитающей в р. Вир Сумской области Украины, для установления полного списка и создания фото-каталога аномальных и патоморфологических изменений черепа.

Литература

1. Червона книга України. Тваринний світ / За ред. І.А. Акімова. – Київ : Глобалконсалтинг, 2009. – С. 486.
2. Хахин, Г.В. Выхухоль / Г.В. Хахин, А.А. Иванов. – М. : Агропромиздат, 1990. – 191 с.
3. Онуфреня, А.С. Русская выхухоль в бассейне Оки / А.С. Онуфреня, М.В. Онуфреня. – Рязань : НП «Голос губернии», 2016. – 204 с.
4. Хохуля (*Desmana moschata*) в басейні Сіверського Дінця / І. Загороднюк, О. Кондратенко, В. Домашлінець [та інш.]. – Київ, 2002. – 64 с. (Праці Теріологічної школи, вип. 4).
5. Цюпка, В. Нові знахідки хохулі руської (*Desmana moschata*) у басейні прічки Сейм / В. Цюпка // Праці Теріологічної школи. – 2012. – № 11. – С. 145–147.
6. Саварин, А.А. Патологии черепа северного белогрудого ежа (*Erinaceus concolor roumanicus*), обитающего на территории Беларуси / А.А. Саварин. – Гомель : БелГУТ, 2015. – 190 с.

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Технический редактор: *О.Г. Шляхтова*. Корректоры: *В.А. Бобрик, Г.Н. Петухова*

Подписано в печать 06.12.2019. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 22,32. Уч.-изд. л. 19,44. Тираж 100 экз. Заказ № 792.
Цена свободная

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.