

ИЗВЕСТИЯ

Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины

№ 3 (102)

Естественные науки

2017

Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины

ИЗВЕСТИЯ

Журнал зарегистрирован в Министерстве информа-
ции Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации
№ 546 от 06.07.2009 года)

Журнал включен ВАК Республики Беларусь
в перечень научных изданий Республики Беларусь,
в которых публикуются результаты
диссертационных исследований
(приказы № 207 от 13.12.2005, № 9 от 15.01.2010,
№ 57 от 16.05.2013)

Журнал включен в библиографические базы данных
ВИНИТИ и Научную электронную библиотеку
eLIBRARY.RU

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор С.А. ХАХОМОВ,
канд. физ.-мат. наук, доцент
Зам. главн. редактора О.М. ДЕМИДЕНКО,
д-р тех. наук, профессор
Зам. главн. редактора М.В. СЕЛЬКИН,
д-р физ.-мат. наук, профессор

Члены редакционной коллегии:

Г.Г. Гончаренко, д-р биол. наук, проф.,
чл.-корр. НАН Беларуси
Ф.В. Кадол, д-р пед. наук, проф.
В.Н. Калмыков, д-р филос. наук, проф.
В.И. Коваль, д-р филол. наук, проф.
Г.Г. Лазько, д-р ист. наук, проф.
И.В. Семченко, д-р физ.-мат. наук, проф.
В.С. Смородин, д-р тех. наук, проф.
Б.В. Сорвилов, д-р экон. наук, проф.
В.М. Хомич, д-р юрид. наук, проф.
О.Г. Шляхтова, ответственный секретарь

Члены редакционной коллегии по естественным наукам:

В.Ф. Багинский, д-р биол. наук, проф., член-корр.
НАН Беларуси
А. Баллистер-Болинше (Испания), д-р, проф. математики
Ван Сяо Фэн (Китай), д-р тех. наук, проф.
Го Вэньбинь (Китай), д-р физ.-мат. наук, проф.
В.В. Кириченко (Украина), д-р физ.-мат. наук, проф.
В.П. Кудин, д-р тех. наук, проф.
А.А. Махнев (Россия), д-р физ.-мат. наук, проф.,
член-корр. РАН
В.В. Можаровский, д-р тех. наук, проф.
А.Н. Сердюков, д-р физ.-мат. наук, проф., член-
корр. НАН Беларуси
А.Н. Скиба, д-р физ.-мат. наук, проф.
Шэн Рикун (Китай), д-р тех. наук, проф.
Р. Эстебан Ромеро (Испания), д-р, проф. математики

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
246019, Беларусь, Гомель, ул. Советская, 104,
Телефоны: +375 (232) 60-73-82
E-mail: vesti@gsu.by
Интернет-адрес: <http://vesti.gsu.by>

Francisk Scorina Gomel State University

PROCEEDINGS

The Journal is registered in the Ministry of Information of
Republic of Belarus
(registration certificate
number 546 dated 06.07.2009)

The Journal is included in the Republic of Belarus
Higher Attestation Commission list of scientific publica-
tions of the Republic of Belarus, which publish the main
results for the degree of Doctor (Candidate) of Sciences
(order number 207 dated 13.12.2005, number 9 dated
15.01.2010, number 57 dated 16.05.2013)

The Journal is included in bibliographic databases of the
All-Russia Institute of Scientific and
Technical Information (VINITI), Scientific electronic
library eLIBRARY.RU

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief S.A. KHAKHOMOV,
Ph D, Docent of Physics
Deputy editor-in-chief O.M. DEMIDENKO,
Sc. D., Professor
Deputy editor-in-chief M.V. SELKIN,
Sc. D., Professor

Members of editorial board:

G.G. Goncharenko, Sc. D., Professor, Corresponding
Member NASB
F. V. Kadol, Sc. D., Professor
V.N. Kalmykov, Sc. D., Professor
V.I. Koval, Sc. D., Professor
G.G. Lazko, Sc. D., Professor
I.V. Semchenko, Sc. D., Professor
V.S. Smorodin, Sc. D., Professor
B.V. Sorvirov, Sc. D., Professor
V.M. Homich, Sc. D., Professor
O.G. Shlyahova, executive secretary

Members of editorial board for the natural sciences

V.F. Baginsky, Sc. D., Professor, Corresponding
Member NASB
A. Ballister-Bolinshes (Spain), Sc. D., Professor
Van Siao Fen (China), Sc. D., Professor
Go Wenbin (China), Sc. D., Professor
V.V. Kirichenko (Ukraine), Sc. D., Professor
V.P. Kudin, Sc. D., Professor
A.A. Makhnev (Russia), Sc. D., Professor, Correspond-
ing Member RAS
V.V. Mozharovsky, Sc. D., Professor
A.N. Serdukov, Sc. D., Professor, Corresponding
Member NASB
A.N. Skiba, Sc. D., Professor
Shen Riku (China), Sc. D., Professor
R. Esteban Romero (Spain), Sc. D., Professor

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
246019, Belarus, Gomel, Sovetskaya Str., 104,
Tel: +375 (232) 60-73-82
E-mail: vesti@gsu.by
Site: <http://vesti.gsu.by>

ИЗВЕСТИЯ

Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины

НАУЧНЫЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1999 г.
Выходит 6 раз в год

• 2017, № 3 (102) •

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ:

БИОЛОГИЯ • ТЕХНИКА (ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ;
РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ; ЭЛЕКТРОНИКА) • МАТЕМАТИКА • ФИЗИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Биология

Аверин В.С., Потапов Д.В., Галиновский Н.Г. Видовая структура сообществ мышевидных грызунов в условиях добычи нефти разными способами.....	5
Бачура Ю.М. О коллекции культур водорослей Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины.....	11
Беляева Л.А., Медведева Г.А. Изучение корреляционных зависимостей некоторых биохимических показателей сыворотки крови при циррозе печени.....	15
Власова Н.Г., Висенберг Ю.В., Чунихин Л.А. Сравнительный анализ средних годовых эффективных доз облучения жителей населенных пунктов Республики Беларусь по данным Каталогов доз-2015 и 2009.....	20
Гончаренко Г.Г., Зятков С.А., Крук А.В. STR-маркеры в ДНК дактилоскопии домашних собак <i>Canis familiaris</i> L.....	25
Гулаков А.В., Пенькевич В.А., Саевич К.Ф. Заболеваемость описторхозом и активность основных дозообразующих радионуклидов в организме карповых рыб, обитающих в водоемах на территории Полесского радиэкологического заповедника.....	31
Дайнеко Н.М., Тимофеев С.Ф., Булохов А.Д., Панасенко Н.Н. Инвазия клёна ясенелистного (<i>Acer negundo</i> L.) в условиях Добрушского района Гомельской области.....	35
Дрозд Е.А., Власова Н.Г. Аprobация алгоритма расчета индивидуализированных накопленных с момента аварии на ЧАЭС доз внутреннего облучения.....	40
Концевая И.И. Влияние 6-бензиламинопурина и карбенициллина на морфогенез в культуре листовых эксплантов <i>Betula pubescens</i> Ehrh.....	46
Лазарева М.С., Климович Л.К., Митин Н.В., Климов А.В., Мальцева Н.В. Нормативы восстановления широколиственных лесов Беларуси.....	51
Потапенко А.М., Булко Н.И., Козлов А.К., Митин Н.В. Динамика предварительного возобновления леса в загрязненных радионуклидами сосновых насаждениях дальней зоны аварии на ЧАЭС.....	57
Соколов А.С. Ландшафтные особенности и территориальная дифференциация антропогенного воздействия на природную среду Могилёвской области.....	62
Тимофеева Т.А. Латеральные геохимические барьеры трансупераквальных ландшафтов (на примере поймы р. Сож).....	66

Храмченкова О.М. <i>Антибактериальная активность ацетоновых экстрактов из <i>Huroguttia physodes</i> (L.) Nyl.</i>	72
ИНФОРМАТИКА	
Бужан М.А., Жердецкий Ю.В., Сукач Е.И. <i>Вероятностно-алгебраическое моделирование как средство оценки надёжности при проектировании электроэнергетических систем</i>	77
Сморodin В.С., Клименко А.В., Жогаль С.П. <i>Методика оценки надёжности и безопасности систем управления технологическим циклом</i>	83
Сукач Е.И., Жогаль С.П., Деревянко Д.В., Абрамов Е.С. <i>Методика расчёта эффективности организации транспортной системы, функционирующей в условиях воздействия случайных факторов</i>	88
МАТЕМАТИКА	
Близнец И.В., Семенчук В.Н., Селькин В.М., Копачёв В.Н. <i>Роль критических групп в изучении строения конечных групп</i>	92
Бондарева Ю.Д. <i>Определение рациональной конструкции РИТ-сваи в нелинейно-деформируемом неоднородном грунтовом основании</i>	96
Бородич Т.В. <i>Неразрешимые группы с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам</i>	103
Бураковский В.В. <i>Маркерная кольцевая локальная сеть со случайным выбором дисциплины обслуживания с сокращением</i>	109
Гальмак А.М., Селькин М.В., Русаков А.Д. <i>Об ассоциативности и полуассоциативности полиадической операции $[]_{l, \sigma, k}$</i>	113
Кечко Е.П. <i>Об асимптотике многочленов Эрмита-Паде экспоненциальных функций</i> ..	119
Кравченко С.В., Синельникова Е.А. <i>Многокритериальная оптимизация оценки потребительского выбора населения по товарам и товарным группам</i>	126
Кулаженко Ю.И. <i>Фигура Томсена, центроиды и самосовмещение элементов n-арных групп</i>	132
Курносенко Н.М., Евдокимович В.Е. <i>Частично-квазинормальные подгруппы конечных π-разрешимых групп</i>	137
Можей Н.П. <i>Трёхмерные редуктивные несимметрические однородные пространства</i> ..	141
Пилипчук Л.А. <i>К методам построения оптимальных параметров целевой функции в задачах дробно-линейного потокового программирования</i>	148
РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ	
Кудин В.П. <i>Метод конечных элементов в прикладной электродинамике</i>	153
Тузлуков В.П. <i>Полная кратность разнесения сигналов в системах с многоканальной передачей и приемом сигналов при коррелированных рэлеевских замираниях</i>	160
ПЕРСОНАЛИИ	
Скиба А.Н., Монахов В.С., Селькин М.В. <i>К 80-летию со дня рождения Леонида Александровича Шеметкова</i>	167
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
Молош А.Н. <i>Видовой состав мелких млекопитающих станции очистки сточных вод г. Береза (Брестская область)</i>	169

PROCEEDINGS

of Francisk Scorina Gomel State University

SCIENTIFIC, PRODUCTION AND PRACTICAL JOURNAL

There are 6 times a year
Published since 1999

• 2017, № 3 (102) •

NATURAL SCIENCES:

BIOLOGY•TECHNIQUE (INFORMATION TECHNOLOGY;
RADIO ENGINEERING AND COMMUNICATIONS; ELECTRONICS)

• MATHEMATICS • PHYSICS

CONTENTS

BIOLOGY

V.S. Averin, D.V. Potapov, N.G. Galinovsky. <i>Species structure of mouse-rodent communities in conditions of oil production in different ways</i>	5
Yu.M. Bachura. <i>On the culture collection of algae of Francisk Scorina Gomel State University</i>	11
L.A. Belyaeva, G.A. Medvedeva. <i>Study of correlation dependencies of some biochemical parameters of blood serum with cirrhosis of the liver</i>	15
N.G. Vlasova, Yu.V. Visenberg, L.A. Chunikhin. <i>Comparative analysis of average annual effective doses of exposure of residents of settlements of the Republic of Belarus according to the catalogs of doses-2015 and 2009</i>	20
G.G. Goncharenko, S.A. Zyatkov, A.V. Kruk. <i>STR-markers in DNA fingerprinting of domestic dogs <i>Canis familiaris</i> L.</i>	25
A.V. Gulakov, V.A. Penkevich, K.F. Saevich. <i>The incidence of opisthorchiasis and the activity of the main dose-forming radionuclides in the organism of cyprinids living in water bodies on the territory of the Polessky radioecological reserve</i>	31
N.M. Dayneko, S.F. Timofeev, A.D. Bulohov, N.N. Panasenکو. <i>Invasion of the maple tree (<i>Acer negundo</i> L.) in the conditions of Dobrush district of Gomel region</i>	35
E.A. Drozd, N.G. Vlasova. <i>Approbation of the algorithm for calculating individual internal doses accumulated during the post-accident period in Chernobyl power plant</i>	40
I.I. Kontsevaya. <i>The effect of 6-benzylaminopurine and carbenicillin on morphogenesis in the culture leaves of explants of <i>Betula pubescens</i> Ehrh</i>	46
M.S. Lazareva, L.K. Klimovich, N.V. Mitin, A.V. Klimov, N.V. Maltseva. <i>Standards of restoration of broad-leaved forests of Belarus</i>	51
A.M. Potapenko, N.I. Bulko, A.K. Kozlov, N.V. Mitin. <i>Dynamics of preliminary forest regeneration in pine plantations polluted by radionuclides in the distant zone of the CNPP accident</i> ...	57
A.S. Sokolov. <i>Landscape features and territorial differentiation of anthropogenic impact on the natural environment of the Mogilev region</i>	62
T.A. Timofeeva. <i>Lateral geochemical barriers of transsuperaqual landscapes (on the example of the river Sozh)</i>	66
O.M. Khrumchenkova. <i>Antibacterial activity of acetone extracts from <i>Hypogymnia physodes</i> (L.) Nyl.</i>	72

INFORMATION TECHNOLOGY

M.A. Buzhan, Yu.V. Zherdetsky, E.I. Sukach. <i>Probabilistic-algebraic modeling as a means of assessing reliability in the design of electric power systems</i>	77
V.S. Smorodin, A.V. Klimenko, S.P. Zhogal. <i>Methodology for estimation of reliability and safety of systems of management of the technological cycle</i>	83
E.I. Sukach, S.P. Zhogal, D.V. Derevyanko, E.S. Abramov. <i>Methodology for calculating the efficiency of the organization of a transport system operating under the influence of random factors</i>	88

MATHEMATICS

I.V. Bliznets, V.N. Semenchuk, V.M. Selkin, V.N. Kopachev. <i>The role of critical groups in the study of the structure of finite groups</i>	92
Yu.D. Bondareva. <i>Determination of the rational design of RIT-piles in a nonlinearly deformed heterogeneous ground base</i>	96
T.V. Borodich. <i>Unsolvable groups with abelian additions to the non-Ore-dispersive subgroups</i>	103
V.V. Burakovsky. <i>Marker ring local area network with random choice of service discipline with reduction</i>	109
A.M. Galmak, M.V. Selkin, A.D. Rusakov. <i>On the associativity and semi-associativity of a polyadic operation $[\]$, σ, k</i>	113
E.P. Kechko. <i>On the asymptotics of the Hermite-Padé polynomials of exponential functions</i>	119
S.V. Kravchenko, E.A. Sinelnikova. <i>Multicriteria optimization of the estimation of consumer choice of the population by goods and commodity groups</i>	126
Yu.I. Kulazhenko. <i>Thomsen's figure, centroids and self-alignment of elements of n-ary groups</i>	132
N.M. Kurnosenko, V.E. Evdokimovich. <i>Partially-quasinormal subgroups of finite π-soluble groups</i>	137
N.P. Mozhey. <i>Three-dimensional reductive asymmetric homogeneous spaces</i>	141
L.A. Pilipchuk. <i>On the methods of constructing optimal parameters of the objective function in linear-linear streaming programming problems</i>	148

TECHNOLOGY AND COMMUNICATION

V.P. Kudin. <i>The finite element method in applied electrodynamics</i>	153
V.P. Tuzlukov. <i>The total multiplicity of signal diversity in systems with multichannel transmission and reception of signals with correlated Rayleigh fading</i>	160

PERSONALITY

A.N. Skiba, V.S. Monakhov, M.V. Selkin. <i>On the occasion of the 80th birthday of Leonid Alexandrovich Shemetkov</i>	167
---	-----

ABSTRACTS

A.N. Molosh. <i>Species composition of small mammals of the station of sewage treatment of Bereza (Brest region)</i>	169
--	-----

Биология

УДК 599.323:622.276:502

Видовая структура сообществ мышевидных грызунов в условиях добычи нефти разными способами

В.С. АВЕРИН, Д.В. ПОТАПОВ, Н.Г. ГАЛИНОВСКИЙ

В условиях Судовицкого нефтяного месторождения Светлогорского района Гомельской области проанализирован видовой состав, особенности биотопического распределения и параметры биологического разнообразия сообществ мышевидных грызунов. Установлены доминирующие виды мышевидных грызунов, а также различия по видовому составу в местах добычи нефти различными способами. Происходит сдвиг видového спектра мышевидных грызунов в сторону степных видов в связи с аридизацией территорий, сопряженных с добычей нефти.

Ключевые слова: сообщества мышевидных грызунов, добыча нефти, нефтяные месторождения, видовой состав, стационары, видовое разнообразие, индексы видовой структуры, аридизация территорий.

In the conditions of the Sudovitskoye oil field in the Svetlogorsk district of the Gomel region, the species composition, features of the biotope distribution and parameters of the biological diversity of the communities of the muscular rodents were analyzed. The dominant species of mouse-shaped rodents were established, as well as differences in species composition in the oil production sites in various ways. There is a shift in the species spectrum of the mouse-like rodents towards the steppe species in connection with the aridization of the territories associated with the extraction of oil.

Keywords: community rodents, oil production, oil fields, species composition, stationars, species diversity, species-index structure, arid areas.

Введение. Общеизвестный факт, что добыча нефти, а также непосредственно сама нефть и нефтепродукты могут отрицательно влиять на окружающую среду через изменение состава почвы, загрязнение поверхностных и подземных вод, атмосферы [1].

В целом последствия антропогенного воздействия на природные комплексы региона добычи нефти отличаются в зависимости от основных этапов освоения нефтяных запасов [2]. Исследования показали, что наличие техногенных объектов является агрессором для отдельных видов животных, вызывая их миграцию, снижая продуктивность [3].

Достаточно подробно воздействие нефтедобычи на характеристики мелких млекопитающих было изучено С.Н. Гашевым с коллегами [4], [5]. Установлено, что на территориях нефтедобычи в сравнении с контролем отличий в годовой динамике численности микромамманий не наблюдается, однако уменьшение ёмкости среды загрязненных участков несколько «сглаживает» популяционные циклы численности. Относительное обилие мелких млекопитающих достоверно зависит от степени загрязнения почвы нефтью. Было выявлено, что доминирующими видами практически во всех исследованных загрязненных биотопах являлись полевки.

Известно, что млекопитающие могут являться индикаторами состояния окружающей среды. Есть работы, в которых упоминается об использовании в качестве индикаторов нефтяного загрязнения грызунов [6], [7]. О.А. Пястолова выделяет из числа млекопитающих обыкновенную и рыжую полевки в качестве объектов, удобных для зооиндикации [8]. В качестве весьма удобной экологической модели для комплексного изучения влияния человека на окружающую среду Э.В. Ивантер и Т.В. Ивантер предлагают использовать группу мелких млекопитающих [9]. Мысль о возможности использования в целях индикации мелких млекопитающих высказывалась многими авторами [10]–[13].

Мелкие млекопитающие удовлетворяют всем основным требованиям, предъявляемым к видам-индикаторам: широкое распространение в природе, весомость вклада в обмен веществ и энергии в экосистемах, высокая чувствительность к воздействиям, быстрота ответа на изменения окружающей среды, доминирование, возможность проведения лабораторных экспериментов, экономичность исследований [8].

Объектом исследований являются различные виды мышевидных грызунов, отловленных в пределах пробных площадок, заложенных в экосистемах, сопряженных с местами добычи нефти разными способами. Предмет исследований – качество компонентов окружающей среды и состояние живых организмов на площадках, сопряженных с добычей нефти.

Цели исследования: определить состояние биотического компонента экосистем на основе оценки биологического разнообразия микромаммалей; изучить воздействие ключевых факторов, сопутствующих добыче нефти из плотных пород разными способами на состояние микромаммалокомплексов.

Материалы и методы. Для достижения поставленных целей в Светлогорском районе Гомельской области были заложены 4 опытных площадки в экосистемах с разным уровнем техногенной нагрузки:

1) Стационар 1 – контрольный участок, не подверженный техногенному воздействию (заказник «Выдрица») (координаты: 52°40'08" с.ш.; 29°41'49" в.д.).

Участок представляет собой опушку смешанного леса. Формула древостоя: 6С2Д2К. Подлесок представлен подростом древесных пород и кустарниками крушины ломкой, лещины, рябины. Травостой: мятлик луговой, ландыш майский, купена лекарственная, лютик едкий, ослинник двудомный, мох плевроциум. Площадь проективного покрытия 70 %. Почва дерново-подзолистая супесчаная.

2) Стационар 2 – скважина № 36 Судовицкого нефтяного месторождения (гидроразрыв пласта не осуществлялся) (координаты: 52°44'45" с.ш.; 29°29'34" в.д.).

Участок сопряжен со скважиной добычи нефти с зоной обваловки 100 × 100 м, зоной отчуждения 120 × 120 м. Зона обваловки характеризуется полным отсутствием биоты, а в зоне отчуждения встречаются травянистые растения (ослинник двудомный, икотник серозеленый, ястребинка волосистая, пырей ползучий, подорожник ланцетолистный) с площадью проективного покрытия 15 %. Почва недалеко от зоны обваловки песчаная, начиная с 10–15 м от зоны обваловки начинается тяжелая супесь, площадь проективного покрытия здесь увеличивается до 70 %. За полосой отчуждения с северной стороны начинается лесной массив.

3) Стационар 3 – скважина № 32 Судовицкого нефтяного месторождения (осуществлялся гидроразрыв пласта в 2011 г.) (координаты: 52°44'12" с.ш.; 29°33'19" в.д.).

Участок сопряжен со скважиной добычи нефти с зоной обваловки 100 × 100 м, зоной отчуждения 200 × 200 м. Зона обваловки характеризуется полным отсутствием биоты, а в зоне отчуждения встречаются травянистые растения (ослинник двудомный, очиток едкий, пырей ползучий, овсяница овечья, овсюг) с площадью проективного покрытия 30 %. Почва песчаная. Ниже полосы отчуждения начинается пойма старицы реки Березина, характеризующаяся сплошным покрытием гидрофитными и гигрофитными видами растений: ива козья, осоки, редко встречаются небольшие березы. Почва сменяется на пойменно-аллювиальную.

4) Стационар 4 – скважина № 47 Судовицкого нефтяного месторождения (осуществлялся гидроразрыв пласта в 2014 г.) (координаты: 52°44'46" с.ш.; 29°29'35" в.д.).

Участок сопряжен с новой скважиной добычи нефти, на которой активно ведется добыча. Зона обваловки составляет 100 × 100 м, зона отчуждения 200 × 200 м. Зона обваловки, как и на прочих скважинах добычи нефти, характеризуется полным отсутствием биоты. В начале зоны отчуждения (15–20 м) проективное покрытие составляет всего 5 %: встречаются немногочисленные травянистые растения – пырей ползучий, ястребинка волосистая. Однако, через 30–40 м зоны отчуждения проективное покрытие резко увеличивается до 85 %, появляются мятлик луговой, полынь горькая, мышиный горошек и другие полевые растения. Почвы песчаные. Вокруг зоны отчуждения преобладают открытые станции – пойменные луга, сопряженные со старицей реки Березина.

На всех стационарах выставлялись по 20 мышеловок-давилок типа «Геро» в течение одного посещения. Так как было осуществлено четыре выезда на стационары, то всего было отработано 80 ловушко-суток на каждом участке.

Расчет показателей видового разнообразия сообщества [14]:

Относительное обилие мелких млекопитающих в сообществе по результатам отловов рассчитывается как количество зверьков, приходящихся на 100 ловушко-суток:

$$ON = (N/LS) \times 100,$$

где ON – относительное обилие мелких млекопитающих; N – общее количество отловленных зверьков; LS – количество отработанных ловушко-суток.

Один из главных компонентов видовой структуры сообществ животных организмов – видовое богатство (R) или плотность видов:

$$R = (V-1)/\log N,$$

где V – число видов; N – общее число особей.

Второй важный показатель – видовое разнообразие, которое может быть определено индексом видового разнообразия Шеннона (H):

$$H = -\sum (n_i / N) \log(n_i / N),$$

где n_i – число особей i-го вида; N – общее число особей всех видов в сообществе.

Следующие два показателя помогут сделать вывод о степени сформированности или нарушенности сообществ:

Индекс концентрации доминирования (индекс Симпсона):

$$D = \sum (n_i / N)^2,$$

где n_i – число особей i-го вида; N – общее число особей всех видов в сообществе.

Выравненность видов в сообществе (индекс Пиелу):

$$e = H' / \ln S,$$

где H' – индекс Шеннона; S – число видов в сообществе.

Следующий индекс позволяет сравнить природные сообщества разных биотопов между собой:

Коэффициент фаунистического сходства сообществ (коэффициент Жаккара):

$$Kg = C / ((A + B) - C),$$

где A – число видов в 1-м сообществе; B – число видов во 2-м сообществе; C – число видов, общих для обоих сообществ.

Для анализа распределений, средних, ошибок и верификации гипотез об их различиях и связях был использован пакет «Statistica 7.0».

Результаты и их обсуждение. За период проведения исследований (май-сентябрь 2016 г.) на отмеченных стационарах было отработано 320 ловушко-суток и отловлено 133 особи мышевидных грызунов, относящихся к 8 видам: 4 вида семейства Хомяковые (Cricetidae) – полевка обыкновенная (*Microtus arvalis* Pall.) – 39 особей, полевка-экономка (*Microtus oeconomus* Pall.) – 11 особей, полевка темная (*Microtus agrestis* L.) – 2 особи, полевка рыжая лесная (*Clethrionomys glareolus* Schreb.) – 28 особей; 4 вида семейства Мышиные (Muridae) – мышь европейская (*Apodemus sylvaticus* L.) – 23 особи, мышь желтогорлая (*Apodemus flavicollis* Melch.) – 16 особей, мышь малая лесная (*Apodemus uralensis* Pall.) – 10 особей, мышь полевая (*Apodemus agrarius* Pall.) – 4 особи (таблица 1).

В пределах контрольного стационара явно преобладают лесные виды мышевидных грызунов – все отловленные 33 особи являются фоновыми представителями грызунов в условиях лесных биотопов. Проведенные ранее исследования микромаммалокомплексов в различных стациях Гомельского региона подтверждают доминирование рыжей лесной полевки среди мышевидных грызунов. Вместе с тем, в условиях нефтедобычи ситуация меняется: начинают преобладать степные виды полевок – обыкновенная и экономка. Особенно четко это выражено в окрестностях стационара 4 (гидроразрыв пласта осуществлялся в 2014 г.): здесь отловлены 26 полевок (полевка обыкновенная, полевка-экономка и полевка темная) и 1 полевая мышь, тяготеющих к открытым стациям и 7 особей, являющихся типично лесными видами (полевка рыжая лесная и мышь малая лесная). В окрестностях стационара 3 (гидроразрыв пласта осуществлялся в 2011 г.) наблюдается схожая картина: 16 особей полевок открытых биотопов против 11 особей грызунов, приуроченных к лесным сообществам. Это позволяет сделать предварительный вывод о возможном использовании полевок как индикаторных видов в условиях нефтяных месторождений. В условиях стационара 2 (гидроразрыв пласта не осуществлялся) ситуация меняется: здесь отловлено всего 10 обыкновенных полевок и 3 полевых мыши, типичных для открытых стаций, вместе с тем количество лесных полевок и мышей составляет 26 особей.

Таблица 1 – Параметры разнообразия сообществ мышевидных грызунов в обследованных станциях

Виды	станции				всего особей
	Стационар 1 (контроль)	Стационар 2 (скважина № 36 без гидроразрыва)	Стационар 3 (скважина № 32 с гидроразрывом в 2011 г.)	Стационар 4 (скважина № 47 с гидроразрывом в 2014 г.)	
Полевка обыкновенная (<i>Microtus arvalis</i> Pall.)	-	10	12	17	39
Полевка-экономка (<i>Microtus oeconomus</i> Pall.)	-	-	3	8	11
Полевка темная (<i>Microtus agrestis</i> L.)	-	-	1	1	2
Полевка рыжая лесная (<i>Clethrionomys glareolus</i> Schreb.)	12	6	4	6	28
Мышь европейская (<i>Apodemus sylvaticus</i> L.)	6	12	5	-	23
Мышь желтогорлая (<i>Apodemus flavicollis</i> Melch.)	9	6	1	-	16
Мышь малая лесная (<i>Apodemus uralensis</i> Pall.)	6	2	1	1	10
Мышь полевая (<i>Apodemus agrarius</i> Pall.)	-	3	-	1	4
Всего особей, шт.	33	39	27	34	133
Всего видов, шт.	4	6	7	6	
Относительное обилие, ON	41,25	48,75	33,75	42,50	
Плотность видов, R	1,97	3,14	4,20	3,27	
Индекс Шеннона, H	0,57	0,71	0,71	0,58	
Индекс Симпсона, D	0,26	0,22	0,28	0,34	
Индекс Пилу, e	0,41	0,40	0,36	0,32	

Для определения достоверности полученных результатов был произведен дисперсионный анализ зависимости количественного и видового состава мышевидных грызунов от обследованного стационара. В результате анализа было выявлено, что никаких статистически достоверных отличий между стационарами по числу особей грызунов нет ($F = 1,52$; $p = 0,26$) (рисунок 1). Вместе с тем, по видовому составу стационары, связанные с нефтедобычей довольно сильно отличаются от контрольного стационара, причем эти отличия статистически достоверны ($F = 4,85$; $p < 0,05$). Следует отметить, что наблюдается достоверная разница по видовому составу между стационаром 4 (гидроразрыв в 2014 г.) и остальными стационарами, обследованными в условиях Судовицкого нефтяного месторождения ($F = 625$; $p < 0,001$) (рисунок 2).

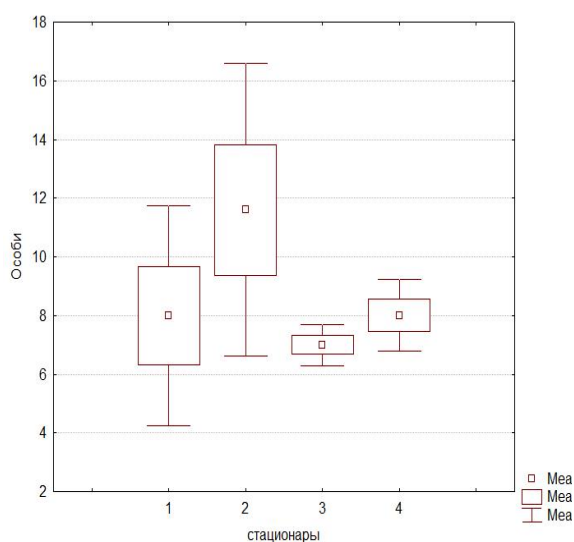


Рисунок 1 – Дисперсионный анализ количества особей микромаммалей по стационарам

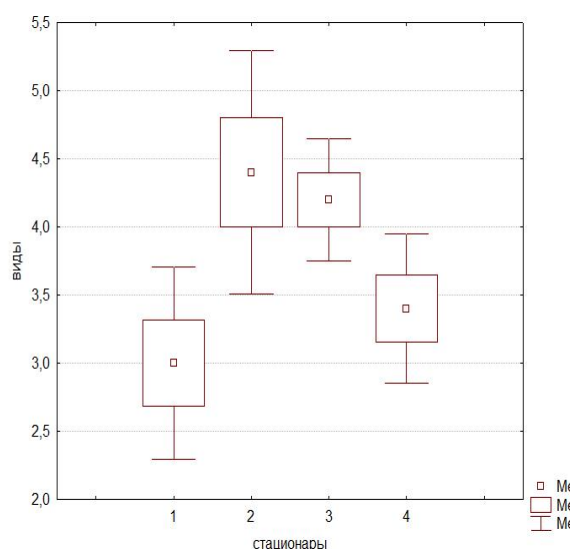


Рисунок 2 – Дисперсионный анализ видового состава микромаммалей по стационарам

Анализируя индексы видовой структуры сообществ, представленные в таблице 1, можно отметить недостаточную степень сформированности сообществ мышевидных грызунов. Индекс информационного разнообразия сообществ (индекс Шеннона) варьирует в невысоких интервалах (от 0,57 до 0,71), что связано с небольшим числом видов в уловах. Это можно объяснить невысоким видовым разнообразием мышевидных грызунов в условиях нашего региона.

При анализе индексов концентрации доминирования можно заключить, что стационар 4 отличается самым небольшим числом доминирующих видов (индекс Симпсона 0,34). Малое количество доминантов может свидетельствовать о более устоявшемся видовом составе данного сообщества. В целом значения индекса Симпсона невысоки (менее 0,5), что говорит о недостаточной степени стабильности микромаммалокомплексов в исследуемых станциях. Наряду с этим рассчитанные индексы выравненности видов (0,32–0,41), в большинстве сообществ оказались выше индексов концентрации доминирования, что указывает на некоторую нарушенность видовой структуры исследуемых сообществ. Единственный стационар, в котором индекс Симпсона несколько выше индекса Пиелу, это стационар 4, что указывает на большую стабильность данного микромаммалокомплекса. Такую закономерность можно объяснить резким преобладанием полевков в условиях данного биотопа, которые и формируют костяк сообщества.

Обращают на себя внимание показатели видового богатства (плотности видов): в пределах сообществ мышевидных грызунов, обитающих в условиях стационаров, сопряженных с нефтедобычей, видовое богатство значительно выше (индекс варьирует от 3,14 до 4,20), вместе с тем плотность видов в пределах контрольного стационара составляет всего 1,97. Это связано с появлением степных видов грызунов (полевков и полевой мыши) в биотопах, сопряженных с местами нефтедобычи.

Надо отметить, что в условиях Судовицкого месторождения активно используется песок для создания зон обваловок скважин, а также подъездных дорог к ним. С течением времени происходит вынос песка из зон обваловок на окрестные территории ветром и рабочим транспортом, что приводит к опустыниванию (аридизации) территорий месторождения. Видимо, в связи с этим происходит сдвиг видового спектра микромаммаллий в сторону степных видов (полевка обыкновенная, полевка-экономка и полевка темная). Однако проверка данного факта требует дополнительных исследований.

Также был проведен анализ фаунистического сходства сообществ в обследованных стационарах. Результаты этих исследований отражены в таблице 2.

Таблица 2 – Фаунистическое сходство сообществ мышевидных грызунов обследованных стационаров

Стационары	Стационар 1 (контроль)	Стационар 2 (скважина № 36 без гидроразрыва)	Стационар 3 (скважина № 32 с гидро- разрывом в 2011 г.)	Стационар 4 (скважина № 47 с гидро- разрывом в 2014 г.)
Стационар 1 (контроль)		0,67	0,57	0,33
Стационар 2 (скважина № 36 без гидроразрыва)	0,67		0,63	0,50
Стационар 3 (скважина № 32 с гид- роразрывом в 2011 г.)	0,57	0,63		0,63
Стационар 4 (скважина № 47 с гид- роразрывом в 2014 г.)	0,33	0,50	0,63	

Как показывают данные, отраженные в таблице 2, между сообществами контрольного стационара и стационара 2 (скважина без гидроразрыва) наблюдается полное фаунистическое сходство ($K_g = 0,67$). Высокое фаунистическое сходство обнаружено между стационарами 2 и 4 ($K_g = 0,50$), 1 и 3 ($K_g = 0,57$), а также 2 и 3 ($K_g = 0,63$). И наконец, сообщества грызунов контрольного стационара и стационара 4 (скважина с гидроразрывом в 2014 г.) имеют низкое фаунистическое сходство ($K_g = 0,33$). Таким образом, обнаруживается следующая зависимость: чем недавнее использование гидроразрыва и выраженнее аридизация территории, тем ниже сходство между сообществами мышевидных грызунов. Статистическая достоверность этой зависимости была отмечена выше.

Заключение. Полученные данные по видовой структуре сообществ мышевидных грызунов указывают на недостаточную степень стабильности и некоторую их нарушенность, а также на полное доминирование полёвковых грызунов в окрестностях нефтяных скважин (особенно тех, где добыча нефти происходит способом гидроразрыва пласта и более выражена степень аридизации территории). Обнаружена достоверная разница между стационарами по видовому составу. Установлен сдвиг видового спектра микромамманий в сторону степных видов (полевка обыкновенная, полевка-экономка и полевка темная) в связи с аридизацией территорий, сопряженных с добычей нефти с использованием способа гидроразрыва пласта.

Литература

1. Хабилов, И.К. Устойчивость почвенных процессов / И.К. Хабилов, И.М. Габбасова, Ф.Х. Хазиев. – Уфа : БГАУ, 2001. – 327. – С. 2.
2. Соромотин, А.В. Постадийный разбор. Экологические последствия различных этапов освоения недр на примере ХМАО / А.В. Соромотин // Нефть и капитал. – 2006. – № 8. – С. 76–79.
3. Зеркаль, О.В. Эволюция биосферы прилегающих территорий под влиянием нефтегазового комплекса / О.В. Зеркаль // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 1999. – № 6. – С. 30–32.
4. Гашев, С.Н. Млекопитающие в системе экологического мониторинга (на примере Тюменской области) / С.Н. Гашев. – Тюмень : ТГУ, 2000. – 220 с.
5. Методика оценки фитоприспособности нефтезагрязненных территорий (с рекомендациями к рекультивационным работам) / С.Н. Гашев [и др.]. – Тюмень : Тюменская ЛОС ВНИИЛМ, 1992. – 13 с.
6. Шапошников, В.М. Выявление и использование индикаторов влияния нефтепромысла на экосистемы (на примере грызунов) / В.М. Шапошников // Вопросы лесной биогеоценологии, экологии и охраны природы в степной зоне : сб. научн. трудов. – Куйбышев, 1980. – С. 149–158.
7. Шапошников, В.М. Грызуны как возможные индикаторы нефтяного загрязнения среды / В.М. Шапошников, М.Н. Кирюшкина, Г.П. Симонова, С.П. Блинов // Матер. 5 Всесоюзн. совещ. «Грызуны». – М. : Наука, 1980. – С. 462–464.
8. Пястолова, О.А. Разработка методов зооиндикации / О.А. Пястолова // Экологические основы рационального использования и охраны природных ресурсов : сб. матер. конф. – Свердловск, 1987. – С. 23–25.
9. Ивантер, Э.В. Биоценологические группировки мелких млекопитающих в коренных и антропогенных ландшафтах Приладожья / Э.В. Ивантер, Т.В. Ивантер // Влияние антропогенных факторов на структуру и функционирование биогеоценозов : сб. матер. конф. – Калинин : Изд-во КГУ, 1981. – С. 47–50.
10. Богач, Я.А. Животные – биоиндикаторы индустриальных загрязнений / Я.А. Богач, Ф.Н. Седлачек, З.А. Швецова, Д.А. Кривоуцкий // Журн. общ. биол. – 1988. – Т. XIX. – С. 630–635.
11. Гашев, С.Н. Млекопитающие в системе мониторинговой оценки качества окружающей среды / С.Н. Гашев // Сибирский стандарт жизни: экология, образование, здоровье : тез. докл. научно-практ. конф. – Новосибирск, 1997. – С. 112–114.
12. Исенов, Х.А. Влияние биологически активных компонентов окружающей среды на экологию природных популяций животных / Х.А. Исенов, А.В. Андреюк, Э.З. Бекимбаев // Физиологические и биохимические аспекты действия биологически активных веществ на организм животных : сб. матер. конф. – Караганда, 1987. – С. 19–24.
13. Катаев, Г.Д. Роль мелких млекопитающих в биоиндикации природной среды Кольского Севера / Г.Д. Катаев // Экотоксикология и охрана природы : сб. научн. трудов. – М., 1988. – С. 195–199.
14. Magurran, A. Ecological diversity and its measurement / A. Magurran. – London-Sydney : Croom Helm, 1983. – 184 p.

УДК 582.26/.27:069.5:378.4(476.2-21Гомель)

О коллекции культур водорослей Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины

Ю.М. БАЧУРА

Приведены данные о коллекции культур водорослей, созданной на кафедре ботаники и физиологии растений УО «ГГУ им. Ф. Скорины» в рамках Научного гербария Белорусского Полесья (GSU). Проведен таксономический анализ коллекционного фонда; описана экологическая приуроченность видов водорослей. Показано, что в коллекции представлены культуры водорослей разных таксономических и экологических групп, выделенные в том числе из антропогенно-преобразованных почв Гомельского региона.

Ключевые слова: альгологическая коллекция, водоросли, культура, штамм, Chlorophyta.

The data on the collection of algae cultures created at the Department of Botany and Plant Physiology of Francisk Scorina Gomel State University are given within the framework of the Scientific herbarium of the Belarusian Polesye (GSU). Taxonomic analysis of the collection fund was carried out. The ecological affinity of algal species is described. It is shown that the collection contains algae cultures of different taxonomic and ecological groups, including those from anthropogenically transformed soils of the Gomel region.

Keywords: algae, algae collection, culture, strain, Chlorophyta.

В последние десятилетия коллекции культур водорослей приобретают все большее научное и прикладное значение. Коллекции водорослей являются своеобразными «банками» для хранения генофонда водорослей, ведущими научно-исследовательскими и образовательными центрами [1], [2]. Водоросли служат важными объектами фундаментальной науки: неотъемлемым компонентом биоразнообразия различных экосистем, модельными организмами в экологии, фотобиологии, генной инженерии; используются для решения ряда биотехнологических задач: получение аквакультур и биотоплива, биоремедиация, производство удобрений и биологически активных веществ, синтез вторичных метаболитов и др. [3]. Все выше перечисленное подтверждает необходимость и важность создания и развития альгологических коллекций, позволяющих депонировать и поддерживать ценные штаммы водорослей, осуществлять обмен штаммами с другими коллекциями, обеспечивать доступ пользователей к информации о штаммах, продуктам и услугам коллекций.

Цель работы – описание и анализ коллекции культур водорослей, созданной на кафедре ботаники и физиологии растений «ГГУ им. Ф. Скорины» в рамках Научного гербария Белорусского Полесья (GSU).

В рабочей коллекции культур водорослей содержатся штаммы, выделенные из антропогенно-преобразованных почв Гомельского региона, а также штаммы, предоставленные ведущим кафедрой ботаники Учебно-научного центра «Институт биологии» Киевского национального университета им. Т. Шевченко, д.б.н., проф. И.Ю. Костиковым и старшим научным сотрудником лаборатории физико-химии почв Института физико-химических и биологических проблем почвоведения РАН, к.б.н. А.Д. Темралеевой.

Отбор почвенных образцов проводили общепринятыми в почвенной альгологии методами [4], [5]. Для выделения водорослей использовали накопительные почвенные культуры, агаровые культуры на жидких и агаризованных средах 1N-BBM и 3N-BBM [6], [7]. Хранение культур водорослей осуществляется в стеклянных пробирках на 20 мл с ватно-марлевыми пробками на агаризованных средах (1–2 %) или водных питательных средах (реже), содержащих комплекс макро- и микроэлементов, необходимых для существования водорослей. Штаммы содержатся в культуральном боксе при температуре 20 ± 3 °С, периодическом освещении с интенсивностью 1700–2500 лк с 10/14-часовым чередованием световой и темновой фаз (в условиях интенсивного культивирования) или в холодильнике при температуре 5–

10 °С (в условиях хранения). Культуры поддерживаются в нескольких проворностях. Периодически осуществляется пересев штаммов на новые питательные среды. Исследование культур водорослей проводится на микроскопе Nikon Eclipse 80i (увеличение $\times 400$, $\times 1000$).

Рабочая коллекция водорослей кафедры ботаники и физиологии растений в настоящее время включает 61 вид водорослей и цианобактерий. Распределение водорослей по отделам приведено на рисунке 1.

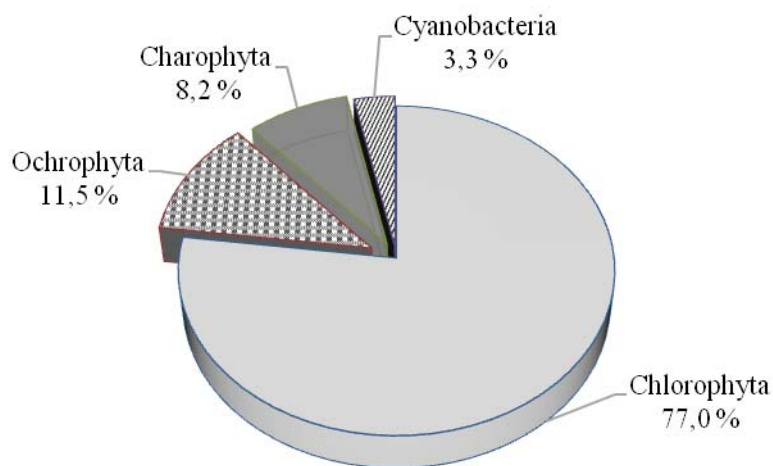


Рисунок 1 – Соотношение отделов почвенных водорослей и цианобактерий

Преобладают в коллекции представители отдела Chlorophyta (77,0 %), которые наиболее широко представлены в наземных биогеоценозах Европейской части России, Украины, Молдовы и Беларуси [4], [8]–[11]. Зеленые водоросли – достаточно сложная в систематическом отношении группа микроорганизмов, требующих изучения их морфологии, филогении и экологии, что и обуславливает их поддержание в альгологических коллекциях ряда стран [1]–[3], [12]–[16].

Распределение водорослей по семействам приведено в таблице.

Таблица – Видовое богатство семейств

Семейство	Количество видов	Процент от общего количества видов	Ранг видового обилия
Chlorococcaceae	10	16,4	1
Chlorellaceae	8	13,1	2
Coccomyxaceae	6	9,8	3
Klebsormidiaceae	5	8,2	4,5
Eustigmataceae	5	8,2	4,5
Characiaceae	4	6,6	6
Scenedesmaceae	3	4,9	7
Chlorosarcinaceae	2	3,3	9
Bracteacoccaceae	2	3,3	9
Radiococcaceae	2	3,3	9
одновидовые семейства	14	22,9	18

Наиболее широко в коллекции представлены виды семейств Chlorococcaceae и Chlorellaceae (29,5 %) – это водоросли преимущественно коккоидного габитуса, отличающиеся высокой устойчивостью к действию неблагоприятных экологических факторов и широко распространенные в водных и вневодных местообитаниях [7]–[11].

В родовом спектре среди зеленых водорослей в коллекции представлены: *Chlorococcum* (4 вида), *Neosporangiococcum* (1), *Tetracystis* (3), *Sporangiococcum* (1), *Neocystis* (2), *Sporangiochloris*

(1), *Chlorosarcinopsis* (2), *Dyctiochloris* (1), *Coccomyxa* (6), *Bracteacoccus* (2), *Characium* (4), *Dictyococcus* (1), *Mychonastes* (1), *Coelastrella* (1), *Desmodesmus* (1), *Scenedesmus* (1), *Scotiellopsis* (1), *Dunaliella* (1), *Haematococcus* (1), *Deasonia* (1), *Chloromonas* (1), *Elliptochloris* (1), *Chlorella* (4), *Muriella* (1), *Nannochloris* (1), *Parachlorella* (1), *Pseudococcomyxa* (1), *Interfilum* (1).

Охрофитовые водоросли включают виды родов *Eustigmatos* (2), *Vischeria* (3), *Ellipsoidion* (1), *Bumilleria* (1), харофитовые – виды рода *Klebsormidium* (5), цианобактерии – виды родов *Nostoc* (1) и *Spirulina* (1).

Распределение водорослей коллекции по экологической приуроченности (согласно данным Algaebase) приведено на рисунке 2.

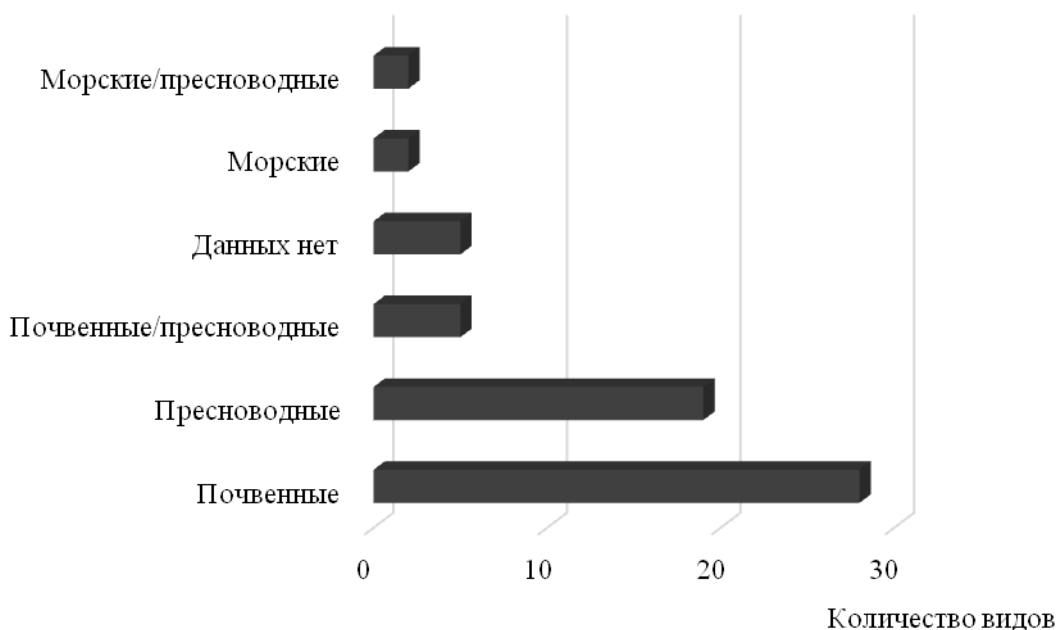


Рисунок 2 – Экологическая приуроченность водорослей и цианобактерий

Проведенный анализ показал, что в коллекции наиболее представлены почвенные водоросли (45,9 %) и пресноводные виды (31,1 %); незначительна доля морских видов.

Следует отметить, что коллекция культур водорослей кафедры ботаники и физиологии растений достаточно молодая. Перспективы ее развития связаны с расширением коллекционного фонда за счет видов наземных местообитаний из антропогенно-преобразованных почв Гомельского региона, а также пополнением за счет обмена штаммами с другими коллекциями.

Культуры водорослей планируется использовать для изучения разнообразия водорослей, особенностей их морфологии, филогении и экологии, подбора штаммов водорослей, пригодных к прикладному использованию в биотестировании и биоремедиации антропогенно-преобразованных почв, а также в научно-образовательном процессе.

Исследования выполнены при финансовой поддержке белорусско-российского проекта БРФФИ-РФФИ «Разработка диагностического ключа для определения зеленых микроводорослей (Protosiphonales, Chlorophyta) естественных и антропогенно-преобразованных почв на основе данных молекулярной таксономии, морфологии и экологии» (Б15PM-005).

Литература

1. Коллекция водорослей и цианобактерий БГПУ [Электронный ресурс] / О.В. Печаткина. – Режим доступа : <http://bspu.ru/node/27497>. – Дата доступа : 04.12.2016.
2. Новаковская, И.В. Коллекция живых штаммов микроводорослей института биологии Коми НЦ УрО РАН и перспективы ее использования / И.В. Новаковская, Е.Н. Патова // Известия Коми научного центра УрО РАН. – 2012. – Вып. 2 (10). – С. 36–41.

3. Альгологическая коллекция Института физико-химических и биологических проблем почвоведения РАН (ACSSI): состояние и перспективы развития [Электронный ресурс] / С.В. Москаленко, А.Д. Темралеева, С.А. Дронова, Д.Л. Пинский // Вопросы современной альгологии. – 2015. – № 1 (8). – Режим доступа : <http://algology.ru/659>. – Дата доступа : 03.12.2016.
4. Зенова, Г.М. Почвенные водоросли / Г.М. Зенова, Э.А. Штина. – М. : МГУ, 1990. – 80 с.
5. Современные методы выделения, культивирования и идентификации зеленых водорослей (Chlorophyta) / А.Д. Темралеева [и др.] ; под общ. ред. А.Д. Темралеевой. – Кострома : Костромской печатный дом, 2014. – 215 с.
6. Гайсина, Л.А. Современные методы выделения и культивирования водорослей: учебное пособие / Л.А. Гайсина, А.И. Фазлутдинова, Р.Р. Кабиров. – Уфа : БГПУ, 2008. – 152 с.
7. Андреева, В.М. Почвенные и аэрофильные зеленые водоросли (Chlorophyta: Tetrasporales, Chlorococcales, Chlorosarcinales) / В.М. Андреева. – СПб : Наука, 1998. – 352 с.
8. Новаковская, И.В. Почвенные водоросли еловых лесов и их изменения в условиях аэротехногенного загрязнения / И.В. Новаковская, Е.Н. Патова. – Сыктывкар : Коми НЦ УрО РАН, 2011. – 128 с.
9. Водорості ґрунтів України (історія та методи дослідження, система, конспект флори) / редкол. : І.Ю. Костіков [та інш.]. – Київ : Фітосоціоцентр, 2001. – 300 с.
10. Шалару, В. Почвенные водоросли естественных и искусственных фитоценозов Республики Молдова : автореф. дис. ... докт. биол. наук : 03.00.05 / В. Шалару ; Ин-т Ботаники АН РМ. – Кишинев, 1996. – 48 с.
11. Бачура, Ю.М. Почвенные водоросли и цианобактерии антропогенно-преобразованных почв (на примере Гомельского региона) / Ю.М. Бачура. – Чернигов : Десна Полиграф, 2016. – 156 с.
12. Костиков, И.Ю. Коллекция культур водорослей Киевского национального университета имени Тараса Шевченко. Каталог штаммов (2008 г.) / И.Ю. Костиков, Э.Н. Демченко, М.А. Березовская // Черноморск. бот. журн. – 2009. – Т. 5, № 1. – С. 37–79.
13. Culture Collection of Algae [Electronic resource] / Department Experimental Phycology and Culture Collection of Algae. – Mode of access : <http://www.uni-goettingen.de/en/45175.html>. – Date of access : 21.12.2016.
14. Culture Collection of Algae of Charles University [Electronic resource] / Department of Botany Faculty of Science. – Mode of access : <http://botany.natur.cuni.cz/algo/caup.html>. – Date of access : 21.12.2016.
15. Culture Collection of Algae, Department of Botany [Electronic resource] / The University of Texas at Austin. – Mode of access : [http:// utex.org/products/utex-algal-images](http://utex.org/products/utex-algal-images). – Date of access : 21.12.2016.
16. Database of information on algae that includes terrestrial, marine and freshwater organisms [Electronic resource] / ed. M.D. Guiry. – 1996–2013. – Mode of access : <http://www.algaebase.org>. – Date of access : 25.10.2016.

Изучение корреляционных зависимостей некоторых биохимических показателей сыворотки крови при циррозе печени

Л.А. БЕЛЯЕВА¹, Г.А. МЕДВЕДЕВА²

Исследовано содержание билирубина и ферментов-аминотрансфераз: аланинаминотрансферазы (АлАт) и аспартатаминотрансферазы (АсАт) у лиц разного пола и возраста (31–60 лет) с циррозом печени. Установлены корреляционные зависимости между содержанием билирубина и активностью АлАт и АсАт. Определено, что корреляционная зависимость в паре билирубин / АлАт ярко выражена у женщин всех исследованных возрастных групп; у мужчин всех возрастных групп данная зависимость характеризуется средними значениями. Коэффициент корреляции в паре билирубин / АсАт наиболее выражен у женщин в возрастной группе 41–50 лет; средняя корреляция – у женщин в возрастной группе 31–40 лет и у мужчин в возрастных группах 31–50 лет; слабая корреляционная зависимость наблюдается у женщин и мужчин в возрастной группе 51–60 лет.

Ключевые слова: билирубин, аминотрансферазы, АлАт, АсАт, корреляционная зависимость, цирроз печени.

The levels of bilirubin and enzymes-aminotransferases – alanine aminotransferase (Alat) and aspartate aminotransferase (Asat) - in persons of different sex and age with liver cirrhosis were investigated. Correlations between the levels of bilirubin and Alat and Asat activity were established. It is revealed that the correlation of bilirubin/Alat is the most pronounced in women of all age groups; in men of all age groups this dependence has the average value. The correlation of bilirubin/Asat is the most pronounced in women of the age group 41–50 years; the average correlation is in women of the age group 31–40 years and in men of the age groups 31–50 years; weak correlation is observed in women and men in the age group 51–60 years.

Keywords: bilirubin, aminotransferases, Alat, Asat, correlation, liver cirrhosis.

Введение. Печень представляет собой центральный орган химического гомеостаза организма, где создается единый обменный и энергетический пул для метаболизма белков, жиров и углеводов. К основным функциям печени относятся: секреция желчи, детоксикационная функция, участие в обмене белков, углеводов, липидов, ферментов, витаминов, минеральных веществ и др. [1, с. 86].

Биохимический анализ крови позволяет исследовать как протекание нормальных обменных процессов в печени, так и выявить нарушения метаболизма веществ с развитием патологии. Изменения в функционировании печени долгое время могут оставаться незамеченными. Симптомы заболеваний часто появляются на поздних стадиях, что затрудняет лечение, заведомо снижая его эффективность. К таким заболеваниям в первую очередь относятся вирусные гепатиты, циррозы печени, сдвиги метаболизма при нерациональном питании, онкологические заболевания печени. Поэтому очень важна ранняя диагностика этих заболеваний, которая может основываться на анализе биохимических показателей. Изменение биохимических показателей, даже самое незначительное, может охарактеризовать развитие любой болезни и, следовательно, поможет избежать дальнейших патологий [2, с. 16].

Цель работы заключалась в изучении корреляционных зависимостей некоторых показателей сыворотки крови при циррозе печени у лиц разного пола и возраста.

Цирроз печени – прогрессирующее заболевание печени, характеризующееся перестройкой нормальной структуры печени, вследствие чего нарушаются функции печени, и развитием в последующем печеночной недостаточности и портальной гипертензии. Вследствие гибели печеночных клеток под действием различных повреждающих факторов нормальная ткань печени замещается фиброзной с формированием узлов и перестройкой всей структуры печени. Нарушение структуры печени приводит к нарушению всех ее функций [3, с. 93], [4, с. 159].

Количество ферментов, ускоряющих ход различных биохимических реакций, достигает 5000. При заболеваниях печени, сопровождающихся повышением проницаемости клеточных мембран и дистрофией или некрозом клеток, внутриклеточные ферменты поступают в плазму

крови. Среди большого количества ферментов наиболее изучены и представляют практический интерес аланинаминотрансфераза, аспартатаминотрансфераза, альдолаза, щелочная фосфатаза и холинэстераза.

Трансаминазы, или аминотрансферазы – тканевые ферменты, участвующие в реакциях переаминирования аминокислот. Наиболее каталитически активны две трансаминазы: аланинаминотрансфераза (АлАТ) и аспартатаминотрансфераза (АсАТ).

Аланинаминотрансфераза содержится преимущественно в печеночных клетках и в небольшом количестве в клетках других органов. Аспартатаминотрансфераза содержится в гепатоцитах, клетках сердца и других органов.

Концентрация трансаминаз в сыворотке здоровых людей является постоянной. При заболеваниях, связанных с некротическими процессами, нарастает концентрация одного или обоих ферментов. Повышение концентрации трансаминаз в плазме обусловлено их освобождением из некротизированных клеток. За единицу принята активность фермента, необходимая для образования 1 мкг пировиноградной кислоты. Количество последней определяется с помощью спектрофотометрического или колориметрического методов. Активность АлАТ и АсАТ в сыворотке здоровых людей колеблется в пределах 0,06–0,14 мккат/л.

Объектом исследования послужила цельная кровь женщин и мужчин различных возрастных групп (31–40, 41–50, 51–60 лет) с диагнозом – цирроз печени. Всего обследовано 150 человек.

Исследования проводились на базе ГУЗ «Гомельская городская клиническая больница № 3». Кровь для определения биохимических показателей была взята у обследуемых с привлечением медработников, утром натощак, из локтевой вены, через 12–14 ч после последнего приёма пищи.

В качестве основных показателей, позволяющих оценить функциональное состояние печени, были выбраны: показатель пигментного обмена – билирубин и показатели обмена ферментов – АсАТ, АлАТ.

Определение концентрации билирубина в сыворотке крови осуществлялось колориметрическим диазотометодом (по Йендрашику, Клетгорну) [5, с. 215]; определение активности ферментов аланинаминотрансферазы и аспартатаминотрансферазы – кинетическим методом [6, с. 371].

Статистический анализ полученных данных проводился с использованием программы Microsoft Exel 2013 и Statistica 6.0. Статистическую значимость различий определяли по парному t-критерию Стьюдента для независимых выборок, пороговый уровень статистической значимости принимался при значении критерия $p \leq 0,05$ [7].

Результаты исследований. Среднее содержание билирубина и значения активностей АлАТ и АсАТ в сыворотке крови обследованных мужчин и женщин разных возрастных групп при циррозе печени представлено в таблице.

Таблица – Среднее содержание билирубина и значения активностей АлАТ и АсАТ в сыворотке крови лиц разного пола и возраста

Диагноз	Возраст, лет	Содержание билирубина, мкмоль/л		Активность АлАТ, мккат/л		Активность АсАТ, мккат/л		
Цирроз печени	31–40	муж.	жен.	муж.	жен.	муж.	жен.	
		52,34 ± 5,42	37,08 ± 4,52	0,30 ± 0,04	0,16 ± 0,01	0,57 ± 0,07	0,32 ± 0,03	
	41–50	51,88 ± 5,28	38,41 ± 4,10	0,21 ± 0,02	0,23 ± 0,03	0,42 ± 0,05	0,38 ± 0,04	
		51–60	70,62 ± 8,28	65,52 ± 9,46	0,13 ± 0,01	0,11 ± 0,01	0,18 ± 0,02	0,21 ± 0,01
	Норма		8,55–20,52		0,06–0,14			

В ходе выполнения исследований установлено, что при циррозе печени практически у всех обследуемых разных возрастных групп наблюдается гипербилирубинемия: содержание билирубина у женщин составляло от 19,6 до 94,7 мкмоль/л, у мужчин – от 27,3 до 98,5 мкмоль/л.

Исследования активности аминотрансфераз показали, что у женщин активность АлАТ в среднем превышала норму в 2 раза, а активность АсАТ – в 3 раза. У мужчин активность АлАТ увеличена в 2–3 раза, активность АсАТ в 4–5 раз. При этом у 50–75 % пациентов активность АсАТ оказалась выше, чем АлАТ ($p \leq 0,05$).

Проведенный анализ корреляционных зависимостей между изучаемыми показателями в разных половозрастных группах при циррозе печени показал:

– В паре билирубин / АлАТ.

У женщин и мужчин в возрастной группе 31–40 лет (рисунок 1).

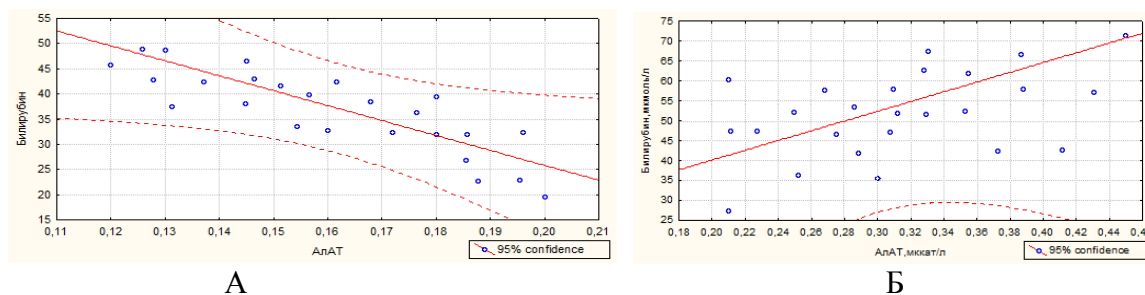


Рисунок 1 – Корреляционная зависимость между концентрацией билирубина и активностью АлАТ у женщин (А) и мужчин (Б) в возрастной группе 31–40 лет

У женщин: корреляция – сильная, обратная. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет высокое значение $r = -0,88$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 85,142 - 296,7 \cdot X$.

У мужчин: корреляция – средняя, прямая. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет среднее значение $r = 0,61$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 15,630 + 122,38 \cdot X$.

У женщин и мужчин в возрастной группе 41–50 лет (рисунок 2).

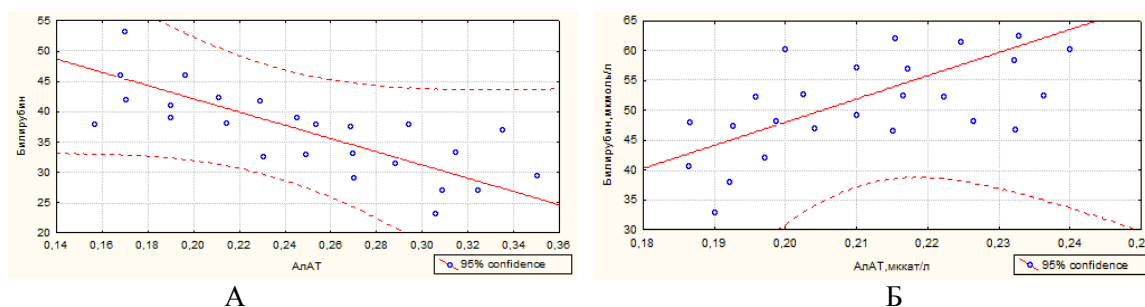


Рисунок 2 – Корреляционная зависимость между концентрацией билирубина и активностью АлАТ у женщин (А) и мужчин (Б) в возрастной группе 41–50 лет

У женщин: корреляция – сильная, обратная. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет высокое значение $r = -0,82$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 63,944 - 109,1 \cdot X$.

У мужчин: корреляция – средняя, прямая. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет среднее значение $r = 0,63$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 29,55 + 387,79 \cdot X$.

У женщин и мужчин в возрастной группе 51–60 лет (рисунок 3).

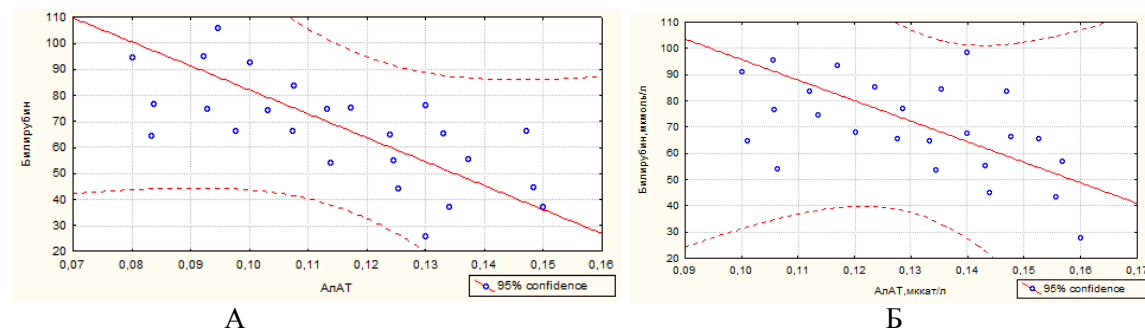


Рисунок 3 – Корреляционная зависимость между концентрациями билирубина и активностью АлАТ у женщин (А) и мужчин (Б) в возрастной группе 51–60 лет

У женщин: корреляция – сильная, обратная. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет высокое значение $r = -0,80$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 174,32 - 922,0 \cdot X$.

У мужчин: корреляция – средняя, обратная. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет среднее значение $r = -0,64$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 174,01 - 783,3 \cdot X$.

– В паре билирубин / АсАТ

У женщин и мужчин в возрастной группе 31–40 лет (рисунок 4).

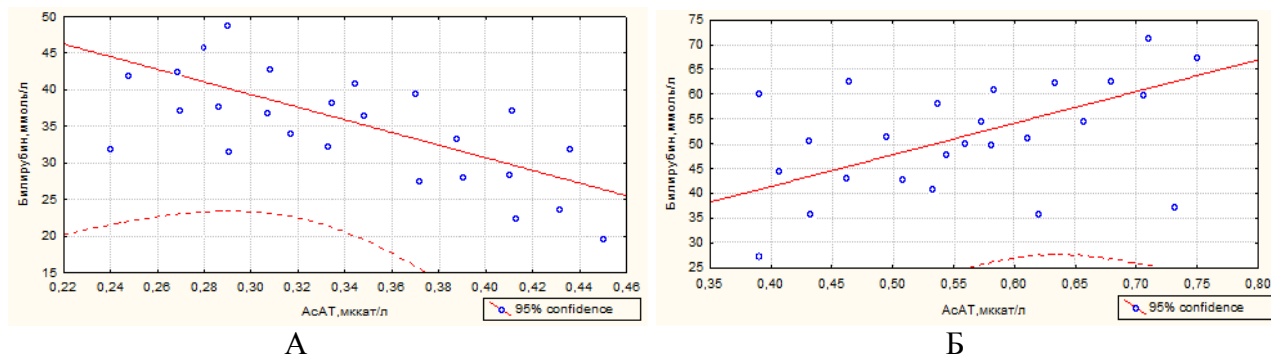


Рисунок 4 – Корреляционная зависимость между концентрацией билирубина и активностью АсАТ у женщин (А) и мужчин (Б) в возрастной группе 31–40 лет

У женщин: корреляция – средняя, обратная. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет среднее значение $r = -0,61$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 65,256 - 86,43 \cdot X$.

У мужчин: корреляция – средняя, прямая. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет среднее значение $r = 0,56$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 15,793 + 63,900 \cdot X$.

У женщин и мужчин в возрастной группе 41–50 лет (рисунок 5).

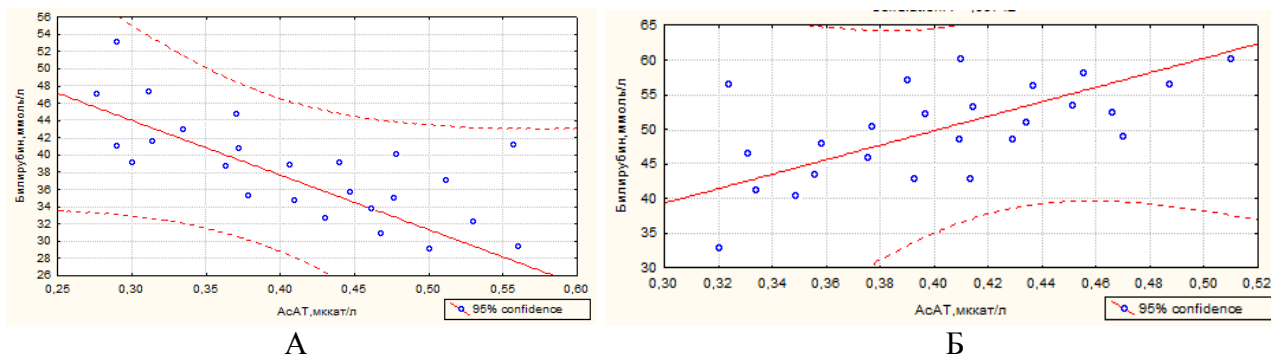


Рисунок 5 – Корреляционная зависимость между концентрацией билирубина и активностью АсАТ у женщин (А) и мужчин (Б) в возрастной группе 41–50 лет

У женщин: корреляция – сильная, обратная. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет сильное значение $r = -0,83$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 62,984 - 63,33 \cdot X$.

У мужчин: корреляция – средняя, прямая. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет среднее значение $r = 0,66$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 7,9960 + 104,50 \cdot X$.

У женщин и мужчин в возрастной группе 51–60 лет (рисунок 6).

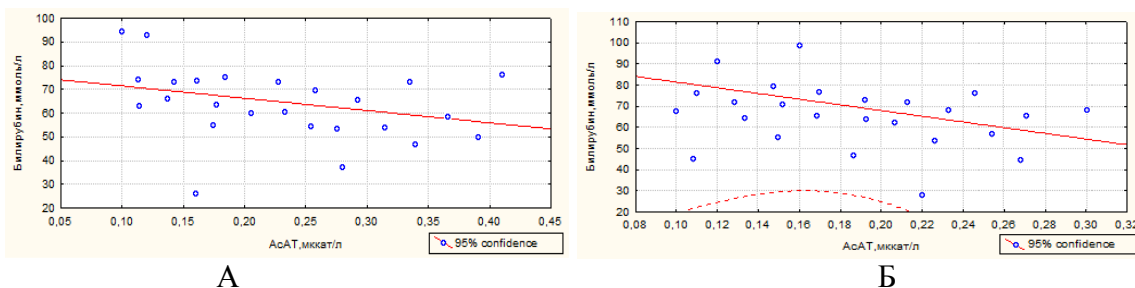


Рисунок 6 – Корреляционная зависимость между концентрацией билирубина и активностью АсАТ у женщин (А) и мужчин (Б) в возрастной группе 51–60 лет

У женщин: корреляция – слабая, обратная. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет слабое значение $r = -0,21$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 76,602 - 51,78 \cdot X$.

У мужчин: корреляция – слабая, обратная. Парный коэффициент корреляции между двумя выборками имеет слабое значение $r = -0,39$. Корреляционная связь между выборками описывается линейной функцией Пирсона $Y = 94,879 - 134,8 \cdot X$.

Выводы. В ходе проведенных исследований установлено:

1. При циррозе печени во всех половозрастных группах наблюдается гипербилирубинемия и увеличение активности аминотрансфераз (АлАТ и АсАТ). При этом у большинства обследуемых активность АсАТ выше активности АлАТ.

2. Количество билирубина в сыворотке крови обследуемых с циррозом печени коррелирует с активностью аминотрансфераз:

А) в паре билирубин / АлАТ

– у женщин всех возрастных групп отмечается сильная обратная корреляция;

– у мужчин корреляция средняя: в возрасте 31–50 лет – прямая, у лиц старше 50 лет – обратная.

Б) в паре билирубин / АсАТ

– у лиц разного пола зависимость характеризуется одинаковой тенденцией: в возрастной группе 31–40 лет корреляция средняя, в возрастной группе 41–50 лет – увеличивается, при этом у женщин она носит обратный характер, а у мужчин – прямой. В возрастной группе старше 50 лет (как у женщин, так и у мужчин) зависимость билирубин / АсАТ уменьшается.

Знание корреляционных зависимостей между содержанием билирубина и активностью аминотрансфераз в разных половозрастных группах, может облегчить определение данных показателей, имеющих важнейшее диагностическое значение, и повысить оперативность лечения.

Литература

1. Физиология человека : учебник для вузов : в 2-х т. / В.М. Покровский [и др.] ; под общ. ред. В.М. Покровского, Г.Ф. Коротко. – М. : Медицина, 2000. – Т. 2. – С. 86–87.
2. Чиркин, А.А. Клинический анализ лабораторных данных / А.А. Чиркин. – М. : Мед. Литература, 2005. – С. 16.
3. Григорьев, П.Я. Клиническая гастроэнтерология / П.Я. Григорьев, А.В. Яковенко. – М., 2001. – С. 93.
4. Маколкин, В.Н. Внутренние болезни / В.Н. Маколкин, С.И. Овчаренко. – М. : Изд-во «Медицина», 2005. – С. 159.
5. Камышников, В.С. Справочник по клинико-биохимической лабораторной диагностике : в 2 т. / В.С. Камышников. – Мн. : Беларусь, 2002. – Т. 2. – С. 215.
6. Камышников, В.С. Справочник по клинико-биохимической лабораторной диагностике : в 2 т. / В.С. Камышников. – Мн. : Беларусь, 2002. – Т. 1. – С. 371.
7. Гланц, С. Медико-биологическая статистика / С. Гланц ; пер. с англ. Ю.А. Данилова. – М. : Практика, 1999. – 459 с.

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Гомельский государственный медицинский университет

Сравнительный анализ средних годовых эффективных доз облучения жителей населенных пунктов Республики Беларусь по данным Каталогов доз-2015 и 2009

Н.Г. ВЛАСОВА¹, Ю.В. ВИСЕНБЕРГ², Л.А. ЧУНИХИН³

Проведен анализ данных о рассчитанных по разработанному авторами методу оценки средних годовых эффективных доз облучения жителей населенных пунктов Республики Беларусь для Каталога доз-2015. По данным Каталога доз-2015 средние годовые эффективные дозы (внешнего и внутреннего) облучения жителей 2396 населённых пунктов снизились в среднем на 30 % по сравнению с данными Каталога доз-2009 (доза внешнего облучения – на 27 %, доза внутреннего облучения – на 31 %). Сравнение средних годовых эффективных суммарных доз облучения жителей 2613 населённых пунктов из Каталога доз-2009 со сравнение средними годовыми эффективными дозами Каталога доз-2004 показало снижение в среднем на 40 %. Количество населённых пунктов, средняя годовая эффективная доза облучения жителей которых превышает или равна 1 мЗв/год, уменьшилось с 193 до 82.

Ключевые слова: средняя годовая эффективная доза, доза внешнего облучения, доза внутреннего облучения, плотность загрязнения, Каталог доз.

The analysis of the average annual effective doses in inhabitants of Belarusian settlements was conducted. It was based on the method that had been previously developed. According to the Catalogue of doses-2015, average annual effective doses (external and internal) of inhabitants from 2396 settlements decreased by an average of 30 % in comparison with the data of the Catalogue of doses-2009 (an external dose – 27 %, an internal dose – 31 %). Comparison of average annual effective total doses of inhabitants of 2613 settlements according to the Catalogue-2009 with those of the Catalogue-2004 showed decrease in an average for 40 %. The number of settlements, where average annual effective dose of inhabitants exceeds or is equal to 1 mSv/year, decreased with 193 to 82.

Keywords: average annual effective dose, external dose, internal dose, density of soil contamination, Catalogue of doses.

Действующий Каталог средних годовых эффективных доз (СГЭД) облучения жителей населенных пунктов (НП) Республики Беларусь был создан по результатам выполнения НИР по теме «Развитие единой системы оценки и прогноза доз облучения населения с учетом международных подходов» в соответствии с подпунктом 2.1.1 «Развитие единой системы оценки и прогноза доз облучения населения и нормирования содержания радионуклидов в пищевых продуктах, продукции сельского и лесного хозяйства с учетом международных подходов» Программы совместной деятельности по преодолению последствий чернобыльской катастрофы в рамках Союзного государства на период до 2016 г. [1].

Методической основой создания Каталога доз-2015 явилась разработанная в рамках этого же договора инструкция по применению «Метод оценки средней годовой эффективной дозы облучения жителей населенных пунктов, расположенных на территории, загрязненной радионуклидами в результате аварии на чернобыльской АЭС», утвержденная Министерством здравоохранения РБ №094-0914 от 12.12.2014 [2], основные положения которой изложены в работах [3], [4].

Методики оценки СГЭД для цели зонирования разрабатывались каждые 5 лет, начиная с 1991 г. Каждая последующая методика отличалась от предыдущей, поскольку, с одной стороны, с изменением радиологической ситуации изменялись численные значения параметров моделей; с другой стороны, методики совершенствовались по мере выявления закономерностей формирования доз внешнего и внутреннего облучения.

По данным Каталога доз-2015 суммарная СГЭД (внешнего и внутреннего) облучения жителей 2396 населенных пунктов снизилась в среднем на 30 % по сравнению с данными Каталога доз-2009 [5] (доза внешнего облучения – на 27 %, доза внутреннего облучения – на

31 %). Для сравнения: суммарная доза облучения жителей 2613 НП Каталога доз-2009 снизилась в среднем на 40 % по сравнению с данными Каталога доз-2004.

Значения коэффициента связи СГЭД внешнего облучения жителей НП со средней плотностью загрязнения территории НП цезием-137 (KF_s) на 2015 г. по сравнению с его значением на 2009 г. уменьшились в среднем на 29 % (таблица 1).

Таблица 1 – Значения коэффициента KF_s для расчета СГЭД внешнего облучения жителей НП соответствующего типа

Коэффициент связи	Методика	Тип населенного пункта		
		Сельский	Поселковый	Городской
KF_s , (мЗв) / (Ки/км ⁻²)	2009 [4]	0,080	0,050	0,040
	2015 [1]	0,060	0,035	0,027
Значение коэффициента снизилось на		25 %	30 %	30 %

Как видно из данных таблицы 2, значения коэффициента снизились на 25–30 %.

Плотность загрязнения территории НП цезием-137 на 2015 г., предоставленная Республиканским центром по гидрометеорологии, контролю радиоактивного загрязнения и мониторингу окружающей среды Министерства природных ресурсов и охраны окружающей среды РБ, по сравнению с плотностью загрязнения цезием-137 на 2009 г., в целом снизилась на 14 %, что соответствует процессу естественного распада радионуклида за этот период (6 лет). Но в 252 НП отмечено снижение плотности загрязнения территории цезием-137 более чем на 20 % (максимум – в 3 раза). Плотность загрязнения территории цезием-137 128 населенных пунктов осталась на уровне 2009 г.

Так как доза внешнего облучения пропорциональна плотности загрязнения территории НП, то значительное снижение дозы внешнего облучения наблюдается в тех НП, официальные данные о средней плотности загрязнения территории цезием-137 на 2015 г. которых значительно ниже таковых за 2009 г.

Так, в 104 НП, плотность загрязнения территории цезием-137 которых снизилась на 30 % и более (в среднем на 40 %), доза внешнего и внутреннего облучения снизилась в среднем на 47 %.

Для 383 НП с административным статусом в реестре «поселок» и малой численностью населения в 2009 г., по настоянию одного из авторов инструкции по применению [6]: В.Ф. Миненко, доза внешнего облучения была рассчитана по коэффициенту, соответствующему типу НП «поселковый», а в 2015 г. – по коэффициенту для типа НП «сельский», который соответствует действительности. Поэтому доза внешнего облучения жителей этих 383 выше, чем в 2009 г.

Количество НП, СГЭД облучения жителей которых превышает или равна 1 мЗв/год, уменьшилось с 193 до 82. Такое снижение, хотя и кажется на первый взгляд очень большим, вполне закономерно.

Действительно, дозы облучения в некоторых НП существенно ниже по сравнению с дозами Каталога доз-2009. Так, снижение СГЭД в 7 НП из 193 связано с необоснованно заниженной плотностью загрязнения, предоставленной Республиканским центром по гидрометеорологии, контролю радиоактивного загрязнения и мониторингу окружающей среды Министерства природных ресурсов и охраны окружающей среды РБ (таблица 3).

Как видно из данных таблицы 3, дозы облучения в этих НП снизились в среднем: внешнего облучения – на 45 %, внутреннего – на 60 %, суммарная – на 52 %.

Дозы внешнего облучения и суммарные дозы облучения жителей 193 НП, превысившие предел дозы 1 мЗв/год в 2009 г., в 2015 г. снизились в среднем на 31 %, а дозы внутреннего облучения – на 29 %.

Таблица 2 – Перечень населённых пунктов, плотность загрязнения территории цезием-137 которых повысилась по сравнению с 2009 г.

Район	Сельский совет	Тип НП	Населённый пункт	Плот-ность загрязнения ¹³⁷ Cs, кБк/м ² на 2009г.	Доза облучения 2009, мЗв/год		Плот-ность загрязнения ¹³⁷ Cs, кБк/м ² на 2015г.	Доза облучения 2015, мЗв/год			Отноше- ние плот- ности загрязн. 2015 к 2009	Отношение дозы облу- чения 2015г. к дозе 2009г.				
					Внешн.	Внутр.		Сумм.	Внешн.	Внутр.		Сумм.	Внешн.	Внутр.	Сумм.	
Брестская область																
Столинский	Глинковский	д.	Лука	34	0,07	0,28	0,35	50	0,08	0,30	0,38	1,45	1,16	1,06	1,08	
Столинский	Федорский	д.	Нечатово	45	0,10	0,30	0,40	70	0,11	0,35	0,46	1,53	1,13	1,17	1,16	
Гомельская область																
Буда-Кошелев.	Губичский	п.	Вольный	43	0,06	0,10	0,16	57	0,09	0,08	0,17	1,32	1,55	0,80	1,08	
Буда-Кошелев.	Гусевичский	п.	Владимировка	54	0,07	0,12	0,19	58	0,09	0,08	0,17	1,07	1,34	0,67	0,92	
Буда-Кошелев.	Гусевичский	п.	Григоровка	66	0,09	0,13	0,22	71	0,11	0,09	0,21	1,08	1,27	0,70	0,93	
Буда-Кошелев.	Гусевичский	п.	Красный Свет	66	0,09	0,13	0,22	68	0,11	0,09	0,20	1,03	1,23	0,68	0,90	
Буда-Кошелев.	Гусевичский	п.	Люткова	67	0,09	0,13	0,22	68	0,11	0,09	0,20	1,02	1,23	0,68	0,90	
Буда-Кошелев.	Кошелевский	п.	Кулешово	185	0,25	0,31	0,56	188	0,30	0,18	0,49	1,01	1,22	0,60	0,87	
Буда-Кошелев.	Кривский	п.	Заречье	32	0,04	0,08	0,12	35	0,06	0,06	0,12	1,09	1,42	0,78	0,99	
Буда-Кошелев.	Кривский	п.	Победа	61	0,08	0,12	0,20	66	0,11	0,09	0,19	1,09	1,34	0,73	0,97	
Буда-Кошелев.	Морозович.	п.	Васильевка	53	0,07	0,11	0,18	55	0,09	0,08	0,17	1,04	1,28	0,71	0,93	
Буда-Кошелев.	Морозович.	п.	Красное Знамя	72	0,10	0,14	0,24	75	0,12	0,09	0,22	1,04	1,22	0,67	0,90	
Буда-Кошелев.	Потаповский	п.	Кочан	57	0,08	0,12	0,20	69	0,11	0,09	0,20	1,22	1,40	0,75	1,01	
Буда-Кошелев.	Чеботовичский	п.	Красн. Курган	41	0,06	0,10	0,16	47	0,08	0,07	0,15	1,15	1,28	0,72	0,93	
Ветковский	Светилович.	п.	Малиновка	81	0,11	0,15	0,26	90	0,15	0,11	0,25	1,11	1,33	0,71	0,97	
Ветковский	Светилович.	п.	Чемерня	130	0,18	0,23	0,41	228	0,37	0,22	0,58	1,75	2,05	0,94	1,43	
Ветковский	Столбунский	п.	Городок	194	0,26	0,32	0,58	226	0,37	0,21	0,58	1,16	1,41	0,67	1,00	
Ветковский	Яновский	п.	Желудье	76	0,10	0,15	0,25	96	0,16	0,11	0,27	1,26	1,56	0,74	1,07	
Гомельский	Азделинский	п.	Зеленый Гай	61	0,08	0,13	0,21	63	0,10	0,08	0,19	1,02	1,27	0,65	0,88	
Гомельский	Азделинский	п.	Манеев	55	0,07	0,12	0,19	62	0,10	0,08	0,18	1,12	1,44	0,70	0,97	
Гомельский	Азделинский	п.	Молодежь	70	0,09	0,14	0,23	84	0,14	0,10	0,24	1,21	1,52	0,73	1,04	
Гомельский	Азделинский	п.	Петров	64	0,09	0,13	0,22	68	0,11	0,09	0,20	1,06	1,23	0,68	0,90	
Гомельский	Азделинский	п.	Приволье-2	67	0,09	0,13	0,22	72	0,12	0,09	0,21	1,08	1,29	0,70	0,95	
Гомельский	Ереминский	п.	Климовский	64	0,09	0,13	0,22	94	0,15	0,11	0,26	1,46	1,68	0,84	1,19	
Гомельский	Поклобич.	п.	Затинейный	62	0,08	0,13	0,21	70	0,11	0,09	0,20	1,12	1,41	0,69	0,96	
Жлобинский	Майский	п.	Мал.Козловичи	49	0,07	0,11	0,18	55	0,09	0,08	0,17	1,11	1,27	0,71	0,93	
Жлобинский	Староруднян.	п.	Глушица	33	0,04	0,08	0,12	36	0,06	0,06	0,12	1,09	1,47	0,79	1,02	
Лоевский	Уборковский	п.	Райск	36	0,05	0,09	0,14	38	0,06	0,06	0,13	1,05	1,22	0,72	0,90	

Окончание таблицы 2

Наровлянский	Головичий	п.	Червон.Остров	308	0,42	0,89	1,31	313	0,51	1,03	1,54	1,02	1,21	1,16	1,17
Наровлянский	Головичий	п.	Чехи	363	0,49	1,01	1,50	365	0,59	1,18	1,77	1,01	1,21	1,17	1,18
Речицкий	Пересвятов.	п.	Борец	50	0,07	0,15	0,22	53	0,09	0,11	0,20	1,06	1,22	0,76	0,91
Речицкий	Холмечский	п.	Барбары	31	0,04	0,14	0,18	32	0,05	0,10	0,15	1,01	1,29	0,71	0,84
Речицкий	Холмечский	п.	Рельки	29	0,04	0,13	0,17	31	0,05	0,10	0,15	1,05	1,24	0,76	0,87
Рогачевский	Гадилевичский	п.	Брод	50	0,07	0,15	0,22	58	0,09	0,12	0,21	1,16	1,34	0,78	0,96
Рогачевский	Гадилевичский	п.	Грабов	56	0,08	0,15	0,23	63	0,10	0,12	0,22	1,12	1,27	0,80	0,97
Рогачевский	Гадилевичский	п.	Камень	102	0,14	0,17	0,31	112	0,18	0,16	0,34	1,10	1,30	0,91	1,09
Рогачевский	Гадилевичский	п.	Турсковый	46	0,06	0,14	0,20	61	0,10	0,12	0,22	1,34	1,66	0,85	1,10
Рогачевский	Городецкий	д.	Вишенька	38	0,08	0,14	0,22	71	0,11	0,13	0,24	1,84	1,43	0,90	1,09
Светлогор.	Сосновобор.п/с	р.п.	Сосновый Бор	30	0,03	0,14	0,17	34	0,03	0,10	0,13	1,13	1,09	0,72	0,79
Черерский	Нисимкович.	п.	Новозалесье	186	0,25	0,31	0,56	233	0,38	0,22	0,60	1,25	1,51	0,71	1,07
Гродненская область															
Ивьевский	Эйгердовский	хут.	Клим	44	0,09	0,14	0,23	57	0,09	0,12	0,21	1,31	1,03	0,83	0,91
Могилевская область															
Быховский	Глухский	п.	Селище	100	0,14	0,17	0,31	107	0,17	0,15	0,32	1,07	1,24	0,89	1,05
Быховский	Лудчицкий	п.	Комсомольский	53	0,07	0,15	0,22	56	0,09	0,12	0,21	1,07	1,30	0,77	0,94
Быховский	Черноборский	п.	Козел	105	0,14	0,17	0,31	106	0,17	0,15	0,32	1,01	1,22	0,89	1,04
Быховский	Черноборский	п.	Новая Селиба	69	0,09	0,16	0,25	105	0,17	0,15	0,32	1,53	1,90	0,94	1,29
Быховский	Черноборский	п.	Писаревка	55	0,07	0,15	0,22	81	0,13	0,13	0,27	1,49	1,88	0,89	1,21
										В среднем:					
										1,18	1,36	0,79	1,01		

Таблица 3 – Населённые пункты, плотность загрязнения которых снизилась в 2015 г. в среднем в 1,7 раза по сравнению с 2009 г

Район	Сель-совет	Населён-ный пункт	Плотность загрязне-ния ¹³⁷ Cs, ₂ кБк/м ² на 2009	Доза 2009, мЗв/год			Плотность загрязне-ния ¹³⁷ Cs, ₂ кБк/м ² на 2015	Доза 2015, мЗв/год			Отношение дозы 2015 к дозе 2009		
				Внеш.	Внутр.	Сумм.		Внеш.	Внутр	Сум.	Сум.	Внеш.	Внутр.
Гомельская область													
Доб-рушск.	Кор-мянск	Селище-1	402	0,54	0,62	1,16	217	0,35	0,21	0,56	0,48	0,65	0,34
Кор-мянск.	Коро-тько-вичск.	Колюды	461	1,00	0,71	1,71	349	0,57	0,31	0,88	0,51	0,57	0,44
Лоев-ский	Мали-новск.	Хатки	314	0,68	0,49	1,17	263	0,43	0,24	0,67	0,57	0,63	0,49
Чечер-ский	Лени-нский	Чернявск. Малыни-чи	413	0,89	0,64	1,53	295	0,48	0,27	0,75	0,49	0,54	0,42
Чечер-ский	Ленин-ский	Ивановка	367	0,50	0,57	1,07	124	0,20	0,13	0,33	0,31	0,40	0,23
Могилёвская область													
Климо-вичск.	Лоб-жанск.	Ганновка	378	0,82	0,59	1,41	238	0,39	0,22	0,61	0,43	0,47	0,38
Костю-ковичс.	Бело-дуб-ров.	Прудок	602	1,30	0,91	2,21	489	0,79	0,43	1,22	0,55	0,61	0,47
Среднее											0,48	0,55	0,40

Литература

1. Каталог средних годовых эффективных доз облучения жителей населенных пунктов Республики Беларусь : утв. МЗ РБ 27марта 2015г., БОРБИЦ. – Гомель, 2015. – 73 с.
2. Метод оценки СГЭД облучения жителей населённых пунктов, расположенных на территории, загрязнённой радионуклидами в результате аварии на Чернобыльской АЭС / Н.Г. Власова, А.В. Рожко, Ю.В. Висенберг, Г.Н. Евтушкова [и др.] // Инструкция по применению : утв. МЗ РБ 12 декабря 2014 г., Рег. № 094-0914. – Гомель, 2014. – 11 с.
3. Развитие единой системы оценки и прогноза доз облучения населения с учетом международных подходов : Программа совместной деятельности по преодолению последствий чернобыльской катастрофы в рамках Союзного государства на период до 2016 г. // Отчёт о НИР, № госрегистрации 20143683 от 22.12.2014 ; Научн. рук. Н.Г. Власова. – Гомель, 2014. – 115 с.
4. Власова, Н.Г. Оценки доз облучения населения Беларуси в отдалённом периоде после аварии на ЧАЭС / Н.Г. Власова // Радиационная гигиена. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 9–18.
5. Каталог средних годовых эффективных доз облучения жителей населенных пунктов Республики Беларусь : утв. МЗ РБ 18 марта 2009г., БОРБИЦ. – Гомель, 2009. – 86 с.
6. Оценка средней годовой эффективной дозы облучения жителей населённых пунктов, расположенных на территориях, загрязнённых радионуклидами в результате аварии на Чернобыльской АЭС, для отнесения к зонам радиоактивного загрязнения по Постановлению Совета Министров Республики Беларусь / Н.Г. Власова, В.Ф. Миненко, Л.А. Чунихин [и др.] // Инструкция по применению : утв. МЗ РБ 27 июня 2008г., Рег. № 044-0508. – Гомель, 2008. – 15 с.

¹ГУ «Республиканский научно-практический центр радиационной медицины и экологии человека»
Министерства здравоохранения РБ

²Гомельский государственный медицинский университет

³Институт радиобиологии НАН Беларуси

Поступила в редакцию 29.10.2016

STR-маркеры в ДНК дактилоскопии домашних собак *Canis familiaris* L.

Г.Г. ГОНЧАРЕНКО, С.А. ЗЯТКОВ, А.В. КРУК

Представлены данные по кариотипу и геному домашней собаки *C. familiaris*. Рассмотрены микросателлитные локусы в качестве наиболее удобных генетических маркеров для дактилоскопии особей и пород *C. familiaris*. Охарактеризованы идентификационная панель, основанная на использовании 10 микросателлитных локусов с вероятностью совпадения генотипа равной $3,6 \times 10^{-5}$, а также 17-локусная панель с вероятностью совпадения $3,2 \times 10^{-8}$.

Ключевые слова: ДНК, хромосома, дактилоскопия, локус.

The karyotype and genome of the domestic dog *C. familiaris* are considered. A forensic genotyping panel of 10 STR loci (power of discrimination $3,6 \times 10^{-5}$) and 17 STR loci (power of discrimination $3,2 \times 10^{-8}$) for *C. familiaris* are characterized.

Ключевые слова: DNA, chromosome, fingerprint, locus.

Кариотипы и геномы. К началу 2000-х гг. было установлено, что кариотип домашней собаки (*Canis familiaris* L.) представлен 38-ю парами аутосом и парой половых хромосом, что составляет в диплоидном наборе 78 хромосом [1], [2]. Изображение 76 аутосом и половых хромосом X и Y *C. familiaris* в виде идиограммы представлено на рисунке 1.

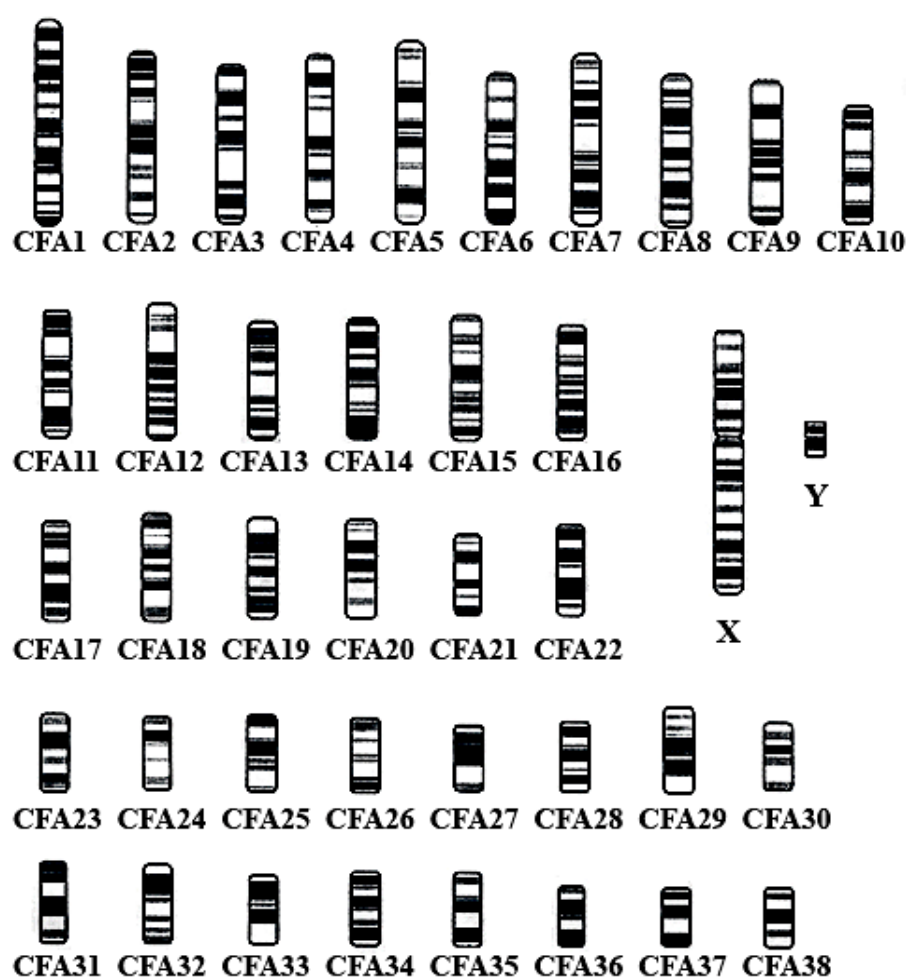


Рисунок 1 – Идиограмма кариотипа собаки *C. familiaris* [2]

Исследования в рамках проекта полного секвенирования генома собаки начались в июне 2003 г. Было выделено около 30 млн. долларов на его выполнение. Через год – в июле 2004 г. – был опубликован первый черновой вариант полного сиквенса генома самки боксера по кличке Таша (CanFam1.0) [3].

Завершению проекта по секвенированию генома домашней собаки способствовали исследования, проводимые в различных научных коллективах мира. Среди таких исследований необходимо отметить картирование генов и составление генетических карт [4]–[5], публикацию первых данных по геному пуделя [6], определение локализации и клонирование генов нескольких заболеваний, а также успешное использование собак в качестве модельного объекта для генной терапии [7]–[10].

По данным, полученным в сентябре 2011 г. (CanFam 3.1), геном *C. familiaris* содержит $2,392 \times 10^9$ п.н., 19 856 кодирующих генов и 11 898 не кодирующих генов [11].

В последние годы на основе данных по структуре генома стремительно развиваются методы ДНК-идентификации, позволяющие проводить дактилоскопию отдельных особей, генетическую паспортизацию пород.

Характеристика микросателлитных локусов. Одним из наиболее удобных и широко используемых маркеров для ДНК-идентификации являются **микросателлиты**. Это особый класс ДНК-маркеров, представляющих собой фрагменты ДНК, с большим количеством – до ста и выше тандемно повторяющихся идентичных «мотивов». Мотивом является короткая последовательность из нескольких (от 2 до 8) пар нуклеотидов обычно называемая «повтором».

В зависимости от длины повтора микросателлиты классифицируют на локусы с ди-, три-, тетра-, пента- и гексануклеотидными повторами. Таким образом, **микросателлитом** или микросателлитным локусом (STR-локусом, Short Tandem Repeats) называют – участок ДНК расположенный в конкретной хромосоме и содержащий **короткие тандемные повторы** [12], [13].

Аллели микросателлитного локуса отличаются друг от друга числом повторов и как следствие длиной. Микросателлитные локусы высокополиморфны – т. е. для каждого из них имеется много аллелей. Например, локус UCMCF71, локализованный в хромосоме CFA1 (рисунок 1) домашней собаки, содержит динуклеотидные повторы АЦ. В популяциях *C. familiaris* обнаружено 7 аллелей этого локуса (с числом повторов от 11 до 18). Нуклеотидная последовательность фрагмента ДНК, содержащего повторы АЦ, и прилежащие к повторам справа и слева (фланкирующие) последовательности ДНК представлены на рисунке 2. Из рисунка хорошо видно, что данный аллель локуса UCMCF71 имеет 14 повторов АЦ. Поэтому формула данного локуса записывается как UCMCF71 (АЦ)₁₄ [14].

```
5'-actcaaaagc catcttgtca caaagtatat gaacacacac acacacacac acacacacac
ccctacaccc actcactctt tctcaccact ctggattact attttaggaa tagctcctgt
atttatatcg tagctcctgc agcttcttcc-3'
```

Рисунок 2 – Фрагмент ДНК, содержащий АЦ повторы локуса UCMCF71 и фланкирующие участки

Микросателлитные фрагменты выявляют методом полимеразной цепной реакции (ПЦР), обеспечивающим **амплификацию** – многократное увеличение копий данного фрагмента ДНК. Синтез этого фрагмента инициируется ДНК-затравками в виде пары **праймеров**, синтетических олигонуклеотидов, комплементарных нуклеотидным последовательностям на границах исследуемого фрагмента. Так как микросателлитные аллели короткие и вместе с праймерами обычно не превышают 200–300 п.н., то даже сильно поврежденный биологический материал может содержать полные копии исследуемого фрагмента ДНК, обеспечивая их успешную амплификацию. Именно по этой причине ПЦР микросателлитов, оказался особенно важным для судебно-медицинских исследований. Для исследуемого микросателлитного локуса конструируют такую пару праймеров, чтобы комплементарные им фланкирующие участки ДНК были высокоспецифичны, т. е. отсутствовали в других участках генома. Длина праймеров должна быть не менее 20–30 п.н., их 3'-концы не должны быть комплементарными друг другу [12], [13].

Интересным примером микросателлитного маркера у *C. familiaris* является D1Cor3 (GenBank: BV682917.1), который входит в состав гена GJA1. Этот ген расположен в длинном плече хромосомы 1 и кодирует коннексин 43 – мембранный белок с молекулярной массой 43 кДа, являющийся компонентом щелевых контактов, образующих межклеточные каналы и обеспечивающих диффузию низкомолекулярных соединений между соседними клетками. Коннексин 43 является основным коннексином щелевых контактов в сердечной мышце и играет ключевую роль в синхронизации сердечных сокращений и в эмбриональном развитии [15].

Микросателлитный локус D1Cor3 содержит тетра nukлеотидные повторы ТТТЦ. В популяциях домашней собаки обнаружено 13 аллелей локуса D1Cor3 с размером аллелей от 191 до 269 н.п. На рисунке 3 дана нуклеотидная последовательность фрагмента гена GJA1, где располагаются повторы ТТТЦ (полная длина гена GJA1 составляет 2 923 н.п.). Формула STR-локуса D1Cor3 записывается как (ТТТЦ)₁₆, поскольку в наиболее характерном аллеле содержится 16 повторов ТТТЦ (на рисунке 3 выделены жирным). На этом же рисунке подчеркнуты участки ДНК для пары праймеров, которые успешно используются при амплификации аллелей локуса D1Cor3 [16].

```

1   5' - tcttttcccc ttttagttta atgtgaacca ttgttcaagt tagcaaaaac atatttttgc
61   cagattattt aacccatttc tttttttttt tctttttttt tttttttttt tttttttttt
121  tttttttttt tctttttttt ttcttttaaat ttaagagaga gagagagagc acgagagaca
181  gagcagagaa acagagcaag ctggacg-3' 207

```

Рисунок 3 – Фрагмент ДНК, содержащий ТТТЦ повторы микросателлитного локуса D1Cor3 и фланкирующие участки, расположенные в гене GJA1, локализованного в хромосоме 1 *C. familiaris*

Необходимо подчеркнуть, что в последние десятилетия были разработаны эффективные методы анализа микросателлитов с использованием праймеров, меченных флуоресцентными красителями, с последующей детекцией продуктов реакции с помощью автоматических секвенаторов ДНК [17].

Панель микросателлитных локусов для идентификации особей *C. Familiaris*. Было установлено, что микросателлитные локусы у всех исследованных видов являются высокополиморфными, включая и микросателлиты *C. familiaris*, с десятками аллелей в каждом локусе и высокими темпами мутирования [18]–[20].

Поскольку микросателлитные локусы являются селективно-нейтральными, они не подвержены действию естественного отбора. Комбинация аллелей таких локусов является уникальной характеристикой каждой особи.

Интересно отметить, что первыми микросателлитными маркерами, описанными для домашних собак, были динуклеотидные повторы (ЦА)_n [18]. В дальнейшем набор используемых для дактилоскопии *C. familiaris* STR-маркеров расширился до повторов с три- и тетра нуклеотидными мотивами [19]–[22]. Кроме того, был выявлен интересный факт, что у человека динуклеотидные микросателлиты мутируют с большей скоростью ($1,52 \times 10^{-3}$) по сравнению с тетра нуклеотидными ($0,93 \times 10^{-3}$) [23], [24]. У собак же ситуация оказалась другой и тетра нуклеотидные повторы чаще были подвержены мутированию, чем динуклеотидные [25].

В дальнейшем исследователи предложили для дактилоскопии собак использовать не один какой-либо микросателлитный локус, а целую панель представленную набором, как минимум, из 10–15 таких локусов [26].

Одной из таких панелей стала 10-локусная микросателлитная панель, предложенная американским Кеннел клубом (American Kennel Club), которая в дальнейшем вошла в состав коммерческого набора для дактилоскопии собак StockMarks Dog Genotyping Kit (Applied Biosystems). Мотив, хромосомная локализация, количество аллелей, а также оптимальный набор праймеров для амплификации этих 10 локусов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Характеристика 10 микросателлитных локусов иллюстрирующие ДНК идентификационную панель StockMarks Dog Genotyping Kit

Локус	Мотив	Хромосомная локализация	Кол-во аллелей	Размер ампликонов, н.п.	Последовательность праймеров 5'- 3' с указанием флуоресцентной метки
PEZ1	CATA	CFA8	8	95-131	F GGCTGTCACTTTTCCCTTTC R CACCACAATCTCTCTCATAAATAC
PEZ3	AAG	CFA19	19	95-149	F CACTTCTCATACCCAGACTC R CAATATGTCAACTATACTTC
PEZ5	AAAT	CFA12	12	97-117	F GCTATCTTGTTCACAGC R GTCACGTGTATACAACATTGTCTC
PEZ6	AAAT	CFA16	27	166-215	F ATGAGCACTGGGTGTTATAC R ACACAATTGCATTGTCAAAC
PEZ8	AAAG	CFA17	17	215-251	F TATCGACTTTTACTGTGG R ATGGAGCCTCATGTCTCATC
PEZ12	GAAA	CFA3	3	264-322	F GTAGATTAGATCTCAGGCAG R TAGGTCCTGGTAGGGTGTGG
PEZ20	AAAT	CFA27	9	170-202	F CCTAAATTAGAGGTCTAACC R TAAGCGGGAATGTGCTCCTC
FHC2010	ATGA	CFA24	24	216-240	F AAATGGAACAGTTGAGCATGC R CCCCTTACAGCTTCATTTTCC
FHC2054	GATA	CFA12	12	131-183	F GCCTTATTTCATTGCAGTTAGGG R ATGCTGAGTTTGAACCTTCCC
FHC2079	GGAT	CFA24	24	266-294	F CAGCCGAGCACATGGTTT R ATGATTCTGATATGCCCAGC

Примечание: PEZ-маркеры взяты из US patent 05874217 [27], а FHC-маркеры из Fred Hutchinson Center [28].

Данная идентификационная панель позволяет проводить точную генетическую дактилоскопию для 108 пород *C. familiaris* с вероятностью совпадения генотипов у двух особей равной $3,6 \times 10^{-5}$. Иными словами, только у одной особи *C. familiaris* из 360 тыс. генотип при использовании этого набора локусов, может совпасть с какой-либо другой особью. В этом смысле, описанная панель полностью удовлетворяет требованиям, предъявляемым Кеннел клубом для породной идентификации собак [26].

В случаях, когда необходима более точная идентификация особей *C. familiaris*, Американским Кеннел клубом (American Kennel Club) было предложено к уже имеющейся панели из 10 локусов добавлять еще 7 (PEZ10, PEZ11, PEZ15, PEZ16, PEZ17, PEZ21), что позволит изменить вероятность совпадения генотипов у двух особей с $3,6 \times 10^{-5}$ до $3,2 \times 10^{-8}$ [26]. Описанные выше, микросателлитные локусы широко используются в многих странах мира (Германии [29], Австрии [30], Португалии [31], Венгрии [32], Японии [33], Корее [34], Индии [35], Пакистане [36]).

Таким образом, в данной статье представлены данные по кариотипу и геному домашней собаки *C. familiaris*. Рассмотрены микросателлитные локусы в качестве наиболее удобных генетических маркеров для дактилоскопии особей и пород *C. familiaris*. Охарактеризованы идентификационная панель, основанная на использовании 10 микросателлитных локусов с вероятностью совпадения генотипа равной $3,6 \times 10^{-5}$, а также 17-локусная панель с вероятностью совпадения $3,2 \times 10^{-8}$.

Работа проводилась в рамках тем ГПНИ 16-14 и ГПНИ 16-32, выполняемых в рамках Государственных программ «Биотехнологии» и «Природопользование и экология».

Литература

1. Ostrander, E.A. The canine genome / E.A. Ostrander, K.A. Wayne // Genome Res. – 2005. – V. 15. – P. 1706–1716.
2. Graphodatsky, A.S. A comparative chromosome map of the Arctic fox, red fox and dog defined by chromosome painting and high resolution G-banding / A.S. Graphodatsky, F. Yang, P.C. O'Brien, N. Serdukova, B.S. Milne, V. Trifonov, M.A. Ferguson-Smith // Chromosome Res. – 2000. – V. 8. – P. 253–263.

3. Lindblad-Toh, K. Genome sequence, comparative analysis and haplotype structure of the domestic dog / K. Lindblad-Toh, C.M. Wade, T.S. Mikkelsen, E.K. Karlsson, D.B. Jaffe [et al.] // *Nature*. – 2005. – V. 438. – P. 803–819.
4. Breen, M. An integrated 4249 marker FISH/RH map of the canine genome / M. Breen, C. Hitte, T.D. Lorentzen, R. Thomas, E. Cadieu, L. Sabacan, A. Scott, G. Evanno, H.G. Parker, E. Kirkness // *BMC Genomics*. – 2004. – V. 5. – P. 1–11.
5. Hitte, C. Survey sequencing combined with dense radiation hybrid gene mapping facilitates genome navigation / C. Hitte, J. Madeoy, E.F. Kirkness, C. Priat, T.D. Lorentzen, F. Senger, D. Thomas, T. Derrien, C. Ramirez, C. Scott, // *Nat. Rev. Genet.* – 2005. – V. 6. – P. 643–648.
6. Kirkness, E.F. The dog genome: survey sequencing and comparative analysis / E.F. Kirkness, V. Bafna, A.L. Halpern, S. Levy, K. Remington, D.B. Rusch, A.L. Delcher, M. Pop, W. Wang, C.M. Fraser, J.C. Venter // *Science*. – 2003. – V. 301. – P. 1898–1903.
7. Howell, J.M. Use of the dog model for Duchenne muscular dystrophy in gene therapy trials / J.M. Howell, S. Fletcher, B.A. Kakulas, M. O'Hara, H. Lochmuller, G. Karpati // *Neuromus. Disord.* – 1997. – V. 7. – P. 325–328.
8. Acland, G.M. Gene therapy restores vision in a canine model of childhood blindness / G.M. Acland, G.D. Aguirre, J. Ray, Q. Zhang, T.S. Aleman, A.V. Cideciyan, S.E. Pearce-Kelling, V. Anand, Y. Zeng, A.M. Maguire // *Nat. Genet.* – 2001. – V. 28. – P. 92–95.
9. Mount, J.D. Sustained phenotypic correction of hemophilia B dogs with a factor IX null mutation by liver-directed gene therapy / J.D. Mount, R.W. Herzog, D.M. Tillson, S.A. Goodman, N. Robinson, M.L. McClelland, D. Bellinger, T.C. Nichols, V.R. Arruda, Jr.C.D. Lothrop // *Blood*. – 2002. – V. 99. – P. 2670–2676.
10. Ponder, K.P. Therapeutic neonatal hepatic gene therapy in mucopolysaccharidosis VII dogs / K.P. Ponder, J.R. Melniczek, L. Xu, M.A. Weil, T.M. O'Malley, P.A. O'Donnell, V.W. Knox, G.D. Aguirre, H. Mazrier, N.M. Ellinwood // *Proc. Natl. Acad. Sci.* – 2002. – V. 99. – P. 13102–13107.
11. Dog assembly and gene annotation [Electronic resource] / Ed. P. Flicek. – The European Bioinformatics Institute, Sanger Institute, 2000. – Mode of access : http://www.ensembl.org/Canis_familiaris/Info/Annotation. – Date of access : 12.09.2016.
12. Животовский, Л.А. Микросателлитная изменчивость в популяциях человека и методы ее изучения / Л.А. Животовский // *Вестник ВОГиС*. – 2006. – Т. 10, № 1. – С. 74–96.
13. Гончаренко, Г.Г. Микросателлитные ДНК-маркеры в генетической дактилоскопии особей *Felis catus* и родственных видов сем. Кошачьи / Г.Г. Гончаренко, С.А. Зятков // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины*. – 2016. – № 3 (96). – С. 21–25.
14. Parra, D. Contribution of a new set of canine microsatellites to the knowledge of the canine genetic map / D. Parra, G. Dolf, S. Dunner // *Animal genetics*. – 2003. – V. 34. – P. 65–77.
15. Rak, S.G. Chromosomal assignment of 20 candidate genes for canine congenital sensorineural deafness by FISH and RH mapping / S.G. Rak, C. Drögemüller, T. Leeb, P. Quignon, C. André, A. Scott, M. Breen, O. Distl // *Cytogenet Genome Res.* – 2003. – V. 101 (2). – P. 130–135.
16. Hackett, S.R. Identification and characterization of canine microsatellite markers in cardiac genes / S.R. Hackett, S.-W. Jung, E. Kirkness, J. Cruickshank, K.L. Vikstrom, N.S. Moise, T.M. Gunn // *Animal Genetics*. – 2007. – V. 38. – P. 81–91.
17. Ziegler, J.S. Application of automated DNA sizing technology for genotyping microsatellite loci / J.S. Ziegler, Y. Su, K.P. Corcoran // *Genomics*. – 1992. – V. 14. – P. 1026–1031.
18. Ostrander, E.A. Construction of small-insert genomic DNA libraries highly enriched for microsatellite repeat sequences / E.A. Ostrander, P.M. Jong, J. Rine, G. Duyk // *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*. – 1992. – V. 89. – P. 3419–3423.
19. Holmes, N.G. Isolation and characterization of microsatellites from the canine genome / N.G. Holmes, C.S. Mellersh, S.J. Humphreys, M.M. Binns, A. Holliman, R. Curtis, J. Sampson // *Animal Genetics*. – 1993. – V. 24. – P. 289–292.
20. Holmes, N.G. Three polymorphic canine microsatellites / N.G. Holmes, N.J. Strange, M.M. Binns, C.S. Mellersh, J. Sampson // *Animal Genetics*. – 1994. – V. 25. – P. 200.
21. Ostrander, E.A. Identification and characterization of dinucleotide repeat (CA)_n markers for genetic mapping in dog / E.A. Ostrander, G.F. Sprague, J. Rine // *Genomics*. – 1993. – V. 16. – P. 207–213.
22. Ostrander, E.A. One hundred and one simple sequence repeat-based markers for the canine genome / E.A. Ostrander, F.A. Mapa, M. Yee, J. Rine // *Mammalian Genome*. – 1995. – V. 6. – P. 192–195.
23. Zhivotovsky, L.A. Human population expansion and microsatellite variation / L.A. Zhivotovsky, L. Bennet, A.M. Bowcock, M.W. Feldman // *Mol. Biol. Evol.* – 2000. – V. 17. – P. 757–767.
24. Mariat, D. Polymorphism characterization of five canine microsatellites / D. Mariat, J.L. Kessler, D. Vaiman, J.J. Panthier // *Anim. Genet.* – 1996. – V. 27. – P. 434–435.

25. Parra, D. High Mutation Rates in Canine Tetranucleotide Microsatellites: Too Much Risk for Genetic Compatibility Purposes? / D. Parra, D. García, S. Mendez, J. Cañon, S. Dunner // *The Open Forensic Science Journal*. – 2010. – V. 3. – P. 9–13.
26. DeNise, S. Power of exclusion for parentage verification and probability of match for identity in American kennel club breeds using 17 canine microsatellite markers / S. DeNise, E. Johnston, J. Halverson, K. Marshall, D. Rosenfeld // *Anim. Genet.* – 2004. – V. 35. – P. 14–17.
27. Microsatellite sequences for canine genotyping : пат. US5874217 А США, / J. Halverson, J. Dvorak, T. Stevenson ; applicant Perkin Elmer Corp. – № 05874217 ; filed 27.03.1996 ; published 23.02.1999 // Espacenet. Patent search.
28. Francisco, L.V. A class of highly polymorphic tetranucleotide repeats for canine genetic mapping / L.V. Francisco, A.A. Langston, C.S. Mellersh, C.L. Neal, E.A. Ostrander // *Mammalian Genome*. – 1996. – V. 7. – P. 359–362.
29. Hellmann, A. A proposal for standardization in forensic canine DNA typing: allele nomenclature of six canine-specific STR loci / A.P. Hellmann, U. Rohleder, C. Eichmann, I. Pfeiffer, W. Parson, U. Schleenbecker // *J. Forensic Sci.* – 2006. – V. 51, № 2. – P. 274–281.
30. Eichmann, C. Relevant aspects for forensic STR analysis of canine DNA: Repeat-based nomenclature and sensitive PCR multiplexes / C. Eichmann, B. Berger, W. Parson // *International Congress Series* 1288. – 2006. – P. 813–815.
31. Van Asch, B. A new autosomal STR nineplex for canine identification and parentage testing / B. van Asch, C. Alves, L. Gusmao, V. Pereira, F. Pereira, A. Amorim // *Electrophoresis*. – 2009. – V. 30. – P. 417–423.
32. Padar, Z. Canine microsatellite polymorphisms as the resolution of an illegal animal death case in a Hungarian Zoological Gardens / Z. Padar, M. Angyal, B. Egyed, S. Furedi, J. Woller, L. Zuldag, S. Fekete // *Int. J. Legal Med.* – 2001. – V. 115. – P. 79–81.
33. Ichikawa, Y. Canine Parentage Testing Based on Microsatellite Polymorphisms / Y. Ichikawa, K. Takagi, S. Tsumagari, K. Ishihama, M. Morita, M. Kanemaki, M. Takeishi, H. Takahashi // *J. Vet. Med. Sci.* – 2001. – V. 63 (11). – P. 1209–1213.
34. Cho, G.J. Microsatellite polymorphism and genetic relationship in dog breeds in Korea / G.J. Cho // *Asian-Aust. J. Anim. Sci.* – 2005. – V. 18, № 8. – P. 1071–1074.
35. Parthiban, M. Parentage testing in different breeds of dogs using microsatellite markers / M. Parthiban, G. Nireesha, K.S. Aarthi, A. Palanisammi // *Biolife*. – 2014. – V. 2, I. 3. – P. 797–800.
36. Tahir, M.S. A panel of microsatellite markers for genetic diversity and parentage analysis of dog breeds in Pakistan / M.S. Tahir, T. Hussain, M.E. Babar, A. Nadeem, M. Naseer, Z. Ullah, M. Intizar, S.M. Hussain // *J. Anim. Plant Sci.* – 2015. – V. 25 (2). – P. 351–356.

УДК 597.551.2:616.995.122:546.36*137:546.42*90:[504.5:539.16]

Заболеваемость описторхозом и активность основных дозообразующих радионуклидов в организме карповых рыб, обитающих в водоемах на территории Полесского радиозоологического заповедника

А.В. ГУЛАКОВ¹, В.А. ПЕНЬКЕВИЧ², К.Ф. САЕВИЧ³

Представлены данные о заболеваемости описторхозом и активности ^{137}Cs и ^{90}Sr в организме наиболее распространенных видов карповых рыб, обитающих в водоемах, расположенных на территории с высокой плотностью радиоактивного загрязнения.

Ключевые слова: карповые рыбы, видовой состав, описторхоз, активность ^{137}Cs и ^{90}Sr , органы и ткани.

Data incidence of opisthorchiasis and activity of ^{137}Cs and ^{90}Sr in the organism of the most common species of carp fish living in waters located in areas with a high density of radioactive contamination are considered.

Keywords: carp fish, species composition, opisthorchiasis, ^{137}Cs activity and ^{90}Sr , organs and tissues.

Введение. Возросший в результате аварии на Чернобыльской АЭС радиационный фон стал одним из дополнительных экологических факторов в водных экосистемах Европы, особенно на значительных территориях Украины, Беларуси и России. На водосборных территориях Днепра и Припяти вследствие Чернобыльской аварии сформировалась обширная зона радиоактивного загрязнения, что привело к поступлению радионуклидов во многие рыбохозяйственные водоемы [1]–[2].

Проведенные радиозоологические исследования выявили высокие уровни удельной активности радионуклидов во многих водоемах Республики Беларусь, расположенных даже на значительном расстоянии от места аварии.

Наибольшую опасность на данный момент представляет загрязнение внутренних водоемов республики долгоживущими радионуклидами ^{137}Cs и ^{90}Sr . Так, например, запас ^{90}Sr в реке Припять достигает $3,7 \times 10^3$ Бк, а содержание ^{137}Cs на площади $150\,000\text{ км}^2$ колеблется от $3,7 \times 10^{10}$ до $18,5 \times 10^{10}$ Бк/км² [3].

Описторхоз является типичным зооантропонозным инвазионным природно-очаговым заболеванием, очень опасным для человека. На территории Беларуси установлено четыре основных очага данного заболевания: первый – Днепро-Березинско-Припятский, второй – Двинский, третий – Неманский и четвертый – Бугский [4].

Наиболее интенсивным очагом этой инвазии является бассейн реки Припять. Широкая циркуляция возбудителя описторхоза на территории Национального парка «Припятский» подтверждена исследованиями Л.В. Скриповой, установившей, что в населенных пунктах, расположенных по руслу рек Припять и Смердь, степень обсемененности почвы яйцами описторхисов составляет от 0,6 до 0,8 яиц на 1 кг почвы. В отдельных местах, особо загрязненных человеком, этот показатель достигает 322,7 яйца на 1 кг почвы [5].

В связи с этим возникают актуальные задачи по исследованию закономерностей накопления радионуклидов ^{137}Cs и ^{90}Sr в зависимости от биологических особенностей рыб, а также по изучению распространения *Opisthorchis felineus* на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника.

Поэтому выявление видовых, возрастных и сезонных различий в содержании радионуклидов в организме пресноводных рыб, обитающих в загрязненном биогеоценозе, представляет как научный, так и практический интерес. Кроме того, употребление в пищу пресноводных рыб из водоемов, подвергшихся загрязнению, может являться дополнительным источником поступления радионуклидов в организм человека и приводить к увеличению дозовых нагрузок на население, проживающее на радиоактивно загрязненной территории.

Материалы и методы исследования. *O. felineus* выделялся при полных или частичных гельминтологических вскрытиях по К.И. Скрябину [6] павших, отстрелянных или вынужде-

но убитых млекопитающих. Помимо этого было проведено исследование лещей, отловленных в притоке реки Припять на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника, на инвазированность метацеркариями трематоды *O. felineus*.

Для выявления зараженности рыб метацеркариями описторхид применяли компрессорный метод. Выловленную рыбу взвешивали и исследовали подкожный слой мышц в средней трети спины. Очистив от чешуи среднюю часть тела рыбы, ланцетом надрезали кожу по средней линии спины, а двумя вертикальными надрезами от первого надреза до боковой линии отделяли участок средней трети спины. Удалив с данного участка кожу, ланцетом срезали слой мышц массой 1 г, и помещали пробу под стандартный компрессорный и затем просматривали под микроскопом под увеличением – 10×20 .

Определение содержания ^{137}Cs в пробах органов и тканей рыб проводили гамма-спектрометрическим методом по стандартным методикам [7] на поверенной и аттестованной аппаратуре. ^{90}Sr определяли радиохимическим методом [8] по методике ЦИНАО [9].

Результаты исследований. В результате проведения наших исследований описторхоз зарегистрирован у следующих видов диких плотоядных: у волка – экстенсивность инвазии (ЭИ) 1,96 %, лисицы – ЭИ 0,98 % и енотовидной собаки – ЭИ 6,94 %. Выделение более высокой ЭИ енотовидной собаки на общем фоне в первую очередь связано со спецификой ее рациона, где рыба занимает значительное место [10].

Рассматривая встречаемость описторхоза диких плотоядных в зональном аспекте, мы отмечали, что все случаи этого заболевания зарегистрированы в Полесском регионе (южная зона). Исключение составляла енотовидная собака, имеющая встречаемость кошачьего сосальщика как на севере, так и на юге – в пределах 6,9–6,98 %. Такая особенность объясняется опять же тем, что рыба занимает определенное место в структуре ее рациона.

Небольшую экстенсивность данного заболевания среди хищных животных можно объяснить сложным биологическим циклом развития возбудителя. Так, для его развития необходим промежуточный хозяин – пресноводный моллюск *Bithynia leachi* и дополнительный – многие виды карповых рыб: плотва, линь, карп, лещ и другие. А рыба как пища является довольно редкой составляющей рациона хищных млекопитающих, поэтому опасность их заражения описторхисами довольно низкая [11].

Нами было проведено обследование дополнительных хозяев паразита – карповых рыб, выловленных в водоемах, расположенных на территории заповедника. Проведено исследование сорок одной особи леща (13 самок, и 28 самцов). Масса рыб колебалась в пределах от 350 г до 1410 г (в среднем – 934,4 г). Возраст составлял 3–4 года. Метацеркарии были обнаружены у 34 экземпляров (ЭИ – 83,0 %), из них у 11 (26,8 %) самок и 23 (56,2 %) самцов.

Метацеркарии паразита отсутствовали у 5 самцов и 2 самок данного вида рыб. Интенсивность инвазии варьировала от 4 до 34 метацеркарии на рыбу, в среднем составляла 17,6 экз. Зараженными метацеркариями оказались также два жереха и одна плотва [12].

Метацеркарии в мышцах рыб имели круглую и округлую форму, окружены прозрачной оболочкой. У метацеркарий наблюдался овальный экскреторный пузырь. Мы рассматривали метацеркарии под микроскопом в проходящих лучах (экскреторный пузырь был черного цвета), и при искусственном освещении (пузырь был бледно-золотистого цвета). Личинки очень подвижны и лежали в цисте в изогнутом положении. Ротовая присоска находилась на переднем конце, брюшная присоска, больше ротовой, располагалась в задней половине тела.

В водоемах Полесского государственного радиоэкологического заповедника зараженность (экстенсивность инвазии моллюсков *B. leachii* личинками *O. felineus* составляла от 35,6 % до 83,3 %, а интенсивность инвазии – от 14 экз. до 524 экз. парентит на особь хозяина [11].

Следует отметить, что на территории стран СНГ ежегодно официально регистрируют около 90 000 случаев заражения описторхозом людей [5]. В Беларуси описторхоз у человека официально регистрируется с 1975 г. Причем большинство зарегистрированных случаев (35,3 %) отмечены на территории Гомельской области. Средняя пораженность человека составляет 0,88 случаев на 100 000 населения. Заболеваемость среди населения носит вспышечный характер, причем отмечается тенденция к постепенному увеличению заболеваемости, которая уже достигает более 3 случаев на 100 000 населения [13].

Радиоэкологические исследования выявили высокие уровни удельной активности радионуклидов во многих водоемах Республики Беларусь, расположенных даже на значительном расстоянии от места аварии. Поэтому очень важным являлось проведение анализа активности радионуклидов ^{137}Cs и ^{90}Sr в наиболее распространенных видах пресноводных рыб, обитающих на территории с высокой плотностью радиоактивного загрязнения.

Поступившие в водоем техногенные радионуклиды начинают накапливаться различными видами гидробионтов. Каждый вид водных организмов аккумулирует радиоизотопы с различной интенсивностью. Активность ^{137}Cs и ^{90}Sr у наиболее распространенных видов пресноводной ихтиофауны, отловленных в водоемах, расположенных на территории зоны отчуждения представлено на рисунке 1.

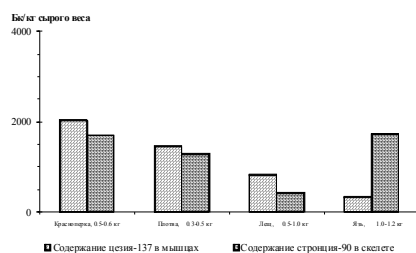


Рисунок 1 – Средняя активность ^{137}Cs и ^{90}Sr в организме карповых рыб водоемов зоны отчуждения

Наибольшее накопление среди данной группы рыб было характерно для красноперки (*Scardinius erythrophthalmus* L.) и колебалось в пределах от 1,5 кБк/кг до 3,2 кБк/кг при среднем значении $2,0 \pm 0,19$ кБк/кг. Плотва (*Rutilus rutilus* L.) и лещ (*Abramis brama* L.) содержали ^{137}Cs в мышечной ткани $1,5 \pm 0,2$ кБк/кг и $0,8 \pm 0,3$ кБк/кг соответственно. Среди исследуемых рыб наименьшая удельная активность ^{137}Cs в организме была характерна для язя (*Leuciscus idus* L.) и составляла $0,3 \pm 0,1$ кБк/кг.

По мере убывания активности ^{137}Cs в мышечной ткани различных видов пресноводных рыб, выловленных в исследуемых водоемах, расположенных на территории зоны отчуждения, нами был построен следующий ранжированный ряд: красноперка – плотва – лещ – язь.

В результате проведенных исследований нами также была определена активность ^{90}Sr в скелете отловленной рыбы. Данный радионуклид, как известно, накапливается в костной ткани позвоночных животных [14].

Накопление ^{90}Sr в организме растительноядных рыб при прочих равных условиях выше по сравнению с хищными, так как у последних кости жертвы (основное место депонирования стронция) в пищеварительной системе не рассасываются и радионуклид вместе с ними удаляется с экскрементами. У растительноядных рыб ^{90}Sr находящийся в корме, хорошо усваивается в желудочно-кишечном тракте и, соответственно, накапливается в организме рыбы (в основном в костной ткани).

Активность ^{90}Sr в скелете карповых рыб находилась практически на одном уровне и колебалась в пределах от 1,3 кБк/кг у плотвы до 1,7 кБк/кг у красноперки и язя, за исключением леща, у которого накопление данного радионуклида составило наименьшее значение 0,4 кБк/кг [15].

Наибольшая активность ^{90}Sr отмечалась в скелете рыб, питающихся растительноядной пищей и бентосными организмами, что может быть связано с высоким накоплением данного изотопа водной растительностью и бентосом водоемов зоны отчуждения.

Заключение. Проведенные исследования показали, что в условиях Полесского государственного радиоэкологического заповедника заражение описторхозом регистрируется у всех типов хозяев (как дефинитивных, так и первых и вторых промежуточных). Таким образом, обеспечивается возможность замыкания цикла развития кошачьей двуустки в отсутствие человека, а значит и поддержания существующего здесь природного очага заболевания.

У рыб, обитающих в водоемах, расположенных на территориях со значительным уровнем радиоактивного загрязнения (зона отчуждения), активность радионуклидов в мышечной ткани во много раз выше предельно допустимых значений.

Наибольшее накопление среди изучаемых карповых рыб было характерно для красноперки и составляло $2,0 \pm 0,19$ кБк/кг. Плотва и лещ содержали ^{137}Cs в мышечной ткани $1,5 \pm 0,2$ кБк/кг и $0,8 \pm 0,3$ кБк/кг соответственно, а наименьшая удельная активность ^{137}Cs в организме была характерна для язя $0,3 \pm 0,1$ кБк/кг.

Литература

1. Радиоактивное загрязнение Днепра и его водохранилищ и некоторые гидроэкологические мероприятия после аварии на Чернобыльской АЭС / М.И. Кузьменко [и др.] // Гидробиологический журнал. – 1992. – Т. 28, № 6. – С. 86–94.
2. Радиоэкологические исследования экосистемы верхнего Днепра / А.Е. Каглян [и др.] // Гидробиологический журнал. – 1992. – Т. 28, № 3. – С. 98–101.
3. Рябов, И.Н. Радиоэкология рыб водоемов в зоне влияния аварии на Чернобыльской АЭС / И.Н. Рябов. – Москва : Товарищество научных изданий КМК, 2004. – 215 с.
4. Говорка, Я. Гельминты диких копытных Восточной Европы / Я. Говорка [и др.]. – М. : Наука, 1988. – 207 с.
5. Субботин, А.М. Гельминтоценозы животных Беларуси (парнокопытные и плотоядные), их лечение и влияние на микробиоценоз организма хозяина : монография / А.М. Субботин. – Витебск : ВГАВМ, 2010. – 212 с.
6. Скрябин, К.И. Метод полных гельминтологических вскрытий позвоночных, включая человека / К.И. Скрябин. – Москва : Изд. 1-го МГУ, 1928. – 45 с.
7. Сборник нормативных, методических, организационно-распорядительных документов Республики Беларусь в области радиационного контроля и безопасности / Под ред. В.Е. Шевчука. – Мн., 1998. – 230 с.
8. СТБ 1059-98. Радиационный контроль. Подготовка проб для определения стронция-90 радиохимическими методами. – Введ. 01.07.98. – Минск : Госстандарт, 1998. – 22 с.
9. Методические указания по определению ^{90}Sr и ^{137}Cs в почвах и растениях / Под ред. Л.М. Державина // Центральный институт агрохимического обслуживания сельского хозяйства (ЦИНАО) – М. : ЦИНАО, 1985. – 64 с.
10. Пенькевич, В.А. Эколого-паразитологический анализ диких млекопитающих животных ближней зоны ЧАЭС (2005–2012 гг.) / В.А. Пенькевич // Экосистемы и радиация: аспекты существования и развития : сб. научных трудов, посвященный 25-летию Полесского государственного радиационно-экологического заповедника / Под общ. ред. Ю.И. Бондаря. – Минск : БОРБИЦ РНИУП «Институт радиологии», 2013. – С. 361–384.
11. Анисимова, Е.И. Описторхоз хищников и зараженность *Bythinia leachi* в водоемах ППРЭЗ / Е.И. Анисимова, В.А. Пенькевич // Известия НАН Беларуси. Сер. биол. наук. – 2012. – № 4. – С. 117–120.
12. Пенькевич, В.А. *Opisthorchis felinus* на территории Республики Беларусь / В.А. Пенькевич, А.М. Субботин // Ученые записки УО ВГАВМ. – 2014. – Т. 50, вып. 1, ч. 1. – С. 52–55.
13. Субботин, А.М. Биолого-экологические основы профилактики паразитозов диких копытных и хищных млекопитающих Беларуси : монография / А.М. Субботин, А.И. Ятусевич. – Витебск : ВГАВМ, 2009. – 482 с.
14. Рябов, И.Н. Радиоэкология рыб водоемов в зоне влияния аварии на Чернобыльской АЭС / И.Н. Рябов. – Москва : Товарищество научных изданий КМК, 2004. – 215 с.
15. Гулаков, А.В. Содержание радионуклидов в организме пресноводных рыб / А.В. Гулаков // Радиоэкологія-2013. Чорнобиль–Фукусіма. Наслідки : матеріали науково-практичної конференції в рамках міжнародного форуму «Довкілля України», Київ, 25–27 квітня 2013 р. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка. – С. 102–104.

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Полесский государственный радиэкологический заповедник

³Белорусский государственный экономический университет

Инвазия клёна ясенелистного (*Acer negundo* L.) в условиях Добрушского района Гомельской области

Н.М. ДАЙНЕКО¹, С.Ф. ТИМОФЕЕВ¹, А.Д. БУЛОХОВ², Н.Н. ПАНАСЕНКО²

Изучение инвазивного вида *Acer negundo* L. показало многообразие жизненных форм, которые связаны с условиями произрастания и хозяйственного их использования. Проростки клёна, выросшие в условиях хорошей освещенности, имели большее количество пар листьев и общую длину по сравнению с проростками, появившимися в условиях затенения. Популяции клёна, выросшие в разных экологических условиях, отличались и между собой по онтогенетическому составу.

Ключевые слова: инвазивный вид, *Acer negundo* L., проростки, онтогенетический состав.

The study of invasive species *Acer negundo* L. revealed the diversity of life forms that are associated with habitat conditions and economic use. Maple seedlings in well-lit conditions had a greater number of leaf pairs as well as the overall length compared with these in shade. Populations of maple from different environmental conditions varied in ontogenetic structure.

Keywords: invasive species, *Acer negundo* L., seedlings, ontogenetic structure.

Введение. Инвазия агрессивных чужеродных видов в настоящее время нередко приводит к снижению биологического разнообразия. Число чужеродных древесных видов значительно меньше, чем травянистых. Среди чужеродных древесных видов особенно агрессивно ведет себя клён ясенелистный, или американский (*Acer negundo* L.) [1].

Клён ясенелистный – листопадное дерево, обычно 12–15 м высотой и 30–60 см в диаметре. Листорасположение супротивное, листья непарноперистосложные. На родине произрастает от Канады до Флориды и от Скалистых гор до Атлантического побережья, преимущественно в зоне прерий и широколиственных лесов, по берегам рек и озер и в низинных местах. Кроме того, благодаря высокой толерантности к дефициту почвенной влаги и нехватки питательных веществ, этот вид легко захватывает антропогенные местообитания, и его обычно называют деревом-сорняком [2].

Одним из опасных сорняков в городе является клён ясенелистный. Он начинает свою экспансию с опушечных пространств и хорошо внедряется в мелкие, а также рекреационно ослабленные лесные массивы. Клён ясенелистный нарушает естественный ход сукцессионных процессов в лесах, ухудшает условия роста коренных растений или вовсе препятствует их возобновлению [3].

В работе [4] дается современное состояние инвазии клёна ясенелистного по Московскому тракту на участке «Иркутск – Ангара». Отмечено, что в среднем на 1 км приходится 21 растение, а в пересчете на 1 га 2,1 экземпляра, и на этом участке клён отличается большой инвазивностью.

В исследованиях [5] представлены результаты оценки доминирования отдельных видов древесно-кустарниковой растительности в прибрежных фитоценозах р. Ворона. Получены данные, указывающие на выраженную экспансию чужеродного вида клёна ясенелистного (*Acer negundo* L.) и его значительный инвазионный потенциал. Дана оценка структуры и степени выраженности доминирования клёна ясенелистного в прибрежных фитоценозах р. Ворона.

В работе [6] установлено, что *Acer negundo* L. имеет в Москве широкий диапазон жизненных форм, которые по классификации И.Г. Серебрякова [7] относятся к типу «деревья». Наклоны и изгибы у *A. negundo* L. надо рассматривать как одну из особенностей его жизненной стратегии, позволяющих вынести крону в благоприятные условия. Высокая всхожесть семян под пологом деревьев и длительный период их прорастания способствует формированию многоярусных зарослей, состоящих из тесно расположенных искривленных и наклоненных в разной степени деревьев, представляющих опасность для людей и машин. Клён ясенелистный имеет высокую толерантность к дефициту почвенной влаги и нехватке питательных веществ, выдерживает сильную загазованность воздуха, может произрастать в наиболее сложной экологической обстановке, давая при этом высокий прирост биомассы.

Инвазионные агрессивные виды растений представляют в настоящее время экологическую угрозу природным комплексам Беларуси, их стабильности и функционированию. В настоящее время весьма актуально изучение вопросов, связанных с особенностями внедрения этих видов в состав природных сообществ. Важна также оценка их дальнейшего распространения, позволяющая прогнозировать и управлять процессами синантропизации флоры Беларуси [2].

В Республике Беларусь клён ясенелистный выращивается не менее 100 лет, однако наиболее активно начал использоваться в озеленении дорог и городов во второй половине минувшего столетия. Широко культивируется по всей республике в качестве зеленых насаждений в населенных пунктах и вдоль дорог. Отличается высокой семенной продуктивностью, а семена хорошей всхожестью. Ежегодно образует обильный самосев, характеризуется высокой жизненностью. За короткий период времени способен вытеснять аборигенные виды из естественных (особенно в поймах рек). В поймах рек Буг, Муховец, Припять и ряда других рек он образует монодоминантные сообщества [8].

По данным О.М. Масловского [8], в Гомельской области в последние годы наблюдается широкое распространение клёна ясенелистного, что обусловлено использованием данного древесного растения в целях озеленения. Клён ясенелистный, высаживавшийся изначально на землях населенных пунктов, широко распространился в пойменных лесах, вдоль рек, дубравах, сосновых лесах, парках, по обочинам шоссе и железных дорог.

Материал и методика исследования. Сбор материала проводился на территории Добрушского района в вегетационный период 2016 г. Объектами исследования служили естественные насаждения клёна ясенелистного. Описание видового состава древесно-кустарниковой и травянистой растительности проводилось на учетных площадках размером 10 × 10 м.

Биоморфологический анализ жизненных форм выполнен на основе работ И.Г. Серебрякова [7] и М.В. Костиной [6]. По данным [6] у клёна ясенелистного побеги могут длительно нарастать моноподиально. При повреждении верхушечной почки из одной, реже двух пар супротивно расположенных почек формируются мощные боковые побеги, один из которых начинает преобладать в росте. Второй, более слабый отходит в сторону и становится боковой ветвью. Здесь моноподиальное нарастание скелетной оси сменяется на симподиальное.

Выделение возрастных состояний клёна ясенелистного проводили по методике [9]. При изучении морфологических признаков проростков проводили измерения общей длины стебля проростка, количество пар листьев [10]. Латинские названия растений даны по С.К. Черепанову [11]. Классификация изучаемых объектов проводилась с использованием метода Ж. Браун-Бланке [12].

Результаты исследований и их обсуждение. Анализ изучаемых объектов показал, что они относятся к ассоциации *Chelidonio – Aceretum negundi* L. et A. Ishbirdin et al. 1989, союзу *Chelidonio – Acerion negundi*, порядку *Chelidonio – Robinietalia*, классу *Robinietea* Jurko ex Nadac et Sofron 1980 (таблица 1).

Таблица 1 – Асс. *Chelidonio – Aceretum negundi* L. et A. Ishbirdin et al. 1989

Номер описания	1	2	3	4	5	6	7	8	Кп
Высота древостоя, м	4-6	4-6	4-6	12	4-6	14-16	14-16	16	
ОПП травяного яруса, %	40	40	45	10	40	10	10	10	25,6
Число видов	10	11	9	8	10	9	12	15	12
Влажность	4	4	4	5	4	5	5	5	4,5
Кислотность	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Обеспеченность азотом	3,5	3,5	3,5	5	3,5	5	5	5	4,3
Д.в ассоциации <i>Chelidonio – Aceretum negundi</i>									
<i>Acer negundo I</i>	2	2	2	4	2	4	5	5	V3
<i>Chelidonium majus</i>	+	+	+	+	r	r	r	r	V+
Д.в. союза <i>Chelidonio – Acerion negundi</i> , порядка <i>Chelidonio – Robinietalia</i> , класса <i>Robinietea</i>									
<i>Acer negundo II</i>	2	2	2	4	2	4	5	5	V3
<i>Urtica dioica</i>	2	2	r	+	r	+	+	+	V+
<i>Lapsana communis</i>				r		r	r	r	III+

Окончание таблицы 1

<i>Taraxacum officinale</i>	+	+	+	+	+	+			IV+
<i>Arctium tomentosum</i>		+		r	+	+			III+
<i>Impatiens parviflora</i>				+			+	+	II+
Д.в. класса <i>Artemisietea vulgaris</i>									
<i>Geum urbanum</i>					+	+	+	+	II+
<i>Artemisia vulgaris</i>	+	+	+		+				III+
<i>Achillea millefolium</i>	+	+	+		+				III+
Д.в. класса <i>Molinio-Arrhenatheretea</i>									
<i>Dactylis glomerata</i>	+	+					+	+	III+
<i>Veronica chamaedrys</i>							+	+	II+
<i>Plantago major</i>							+	+	II+
<i>Prunella vulgaris</i>							+	+	II+
Прочие виды									
<i>Scrophularia nodosa</i>						+	+	+	II+
<i>Crataegus monogyna</i>							+	+	IIr+
<i>Capsella bursa-pastoris</i>	+	+			+				II+
<i>Chenopodium album</i>	+	+	+						IIr+

Пункты описания: г. Добруш: 1 – ул. Советская, пустырь, дерново-подзолистая супесчаная почва; 2 – заброшенная строительная площадка в районе фарфорового завода, супесчаная почва; 3 – высохшее озеро в районе автовокзала; 4 – берег реки Ипуть в районе автовокзала; 5 – участок после сплошной рубки, напротив городского кладбища; Добрушский район: 6 – д. Крупец возле сельского кладбища, супесчаная почва; 7 – за складом ГСМ – овраг; населенный пункт Вылево 8 – насаждения вдоль дороги.

Диагностические виды. *Acer negundo*, *Chelidonium majus*.

Синтаксономия. Наличие в сообществах ассоциации таких видов как *Acer negundo* L., *Chelidonium majus*, *Arctium tomentosum*, *Taraxacum officinale* позволяет отнести её к союзу ***Chelidonio – Acerion negundi*** L. et A. Ishbirdin et al. 1989.

Морфологический анализ проростков выросших в разных экологических местообитаниях (таблица 2) показал, что проростки, выросшие в условиях хорошей освещенности (объекты 1, 2, 3, 5) несколько отличались количеством пар листьев от объектов (4, 6, 7, 8), где наблюдалось затенение. Также общая длина проростков, выросших на заброшенных пустырях при хорошей освещенности, где только идет зарастание древесно-кустарниковой растительностью имела большую длину по сравнению с объектами 4, 6, 7, 8, где рост происходил в условиях затемнения. Таким образом, видно, что в однородных условиях в изучаемых объектах по количеству пар листьев и общей длине проростков не наблюдалось резкого отличия.

Таблица 2 – Морфологическая характеристика проростков *Acer negundo* L. в изучаемых объектах Добрушского района

Морфологические показатели	Объекты							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество пар листьев, шт	4,5±0,22	4,1±0,21	4,4±0,23	3,8±0,16	4,6±0,18	3,7±0,14	3,3±0,12	3,5±0,15
Общая длина проростка, см	8,6±0,44	8,3±0,41	7,9±0,38	6,5±0,36	9,2±0,46	6,8±0,42	6,4±0,39	6,9±0,34

Изучение онтогенетической структуры и плотность особей на 10 м² ценопопуляции *Acer negundo* в изучаемых объектах показало (таблица 3), что во всех объектах, находящихся в разных экологических условиях, встречаются проростки ювенильные, имматурные растения, что свидетельствует о высокой всхожести и теневыносливости особей клёна ясенелистного, причем в условиях хорошего освещения (объекты 1, 2, 3, 5) особей этих возрастных состояний оказалось в два раза больше, чем в условиях затенения. Общая плотность особей клёна ясенелистного, произрастающего в условиях хорошего освещения в основном на пустырях (объекты 1–3, 5), была в 1,6 раза больше, чем в условиях затенения, объекты (4, 6–8), где уже

преобладали взрослые деревья, тогда как на пустырях отсутствовала группа средневозрастных генеративных особей, а в онтогенетическом составе преобладали особи виргинильного периода (р, j, im, v) растения, учитывая, что на ранних этапах развития происходит гибель половины появившихся всходов, ювенильных и имматурных растений, то и на этих объектах будет происходить уменьшение общей плотности.

Таблица 3 – Онтогенетическая структура и плотность особей на 10 м² ценопопуляции *Acer negunda* L. в изучаемых объектах Добрушского района

Онтогенетическое состояние	Объекты							
	1	2	3	4	5	6	7	8
р	22,8±1,14	31,6±1,89	27,5±1,28	12,3±0,74	15,4±0,92	14,6±0,81	9,8±0,49	11,5±0,69
j	11,3±0,56	10,7±0,66	11,6±0,58	7,5±0,42	9,6±0,58	7,6±0,46	6,7±0,46	5,9±0,35
im	12,7±0,63	14,2±0,85	11,3±0,67	6,4±0,37	10,2±0,55	4,9±0,32	3,6±0,18	3,1±0,18
v	9,6±0,57	8,3±0,42	6,5±0,32	4,2±0,26	7,2±0,48	3,6±0,18	3,9±0,18	4,4±0,22
g ₁	10,4±0,62	11,8±0,77	13,3±0,79	6,5±0,33	12,2±0,73	4,9±0,27	5,2±0,32	5,7±0,28
g ₂				7,3±0,45		9,6±0,48	8,4±0,42	10,6±0,64
Всего:	66,8	76,6	70,2	44,2	54,6	45,2	37,6	41,2

Клён ясенелистный встречался во всех изучаемых объектах Добрушского района. Анализ жизненных форм мест произрастания выявил, что деревья клёна ясенелистного с хорошо выраженным стволом встречаются не так часто. Их можно увидеть в основном вдоль улиц в выселенном населенном пункте Вылево. Спустя 30 лет после аварии нами отмечены деревья высотой 18–20 м с хорошо развитой кроной. Обычно вдоль дорог особи клёна ясенелистного, благодаря семенному размножению, густо расположены, стволы у них плохо развиты и побеги наклонены в разные стороны. Такое явление отмечалось [6].

Большое разнообразие жизненных форм клёна отмечается в 7 объекте в овраге вблизи склада горюче-смазочных материалов в н.п. Крупец Добрушского района. Здесь особи клёна на небольшой площади создают высокую густоту стояния деревьев разной высоты, диаметра ствола. Так, на площади 10 м² отмечено существование 26 деревьев. Их высота колебалась от 3 до 7 м, диаметр ствола от 5 до 18 см. Различные наклоны и изгибы ствола отражают одну из жизненных стратегий, дающих возможность выносить крону в условиях хорошего освещения. Иная ситуация складывалась в 6-ом объекте вблизи сельского кладбища в н.п. Крупец в связи с проведением благоустройства некоторые особи клёна ясенелистного с разным диаметром ствола (12–16 см) были срезаны. У них отмечалось появление 10–12 сестринских побегов, достигающих в длину 2–3 м, которые разрастались размером 2 × 3, 3 × 3 м, а впоследствии образовались особи с 4–5 стволами. У ранее срезанных деревьев образовались особи с 4–5 стволами. Наиболее часто в большинстве объектов встречаются экземпляры, у которых ствол уже на высоте 1,5–2 м начинает ветвиться. Нами также были отмечены в овраге и многоствольные формы, когда от основания срубленного дерева отходят дочерние стволы в количестве 3–5 штук. Таким образом, многообразие жизненных форм связано с условиями существования и хозяйственного их использования. Также согласно [6] нами обнаружены часто встречающиеся древовидные комплексы, особенно вдоль дорог, где между деревьями наблюдалось небольшое расстояние и происходило механическое соприкосновение своими ветвями.

Закключение. В результате исследований установлено, что изучаемые объекты относятся к ассоциации *Chelidonio – Aceretum negundi* L. et A. Ishbirdin et al. 1989. На морфологические показатели проростков клёна ясенелистного оказывают влияние экологические условия мест произрастания. Во всех объектах, находящихся в разных экологических условиях, встречаются особи виргинильного периода, что свидетельствуют о высокой всхожести семян и теневыносливости особей клёна ясенелистного. Отмечено большое разнообразие жизненных форм клёна ясенелистного, которые связаны с их условиями существования. При срезании этих деревьев нужно знать, что от пня могут отходить дочерние побеги, которые со временем могут дать многоствольные формы этого дерева.

Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ – РФФИ Б16-Р162.

Литература

1. Агрессивные чужеродные виды диких животных и дикорастущих растений на территории Республики Беларусь / В.Н. Варавко [и др.]. – Минск, 2008. – 40 с.
2. Дубовик, Д.В. Инвазивные виды во флоре Беларуси / Д.В. Дубовик, А.Н. Скуратович, Д.И. Третьяков // Проблемы сохранения биологического разнообразия и использование биологических ресурсов : материалы II-ой Международной научно-практической конференции : сб. науч. работ / Под общ. ред. В.И. Парфенова. – Минск, 2012. – С. 443–446.
3. Жуков, Р.С. Клен ясенелистный в городских лесах Москвы / Р.С. Жуков, Л.М. Ломоносова // Научные обозрения. Биологические науки. – 2016. – № 3. – С. 49–50.
4. Леонтьев, Д.Ф. Инвазия клена ясенелистного и облепихи по Московскому тракту на участке «Иркутск–Ангара» / Д.Ф. Леонтьев, К.А. Зверева // Бюллетень науки и практики – Bulletin of science and practice научный журнал (scientific journal). – 2016. – № 11 (ноябрь). – С. 40–44.
5. Емельянова, А.В. Клен ясенелистный (*Acer negundo* L.) в прибрежных фитоценозах р. Ворона / А.В. Емельянова, С.В. Фролова // Российский журнал биологических инвазий. – 2011. – № 2. – С. 40–43.
6. Костина, М.В. Особенности клена ясенелистного в зеленых насаждениях Москвы / М.В. Костин, Н.О. Миньков, О.И. Ясинская // Российский журнал биологических инвазий. – 2013. – № 4. – С. 32–43.
7. Серебряков, И.Г. Экологическая морфология растений / И.Г. Серебряков. – М. : Высшая школа, 1962. – 378 с.
8. Масловский, О.М. Характеристика распространения некоторых инвазивных видов растений на территории Светлогорского и Жлобинского районов Гомельской области / О.М. Масловский [и др.] // Проблемы сохранения биологического разнообразия и использование биологических ресурсов : материалы III-ой Международной научно-практической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика Н.В. Смольского, 7–9 октября 2015, Минск, Беларусь. – В 2 ч. / НАН Б [и др.]. – Минск : Конфидо, 2015. – Ч. 1. – 514 с.
9. Антонова, И.С. Побеговые системы кроны *Acer negundo* L. (*Aceraceae*) в разных возрастных состояниях / И.С. Антонова // Бот. журн. – 2013. – Т. 98. № 1. – С. 53–68.
10. Ефимова, И.В. Развитие однолетних проростков *Acer negundo* L. в разных климатических и экологических условиях / И.В. Ефимова, И.С. Антонова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 3. – 2012. – Вып. 3. – С. 31–37.
11. Черепанов, С.К. Сосудистые растения России и сопредельных государств (в пределах бывшего СССР) / С.К. Черепанов. – СПб. : Мир и семья, 1995. – 992 с.
12. Braun-Blanquet, J. Pflanzensociologie / J. Braun-Blanquet. – Wien–New-York : Springer–Verlag, 1964. – 865 p.

¹Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

²Брянский государственный
университет им. академика И.Г. Петровского

Поступила в редакцию 01.03.2017

Апробация алгоритма расчета индивидуализированных накопленных с момента аварии на ЧАЭС доз внутреннего облучения

Е.А. Дрозд, Н.Г. Власова

Разработан алгоритм оценки накопленных индивидуализированных доз внутреннего облучения включенных в Государственный регистр лиц, подвергшихся воздействию радиации вследствие катастрофы на ЧАЭС (Госрегистр). Создано программное обеспечение, позволяющее определить значения относительной индивидуальной дозы внутреннего облучения (соответствующий квантиль распределения дозы) за каждый год, в течение которого имелись абсолютные значения индивидуальной внутренней дозы субъекта по данным СИЧ-измерений, а также оценивать дозу внутреннего облучения за годы, данные СИЧ-измерений за которые отсутствуют, с учетом конкретного места жительства. Результаты работы использованы для наполнения индивидуализированными накопленными за послеаварийный период дозами внутреннего облучения, полученными 87 515 лицами, включенными в Госрегистр, за каждый год в каждом населенном пункте проживания.

Ключевые слова: Госрегистр, доза внутреннего облучения, накопленная доза, квантиль распределения дозы.

An algorithm for evaluation of the individual accumulated internal doses at persons engaged in the State Registry of the Chernobyl affected people (State Registry) was developed. Special software was created allowing determining the values of relative individual internal dose (corresponding percentile of dose distribution) for each year, during which there were absolute values of the individual internal dose of the subject according to WBC-measurements. The software allows calculating the internal dose for the years, for which the data of the WBC-measurements are not available. Places of residence of person were taken into account. The results of the study were used for filling individual accumulated during the post-accident period internal doses received by persons, included into the State Registry, for each year in each settlement of residence.

Keywords: State Registry, internal dose, accumulated dose, percentile of dose distribution.

Введение. Государственный регистр лиц, подвергшихся воздействию радиации вследствие катастрофы на Чернобыльской АЭС, других радиационных аварий (Госрегистр), является основным инструментом для проведения радиационно-эпидемиологических исследований. Для установления зависимости «доза-эффект» и оценки радиационного риска отдаленных эффектов облучения необходима информация о накопленных с момента аварии дозах внешнего и внутреннего облучения обследуемого контингента лиц. Однако несмотря на то, что в Госрегистре содержатся данные о состоянии здоровья ~ 250 000 лиц, информации о дозах облучения недостаточно.

Прежде чем приступить к разработке алгоритма расчёта индивидуализированных накопленных доз облучения лиц, включенных в Госрегистр, был проведен анализ имеющейся информации по дозам облучения, содержащейся в Госрегистре. По результатам анализа было установлено, что в Госрегистре содержатся данные о дозах внутреннего облучения только на 52 305 человек. Распределение данных о дозах внутреннего облучения по годам представлено в таблице 1.

Таблица 1 – Распределение данных СИЧ-измерений по годам

Год измерения	Количество населённых пунктов
1986	11
1987	32
1988	116
1989	351
1990	188
1991	130
1992	292
1993	653

Окончание таблицы 1

1994	3963
1995	6649
1996	7570
1997	9621
1998	16706
1999	18378
2000	18644
2001	15307
2002	6998
2003	5745
2004	4086
2005	3576
2006	3673
2007	3387
2008	6186

74 % результатов СИЧ-измерений относится к периоду с 1991 по 2001 гг.

Используя разработанный методический подход [1], [2] расчёта индивидуализированных доз внутреннего облучения жителей населённых пунктов, расположенных на радиоактивно загрязнённой территории, был разработан алгоритм расчёта индивидуализированных накопленных доз облучения субъектов, включённых в Государственный регистр лиц, подвергшихся радиации в результате катастрофы на ЧАЭС. Выполнена оценка индивидуализированных накопленных за период 1990–2008 гг. доз внутреннего облучения субъектов, включённых в Госрегистр.

Материалы и методы. Материалами явились исходные личные данные индивида и места пребывания на территории, загрязнённой чернобыльскими радионуклидами, Госрегистра, сформированная в лаборатории радиационной защиты «База данных СИЧ-измерений жителей Республики Беларусь за период 1987–2008 гг.», регистрационное свидетельство № 5870900637 от 20 мая 2009г. [3], а также данные СИЧ-измерений Государственного дозиметрического регистра за период 2009–2014 гг.; «База данных плотностей загрязнения территории населённых пунктов Республики Беларусь радионуклидами цезия, стронция и плутония по состоянию на 1986 г.» [4].

Индивидуализированная доза внутреннего облучения за каждый год оценивалась:

- при наличии информации в Госрегистре – по результатам СИЧ-измерений;
- при отсутствии информации в Госрегистре – доза внутреннего облучения была реконструирована по разработанному алгоритму с использованием созданного программного обеспечения.

Алгоритм расчёта индивидуализированных доз внутреннего облучения.

1. Для лиц, включённых в Госрегистр, выбрать из «Базы данных СИЧ-измерений» [3] или базы данных СИЧ-измерений Государственного дозиметрического регистра данные по дозам внутреннего облучения, соответствующего их месту жительства населённого пункта за каждый послеаварийный год, т. е. с учётом переездов.

2. Построить распределение дозы внутреннего облучения мужчин или женщин (в зависимости от пола индивида) в каждом из населённых пунктов проживания индивида за каждый год.

3. По соответствующему возрастной группе (с учётом возраста в каждом году) значению квантиля распределения дозы рассчитать индивидуализированные дозы внутреннего облучения за каждый год.

4. Оценить индивидуализированные дозы внутреннего облучения за весь послеаварийный период суммированием доз как рассчитанных по результатам непосредственных СИЧ-измерений, так и рассчитанных по квантилям распределения дозы.

Описание программы расчета индивидуализированных доз внутреннего облучения лиц, включённых в Госрегистр. Программа расчета индивидуализированных накопленных доз внутреннего облучения выполнена в среде программирования Delphi 7 с подключением к Microsoft Office Excel и Microsoft Office Access.

Программа разработана для работы в операционной среде WINDOWS 2007/XP/2003. Системные требования предъявляются те же, что и к компьютерам, на которые можно установить программу Microsoft Office Access из пакета Microsoft Office 2003–2013.

Программное обеспечение представляет собой приложение, которое включает в себя следующий функционал:

- работа с исходными данными моделей расчета – непосредственно сам расчет доз внутреннего облучения согласно Инструкции по применению для всего массива СИЧ-данных начиная с 1987 г. и до настоящего времени;
- формирование файла, содержащего средние значения дозы внутреннего облучения для каждой половозрастной группы за каждый год в населенных пунктах для которых имеются данные о СИЧ-измерениях;
- окно ввода индивидуальных данных (ФИО, пол, возраст, год и место проживания);
- вывод результатов расчета по каждому году с момента аварии на ЧАЭС и итоговой накопленной дозы за весь временной период с момента аварии на ЧАЭС, и возможностью ручной коррекции результатов расчета;
- сохранение результатов расчета индивидуализированной дозы внутреннего облучения на отдельной странице в файле Microsoft Office Excel;
- формирование итогового дозиметрического блока.

При запуске программы появляется пустое окно для ввода данных (рисунок 1). На данном этапе с помощью программы можно начать расчет.

Рисунок 1 – Окно ввода исходных данных

Необходимой информацией для начала расчета индивидуализированной накопленной дозы внутреннего облучения являются:

- Ф.И.О. субъекта;
- гендерная принадлежность – женский или мужской пол;
- год рождения для расчета возраста на момент оценки дозы облучения;
- населенные пункты проживания на радиоактивно загрязненной территории, начиная с 1986 г. с указанием периода проживания в них.

Результаты расчета индивидуализированных доз внутреннего облучения для каждого человека отображаются в виде таблицы и представляют собой общую информацию на отдельной странице в файле Microsoft Office Excel (рисунок 2).

Введите имя	Год	Кол обл
ТЕРЕШКОВА ЕЛЕНА СЕРГЕЕВНА	1986	1,74
ПОЛ (М или Ж)	1987	0,58
Ж	1988	0,40
Миграция	1989	0,20
АВМ-код	1990	0,02
52208856700	1991	0,01
52210401000	1992	0,01
52205501000	1993	0,02
52205501000	1994	0,02
52205501000	1995	0,02
52205501000	1996	0,02
52205501000	1997	0,08
52205501000	1998	0,05
52205501000	1999	0,04
52205501000	2000	0,01
52205501000	2001	0,13
52205501000	2002	0,09
52205501000	2003	0,02
52205501000	2004	0,00
52205501000	2005	0,00
52205501000	2006	0,00
52205501000	2007	0,03
52205501000	2008	0,02
52205501000	2009	0,02
52205501000	2010	0,00
52205501000	2011	0,00
52205501000	2012	0,01
52205501000	2013	
52205501000	2014	
52205501000	Сумма	3,47

Рисунок 2 – Окно расчета индивидуализированных доз внутреннего облучения по годам

Полученные индивидуализированные данные доз внутреннего облучения по годам для каждого лица из Госрегистра объединяются в итоговую таблицу, которая и формирует дозиметрический блок данных индивидуализированных доз внутреннего облучения лиц из Госрегистра (рисунок 3).

IDN	ФИО	DATEBIRTH	SEX	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
83470	Мирошниченко Илона Владимировна	1995	2										0,049	0,007	0,015
83471	Скобникова Алла Леонидовна	1975	2	0,752	0,251	0,175	0,131	0,093	0,140	0,126	0,239	0,262	0,193	0,080	0,116
83472	Плюгинская Елена Алексеевна	1969	2	0,752	0,441	0,308	0,196	0,143	0,214	0,187	0,239	0,262	0,193	0,080	0,116
83473	Терасова Софья Ивановна	1938	2	1,326	0,441	0,308	0,196	0,143	0,214	0,187	0,239	0,262	0,193	0,080	0,116
83474	Терасов Юрий Петрович	1939	1	2,117	0,705	0,493	0,322	0,239	0,260	0,220	0,344	0,498	0,336	0,266	0,237
83475	Мудрый Сергей Владимирович	1976	1	1,008	0,335	0,237	0,218	0,155	0,180	0,156	0,133	0,498	0,336	0,266	0,237
83476	Степаненко Федор Семенович	1953	1	2,117	0,705	0,493	0,322	0,239	0,260	0,220	0,344	0,498	0,336	0,266	0,237
83478	Никольская Ольга Николаевна	1969	2	1,326	0,441	0,308	0,196	0,143	0,214	0,187	0,239	0,262	0,193	0,080	0,116
83479	Титков Георгий Михайлович	1944	1	2,117	0,705	0,493	0,322	0,239	0,260	0,220	0,344	0,498	0,336	0,266	0,237
83480	Мосейков Владимир Николаевич	1965	1	2,117	0,705	0,493	0,322	0,239	0,260	0,220	0,344	0,498	0,336	0,266	0,237
83481	Харьков Константин Александрович	1978	1	1,008	0,335	0,237	0,218	0,155	0,180	0,156	0,133	0,220	0,150	0,266	0,237
83482	Сиводед Галина Васильевна	1970	2	0,752	0,251	0,308	0,196	0,143	0,214	0,187	0,239	0,262	0,193	0,080	0,116
83483	Холоденко Наталья Сергеевна	1964	2	1,326	0,441	0,308	0,196	0,143	0,214	0,187	0,239	0,262	0,193	0,080	0,116
83484	Мельников Валерий Владимирович	1995	1										0,091	0,007	0,066
83485	Слесик Надежда Петровна	1973	2	0,752	0,251	0,175	0,131	0,093	0,214	0,187	0,239	0,262	0,193	0,080	0,116
83486	Пехунов Алексей Прокофьевич	1944	1	2,117	0,705	0,493	0,322	0,239	0,260	0,220	0,344	0,498	0,336	0,266	0,237
83487	Чушова Василий Павлович	1943	1	6,331	2,108	1,474	0,623	0,514	0,400	0,320	0,612	0,629	0,767	0,632	0,341
83488	Чушова Анна Степановна	1937	2	3,965	1,319	0,921	1,073	0,404	0,347	0,244	0,650	0,313	0,809	0,284	0,291
83489	Шабашова Екатерина Юрьевна	1995	2										0,049	0,007	0,015
83490	Цыкунов Сергей Анатольевич	1995	1										0,091	0,007	0,066
83491	Рыбинский Александр Владимирович	1956	1	2,117	0,705	0,493	0,322	0,239	0,260	0,220	0,344	0,498	0,336	0,266	0,237

Рисунок 3 – Итоговый дозиметрический блок данных индивидуализированных доз внутреннего облучения лиц из Госрегистра

База данных индивидуализированной дозы внутреннего облучения содержит следующую информацию – IDN (идентификационный номер индивида), ФИО индивида, год рождения, пол, индивидуализированные годовые дозы внутреннего облучения за каждый год.

Результаты и обсуждение. Используя разработанный программный модуль, были определены относительные дозы внутреннего облучения (соответствующие значения квантилей распределения дозы) для ряда лиц, включенных в Госрегистр, за те годы, для которых в базе данных Госрегистра и Базе данных СИЧ-измерений данные отсутствуют.

Как пример результата работы программы, в таблице 2 представлен расчет доз внутреннего облучения, реконструированных по разработанному алгоритму, и значения доз по результатам СИЧ-измерений из базы данных Госрегистра. Полужирным шрифтом в таблице выделены значения доз внутреннего облучения, реконструированные по разработанному алгоритму.

Таблица 2 – Индивидуализированные дозы внутреннего облучения

IDN-субъекта	82854
Населенный пункт	Великие Немки, Ветковский район
Год рождения	1952
Пол	мужской
Год	Доза внутреннего облучения, мЗв
1986	2,87
1987	0,96
1988	0,67
1989	0,42
1990	0,49
1991	0,41
1992	0,29
1993	0,59
1994	0,57
1995	0,09
1996	0,21
1997	0,25
1998	0,21
1999	0,43
2000	0,06
2001	0,09
2002	0,13
2003	0,13
2004	0,39
2005	0,23
2006	0,08
2007	0,09
2008	0,11
2009	0,09
2010	0,03
2011	0,09
2012	0,01

По реконструированным значениям относительных доз внутреннего облучения (квантилей распределения) были рассчитаны абсолютные значения индивидуализированных доз внутреннего облучения у лиц.

В таблице 3 представлены значения годовых доз внутреннего облучения для ряда лиц, включенных в Госрегистр. Дозы облучения для каждого субъекта приведены за период, начинающийся с момента постановки субъекта на учет в Госрегистр до 2013 г.

Таблица 3 – Индивидуализированные годовые накопленные за послеаварийный период дозы внутреннего облучения

IDN	Пол	АДМКОД	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
1459	2	32238501000	1,35	0,54	0,38	0,19	0,26	0,17	0,20	0,20	0,27	0,27	0,31	0,53	0,54	0,35	0,18	0,30
2081	2	32208876702	1,32	0,44	0,31	0,18	0,26	0,23	0,16	0,27	0,25	0,18	0,05	0,09	0,30	0,20	0,07	0,03
2332	2	32225551000	1,67	0,55	0,39	0,22	0,23	0,16	0,12	0,15	0,13	0,15	0,06	0,02	0,03	0,10	0,09	0,05
2442	2	32208501000	1,33	0,44	0,31	0,20	0,14	0,21	0,19	0,24	0,26	0,19	0,08	0,12	0,17	0,14	0,09	0,05
2443	2	32208501000	1,57	0,52	0,37	0,23	0,19	0,26	0,24	0,41	0,39	0,28	0,17	0,18	0,29	0,22	0,11	0,09
2444	1	32208501000	2,12	0,70	0,49	0,32	0,24	0,26	0,22	0,34	0,50	0,34	0,27	0,24	0,37	0,31	0,17	0,07
2446	2	32208501000	0,75	0,25	0,17	0,13	0,14	0,21	0,19	0,24	0,26	0,19	0,08	0,12	0,17	0,14	0,09	0,05
2447	1	32208501000	2,12	0,70	0,49	0,32	0,24	0,26	0,22	0,34	0,50	0,34	0,27	0,24	0,37	0,31	0,17	0,07
2463	2	32208868700	1,49	0,50	0,35	0,21	0,18	0,24	0,15	0,19	0,21	0,13	0,04	0,09	0,20	0,14	0,10	0,07

Продолжение таблицы 3

IDN	Пол	АДМКОД	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	Накоплен- ная доза
1459	2	32238501000	0,30	0,30	0,30	0,31	0,31	0,26	0,20	0,14	0,09	0,32	0,03	0,03	8,62
2081	2	32208876702	0,15	0,08	0,02	0,08	0,09	0,09	0,09	0,08	0,08	0,11	0,01	0,01	5,24
2332	2	32225551000	0,01	0,04	0,04	0,04	0,03	0,08	0,05	0,06	0,05	0,04	0,01	0,01	4,57
2442	2	32208501000	0,10	0,10	0,07	0,05	0,05	0,14	0,09	0,09	0,06	0,06	0,04	0,05	5,05
2443	2	32208501000	0,18	0,14	0,13	0,06	0,06	0,19	0,12	0,12	0,08	0,07	0,04	0,03	6,74
2444	1	32208501000	0,20	0,14	0,14	0,08	0,08	0,18	0,12	0,11	0,08	0,10	0,10	0,12	8,38
2446	2	32208501000	0,10	0,10	0,07	0,05	0,05	0,14	0,09	0,09	0,06	0,06	0,04	0,05	4,09
2447	1	32208501000	0,20	0,14	0,21	0,08	0,08	0,23	0,15	0,15	0,10	0,10	0,10	0,13	8,63
2463	2	32208868700	0,18	0,02	0,15	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,06	0,06	0,11	0,10	5,45

Заключение. Таким образом, разработанные алгоритм и программный модуль можно использовать для реконструкции доз внутреннего облучения индивидов за каждый год, при условии наличия информации о местах проживания и/или нахождения его в тот или иной период времени.

С помощью разработанного программного обеспечения проведен расчёт индивидуализированных накопленных доз внутреннего облучения за весь послеаварийный период для 87 515 лиц, включенных в Государственный регистр, и постоянно проживающих в населенных пунктах Гомельской области.

Литература

1. Дрозд, Е.А. Новый методический подход расчёта индивидуализированных доз внутреннего облучения лиц, подвергшихся воздействию радиации вследствие аварии на ЧАЭС / Е.А. Дрозд // Научно-практический журнал «Радиационная гигиена». – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 134–143.
2. Метод реконструкции индивидуализированных накопленных доз облучения включенных в Государственный регистр лиц, подвергшихся воздействию радиации вследствие катастрофы на Чернобыльской АЭС, других радиационных аварий / Н.Г. Власова, А.В. Рожко, Е.А. Дрозд [и др.] // Инструкция по применению : утв. Министерством здравоохранения №095-0914 от 12.12.2014 г. – Гомель, 2014. – 9 с.
3. База данных СИЧ-измерений жителей Республики Беларусь за период 1987–2008 гг. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://infores.mpt.gov.by>. – Дата доступа : 15.01.2014.
4. База данных плотностей загрязнения территорий населенных пунктов Республики Беларусь радионуклидами цезия, стронция и плутония по состоянию на 1986 г. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://infores.mpt.gov.by>. – Дата доступа : 15.01.2014.

ГУ «Республиканский научно-практический
центр радиационной медицины и экологии человека»
Министерства здравоохранения РБ

Поступила в редакцию 15.04.2017

УДК 582.632.1:581.144.4:57.085.2

Влияние 6-бензиламинопурина и карбенициллина на морфогенез в культуре листовых эксплантов *Betula pubescens* Ehrh.

И.И. КОНЦЕВАЯ

Статья посвящена определению влияния 6-БАП и антибиотика карбенициллина, добавленных в питательную среду, на процесс морфогенеза в культуре листовых эксплантов *Betula pubescens* Ehrh. Показано, что ориентация листовой пластинки на среде может оказывать значительное влияние на интенсивность побегообразования в зависимости от концентрации органических добавок. Выявлена закономерность: большая часть адвентивных почек и побегов образуется на той стороне листовой пластинки, которая соприкасается со средой.

Ключевые слова: 6-БАП, карбенициллин, морфогенез *in vitro*, регенерационная способность, береза.

The article is devoted to the specification of the effect of 6-BAP and antibiotic carbenicillin, that were added to the substratum on the process of morphogenesis in culture leaves of explants of *Betula pubescens* Ehrh. It is proved that the orientation of the leaf blades on the substratum can make a significant effect on the rate of sprout production depending on the concentration of organic additives. The regularity was found: the majority of adventitious buds and sprouts forms on the side of the leaf blade, which is in contact with the substratum.

Keywords: 6-benzylaminopurine, carbenicillin, morphogenesis *in vitro*, regenerative capacity, birch.

Введение. Во многих странах для реализации государственных программ по генетическому улучшению лесных древесных пород разрабатываются технологии, основанные на культивировании *in vitro* клеток, тканей и органов. Культура *in vitro* представителей рода *Betula* L. вызывает у исследователей и практиков-лесоводов большой интерес. Без совершенствования данного метода невозможно развитие генетической инженерии. В результате различных манипуляций создают трансгенные растения, которые могут обладать важными и полезными признаками. Для получения трансгенных растений должна быть разработана эффективная система регенерации побегов из трансформированных клеток и тканей. Чаще всего при генноинженерных манипуляциях в качестве эксплантов используют листья. Морфогенетические процессы в культуре листовых эксплантов изучены у различных видов растений. Они зависят от многих факторов, таких как генотип источника экспериментального материала, количественный и качественный состав экзогенных регуляторов роста, солевой состав питательной среды, освещенность листовых эксплантов при культивировании, возраст листьев, способ их нарезания, ориентация листа на среде и другие [1]–[3].

Несмотря на интенсивные исследования по микроклональному размножению и получению трансгенных растений разных представителей рода *Betula* L., данные о морфогенетической активности листовых эксплантов *B. pubescens* отсутствуют, хотя как тетраплоидный вид он должен вызывать особое внимание у биотехнологов ввиду высокой морфогенной активности в культуре тканей [4]. Являясь во многих странах, включая Республику Беларусь, естественным часто встречаемым насаждением наравне с березой повислой, береза пушистая может представлять важный исходный материал для лесной промышленности при условии искусственной селекции. Установлены формы березы пушистой, перспективные для отбора по интенсивности роста [5].

На сегодняшний день исследования по оптимизации регенерационной, в том числе побегообразующей, способности для разных видов берез остаются актуальными. Поэтому целью наших исследований явилось изучение зависимости морфогенной и регенерационной активности листовых эксплантов *B. pubescens* от состава питательной среды (концентрации 6-бензиламинопурина и присутствия антибиотика карбенициллина) и ориентации листового экспланта на питательной среде.

Материал и методы исследования. Объектом исследования явился клон 3ф1 березы пушистой (*B. pubescens* Ehrh.). Исходный материал был получен из вегетативной почки взрослого плодоносящего материнского дерева. Выбор дерева определялся быстрым ростом и здоровым состоянием насаждения. В качестве эксплантов использовали листья, вычлененные у 1-месячных микроклональных растений, которые культивировали на безгормональной среде. В асептических условиях отсекали листья, оставляя небольшой черешок длиной 1–2 мм. На каждом экспланте с помощью скальпеля делали несколько насечек на листовых пластинках. Затем листья помещали на среду: либо абаксильной (нижней) либо адаксильной (верхней) стороной. Основу питательной среды составляла смесь неорганических солей для древесных WPM [6]. Витамины, микроэлементы добавляли по прописи Мурасиге и Скуга [7]. В качестве фитогормонов испытывали цитокинин 6-бензиламинопурин (6-БАП, БАП) в концентрации (мг/л): 1,0; 2,0; 5,0. Также изучали влияние антибиотика карбенициллина в концентрации 500,0 мг/л на морфогенетические процессы в тканях листьев. Стерильный раствор карбенициллина добавляли в асептических условиях в проавтоклавированную и охлажденную до 45 °С питательную среду, которую готовили с добавлением агара (6 г/л) и сахарозы (30 г/л). В качестве контроля использовали модифицированную среду WPM, без органических добавок. рН среды перед стерилизацией доводили до 5,6–5,8. Автоклавируют среды при 1,1 атм в течение 20 мин. Материал культивировали при температуре 25 ± 1 °С, с фотопериодом 16 часов и освещенностью 3–4 тыс. лк. Число повторностей в каждом варианте составляло 30.

Наблюдения за состоянием и ростом культур осуществляли каждые 10 дней. Материал просматривали под микроскопом МБС-10, отмечая появление недифференцированной ткани и различных органогенных структур. Учитывали процент некротизированных эксплантов, способность эксплантов к каллусообразованию, побегообразованию, ризогенезу, количество адвентивных почек и побегов на 1 экспланте. Каллус оценивали по цвету, консистенции, интенсивности роста по 3-х балльной шкале. Для определения регенерационной способности экспланты помещали вместе с полученными структурами на свежую безгормональную среду, на которой культивировали при оптимальных условиях 3 недели. Отмечали степень развития адвентивных почек и побегов.

Полученные данные обработаны статистически с использованием пакета прикладного программного обеспечения «Statsoft (USA) Statistica v.7.0». Для сравнения изучаемых показателей между опытными и контрольными группами использовали t-критерий Стьюдента. Нулевую гипотезу отклоняли при уровне статистической значимости $p < 0,05$ [8].

Результаты исследования и их обсуждение. В течение первых 10 дней культивирования на средах, дополненных 6-БАП, выявлено увеличение размеров эксплантов и индукция каллуса на черешке листа. Спустя 20 дней на всех опытных средах наблюдали экспланты с признаками пролиферации тканей. По результатам оценки листовых эксплантов в первом пассаже следует отметить их морфогенетическую активность в отдельных вариантах опыта. Интенсивность каллусообразования, ризогенеза и побегообразования существенно варьировали, как в зависимости от гормонального состава среды, так и от ориентации листа на поверхности среды.

Индукция недифференцированной ткани определена на черешке у всех листьев, помещенных адаксильной стороной на среду без гормонов (контроль). Также каллусогенез отмечали у 100 % эксплантов, культивированных на средах с органическими добавками, независимо от их ориентации на среде (таблица 1). Формирование каллуса наблюдали на черешке и в местах повреждения листовой пластинки, с двух ее сторон. Интенсивность роста каллуса была выше на средах, дополненных 5 мг/л БАП, по сравнению с другими опытными вариантами. Плохой рост каллуса отмечали на листьях, культивированных на среде, дополненной либо 500 мг/л карбенициллина (независимо от ориентации листа на среде), либо дополненной 2 мг/л БАП – в случае помещения листа верхней стороной на среду. Во всех вариантах опыта каллусная ткань характеризовалась как плотная, неоднородная по окраске – зеленого, коричневого, кремового цвета, гранулированная, блестящая. У 5–20 % эксплантов были выявлены участки с каллусом желтого и светло-коричневого цветов. Каллусные культуры характеризовались большой гетерогенностью по морфологическим характеристикам. На одной

и той же среде можно было наблюдать несколько морфотипов каллусов по цвету и интенсивности роста. Они возникали как в пределах одного экспланта, так и у разных эксплантов. Интенсивность роста каллуса в большей степени зависела от гормонального состава среды.

Таблица 1 – Каллусогенез на листовых эксплантах в зависимости от их ориентации и состава питательной среды

Гормоны, антибиотик, мг/л	Число эксплантов с каллусом, %	Интенсивность роста	Цвет каллуса, его структура, прозрачность
поверхность соприкосновения экспланта со средой – адаксылная (верхняя)			
б/г (контроль)	100	1	зеленый, снежный, матовый
БАП, 1,0	100	2	кремовый, зеленый, крупнозернистый, матовый
БАП, 2,0	100	1	зеленый, коричневый, крупнозернистый, блестящий
БАП, 5,0	100	2, 3	зеленый, коричневый, крупнозернистый, блестящий
карбенициллин, 500	100	1	зеленый, снежный, блестящий
БАП, 2,0 + карбенициллин, 500	100	1, 2	зеленый, коричневый, снежный, матовый
БАП, 5,0 + карбенициллин, 500	100	2	зеленый, коричневый, крупнозернистый, блестящий
поверхность соприкосновения экспланта со средой – абаксылная (нижняя)			
б/г (контроль)	0	–	–
БАП, 1,0	100	2	зеленый, крупнозернистый, блестящий
БАП, 2,0	100	2	зеленый, крупнозернистый, блестящий
БАП, 5,0	100	3, 2	зеленый, коричневый, крупнозернистый, блестящий
карбенициллин, 500	100	1	зеленый, гранулированный, блестящий,
БАП, 2,0 + карбенициллин, 500	100	2	кремовый, зеленый, крупнозернистый, блестящий
БАП, 5,0 + карбенициллин, 500	100	2	желтый, коричневый, крупнозернистый, блестящий
Примечание: интенсивность роста в баллах: 1 – плохой, 2 – хороший, 3 – очень хороший			

Помимо каллусогенеза, на листьях отмечали образование двух типов органогенных структур: адвентивных почек и побегов, и адвентивных корней. Чаще всего определяли прямой ризогенез из тканей листьев, в то время как регенерацию побегов наблюдали из каллусной культуры. Аналогичные процессы выявлены другими исследователями на березе повислой [1]–[3].

Несмотря на отмеченную в первом пассаже способность листовых эксплантов березы пушистой к органогенезу, требуется их перенос на свежие среды, без гормонов. Это вызвано тем, что на средах с фитогормонами обычно медленнее осуществляются процессы дифференциации новообразований и развитие органогенных структур. Следует отметить, что каллус, сформировавшийся на опытных средах, являлся высоко органогенным, о чем свидетельствуют интенсивные процессы корнеобразования и побегообразования, имеющие место при переносе эксплантов с новообразованиями на свежую среду (таблица 2). У 100 % эксплантов корнеобразование отмечали на среде без гормонов при помещении листа адаксылной поверхностью на среду, и, независимо от ориентации листа, на средах, содержащих в своем составе карбенициллин или еще дополнительно 5 мг/л БАП. В этих вариантах число корней на экспланте варьировало от 1 до 5, при длине 0,5–11,0 см. Процент ризогенеза в остальных опытных вариантах варьировал от 17 до 84 %. На листьях насчитывали от 1 (чаще 3) до 10 корней, с длиной обычно менее 1 см. Только единичные корни достигали 3–7 см. Установлено, что интенсивное корнеобразование было индуцировано на каллусной ткани с антоциановыми вкраплениями.

Таблица 2 – Органогенез на листовых эксплантах в зависимости от их ориентации и состава питательной среды

Гормоны, антибиотик, мг/л	Число эксплантов, %		Среднее число почек на экспланте ($\bar{x} \pm Sx$), шт.	Min – max число на экспланте, шт.		Min – max длина корней, см
	с корнями	с почками		почек	корней	
поверхность соприкосновения экспланта со средой – адаксылная (верхняя)						
б/г (контроль)	100	0	–	0	1–5	0,5–9,5

Окончание таблицы 2

БАП, 1,0	72,0	100	$15,0 \pm 1,34^{**}$	3–25	1–5	0,1–4,0
БАП, 2,0	53,3	83,3	$4,2 \pm 0,72^{**}$	1–10	1–5	0,1–7,0
БАП, 5,0	72,0	100	$14,3 \pm 1,42^{**}$	1–30	1–5	0,5–5,0
карбенициллин, 500	100	0	–	0	3–5	0,5–7,0
БАП, 2,0 + карбенициллин, 500	56,7	20,0	$0,7 \pm 0,3^*$	2–5	1–3	0,5–3,0
БАП, 5,0 + карбенициллин, 500	100	23,3	$0,5 \pm 0,2^*$	1–3	1–3	0,5–7,0
поверхность соприкосновения экспланта со средой – абаксильная (нижняя)						
б/г (контроль)	0	0	–	0	0	–
БАП, 1,0	80,0	100	$21,4 \pm 2,72^{**}$	3–35	1–5	0,1–0,3
БАП, 2,0	72,2	100	$21,4 \pm 2,70^{**}$	7–35	1–5	0,1–1,0
БАП, 5,0	40,0	90,0	$22,0 \pm 2,79^{**}$	10–50	1–5	0,1–2,0
карбенициллин, 500	100	53,3	$1,8 \pm 0,3^{**}$	1–10	3–6	1,0–11,0
БАП, 2,0 + карбенициллин, 500	83,3	92,0	$4,3 \pm 0,41^{**}$	3–10	3–10	0,3–7,0
БАП, 5,0 + карбенициллин, 500	100	16,7	$0,3 \pm 0,2$	1–3	3–8	0,2–5,1
Примечание: уровень значимости при $*p < 0,05$; $**p < 0,01$						

Причины, влияющие на проявление морфогенетических реакций листовых эксплантов, многообразны, сложны, и до конца не выяснены. Вероятно, ориентация листа может оказывать воздействие на процесс поступления в ткани определенных гормонов из среды культивирования, что, в свою очередь, определяет появление тех или иных новообразований. Выявлено, что в опытных вариантах ориентация листа на поверхности среды не оказывала существенного воздействия на параметры каллусогенеза. Интенсивность процесса ризогенеза на эксплантах также зависела в большей мере от состава среды, чем от ориентации листа на ее поверхности. И в тоже время на процесс побегообразования ориентация листьев на среде культивирования оказывала существенное влияние в ряде вариантов опыта (таблица 2). При этом интенсивность побегообразования была выше на эксплантах, помещенных абаксильной стороной на среду. Возрастают показатели «число эксплантов с почками» и «среднее число почек на экспланте». Во втором пассаже наблюдали активный рост и развитие адвентивных почек и побегов, высота которых колебалась от 0,2 до 2,5 см. Практически все адвентивные почки развивались в побеги.

Полученные результаты на березе пушистой (клон 3ф1) свидетельствуют о высокой регенерационной активности изученного генотипа. Параметры побегообразования, при помещении эксплантов абаксильной стороной на среды, в состав которых включали БАП в концентрации 1,0–5,0 мг/л, составляли от 83 до 100 % эксплантов с почками, и насчитывали от 3 до 50 почек на экспланте, при среднем значении 21,4. То есть при указанном составе среды побегообразующая способность березы пушистой (клон 3ф1) была на таком же высоком уровне, как и у березы чернокорой [9].

Ранее нами было показано положительное влияние цефотаксима и карбенициллина в концентрации 300–500 мг/л на регенерационную способность 1–2-почечных сегментов у березы повислой. Отмечали выживаемость у 100 % эксплантов, которые не теряли свою регенерационную способность [10]. Как видно из таблицы 2, карбенициллин существенно подавлял регенерационную способность листовых эксплантов березы пушистой, в отличие от березы чернокорой, когда действие антибиотика оказалась аналогично действию цитокинина 6-БАП [9]. Результаты, полученные при культивировании листовых эксплантов березы пушистой на среде без гормонов, дополненной карбенициллином, свидетельствуют об органогенной активности антибиотика, при условии культивирования листьев абаксильной стороной на среде. В этом варианте насчитывали 53 % эксплантов с почками, от 3 до 6 штук.

Заключение. Таким образом, в результате выполненных исследований выявлена высокая органогенная способность листовых эксплантов клона 3ф1 березы пушистой. Определена эффективная концентрация 6-БАП (1,0–5,0 мг/л) в питательной среде, позитивно влияющая на морфогенез *in vitro* и индуцирующая высокие параметры побегообразования. Установле-

но, что добавление карбенициллина в среды, содержащие 6-БАП, существенно подавляет процесс формирования адвентивных почек. Показано, что ориентация листовой пластинки на среде может оказывать значительное влияние на число адвентивных почек и побегов на экспланте и частоту регенерации в зависимости от концентрации органических добавок (6-БАП или карбенициллина). Выявлена закономерность: большая часть адвентивных почек и побегов образуется на той стороне листовой пластинки, которая соприкасается со средой.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ (№ темы М16-33).

Литература

1. Srivastava, P.S. Plantlet differentiation in leaf and root cultures of birch (*Betula pendula* Roth.) / P.S. Srivastava, A. Steinhauer, H. Glock // Plant Sci. – 1985. – Vol. 42. – P. 209–214.
2. Valobra, C. In vitro shoot regeneration from leaf disks of *Betula pendula* «Dalecarlica» EM 85 / C. Valobra, P. Piagnani, D.J. James // Plant cell, Tissue and Organ Cult. – 1990. – Vol. 21, № 1. – P. 51–54.
3. Simola, L.K. Propagation of plantlets from leaf callus of *Betula pendula* f. *purpurea* / L.K. Simola // Scientia Hortic. – 1985. – Vol. 26. – P. 77–85.
4. Perez, C. Micropropagation of *Betula celtiberica* / C. Perez, P. Postigo // Annals of Botane. – 1989. – Vol. 64. – P. 67–69.
5. Лесной фонд. Лесное хозяйство // Министерство лесного хозяйства Республики Беларусь [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа : <http://www.mlh.by/ru/forestry/resources.html> – Дата доступа : 19.03.2016.
6. Lloyd, G. Commercially feasible micropropagation of mountain laurel, *Kalmia latifolia* by use of shoot-tip culture / G. Lloyd, B. McCown // Proc. Intl. Plant Prop. Soc. – 1980. – № 30. – P. 421–427.
7. Murashige, T. A revised medium for rapid growth and bioassay with tobacco tissue cultures / T. Murashige, F. Skoog // Physiol.Plant. – 1962. – Vol. 15, № 13. – P. 473–497.
8. Лакин, Г.Ф. Биометрия / Г.Ф. Лакин – М. : Высш. шк., 1990. – 352 с.
9. Концевая, И.И. Изучение морфогенеза в культуре тканей листьев *Betula obscura* Kotula ex Fiek / И.И. Концевая, А.А. Яцына // Проблемы лесоведения и лесоводства : Сб.науч.трудов. – Гомель, 2005. – Вып. 64. – С. 219–227.
10. Концевая, И.И. Каллусообразование и органогенез на листовых эксплантах березы / И.И. Концевая, А.А. Яцына // Проблемы лесоведения и лесоводства : Сб.науч.трудов – Гомель, 2000. – Вып. 51. – С. 193–201.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 23.03.2017

Нормативы восстановления широколиственных лесов Беларуси

М.С. ЛАЗАРЕВА, Л.К. КЛИМОВИЧ, Н.В. МИТИН, А.В. КЛИМОВ, Н.В. МАЛЬЦЕВА

Представлены нормативы восстановления широколиственных лесов рубками ухода в производных от дуба мелколиственных и грабовых насаждениях, которые включают режим рубок ухода от первых приемов осветлений до последних приемов проходных рубок и параметры оставляемой после уходов части насаждений.

Ключевые слова: широколиственные леса, производные насаждения, дубовые насаждения, нормативы, рубки ухода.

The standards for the restoration of broad-leaved forests by thinning in oak-derived small-leaved and hornbeam plantations, which include the mode of thinning from the first methods of clarification to the latest methods of logging and the parameters of the part of the plantations left after evacuation are presented.

Keywords: broad-leaved forests, derivative forests, oak forests, standards, thinning.

Введение. Широколиственные древесные виды являются одними из наиболее ценных в составе лесов Беларуси. Однако площади, занятые ими, ниже потенциально возможных, а такие виды, как ясень, клен, вяз и другие, постепенно исчезают из лесного фонда республики [1]. Несмотря на целый ряд мер, площади широколиственных пород увеличиваются медленно.

Дубовые леса в Беларуси формировались веками, и дуб как очень долговечная и устойчивая порода при его смене мелколиственными древесными видами в процессе естественной сукцессии за 250–350 лет вытеснял конкурентов и сохранял свое жизненное пространство [2]. В современных условиях нельзя допустить, чтобы естественные сукцессии дуба продолжались столь долгое время. Сокращение срока возобновления выращивания этой ценной породы путем разработки экономически обоснованных методов и технологий является одной из важнейших задач лесоводов. Нужен системный подход с учетом новейших достижений науки и практики.

Производные от дуба формации мелколиственных лесов Беларуси представлены, в основном, березовыми, осиновыми и сероолиховыми насаждениями. В таких насаждениях часто встречается дуб, особенно в молодом возрасте. Вариативность составов этих насаждений высока, в них часто присутствуют хвойные виды, а также граб. Успех процесса формирования насаждений целевых составов рубками ухода во многом основывается на правильности отбора деревьев на выращивание и в рубку с учетом особенностей ценологических взаимоотношений различных видов в смешанных древостоях [3].

Производные мелколиственные насаждения распространены по всей территории республики, хотя березовые насаждения в северной части республики представлены в меньшей степени [4], [5]. Производные грабовые насаждения приурочены в основном к югу Беларуси.

Восстановление широколиственных лесов путем перевода мелколиственных (грабовых) участков в дубовое хозяйство рубками ухода и путем сохранения жизнеспособного подроста целесообразно проводить в богатых лесорастительных условиях, т. е. с учетом потенциального плодородия почв. При переводе рубками ухода мелколиственных насаждений в широколиственные сохраняется биологическое разнообразие и сокращается период их выращивания [6].

Для восстановления широколиственных, прежде всего, дубовых лесов необходимо создание оптимальных условий роста для дуба в молодом возрасте путем регулярных, лесоводственно-обоснованных рубок ухода и своевременной выборке достаточно крупной древесины мелколиственных древесных видов.

Объекты и методика исследований. Режим рубок ухода (нормативы) разрабатывался для смешанных, условно-одновозрастных, одноярусных мелколиственных и грабовых насаждений в возрасте 5–70 лет с учетом их зонально-типологической обусловленности.

Нормативы формирования до рубки основаны на таксационных параметрах высокопродуктивных, высокополнотных насаждений, составляющих естественный ряд для основных типов леса, которые получены на основе установленных зависимостей таксационных показателей целевой, преобладающей и сопутствующих пород от возраста. Для этого использованы стандартные программы дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа. В основу разработки параметров оставляемой после рубок ухода части насаждения положен принцип создания для главной породы – дуба и других широколиственных пород – условий «шубы», т.е. устранения превышающих его по высоте мелколиственных пород и граба с одновременным созданием затенения нижней части ствола и кроны. Количество удаляемых из насаждения деревьев по ступеням толщины рассчитано по данным постоянных пробных площадей. В исследованиях использовались также данные лесоустройства, в которых при необходимости вырубается запас был рассчитан на основании рядов распределения числа стволов по диаметру по относительным ступеням толщины [7].

Рекомендуемые технологии и системы машин и механизмов, применяемых на рубках ухода, основаны на всестороннем изучении существующих и применяемых в республике с учетом современных тенденций.

Выбор участков для закладки пробных площадей, их размеры, ограничение и закрепление осуществлялись в соответствии с ГОСТом [8], методами, принятыми в лесоводстве и таксации [9], [10] Размер пробной площади устанавливался числом деревьев в её границах, согласно методикам, применяемым в лесоводстве и таксации [11], [12] с учетом рекомендаций А.И. Уткина [13].

Результаты исследований и их обсуждение. В лесном фонде республики мелколиственные и грабовые насаждения, характеризующиеся присутствием широколиственных пород в составах насаждений, занимают около 20 тыс. га. В среднем их доля составляет примерно 7 % от площади дубравно-широколиственных лесов.

В производных березовых и осиновых насаждениях при большом разнообразии соотношений мелколиственных пород в составах доля дуба варьирует от 1 до 3 единиц в зависимости от возраста, составляя в среднем во всех ГПЛХО 1 единицу состава.

В производных грабовых насаждениях доля граба варьирует от 40 % до 80 %, составляя в среднем 50 %, дуба – не превышает 40 %, в среднем – 20 %. Доля твердолиственных видов находится в пределах 10 %. Мелколиственные виды с возрастом снижают степень участия в составе насаждений почти в 2 раза. Сравнение хода роста дуба и граба по высоте и диаметру показало, что до 20-летнего возраста наблюдается превышение граба по высоте и диаметру, а после 30 лет превышение по высоте и диаметру переходит к дубу.

В процессе исследований сформирована база данных мелколиственных и грабовых насаждений, производных от широколиственных лесов Беларуси, разработаны модели их роста и формирования и режим рубок ухода (нормативы).

Нормативы по восстановлению широколиственных лесов включают комплексный режим рубок ухода от первых приемов осветлений до последних приемов проходных рубок и соответствуют современному уровню знаний о естественной динамике дубовых и производных от них насаждений [14]–[18] и критериям устойчивого многоцелевого лесопользования [14].

При восстановлении широколиственных лесов рубками ухода в производных мелколиственных (березовых, осиновых, ольховых) насаждениях в подзонах грабово-дубово-темнохвойных и широколиственно-сосновых лесов ведение хозяйства направлено на формирование целевого состава, в котором дуб и другие широколиственные виды (ясень, липа, вяз, ильм, клен) являются целевыми породами.

Формирование составов производных мелколиственных насаждений с целью их постепенного перевода в древостои с преобладанием дуба целесообразно проводить в следующих сериях типов леса: снытевая, крапивная, кисличная, т. е. в условиях, где дуб растет по I–II классам бонитета. Рубки ухода проводятся в порядке выполнения плановых заданий и в соответствии с параметрами, приведенными в таблице 1.

Таблица 1 – Фрагмент нормативов рубок ухода в производных мелколиственных насаждениях снытевого и крапивного типов леса (Д₃–Д₄)

Возраст проведения очередных рубок, лет	Интенсивность рубки (до 20 лет – по числу стволов, после 20 лет – по запасу), %	Повторяемость, лет	Режим рубок ухода
1	2	3	4
5	30-60	3-5	Верховой метод. При равномерном распределении деревьев дуба по площади уход проводится вокруг каждого деревца дуба в радиусе 0,5-1,0 м. На расстоянии 1,0 м от дуба высота оставляемых деревьев мелколиственных пород в соответствии с графой 8. Далее 3 м от дуба их высота не должна превышать 1,5 Нд. Удаляются крупные экземпляры березы, осины, ивы. Если далее 4 м от дуба имеются спутники дуба (Яс, Лп, Кл, В, Ил), а также Е (С)****, за ними ведется уход, как и за Д. При неравномерном распределении дуба по площади уход за ним ведется аналогично. Биогруппы мелколиственных пород оставляются нетронутыми до момента угрозы заглушения дуба. Количество преобладающих мелколиственных видов – не более 40-50 %. В графе 10 – доля всех мелколиственных видов.

Продолжение таблицы 1

Показатели после рубки						
Доля в составе*		Высота, м		Густота, тыс. шт./га		полнота ** min
дуб min	мелколиственные max	дуб min	мелколиственные близкорастущие max	дуба, более	мелколиственные, менее	
5	6	7	8	9	10	11
5-10	60-70	***	0,85	0,95	4,0	0,4-0,5

* Желаемая доля в составе до 20-летнего возраста приведена по числу стволов, после 20 лет – по запасу.

** До 10 лет – сомкнутость, после 10 лет полнота.

*** До 20 лет уход проводится за всеми деревьями дуба, после 20 лет при условии, что количество деревьев дуба достаточно, объектом ухода являются перспективные деревья дуба.

**** Ель – подзона грабово-дубово-темнохвойных лесов, сосна – подзона широколиственно-сосновых лесов.

Объекты для восстановления широколиственных лесов подбираются в производных мелколиственных (березовых, осиновых) насаждениях, в составах которых наряду с мелколиственными породами присутствуют широколиственные (дуб, ясень и др.), а доля хвойных пород не превышает 10 %.

Очередность назначения рубок ухода в них осуществляется в соответствии с ТКП 143-2008 [19]. В первую очередь необходимо охватывать уходом мелколиственные молодняки (до 20 лет) с долей участия дуба 10 %, затем средневозрастные мелколиственные насаждения (21–40 лет) с участием в составе насаждения дуба в количестве 20 % и мелколиственные насаждения старше 41 года – с долей участия дуба 30 %.

При проведении рубок ухода в производных мелколиственных насаждениях в качестве лучших деревьев оставляются деревья дуба семенного происхождения с ровным стволом, наиболее быстрорастущие, полнодревесные, здоровые, с хорошо развитой кроной.

Если в насаждении присутствуют хвойные и широколиственные виды, из их числа также выделяются лучшие деревья с ровным стволом, наиболее быстрорастущие, полнодревесные, здоровые, с хорошо развитой кроной, которые находятся на расстоянии от деревьев дуба не менее 3–4 м.

Осветления в березовых насаждениях проводят в возрасте 3–10 лет верховым методом, в осиновых – до 5 лет, с целью сохранения каждого деревца дуба и улучшения условий его роста. Интенсивные рубки (30–60 %) с удалением второстепенных пород, заглушающих дуб, а также ясень, липу, клен, вяз и ильм, позволяют формировать целевой состав насаждения.

Прочистки проводятся в березовых насаждениях с 11 до 20 лет, в осиновых – с 6 до 10 лет верховым методом, удаляя все деревья, заглушающие дуб и другие широколиственные виды. По возможности обеспечивается равномерное распределение деревьев дуба по площади, т. е. 1 перспективное дерево на 16–25 м² (4 х 4 или 5 х 5 м). Рубки ведутся с интенсивностью 30–50 %.

Прореживания проводят верховым методом в березовых насаждениях с 21 до 30-летнего возраста, в осиновых – с 11 до 20 лет. Необходимость проведения прореживаний определяется состоянием насаждений (полнота не менее 0,7; достаточное количество деревьев целевой породы) и проводятся в соответствии с плановыми заданиями по рубкам ухода. На расстоянии 4,0–4,5 м от дуба удаляются все деревья, превышающие его по высоте. Одновременно ведется уход за широколиственными и хвойными породами, не мешающими росту дуба. Неперспективные деревья дуба определяются по высоте, указанной в графе 7 таблицы 1.

При наличии в составе насаждений более 60 % мелколиственных пород их вырубка проводится в несколько приемов с максимальной интенсивностью (таблица 1), при участии мелколиственных менее 60 % – с меньшей интенсивностью. К 30–40 годам, по возможности, первое поколение осины, ольхи серой и ивы должны быть полностью удалены из насаждения. Интенсивность рубки в первый прием составляет 25–50 %, во второй – 25–40 %. Прореживания повторяют через 7–10 лет. Полнота оставляемой части древостоя должна быть не менее 0,6, но при доле мелколиственных пород более 60 % после первого приема прореживаний полнота после рубки может быть снижена до 0,5.

Проходные рубки проводятся с 31 года в березовых и с 21 года в осиновых насаждениях и заканчиваются за 7 лет до возраста главной рубки, ведутся по комбинированному методу. К 50–60 годам вырубается первое поколение оставшейся березы, ольхи черной. Удаляются неперспективные деревья дуба. Интенсивность изреживаний в первый и второй приемы составляет 20–30 %, повторяемость рубок 10–15 лет. Минимальная полнота после рубки – 0,7. В последний прием рубки создаются условия для естественного возобновления дуба.

При восстановлении широколиственных лесов рубками ухода в производных грабовых насаждениях в подзоне широколиственно-сосновых лесов в насаждениях с преобладанием граба и участием в составе насаждения широколиственных видов в количестве: до 20 лет – 10 %, 21–40 – 20 % и свыше 41 года – 30 % ведение хозяйства направлено на формирование целевого состава, в котором дуб и другие широколиственные виды являются целевыми породами.

Объекты подбираются в грабовых насаждениях с участием дуба и других широколиственных видов без примеси и с примесью мелколиственных пород.

В первую очередь уходом необходимо охватывать молодняки до 20 лет с долей дуба в составе 10 %, присутствием граба более 50 % и мелколиственных пород в количестве, превышающем долю дуба. Затем грабовые насаждения 21–40 лет с участками в составе насаждения дуба 20 % и грабовые насаждения старше 41 года – с долей участия дуба 30 %.

При проведении рубок ухода в производных грабовых насаждениях в качестве лучших деревьев оставляются деревья дуба семенного происхождения, а также других широколиственных пород с ровным стволом, полнодревесные, здоровые, с хорошо развитой кроной. При наличии примеси мелколиственных пород планируется их частичное или полное удаление.

Осветления в грабовых насаждениях с целью сохранения каждого деревца дуба и улучшения условий его роста проводят верховым методом с 3–5 лет. Интенсивные рубки с удалением граба и мелколиственных пород, заглушающих дуб, способствуют формированию целевого состава.

При прочистках, которые проводятся с 11 до 20 лет, продолжается регулирование соотношения древесных пород в древостое. При этом, по возможности, обеспечивается равномерное распределение деревьев целевых пород (дуб, ясень, липа, вяз, клен, ильм) по площади.

С 21 до 30 лет прореживания ведутся по верховому методу с удалением выше растущих деревьев над дубом, таким же образом ведется уход и за другими широколиственными видами. Интенсивность рубки в зависимости от первоначальной полноты насаждения и степени заглушения целевых пород в первый прием составляет 35–50 %, во второй – 25–50 %. Повторяемость 7–10 лет. Полнота оставляемой части древостоя после проведения рубок должна быть не ниже 0,6. Неперспективные деревья дуба определяются по высоте, как и для производных мелколиственных насаждений.

После 31 года проходные рубки ведутся по комбинированному методу. К 35–40 годам, по возможности, полностью удаляется первое поколение осины, ивы.

К 50 годам вырубается первое поколение оставшейся березы, если есть – ольхи черной. Минимальная полнота после рубок 0,7. Повторяемость рубок – 10–15 лет. Интенсивность изреживания в первый-второй приемы 20–35 %, в третий – 10–20 %. В последний прием рубок ухода вырубается поврежденные деревья и ведется особый уход за семенниками дуба.

Заключение. В лесном фонде республики мелколиственные и грабовые насаждения, характеризующиеся присутствием широколиственных пород в составах насаждений, занимают около 20 тыс. га. В среднем их доля составляет примерно 7 % от площади дубравно-широколиственных лесов.

Производные древостои характеризуются широким разнообразием вариантов смешения древесных видов в составах и большой вариабельностью лесоводственно-таксационных показателей.

В производных березовых и осиновых насаждениях при большом разнообразии соотношений мелколиственных пород в составах доля дуба варьирует от 1 до 3 единиц в зависимости от возраста, составляя в среднем во всех ГПЛХО 1 единицу состава.

В производных грабовых насаждениях доля граба варьирует от 40 % до 80 %, составляя в среднем 50 %, дуба не превышает 40 %, в среднем – 20 %. Доля твердолиственных видов находится в пределах 10 %. Мелколиственные с возрастом снижают степень участия в составе насаждений почти в 2 раза.

Сравнение хода роста дуба и граба по высоте и диаметру показало, что до 20-летнего возраста наблюдается превышение граба по высоте и диаметру, а после 30 лет превышение по высоте и диаметру переходит к дубу.

Впервые для условий Беларуси разработаны нормативы восстановления широколиственных лесов рубками ухода в производных от дуба мелколиственных и грабовых насаждениях, которые включают режим рубок ухода от первых приемов осветлений до последних приемов проходных рубок и параметры оставляемой после уходов части насаждений.

Литература

1. Стратегический план развития лесохозяйственной отрасли на период с 2015 по 2030 гг. : утв. зам. Премьер-министра РБ от 23.12.2014 г. – №06/201-271. – 20 с.
2. Писаренко, А.И. Искусственные леса / А.И. Писаренко, Г.И. Редько, М.Д. Мерзленко. – М. : Лесная промышленность, 1992. – Ч. 2. – 548 с.
3. Лазарева, М.С. Фитоценотические взаимоотношения древесных видов в производных мелколиственных насаждениях Беларуси / М.С. Лазарева, Л.К. Климович, В.М. Ефименко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины, 2013. – № 5 (80). – С. 105–111.
4. Лабоха, К.В. Производные березовые насаждения Белорусского Поозерья / К.В. Лабоха, А.Ч. Борко, Д.В. Шиман // Современное состояние, тенденции развития, рациональное использование и сохранение биологического разнообразия растительного мира : материалы междунар. науч. конф. – Минск, 2014. – С. 80–84.
5. Лабоха, К.В. Анализ состояния и распространения производных березовых насаждений на территории Белорусского Поозерья / К.В. Лабоха, А.Ч. Борко // Проблемы лесоведения и лесоводства : сб. научных трудов. – Гомель : ИЛ НАН Беларуси, 2015. – Вып. 75. – С. 66–74.
6. Гримашевич, В.В. Сохранение и воспроизводство дубрав / В.В. Гримашевич // Белорусская лесная газета. – 2009. – № 8. – С. 1.

7. Нормативные материалы для таксации леса Белорусской ССР от 17.07.1982 г. № 82 / Госкомлес СССР. – М. : Госкомлес СССР, 1984. – 307 с.
8. ГОСТ 16128-70. Площади пробные лесоустроительные. Метод закладки. – М., 1970. – 23 с.
9. Анучин, Н.П. Лесная таксация / А.П. Анучин. – М. : Лесная промышленность, 1977. – 512 с.
10. Мирошников, В.С. Справочник таксатора / В.С. Мирошников, О.А. Труль, В.Е. Ермаков [и др.] ; под общей ред. В.С. Мирошников. – 2-е изд., перераб. и доп. – Мн. : Ураджай, 1980. – 360 с.
11. Справочник лесоустроителя Белоруссии. – Мн. : Вышэйшая школа, 1973. – 268 с.
12. Справочник работника лесного хозяйства – Мн. : Наука и техника, 1986. – 623 с.
13. Уткин, А.И. Изучение лесных биогеоценозов / А.И. Уткин // Программа и методика биогеоценологических исследований. – М. : Наука, 1974. – С. 281–317.
14. Лазарева, М.С. Динамика и состояние производных грабовых насаждений / М.С. Лазарева, Л.К. Климович [и др.] // Сборник научных трудов Института леса НАН Беларуси. – 2013. – Вып. 73. – С. 56–63.
15. Ефименко, В.М. Динамика формирования производных мелколиственных насаждений / В.М. Ефименко, М.С. Лазарева, Л.К. Климович // Актуальные проблемы лесного комплекса : Сб. научн. тр. ; Под общей редакцией Е.А. Памфилова. – Брянск : БГИТА, 2014. – Вып. 39. – С. 61–65.
16. Климов, А.В. Структурно-функциональные особенности грабовых насаждений подзоны широколиственно-сосновых лесов Беларуси / А.В. Климов, М.С. Лазарева // Сборник научных трудов Института леса НАН Беларуси. – Гомель: ИЛ НАН Б, 2015. – Вып. 75. – С. 48–56.
17. Ефименко, В.М. Распределение деревьев дуба по рангам при различном соотношении пород в молодняках / В.М. Ефименко, М.С. Лазарева, Л.К. Климович // Сборник научных трудов: Актуальные проблемы лесного комплекса. – Брянск : БГИТА, 2015. – Вып. 41. – С. 19–22.
18. Багинский, В.Ф. Лесопользование в Беларуси / В.Ф. Багинский, Л.Д. Есимчик. – Мн. : Белорусская наука, 1996. – 367 с.
19. Правила рубок леса в Республике Беларусь: ТКП 143-2008(02080) : Введ. 01.01.2009 : Переиздание (сентябрь 2013 г.) : с изменениями № 1, утвержденным 30.04.2009 (ИУ ТНПА № 5-2009) : с изменениями № 2, утвержденным 12.07.2010 (ИУ ТНПА № 7-2010) : с изменениями №3, утвержденным 26.05.2011 (ИУ ТНПА № 6-2011) : с изменениями № 4, утвержденным 05.08.2013 (ИУ ТНПА № 7-2013). – Минск : Минлесхоз РБ, 2013. – 94 с.

УДК 630*231.1; 630.551.521

Динамика предварительного возобновления леса в загрязненных радионуклидами сосновых насаждениях дальней зоны аварии на ЧАЭС

А.М. ПОТАПЕНКО¹, Н.И. БУЛКО¹, А.К. КОЗЛОВ¹, Н.В. МИТИН²

Представлены результаты исследований изменения за 10–25-летний период естественного возобновления леса в сосновых насаждениях различных групп возраста с загрязнением почвы ^{137}Cs 15–36 Ки/км² в дальней зоне аварии на ЧАЭС на 27 пробных площадях тринадцати объектов, заложенных в 1991–2006 гг. За прошедший после закладки объектов период во всех сосновых насаждениях наличие подроста основных лесообразующих пород существенно увеличилось.

Ключевые слова: сосновые насаждения, радиоактивное загрязнение, ^{137}Cs , естественное возобновление леса, ярусы растительности.

The article shows the results of the study of the change for the 10–25-year period of natural forest regeneration in pine plantations of various groups of age with pollution of the soil with ^{137}Cs 15–36 Cu/sq.km in the distant zone of the CNPP accident into 27 trial areas of thirteen objects which were laid in 1991–2006. For the period which passed after laying of objects in all pine plantations the presence of subgrowth of the main forest forming breeds significantly increased.

Keywords: pine plantations, radioactive pollution, ^{137}Cs , natural forest regeneration, vegetation tiers.

Введение. Радиоактивное загрязнение в результате аварии на ЧАЭС существенно повлияло на ведение лесного хозяйства на этой территории, что обусловило дифференциацию пользования лесом в зависимости от уровня радиоактивного загрязнения почв. Длительное время действия запрета на проведение рубок в лесах в зоне последующего отселения (с плотностью загрязнения почвы ^{137}Cs 15–40 Ки/км²) привело к значительному накоплению валежа и сухостоя в хвойных лесах, к захламленности насаждений, потере ими устойчивости, ухудшению лесообразовательных процессов. При этом, происходящие в высокозагрязненных сосновых лесах дальней зоны аварии на ЧАЭС сукцессионные процессы, в значительной мере обусловлены отсутствием в них хозяйственной деятельности, а не радиоактивным загрязнением территории.

Длительное нахождение сосновых древостоев на высокозагрязненных радионуклидами территориях без проведения в них лесоводственных уходов сказывается не только на росте и развитии древесного яруса, но и на других ярусах растительности. В связи с этим лесообразовательные процессы в сосновых лесах дальней зоны аварии на ЧАЭС протекают не всегда в нужном для лесного хозяйства направлении.

Основная часть. Цель работы: изучить ход лесовозобновительных процессов в высокозагрязненных радионуклидами сосновых насаждениях различных классов возраста.

Объектами исследований являлись сосновые насаждения в зоне последующего отселения после аварии на ЧАЭС в ГСЛХУ «Ветковский спецлесхоз» Гомельского ГПЛХО. Исследования проводились на 27 пробных площадях тринадцати объектов, заложенных в 1991–2006 гг. в сосновых насаждениях II–IV классов возраста при плотности загрязнения почвы ^{137}Cs в них 15–36 Ки/км² (таблица 1).

В камеральных условиях для каждой пробной площади по общепринятым методикам [1]–[3] определялись таксационные характеристики насаждений (диаметр, высота, сумма площадей поперечного сечения, запас, полнота, бонитет), которые сравнивались с таксационными характеристиками этих насаждений на момент закладки объектов в 1990–2005 гг. [4], [5].

Для изучения лесовозобновительных процессов в сосновых насаждениях в зонах последующего отселения проводился на объектах учет подроста на учетных площадках площадью 4 м², расположенных на пробе конвертом [6].

В 2016 г. на объектах исследований изучено естественное возобновление древесных пород в сосновых насаждениях в зонах радиационного загрязнения свыше 15 Ки/км² и проведено сравнение текущих результатов с данными, полученными на ПП объектов 10–25 лет назад.

Таблица 1 – Таксационная характеристика сосновых насаждений на объектах

Наименование объекта	Год закладки	Состав насаждения	Возраст насаждения, лет	МД, мкЗв/час		Плотность загрязнения почвы ^{137}Cs , Ки/км ²
				на высоте 1 м	на почве	
Восток	1993	10С+Е	92	0,89	1,05	19,9
Петуховка	1991	10С	80	0,84	1,12	27,2
Петуховка-2	1194	10С+Б	91	0,96	1,26	28,0
Великий Бор-2	1996	10С	50	0,83	0,91	14,7
Петуховка-4	1996	10С	65	1,24	1,39	27,3
Подкамень	1994	10С	72	0,92	1,07	20,3
Громыки-4	2008	10С	33	0,75	0,88	16,0
Громыки-2	2008	10С	88	0,94	1,14	23,3
Громыки-3	2008	10С+Б	33	1,15	1,44	36,2
Пенное-3	2006	10С+Б	70	1,02	1,12	16,4
Громыки	2002	9С1Б	54	0,68	0,75	15,1
Петуховка-6	2006	10С+Б	60	1,15	1,23	23,0
Кузмич-4	2006	9С1Б	45	0,70	0,88	16,8

Из таблицы 1 видно, что исследуемые сосняки произрастают в условиях мшистого типа леса и имеют возраст от 33 до 92 лет, их полноты 0,5–1,0; запас стволовой древесины – от 152 до 620 м³/га. Долевое участие сосны в составе древостоев составляет 90–100 %.

Исследования, выполнявшиеся в сосновых насаждениях, в которых обеспечивался естественный режим ведения хозяйственной деятельности показали, что более 70 % их имеют возобновление дуба с участием в составе подроста от 1–2 до 10 единиц. Причина – в более благоприятных световых условиях и в процессах естественной смены пород [7].

В изучаемых сосновых насаждениях, произрастающих на объектах с загрязнением ^{137}Cs свыше 15 Ки/км², в состав естественного возобновления леса входят: дуб, ель, клен, береза, осина, редко встречаются сосна и ясень. Изменение густоты подроста в сосновых насаждениях II класса возраста представлено на рисунке 1.

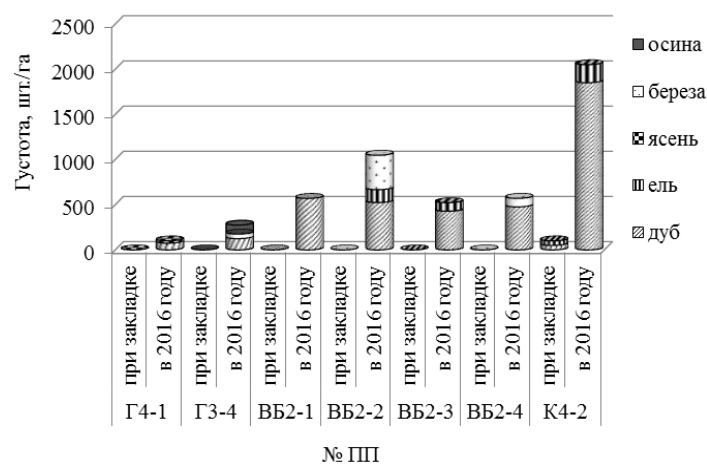


Рисунок 1 – Изменение густоты подроста в сосновых насаждениях II класса возраста в зонах загрязнения свыше 15 Ки/км²

Рассмотрим ход естественного возобновления леса в сосновых насаждениях II класса возраста дальней зоны аварии на ЧАЭС. Установлено, что в 25–35-летних сосновых насаждениях в зонах загрязнения свыше 15 Ки/км² подрост древесных пород на начальный момент исследований отсутствовал (рисунок 1), за исключением пробной площади К4-2, где в состав подроста входили ель и дуб. В 2016 г. на всех исследуемых ПП в возобновлении леса отмечается преобладание дуба черешчатого средним количеством (0,6 тыс. шт./га), встречаются береза – от 16,6 % на ПП Г3-4 до 36,4 % на ПП ВБ-2. Возобновление осины наблюдается лишь на ПП Г3-4 (36,4 % от общего количества подроста). Долевое участие дуба черешчатого

го в составе жизнеспособного подроста составляет в среднем 75,1 %, ели – 5,9 %. В возобновлении дуба превалируют деревья, имеющие высоту, в среднем 1,0 м. Незначительное количество ели европейской ($H_{\text{ср}} = 0,9$ м) в естественном возобновлении отмечается лишь на 42,9% пробных площадей, густота ели колеблется от 75 шт./га (Г4-1), до 143 шт./га (ВБ-2). Следует отметить, что на ПП К4-2 имеется наличие в подросте сухостоя сосны в количестве (600 шт./га) и березы – 50 шт./га.

На момент закладки объектов в сосняках III класса возраста, подрост древесных пород отсутствовал на 16,6% пробных площадей. На большинстве пробных площадей (75%) в состав подроста входили дуб черешчатый (долевое участие – 66,7%), редко встречались ель, береза и осина (рисунок 2).

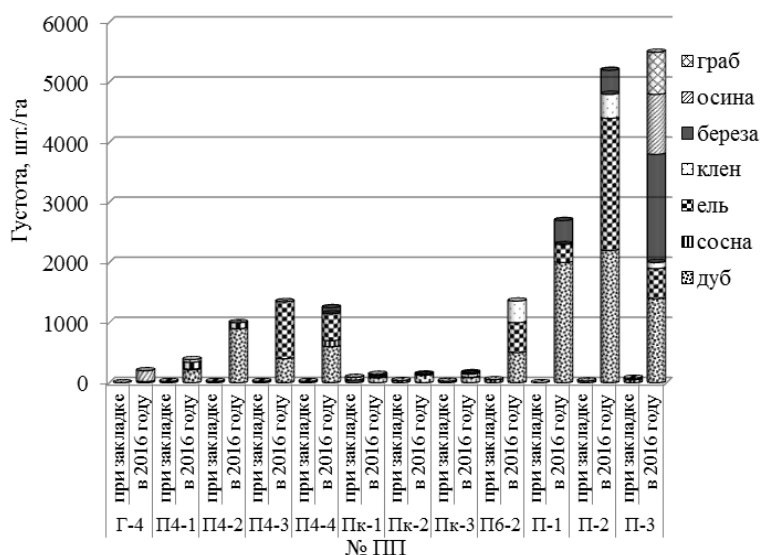


Рисунок 2 – Изменение густоты подроста в сосновых насаждениях III класса возраста в зонах загрязнения свыше 15 Ки/км²

В 2016 г. на всех ПП отмечалось преобладание (83,3 %) крупного подроста дуба, средняя высота которого составляет 3,3 м, отмечается также увеличение в составе подроста долевого участия дуба. Наибольшая высота подроста дуба отмечена на ПП объектов П-2 и П-3, где его средняя высота составляла 5,3 м и 5,7 м соответственно. Если рассматривать полученные в 2016 году данные о подросте в сравнении с данными на момент закладки ПП, то следует отметить, что за последние 10–25 лет долевое участие дуба черешчатого в сосняках III класса возраста (на момент закладки объектов) снизилось, за исключением ПП П-1, где его доля в составе подроста увеличилась на 74,1 %. На большей части ПП снижение долевого участия дуба обусловлено наличием возобновления другими древесными породами. В то же время, обеспеченность естественного возобновления леса в сосняках низкая, средняя густота подроста составляет 0,8 тыс. шт./га. Отмечено также наличие в составе подроста ели европейской – от 10 шт./га (П4-1, П4-2, Пк-3) до 2200 шт./га (П-2), клена – от 7 шт./га (Г-4) до 400 шт./га (П-2), сосны – от 10 шт./га (Пк-1) до 100 шт./га. (П4-4), березы – от 20 шт./га (Пк-2) до 1800 (П-3), осины – от 20 шт./га (Пк-1) до 1000 шт./га (П-3).

В сосняках, имевших на момент закладки объектов IV класс возраста, подрост древесных пород отсутствовал лишь на пробной площади Г2-1. На большинстве пробных площадей в составе подроста преобладали ель (54,5 % от общего количества подроста %) и дуб (43,5 %). Редко встречались береза (1,3 %) и осина (0,6 %) (рисунок 3).

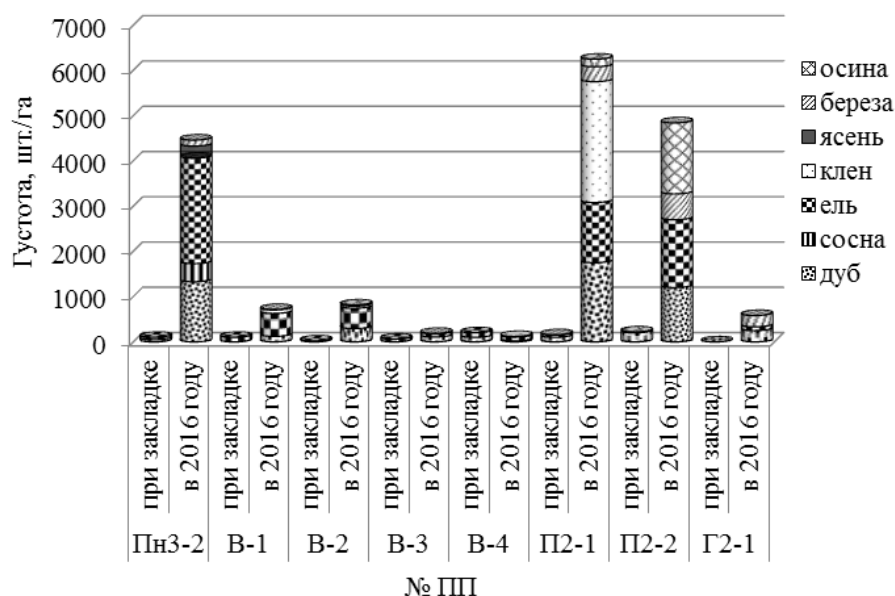


Рисунок 3 – Изменение густоты подроста в сосновых насаждениях IV класса возраста в зонах загрязнения свыше 15 Ки/км²

В настоящее время на ПП в этих сосняках отмечается преобладание крупного подроста дуба, средняя высота которого составляет 3,5 м и ели – 1,9 м. Мелкий и средний по высоте подрост дуба имеется на ПП В-4 (0,4 м) и П2-2 (1,0 м). Максимальный по высоте подрост дуба отмечен на ПП В-3, П2-1 и Г2-1, где его средняя высота составляет 5,4 м, 5,5 и 7,0 м соответственно. Если рассматривать полученные данные о подросте в сравнении с данными на момент закладки ПП, то следует отметить, что за последние 10–23 года долевое участие дуба черешчатого снизилось, за исключением ПП В-1, В-3 и Г2-1, где его доля в составе подроста увеличилась на 17,0 %, 57,2 % и 42,9 % соответственно. В то же время количество подроста дуба увеличилось на 107 шт./га на В-3; на 1280 шт./га – Пн3-2, ели – на 83 шт./га – на Г2-1; на 2280 – на Пн3-2. Обеспеченность естественного возобновления леса в сосняках IV класса возраста (на момент закладки объектов) низкая, средняя густота подроста составляет 1,2 тыс. шт./га. Отмечено также наличие в составе подроста клена – от 6 шт./га (В-3) до 1750 шт./га (П2-1), сосны – от 15 шт./га (В-4) до 400 шт./га (Пн3-2), ясеня (266 шт./га – Пн3-2), березы – от 7 шт./га (В-3) до 570 (П2-2), осины – от 10 шт./га (В-2) до 1570 шт./га (П2-2). Следует отметить, что на части ПП (В-1, В-2, В-3, В-4, П2-1) отмечается наличие 0,9–4,4 % сухостоя подроста от общего его количества. Сухостой подроста дуба на 2016 г. составлял 10–167 шт./га, ели – 11–570 шт./га и березы – 18 шт./га.

Изучение динамики подроста древесных пород в сосновых насаждениях в зонах загрязнения свыше 15 Ки/км² показало, что на момент закладки пробных площадей в зависимости от возраста насаждений видовой состав подроста был представлен дубом, елью, кленом, березой, осинкой, редко встречались сосна и ясень. Установлено, что естественное возобновление здесь чаще всего было представлено жизнеспособным подростом дуба (43,7–75,1 %) и елью (6,0–43,7 %). Наибольшее количество жизнеспособного подроста дуба и ели выявлено в сосняках, возраст которых на начало исследований составлял 40–56 лет, наименьшее – 0,6 тыс. шт./га – в сосняках 25–35 и 60–80 лет соответственно.

Заключение. В результате проведенных исследований установлено, что за прошедший между закладкой объектов и 2016 г. период практически на всех ПП во всех высокозагрязненных ¹³⁷Cs сосняках, независимо от их возраста, наличие подроста основных лесобразующих пород существенно увеличилось. Преобладающими породами, формирующими ярус подроста, являются дуб (ель, береза). Наибольшее количество жизнеспособного подроста дуба и ели выявлено в сосняках, имеющих на момент закладки объектов III класс возраста, наименьшее – в сосняках II и IV классов возраста соответственно.

Литература

1. Нормативные материалы для таксации леса Белорусской ССР / Под общ. рук. В.Ф. Багинского. – М. : УБНТИ-лемхоз, 1984. – 308 с.
2. Смирнова, О.В. Оценка и прогноз сукцессионных процессов в лесных ценозах на основе демографических методов / О.В. Смирнова, М.В. Бобровский, Л.Г. Ханина // Бюл. МОИП. Отд. биол. – 2001. – Т. 106, № 5. – С. 25–33.
3. Сукцессионные процессы в заповедниках России и проблемы сохранения биологического разнообразия / Под ред. О.В. Смирновой, Е.С. Шапошникова. – СПб. : Российское ботаническое общество, 1999. – 549 с
4. Смирнова, О.В. Методология исследования экосистем с популяционных позиций / О.В. Смирнова // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. – 2011. – № 25. – С. 15–21.
5. Ухваткина, О.Н. Оценка сукцессионного состояния древостоев хвойно-широколиственных лесов юга Российского Дальнего востока на основе популяционно-демографического подхода / О.Н. Ухваткина, А.М. Омелько // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11. – С. 948–953.
6. Программа и методика биогеоценотических исследований / Под ред. Н.В. Дылиса. – М : «Наука», 1974. – 403 с.
7. Скригаловская, В.А. Естественное возобновление в сосновых насаждениях Беларуси / В.А. Скригаловская, Н.В. Гордей, А.К. Козлов // Проблемы лесоведения и лесоводства : сб. науч. тр. / Ин-т леса НАН Беларуси ; редкол. : В.Ф. Багинский [и др.]. – Гомель, 2004. – Вып. 60. – С. 44–52.

¹ГНУ «Институт леса НАН Беларуси»

²Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 26.02.2017

Ландшафтные особенности и территориальная дифференциация антропогенного воздействия на природную среду Могилёвской области

А.С. СОКОЛОВ

Рассматривается связь между характеристиками ландшафтов и уровнем их антропогенной трансформации, выражаемой долей лесных и селитебных ландшафтов и плотностью сельского населения. Установлено, что наиболее трансформированные ландшафты относятся к родам лёссовых, холмисто-моренно-эрозионных и вторичноморенных ландшафтов.

Ключевые слова: ландшафтная структура, плотность сельского населения, селитебные ландшафты, лесистость, экологическое состояние ландшафтов.

The connection between landscape characteristics and level of anthropogenic transformation is under study in this paper. Proportion of forest and settlement landscapes, rural population density was chosen in the capacity of transformation characteristics. It is established that the most transformed genera of landscapes are loess, hilly-moraine-erosional and secondary-moraine landscapes.

Keywords: landscape structure, rural population density, residential landscapes, forest cover percent, ecological state of landscapes.

Вопрос о связи природных характеристик ландшафта и величины интенсивности его хозяйственного освоения получил освещение в работах большого количества исследователей. Выявление таких связей позволяет прогнозировать состояние ландшафта, рационально оптимизировать систему особо охраняемых природных территорий, решать другие научные и прикладные задачи.

Целью исследования явилось выявление пространственной дифференциации антропогенной нагрузки на природную среду Могилёвской области в зависимости от природных характеристик ландшафтов, отражённых в системе их классификации. В качестве показателей нагрузки были выбраны доля естественных (лесных) экосистем в ландшафте (и основанное на этом показателе значение геоэкологического коэффициента), плотность сельского населения и доля селитебных ландшафтов.

Объектом исследования являлись ландшафты Могилёвской области. Область расположена в западной части Восточно-Европейской равнины преимущественно на высотах 150–200 м. Высшая точка имеет абсолютную высоту 236 м, низшая – 126 м. Большое влияние на рельеф Могилёвской области оказала деятельность антропогенных материковых оледенений. Рельеф, сформированный материковыми ледниками антропогена и их талыми водами, относительно хорошо сохранился, хотя преобразован современными экзогенными процессами. В силу этого рельеф Могилёвской области можно определить как вторичную ледниковую равнину. Климат умеренно-континентальный, переходный от морского к континентальному со значительным нарастанием признаков континентальности особенно в восточных районах, с умеренным увлажнением (коэффициент увлажнения в среднем по области близок к 1,0), средняя годовая температура 5,5 °С [1].

Территория области расположена в пределах двух ландшафтных провинций – Восточно-Белорусской вторичноморенных и лёссовых ландшафтов и Предполесской вторичных водно-ледниковых и моренно-зандровых ландшафтов [2]. На территории области встречаются все три группы родов ландшафтов, выделяемые в Беларуси – возвышенные, средневысотные и низменные, 9 из 16 родов, 18 из 41 подрода, 26 из 105 видов ландшафтов.

Источником данных о населении в пределах изучаемой территории являлся справочник «Гарады і вёскі Беларусі» [3], о ландшафтной дифференциации территории – ландшафтная карта Беларуси [2] с последующими уточнениями [4], о местоположении и площади населённых пунктов (селитебных ландшафтов), а также о лесопокрытых территориях Беларуси – слою «Полигоны населённых пунктов» (settlement-polygon) и «Растительность» (vegetation-

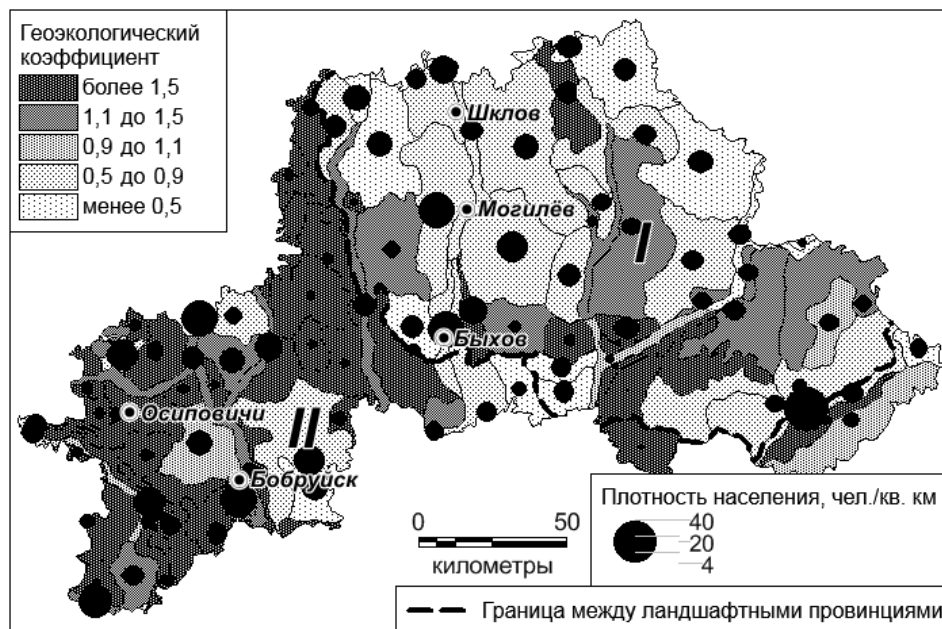
polygon) в формате shape-файла из набора слоёв проекта OpenStreetMap для Беларуси [5]. Были использованы данные о площади, населении и ландшафтной приуроченности сельских населённых пунктов провинции.

Для определения экологического состояния ландшафтов для каждого из них рассчитывался геоэкологический коэффициент И.С. Аитова [6] по формуле

$$K_r = \frac{C_p}{C_d}, \quad (1)$$

где C_p – % площади ненарушенных (коренных) геосистем на той или иной территории, в ландшафтном районе, ландшафте; C_d – % предельно допустимой площади ненарушенных (коренных) геосистем. На основе имеющихся экспертных оценок [7], C_d в зоне широколиственных лесов определена в 30 %. По значениям K_r оценивается состояние ландшафта в следующих градациях: удовлетворительное – более 1,5; напряжённое – 1,1–1,5; критическое – 0,9–1,1; кризисное – 0,5–0,9; катастрофическое – < 0,50.

При расчёте геоэкологического коэффициента ландшафтов Могилёвской области было определено значение лесистости каждого ландшафта. Для этого был использован модуль «Пропорциональное перекрытие» ГИС *MapInfo Professional 12*, в пределах каждого ландшафтного полигона на одном векторном слое определялась площадь лесов в его пределах со второго векторного слоя. Аналогичная операция проводилась для расчёта доли селитебных ландшафтов и плотности сельского населения для ландшафтов области. Результатом расчётов стала карта экологического состояния ландшафтов Могилёвской области (рисунок 1). Для территории Могилёвской области в целом показатель лесистости равен 34,5 % ($K_r = 1,15$, что соответствует напряжённому экологическому состоянию). При этом ландшафты, находящиеся в удовлетворительном состоянии, занимают 30,3 % её территории, в напряжённом состоянии – 19,9 %, в критическом – 6,2 %, в кризисном – 33,2 %, в катастрофическом – 10,3 %. По плотности сельского населения ландшафты также существенно различаются: при среднеобластной плотности 8,6 чел./км², ландшафты, плотность населения которых менее 1 чел./км² занимают 3,9 % площади области, от 1 до 4 – 17,3 %, от 4 до 8 – 28,6 %, от 8 до 12 – 16,0 %, от 12 до 16 – 21,9 %, свыше 16 – 12,3 %.



I – Восточно-Белорусская ландшафтная провинция; II – Предполесская ландшафтная провинция

Рисунок 1 – Значения геоэкологического коэффициента и плотности сельского населения по ландшафтам

Существенно различаются показатели экологического состояния для территорий, относящихся к различным ландшафтным провинциям. Для Восточно-Белорусской провинции лесистость равна 25,9 % ($K_r = 0,86$, кризисное состояние), доля селитебных ландшафтов – 10,1 % от общей площади, плотность сельского населения – 11,2 чел./км². Для Предполесской провинции лесистость почти в два раза выше – 47,9 % ($K_r = 1,6$, удовлетворительное состояние), доля селитебных ландшафтов 6,6 %, плотность 8,5 чел./км².

Таблица 1 – Показатели антропогенной нагрузки на ландшафты Могилёвской области

ГРУППА РОДОВ, род, подрод	Доля в области, %	Лесистость, %	Плотность сельского населения, чел./км ²	Доля селитебных ландшафтов, %
ВОЗВЫШЕННЫЕ	9,6	9,2	11,4	11,7
Холмисто-моренно-эрозионные	3,3	20,4	10,2	9,0
с покровом водно-ледниковых суглинков	2,8	22,1	9,9	9,1
с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей	0,5	11,9	12,1	8,6
Лёссовые (с покровом лёссовидных суглинков)	6,3	3,3	12,1	13,1
СРЕДНЕВЫСОТНЫЕ	76,0	36,0	8,4	10,1
Вторичные водно-ледниковые	22,2	51,5	5,6	6,1
с поверхностным залеганием водно-ледниковых песков	6,2	64,3	4,0	4,9
с покровом лёссовидных суглинков	3,0	22,2	11,9	12,1
с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей	12,9	52,2	4,9	5,2
Вторичноморенные	39,7	24,3	10,5	13,2
с покровом водно-ледниковых супесей	18,1	31,5	9,2	11,2
с покровом водно-ледниковых суглинков	9,8	16,8	11,3	13,2
с покровом лёссовидных суглинков	11,8	19,5	11,9	16,3
Моренно-зандровые	14,1	44,3	6,8	7,8
с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей	7,1	59,5	5,5	7,1
с покровом водно-ледниковых суглинков	6,9	28,6	8,2	8,5
НИЗМЕННЫЕ	14,6	43,7	8,0	8,9
Ландшафты речных долин (с поверхностным залеганием аллювиальных песков)	4,5	30,9	10,8	10,1
Аллювиальные террасированные	4,4	51,4	6,9	12,4
с прерывистым покровом водно-ледниковых супесей	3,6	48,0	7,3	13,0
с поверхностным залеганием аллювиальных песков	0,8	66,6	5,3	9,5
Пойменные (с поверхностным залеганием аллювиальных песков)	3,1	35,8	9,9	7,0
Болотные	2,5	62,5	2,7	3,1
с поверхностным залеганием торфа	2,2	62,8	2,6	3,1
с поверхностным залеганием торфа и песком	0,2	59,0	3,8	3,0
Вся территория области	100,0	34,5	8,6	10,1

На рисунке 1 показано территориальное распространение ландшафтов, относящихся к различным категориям экологического состояния (по величине геоэкологического коэффициента), для которых также показано значение плотности сельского населения. Видно, что в основном ландшафты в удовлетворительном и напряжённом состоянии сконцентрированы в западной части области, а также в пределах небольших участков на юго-востоке региона.

Проведённый анализ показателей антропогенной трансформации в зависимости от принадлежности ландшафтов к различным классификационным единицам (группам родов, родам, под родам и видам) позволил определить влияние природных характеристик ландшафта (положенных в основу их классификации) на степень его антропогенной освоенности и, как следствие, нарушенности.

Зависимость показателей антропогенной нагрузки от групп родов выражается в значительном увеличении лесистости по мере уменьшения гипсометрического положения. Так, если в пределах возвышенных ландшафтов лесистость составляет всего 9,2 %, то в средневысотных она увеличивается в 3,9 раза, а в низменных – в 4,8 раза. Также несколько снижается плотность населения и доля селитебных ландшафтов.

Из родов максимальная лесистость (более 50 %) характерна для болотных, вторичных водно-ледниковых и аллювиально-террасированных ландшафтов, для них же характерна минимальная плотность населения. Минимальная лесистость отмечается во вторичноморенных (в 1,4 раза ниже среднеобластного уровня), холмисто-моренно-эрозионных (в 1,7 раза) и лёссовых (в 10,4 раза ниже). Показатели же доли селитебных ландшафтов и плотности сельского населения, хоть и превышают в целом значение для других ландшафтов, однако не столь существенно.

Среди подродов даже одного и того же рода могут существовать значительные различия по величине рассматриваемых показателей. Наиболее трансформированными являются ландшафты с покровом лёссовидных суглинков и с покровом водно-ледниковых суглинков. Менее нарушенными являются ландшафты с покровом водно-ледниковых супесей, наименее трансформированные – ландшафты с покровом аллювиальных и водно-ледниковых песков, а также торфа.

Например, среди всех подродов вторичных водно-ледниковых ландшафтов подрод с покровом лёссовидных суглинков имеет лесистость 22,2 % (что в 2,3 раза ниже, чем в среднем по роду), а лесистость ландшафтов, относящихся к подкладам с покровом водно-ледниковых супесей и поверхностным залеганием водно-ледниковых песков превышает лесистость ландшафтов с покровом лёссовидных суглинков в 2,4 и в 2,9 раза). Аналогичная закономерность наблюдается и в других родах ландшафтов.

Результаты исследования позволяют сформулировать следующие выводы:

- изменения лесистости в зависимости от рода и вида ландшафтов проявляется значительно ярче, чем изменение плотности населения и селитебных ландшафтов;
- западная часть области, занятая Предполесской ландшафтной провинцией, характеризуется значительно более благоприятным экологическим состоянием, чем её центральная и восточная часть, занятая Восточно-Белорусской ландшафтной провинцией;
- из родов максимальная лесистость и минимальная плотность населения и селитебных ландшафтов характерна для болотных, вторичных водно-ледниковых и аллювиально-террасированных ландшафтов, противоположная ситуация наблюдается для вторичноморенных, холмисто-моренно-эрозионных и лёссовых ландшафтов
- наиболее трансформированными являются ландшафты с покровом лёссовидных суглинков и с покровом водно-ледниковых суглинков, наименее – ландшафты с покровом аллювиальных и водно-ледниковых песков, а также торфа.

Литература

1. Шаруха, И.Н. География Могилевской области / И.Н. Шаруха [и др.]. – Могилев : МГУ им. А.А.Кулешова, 2007. – 328 с.
2. Ландшафтная карта Белорусской ССР / под ред. А.Г. Исаченко. – М. : ГУГК, 1984.
3. Гарады і вёскі Беларусі. Энцыклапедыя: ў 15 т. – Мн. : БелЭн, 2008. – Т. 5, кн. 1. Магілёўская вобласць. – 727 с.; Т. 6, кн. 2. – Мн. : БелЭн, 2009. – 591 с.; Т. 7, кн. 3. – Мн. : БелЭн, 2009. – 542 с.
4. Марцинкевич, Г.И. Ландшафтоведение: учеб. пособие / Г.И. Марцинкевич, И.И. Счастливая. – Мн. : ИВЦ Минфина, 2014. – 252 с.
5. Беларусь (BY) [Электронный ресурс] // Данные OSM в формате shape-файлов. Слои. – Режим доступа : <http://beryllium.gis-lab.info/project/osmshp/region/BY>. – Дата доступа : 10.04.2016.
6. Аитов, И.С. Геоэкологический анализ для регионального планирования и системной экспертизы территории (на примере Нижнеартовского региона) : автореф. дис. ... канд. геогр. наук : 25.00.36 ; Нижнеартовский гос. гуман. ун-т; / И.С. Аитов. – Барнаул, 2006. – 18 с.
7. Реймерс, Н.Ф. Охрана природы и окружающей человека среды: Словарь-справочник / Н.Ф. Реймерс. – М. : Просвещение, 1992. – 320 с.

УДК: 663.2.032:546.36+42

Латеральные геохимические барьеры трансупераквальных ландшафтов (на примере поймы р. Сож)

Т.А. ТИМОФЕЕВА

Аккумуляция химических веществ в речных долинах по отношению к водораздельным территориям, как правило, повышена в несколько раз. На пойме активно идёт вторичное перераспределение элементов, связанное с переносом вещества паводковыми водами и процессами на долинных геохимических и биогеохимических барьерах. Формирование геохимических барьеров связано с изменениями физико-химических условий, в которых многие элементы теряют свою подвижность за счет образования труднорастворимых соединений. В результате многолетних исследований в пойме р. Сож выделены следующие латеральные геохимические барьеры: механические, биогеохимические или биогенные, сорбционные, нейтральные или кальциевые, а также, комплексные барьеры (механические + сорбционные).

Ключевые слова: трансупераквальный ландшафт, поймы, латеральные геохимические барьеры, биогеохимические барьеры, радионуклиды.

The accumulation of chemicals in river valleys in relation to water separate territories is, as a rule, raised several times. There is an active process of secondary redistribution of elements on a flood plain. It is connected with substance transfer by flood waters and processes on valley geochemical and biogeochemical barriers. Formation of geochemical barriers is caused by changes physic-chemical conditions of soils. On barriers many elements lose the mobility due to formation of almost insoluble connections. As a result of long-term researches in a flood plain of the Sozh River the following lateral geochemical barriers are allocated: mechanical, biogeochemical or biogenous, sorption, neutral or calcic, and also complex barriers (mechanical + sorption).

Keywords: transsuperaqual landscape, floodplain, lateral geochemical barriers, biogeochemical barriers, radionuclides.

Введение. Речные долины являются своеобразным геохимическим барьером на пути миграции химических веществ, где аккумулируется повышенное содержание макро- и микроэлементов. Запас химических элементов в поймах (трансупераквальных ландшафтах) в несколько раз выше, по сравнению с водораздельными территориями. Миграционная активность химических элементов здесь во многом обусловлена геохимическими и биогеохимическими условиями. Поймы относятся к динамичным типам ландшафтов из-за ежегодного затопления и перераспределения вещества дождевыми и паводковыми водами, поэтому необходима оценка миграции химических веществ для каждой части поймы (фациального элемента). Геоморфологические процессы оказывают наиболее активное влияние на дифференциацию речных долин. Они формируют макро-, мезо- и микроформы рельефа, элементарные участки, различающиеся по взаимному расположению, относительной высоте, экспозиции, крутизне и форме склона. Каждому фациальному элементу отвечает определенная совокупность условий местообитания, и все они в той или иной мере связаны определенными потоками энергии и веществ. Поэтому биогеохимические исследования речных долин необходимо проводить с учётом рельефных особенностей экосистемы поймы, начиная от генетического типа рельефа и до его элементов (террасы, притеррасные поймы, гряды и ложбины центральной поймы и т. д.).

Учение о геохимических барьерах разработано А.И. Перельманом. *Геохимические барьеры* – это участки резкой смены геохимической обстановки, которая приводит к осаждению мигрирующих химических элементов. Геохимические барьеры в ландшафте рассматривают как педогеохимические поля, в пределах которых идет аккумуляция химических элементов, обусловленная свойствами почв и направлением почвообразующих процессов [1].

Формирование барьеров также связано с изменениями физико-химических условий, в которых многие элементы теряют свою подвижность за счет образования труднорастворимых

соединений. Формирующиеся минералы влияют на ландшафтно-геохимическую среду и протекающие в ней процессы, в значительной мере определяя ее эволюцию. Развивающиеся во времени почвенно-геохимические барьеры занимают в ландшафте определенное пространство в соответствии с рельефом, пестротой почвообразующих пород и другими факторами почвообразования. Методы ландшафтно-геохимического профилирования, позволяют выделять барьеры в тенденции развития аккумулятивно-направленных процессов в ландшафтах, отражают эволюционные изменения их вещественного состояния [1].

В трансупераквальных (пойменных) ландшафтах Республики Беларусь встречается широкий спектр латеральных и радиальных геохимических барьеров.

В качестве объекта исследований нами выбран участок поймы р. Сож, расположенный в окрестностях д. Новоселки и д. Радуга Ветковского района Гомельской области. Долина р. Сож характеризуется высокой степенью радиоактивного загрязнения, начиная от г. Кричева на севере и до г. Гомеля на юге. По рельефным особенностям пойменная экосистема приравнивается к низменному типу ландшафтов и включает, соответственно, аллювиально-террасированный и пойменный ПТК. При продвижении от террасы к руслу реки выделен пойменный (трансупераквальный) ландшафт разной степени дренированности с долгопойменными заливными лугами и сырыми лугами низкого уровня на дерново-глеевых, дерново-глееватых и торфяных почвах. Пойма хорошо сформирована, хотя ландшафт является молодым, поскольку его формирование началось во второй половине голоцена и продолжается в настоящее время. В геологическом сложении участвуют аллювиальные пески, реже супеси и суглинки, иногда перекрытые торфом. Абсолютные отметки поверхности 122–127 м, высота над уровнем воды 1–5 м. В пойменном ландшафте колебания относительных высот определяют выделение структурных частей с дифференциацией биогеохимических условий, и, соответственно, почвенно-растительного покрова.

Материал и методика исследований. Методологическую основу исследования составляет теория биогеохимической структуры природной экосистемы и геохимических барьеров. С помощью сопряжённого анализа выделены геохимические и биогеохимические барьеры и дана оценка миграции микро и макроэлементов в компонентах экосистемы (почве и наземном покрове). Использованы методы: спектрометрический, радиохимический, инфракрасной спектроскопии и агрохимический. Фактический материал обработан с использованием математической статистики. Использован метод ландшафтного профилирования, для выделения структурно-функциональных частей ландшафтного профиля при заложении точек комплексного исследования проведена съёмка географических координат и высот над уровнем моря при помощи персонального спутникового навигатора Garmin GPS 12 XL [2], [3]. Структурно-функциональные части охарактеризованы 24 точками комплексного описания. Использовались пробы почв (286), растений (376), собранные в 2000–2016 гг.

Результаты исследований и их обсуждение. В пределах поймы выделены:

- *приусловая пойма (отмель, вал).* Почвенный покров приусловой отмели представлен аллювиальными дерново-глееватыми песчаными почвами на участках, покрытых растительностью и аллювиальными, слаборазвитыми песчаными почвами на участках без растительности (пляж); почвенный покров приуслового вала представлен аллювиальными дерново-глеевыми слаборазвитыми песчаными почвами;

- *старица (на границе приусловой и центральной поймы)* представлена аллювиальной дерново-глеевой супесчаной почвой;

- *центральная пойма (повышенная и пониженная части)* – на повышениях развиты аллювиальные дерново-глееватые супесчаные почвы; пониженные участки представлены аллювиальными торфяными мощными и аллювиальными дерново-глеевыми супесчаными почвами;

- *притеррасная пойма* представлена аллювиальными дерново-глеевыми супесчаными, аллювиальными торфяными мощными и аллювиальными торфяными маломощными почвами;

- *первая надпойменная терраса:* дерново-подзолистые временно избыточно увлажняемые супесчаные почвы (естественные угодья) и дерново-подзолистые супесчаные почвы (пашня) [2].

Латеральные барьеры формируются в сопряженных ландшафтах на границе контрастных геохимических обстановок между элементарными ландшафтами при миграции химических элементов и их соединений в близком к горизонтальному (латеральному) направлению, т. е. в системах «элювиальный ландшафт – супераквальный ландшафт», в каскадных системах водосборных бассейнов [1].

Латеральные барьеры поймы р.Сож.

Кальциевый (карбонатный или нейтральный) геохимический барьер.

На объекте исследования участки с кальциевыми барьерами выделены в пределах притеррасной и центральной поймы (рисунок 1).

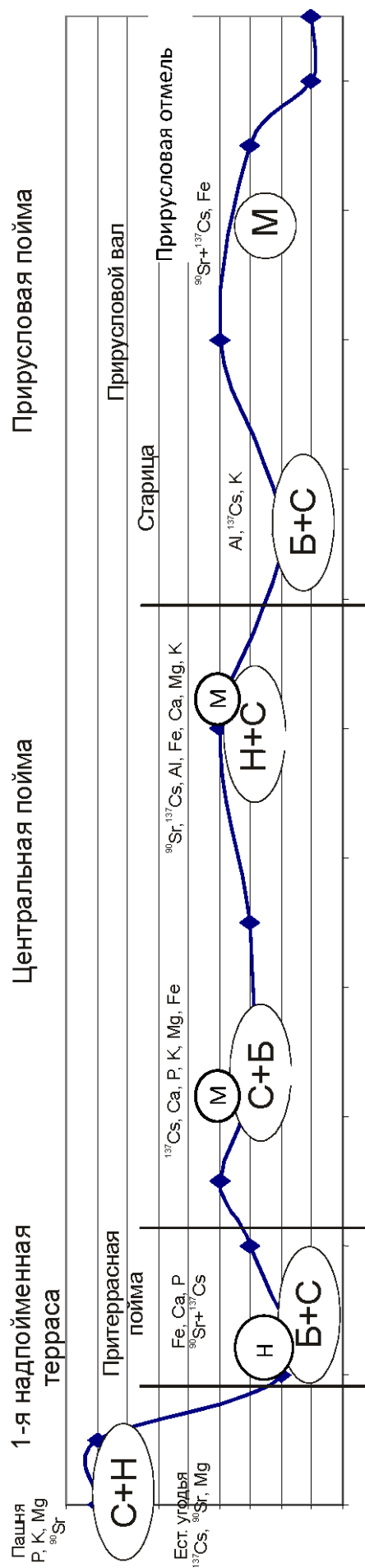
Для восстановительной глеевой обстановки в сочетании с различной реакцией среды характерны типоморфные элементы окислительной обстановки, и как индикатор глеевого процесса присоединяется ион двухвалентного железа. Поэтому на пойме, в местах развития глеевого процесса и кислой реакции почвы характерен кислый глеевый класс (H, Fe). При нейтральной реакции раствора образуется карбонатный глеевый класс (Ca, Fe). Участки с кислым кальциевым и карбонатным глеевыми классами водной миграции создают условия для образования так называемых нейтральных, или кальциевых барьеров в пойме, что способствует накоплению радионуклидов в почве на данных участках совместно с Ca, и Fe.

На кальциевом барьере осаждаются прежде всего химические элементы второй группы таблицы Менделеева, Mg, Ca, ^{90}Sr . На кальциевом барьере с увеличением концентрации Ca в почве, снижается поступление радионуклида ^{90}Sr в растения, аналогично действует кальциевый (карбонатный) барьер на другие элементы второй группы. Радиоактивный стронций по своим свойствам близок к кальцию, а радиоактивный цезий – к калию, поэтому в почве наблюдается некоторое сходство в поведении данных элементов. Помимо этого, в нейтральных и слабощелочных условиях ряд тяжелых металлов теряет свою подвижность и доступность для растений.

Содержание обменного кальция в почвах поймы р. Сож варьирует в среднем от 300 до 3100 мг/кг. Кальций играет большую роль в закреплении гумусовых веществ, т.к. почвы, насыщенные им, имеют нейтральную реакцию, которая благоприятна для развития микроорганизмов. Построен следующий ряд по убыванию кальция: притеррасная пойма > центральная пойма (пониженная > повышенная) > первая надпойменная терраса (естественные угодья > пашня) > старица > вал > отмель. В пойме р. Сож кальций занимает первое место среди поглощённых катионов.

Распределение магния в пойме несколько отличается от предыдущих элементов. Значения варьируют примерно от 30 до 340 мг/кг. Максимальная величина на заболоченных участках понижений центральной поймы. Довольно высокие значения, около 250–270 мг/кг, характерны для первой надпойменной террасы. Минимальные значения на прирусловой пойме (вал > отмель) и старице. Обменные катионы Mg^{2+} , в основном входящие в состав гидрослюды, обладают способностью вступать в обмен с ионами ^{137}Cs и снижать их доступность растениям.

Механический и сорбционный латеральные барьеры. Механические барьеры чаще всего совпадают с сорбционными. Но на нашем объекте исследования на границе прирусловой и центральной пойм выделен отдельно механический геохимический барьер. На участках первой надпойменной террасы и притеррасной поймы встречаются сорбционные барьеры. На повышениях и понижениях центральной поймы выделены комплексные барьеры (механический + сорбционный).



М – Механический барьер; Б – Биотенный (биогеохимический) барьер; С – Сорбционный барьер; Н – Нейтральный или кальциевый барьер

Рисунок 1 – Геохимические и биогеохимические барьеры ландшафтного профиля пойменной экосистемы

Механические барьеры возникают в результате резкого снижения механической миграции вещества и определяются плотностью пород. Резкий переход от песчаных к супесчаным почвам на границе прирусловой и центральной пойм, нанос и отложение песчаного материала во время половодий и паводков определили формирование механического барьера на прирусловом валу, который может сорбировать радионуклиды в почве, совместно с Fe (рис. 1). В то же время прирусловая пойма характеризуется низкими агрохимическими показателями, преобладанием Фк над Гк, что предполагает высокую миграционную способность химических элементов, в том числе радионуклидов на данном участке поймы.

На механических барьерах часто определяется высокое содержание коллоидных частиц и физической глины. Поэтому механические барьеры обычно сочетаются с сорбционными. Коллоидные минеральные частицы имеют преимущественно отрицательный заряд, что способствует сорбции и концентрации катионов. Дополнительное наличие органогенного сорбционного барьера (гумуса) создает предпосылки для сорбции и концентрации широкого спектра катионогенных и анионогенных элементов.

Сорбционный геохимический барьер встречается в пойме повсеместно. Выражен на сильно гумусированных почвах с высоким содержанием физической глины. Сорбируются практически все химические элементы, встречающиеся в растворе в ионной форме, особенно с активной водной миграцией ($K_x > 1$) – неметаллы, щелочные и щелочноземельные элементы. С сорбцией связывают буферную емкость ландшафта [3]. Чем она выше, тем больше будет задерживаться токсических элементов и соединений. Однако часть из них будет находиться в обменной форме и может поступать в биологические объекты. Поэтому сорбция лишь частично может выполнять роль регулятора оптимальных условий жизни. Ее может дополнять биологический барьер – выращивание растений-концентраторов определенных металлов.

При характеристике гранулометрического состава аллювиальных почв поймы можно отметить несколько особенностей: аллювиально-дерновые почвы прирусловой и повышенной центральной поймы и первой надпойменной террасы имеют преимущественно песчано-супесчаный состав, а ближе к понижениям центральной и притеррасной части, почвы чаще суглинистые или аллювиально-болотные.

В гумусово-аккумулятивном горизонте почв поймы минимальные средние величины физической глины (0–4,5 %) приурочены к прирусловой (вал > отмель) и притеррасной поймам. Максимальное количество физической глины (до 11–13 %) характерно для почвенного покрова старицы и центральной поймы (повышения > понижения). Это позволяет выделить сорбционные барьеры на старице, а также в центральной пойме (более выраженные на границе между повышенной и пониженной частями). На останцах первой надпойменной террасы локально выделяется сорбционный барьер. Здесь развиваются старопойменные почвы, которые заливаются полыми водами один раз в 20–30 лет. Характерной особенностью таких почв является мощный гумусовый горизонт, высокое содержание физической глины (около 12 %) и пойменная дифференциация почвенного профиля с резкой сменой гранулометрического состава слоёв почвообразующих пород, что свидетельствует о влиянии аллювиальных вод на формирование почв в прошлом, тогда как в настоящее время они уже вышли из режима поемности.

Комплексные барьеры трансупераквальных ландшафтов (механические + сорбционные) характеризуются повышенным накоплением железа и алюминия. Общее содержание обменного железа в пойме р. Сож варьирует в среднем от 80 на аллювиальной слаборазвитой песчаной почве прирусловой отмели до 696 мг/кг в аллювиальной дерново-глеевой почве понижения центральной поймы. Ряд по убыванию выглядит следующим образом: понижение центральной поймы > притеррасная пойма > повышение центральной поймы > прирусловый вал > первая надпойменная терраса > прирусловая отмель. Гидроксиды железа являются хорошим сорбентом ^{90}Sr , что предполагает невысокие значения КП ^{90}Sr наземным покровом понижения центральной и притеррасной поймы и высокие КП на прирусловой отмели [2].

Алюминий является типоморфным элементом ландшафтов Беларуси. Учитывая высокие сорбционные свойства коллоидных соединений алюминия, очевидно, что их гипергенные образования выступают геохимическим барьером на пути миграции радиоизотопов, являются фактором самоочищения природных вод и почв [4]. В пойме р. Сож содержание под-

вижного алюминия в верхних почвенных горизонтах в среднем 0,001 М моль/100г. Причём на прирусловой отмели и первой надпойменной террасе Al^{3+} не обнаружен. Максимальное содержание алюминия приурочено к центральной пойме (повышенная > пониженная) и старице.

Биогеохимические (биологические) геохимические барьеры обусловлены сорбционными и комплексобразующими свойствами органического вещества почв и тяготеют к заболоченным долинам крупных рек и их притоков. На пойме реки Сож различия химического состава травостоя связаны как с произрастанием на различных частях поймы, так и с избирательной способностью растений. Кальциефильные растения поглощают больше ^{90}Sr , чем растения бедные кальцием. Больше всего ^{90}Sr накапливают бобовые растительные ассоциации, меньше злаковые и осоковые. Растения, содержащие больше калия, больше поглощают ^{137}Cs . Установлено, что высоким суммарным биологическим поглощением химических элементов (N, K, Ca, P, Mg), характеризуется притеррасная пойма, старица и пониженные участки центральной поймы. Поэтому здесь наряду с сорбционными действуют **биогеохимические барьеры**.

Выводы. В пределах пойменной экосистемы объекта исследования выделен аллювиально-террасированный ПТК Н – класса, слабодренированный, с широколиственно-сосновыми лесами на дерново-подзолистых временно избыточно увлажняемых почвах, представленный первой надпойменной террасой и пойменный ПТК Н-Fe класса, разной степени дренированности с долгопойменными заливными лугами и сырыми лугами низкого уровня на дерново-глеевых и торфяных почвах.

В экосистеме поймы колебания относительных высот определяют выделение структурных частей с дифференциацией биогеохимических условий, и соответственно почвенно-растительного покрова. Абсолютные отметки поверхности 122–127 м, высота над уровнем воды 1–5 м. В пределах поймы выделены: прирусловая пойма (отмель, вал), старица (на границе прирусловой и центральной поймы), центральная пойма (повышенная и пониженная части), притеррасная пойма.

Дифференциация почвенно-растительного покрова трансупераквального ландшафта обусловила выделение геохимических и биогеохимических барьеров: механический на прирусловом валу (обусловленный резким переходом от песчаных к супесчаным почвам на границе прирусловой и центральной пойм с накоплением Fe); биогеохимические (биологические) геохимические барьеры (связанные с высоким выносом химических элементов растительным покровом) и сорбционный, обусловленный высоким содержанием физической глины и аккумуляцией Al и K в почве на старице; участки с комплексными (механическим + сорбционным), кальциевым и биогенным барьерами, связанными с высоким содержанием органического вещества и аккумуляцией K, Ca, P, Fe и Mg на пониженных участках центральной поймы; комплексными (механическим + сорбционным) и нейтральными геохимическими барьерами на повышениях центральной поймы связанные с нейтральной реакцией почвенного раствора, повышенным содержанием Ca и сорбцией K, Fe, Al и Mg; сорбционный, биогенный и кальциевый барьеры на притеррасной пойме с повышенной аккумуляцией Ca, P, Fe (в 2,3, 1,5. и 3 – 8 раз выше среднего по профилям); сорбционный и нейтральный геохимические барьеры с высоким содержанием физической глины (11–12 %) и близкой к нейтральной величиной pH на первой надпойменной террасе с высокой обеспеченностью P, K, Mg (в 2, 2,2 и 1,2 выше средних показателей).

Литература

1. Геохимия ландшафта : учеб. пособие для студентов вузов по геологическим специальностям / Н.К. Чертко [и др.] ; под ред. Н.К. Чертко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2011. – 303 с.
2. Тимофеева, Т.А. Способы оптимизации использования естественных кормовых угодий пойменных ландшафтов, загрязненных радионуклидами / Т.А. Тимофеева // Агрохимический вестник. – 2016. – № 5. – С. 14–20.
3. Геохимические исследования ландшафтов Белоруссии и Прибалтики : сб. науч. тр. / ред. К.И. Лукашев ; АН БССР, Ин-т геохимии и геофизики. – Минск : Наука и техника, 1989. – 125 с.
4. Марцинкевич, Г.И. Ландшафтоведение: учебное пособие / Г.И. Марцинкевич, И.И. Счастливая. – Минск : ИБЦ Минфина, 2014. – 288 с.

Антибактериальная активность ацетоновых экстрактов из *Hypogymnia physodes* (L.) Nyl.

О.М. ХРАМЧЕНКОВА

Исследовано влияние продолжительности хранения биомассы *Hypogymnia physodes* и экстрактов из нее на антибактериальные свойства ацетоновых экстрактов в отношении тест-культур *Staphylococcus aureus*, *Echericia coli*, *Bacillus subtilis* и *Pseudomonas aeruginosa*. Установлено, что на протяжении 1–2 лет с момента сбора биомассы лишайника антибактериальные свойства ацетоновых экстрактов их него снижаются. Быстрее всего теряется антибактериальная активность в отношении *Bacillus subtilis*. При хранении биомассы лишайника на протяжении двух лет перед экстракцией антибактериальная активность экстракта снижается в отношении *Staphylococcus aureus*, *Echericia coli* и *Bacillus subtilis*. Показано бактерицидное действие ацетоновых экстрактов из *Hypogymnia physodes* в отношении *Pseudomonas aeruginosa* как в бульонных культурах, так и в посевах на твердые среды вне зависимости от продолжительности хранения биомассы лишайника и экстрактов из нее.

Ключевые слова: биомасса лишайника, ацетоновые экстракты, антибактериальная активность.

The antibacterial activity of acetone extracts from *Hypogymnia physodes* was evaluated. It is established that for 1–2 years from the moment of harvesting the lichen biomass, the antibacterial properties of acetone extracts of it are reduced. The fastest is the loss of antibacterial activity against *Bacillus subtilis*. When the biomass of the lichen is being stored for two years before extraction, the antibacterial activity of the extract decreases with respect to *Staphylococcus aureus*, *Echericia coli* and *Bacillus subtilis*. The bactericidal activity of acetone extracts from *Hypogymnia physodes* against *Pseudomonas aeruginosa* is demonstrated in both broth cultures and in crops on solid media irrespective of the duration of storage of lichen biomass and extracts from it.

Keywords: lichen biomass, acetone extracts, antibacterial activity.

Введение. Лишайники способны продуцировать вторичные метаболиты различной структуры и потенциальной биологической активности. В настоящее время известно более 1000 вторичных лишайниковых метаболитов, набор которых в слоевищах определенного вида, как правило, исчерпывается 1–10 соединениями [1]–[4]. Для довольно большой группы видов лишайников состав вторичных метаболитов до настоящего времени не установлен. Вторичные метаболиты образуются в талломах лишайников для защиты от большинства патогенных микроорганизмов, а также для обеспечения физиологических механизмов адаптации к условиям существования, в том числе – крайне суровым, где высшие растения не выживают [5]–[7].

Несмотря на издавна известную способность лишайников подавлять развитие болезнетворных микроорганизмов, интерес к бактерицидным свойствам лишайниковых веществ растет. Поскольку микроорганизмы выработали резистентность ко многим антибиотикам, возникла задача поиска новых источников антимикробных веществ.

Способы извлечения вторичных метаболитов из слоевищ лишайников базируются на химических свойствах извлекаемых веществ и арсенале физико-химических методов исследования. Наиболее распространенной является экстракция органическими растворителями различной полярности с последующим хроматографическим разделением веществ [3], [4], [8]–[10]. Всем этим процедурам предшествует сбор натурального материала, его хранение и пробоподготовка. Возникает вопрос: изменяются ли при хранении антибактериальные свойства вторичных лишайниковых метаболитов, ради которых проводился сбор и экстракция слоевищ? В работе [11] показано, что продолжительность хранения слоевищ лишайников не влияет на состав их вторичных метаболитов. Целью настоящей работы является анализ влияния продолжительности хранения слоевищ и самих экстрактов из лишайников на их антибактериальные свойства.

Методы исследований. Исследовали антибактериальные свойства экстрактов из гипогимнии вздутой. Натурный материал – слоевища лишайников – отбирали на территории ГЛХУ «Гомельский лесхоз». Гипогимния вздутая – *Hypogymnia physodes* (L.) Nyl. (Syn. *Parmelia physodes* (L.) Ach.) – распространенный полиморфный вид листоватых лишайников семейства *Parmeliaceae* порядка *Lecanorales* класса *Lecanoromycetes* отдела *Ascomycota*. Поселяет-

ся преимущественно на стволах и сучьях лиственных и хвойных пород, реже на обработанной древесине и каменистом субстрате, иногда на почве. Содержит атранорин, хлоратранорин, физодовую, физодаловую, 3-гидроксифизодовую, 2'-О- метилфизодовую и протоцеттаровую кислоты [1], [12]–[14]. Образцы отбирали на стволах сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.) и березы повислой (*Betula pendula* Roth.), высушивали до воздушно-сухого состояния, хранили в сухом помещении в бумажных пакетах при комнатной температуре. Экстракцию вторичных лишайниковых метаболитов проводили ацетоном (чда) в аппарате Сокслета на протяжении 6 часов. Полноту экстракции контролировали стандартным методом [15]. После окончания экстракции растворитель удаляли, сухие экстракты направляли на определение бактерицидных свойств.

В таблице 1 приведена схема эксперимента.

Таблица 1 – Схема получения экстрактов из лишайника *Hypogymnia physodes*

Номер серии опытов	Форофит	Срок хранения слоевищ, лет	Срок хранения экстрактов, лет
1	Береза повислая	0	0
2	Сосна обыкновенная	0	0
3	Береза повислая	1	0
4	Сосна обыкновенная	1	0
5	Береза повислая	2	0
6	Сосна обыкновенная	2	0
7	Береза повислая	0	1
8	Сосна обыкновенная	0	1

Дальнейшие исследования проводили в лабораториях ГУ «Гомельский областной центр гигиены, эпидемиологии и общественного здоровья» на культурах четырех видов бактерий [16].

Staphylococcus aureus – золотистый стафилококк – шаровидные грамположительные бактерии, вызывающие широкий диапазон заболеваний. Является одной из наиболее частых причин внутрибольничных инфекций, вызывает послеоперационные раневые инфекции. Большинство штаммов резистентны к пенициллину и его аналогам.

Escherichia coli – кишечная палочка – палочковидные грамотрицательные бактерии, обитающие в нижней части кишечника. Широко используется в качестве модельного организма в микробиологических и молекулярно-генетических исследованиях.

Bacillus subtilis – сенная палочка – не патогенные грамположительные спорообразующие аэробные бактерии, обитающие в почве, на поверхности растений и пр. Широко используется в биотехнологии.

Pseudomonas aeruginosa – синегнойная палочка – условно патогенные грамотрицательные бактерии, обитающие в почве и воде. Вызывает у человека ряд инфекций, лечение которых затруднено из-за высокой устойчивости к антибиотикам.

Для постановки опытов использовали тест-культуры стандартных микроорганизмов: *Staphylococcus aureus* ATCC 6538; *Escherichia coli* ATCC 11775; *Bacillus subtilis* ATCC 6633; *Pseudomonas aeruginosa* ATCC 10145. Из лиофилизированного бактериального штамма готовили суспензии. Непосредственно из суспензии производился высев на кровяной агар (КА)¹, мясо-пептонный агар (МПА)² для получения изолированных колоний. Культуры инкубировали 18–24 ч при (36 ± 1) °С. После инкубации выросшие культуры проверяли на чистоту штамма и использовали для получения основной опытной культуры. Испытательные суспензии готовили в 10 мл физиологического раствора, количество КОЕ в них доводили по стандарту мутности до 10⁸/мл. Испытуемый препарат из лишайника готовили в виде взвеси 0,5 г

¹Кровяной агар – бактериологическая среда для выделения бактерий и установления их гемолитической активности. Для приготовления кровяного агара к охлажденному до 45 °С 2 % мясо-пептонному агару добавляют 5–10 % подогретой стерильной дефибринированной крови, разливают по чашкам Петри, выдерживают сутки в термостате на возможную бактериальную контаминацию [16], [17].

²Мясо-пептонный агар предназначен для культивирования микроорганизмов. Совокупность компонентов, входящих в состав среды, обеспечивает рост культур в виде соответствующих колоний на поверхности плотной питательной среды [16], [17].

экстракта в 50 мл дистиллированной воды. Определение бактерицидной эффективности полученных суспензий производили путем смешивания 0,1 мл испытательной суспензии с 10 мл взвеси испытуемого экстракта. После инкубации при $(36 \pm 1)^\circ\text{C}$ в течение 30 мин, 3 ч и 24 ч взвеси микроорганизмов и испытуемых экстрактов перемешивали, отбирали по 0,1 мл и переносили в 10 мл пептонной воды. Полученные субкультуры инкубировали 48 ч при $(36 \pm 1)^\circ\text{C}$, после чего по помутнению бульонных культур устанавливали начало роста.

Все пробы экстрактов высевали по 0,1 мл на плотные питательные среды: желточно-солевой агар (ЖСА)³, среду Эндо⁴, МПА для подтверждения присутствия или отсутствия роста микроорганизмов и подсчета числа колоний по сравнению с контролем. Одновременно проводилось исследование роста колоний с использованием стандартных тест-носителей. Для изготовления тест-носителя использовали стандартную хлопчатобумажную ткань, промытую в бидистиллированной воде и простерилизованную в автоклаве. Тест-носители помещали в бактериальную суспензию на 15 минут, после чего помещали на плотные питательные среды с внесенной суспензией экстракта *Hypogymnia physodes* [17].

Результаты исследований. При прочих равных условиях, экстракты из слоевищ *Hypogymnia physodes*, отобранных на стволах сосны обыкновенной и березы повислой, показали практически одинаковую активность в отношении принятых к исследованию штаммов бактерий. По-видимому, условия существования на обоих видах форофитов не влияют на состав вторичных метаболитов лишайников, что подтверждается данными, приведенными в [11]. В таблице 2 представлены результаты определения начала роста микроорганизмов в бульонных культурах с внесенной суспензией экстракта из *Hypogymnia physodes*.

Таблица 2 – Антибактериальная активность ацетоновых экстрактов из *Hypogymnia physodes* в бульонных культурах

№ пробы	Вид бактерий											
	<i>Staphylococcus aureus</i>			<i>Echericia coli</i>			<i>Bacillus subtilis</i>			<i>Pseudomonas aeruginosa</i>		
	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-
5	+	+	+	+	+	+-	+	+	+	+	+	-
6	+	+	+	+	+	+-	+	+	+	+	+	-
7	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-

Здесь и далее: знак «+» означает наличие роста микроорганизмов; знак «-» – отсутствие роста.

Установлено, что антибактериальная активность экстрактов не одинакова, и изменяется со временем. Свежие экстракты из свежесобраных слоевищ лишайника уже за первые 30 минут инкубации в бульонной культуре подавляли рост всех исследуемых штаммов бактерий. Свежие экстракты из слоевищ, отобранных год назад, не подавляли рост *Bacillus subtilis*, а свежие экстракты из слоевищ, отобранных два года назад, в бульонной культуре практически не проявляли антибактериальной активности. Хранение сухого экстракта в плотно закрытом стеклянном бюксе при комнатной температуре привело к потере антибактериальной активности в отношении *Bacillus subtilis*.

В таблице 3 приведены результаты исследования роста колоний микроорганизмов на плотных средах с внесенной суспензией экстракта *Hypogymnia physodes*.

³Желточно-солевой агар – элективная для стафилококков среда. Высокое содержание хлорида натрия подавляет большинство бактерий, встречающихся в ассоциациях со стафилококком, присутствие яичного желтка выявляет свойственный этому роду фермент лецитиназу [16], [17].

⁴Среда Эндо – дифференциально-диагностическая питательная среда для выделения *Echericia coli*. Обладает слабыми селективными свойствами, компоненты среды подавляют рост грамположительных бактерий [16], [17].

Таблица 3 – Антибактериальная активность ацетоновых экстрактов из *Hypogymnia physodes* на плотных питательных средах

№ пробы	Вид бактерий, среда культивирования											
	<i>Staphylococcus aureus</i> , ЖСА			<i>Echericia coli</i> , Эндо			<i>Bacillus subtilis</i> , МПА			<i>Pseudomonas aeruginosa</i> , МПА		
	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	10 ⁷	10 ⁷	10 ⁸	-	-	-
5	10 ⁸	300 КОЕ	100 КОЕ	10 ⁸	10 ⁸	11 КОЕ	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	-
6	10 ⁸	500 КОЕ	200 КОЕ	10 ⁸	10 ⁸	11 КОЕ	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	-
7	-	-	-	-	-	-	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁸	-	-

Цифрами обозначены количественные показатели роста колоний.

Показано, что свойством бактерицидности обладают свежие экстракты из свежесобранных слоевищ *Hypogymnia physodes*. По мере увеличения срока хранения биомассы лишайника бактерицидность теряется, и сохраняется только бактериостатическое действие экстрактов. Хранение сухого экстракта в течение одного года привело к потере бактерицидности в отношении *Bacillus subtilis*.

В таблице 4 приведены результаты исследования роста колоний микроорганизмов в опытах на тест-носителях.

 Таблица 4 – Антибактериальная активность ацетоновых экстрактов из *Hypogymnia physodes* на тест-носителях

№ пробы	Вид бактерий, среда											
	<i>Staphylococcus aureus</i> , ЖСА			<i>Echericia coli</i> , Эндо			<i>Bacillus subtilis</i> , МПА			<i>Pseudomonas aeruginosa</i> , МПА		
	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч	30 мин	3 ч	24 ч
1	+	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-
2	+	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-
3	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-
5	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-
6	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-
7	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-

Результаты опытов с использованием тест-носителей характеризуют «проникающую способность» экстрактов из лишайника. Только свежие экстракты из свежесобранных слоевищ демонстрировали антибактериальную активность. В отношении *Bacillus subtilis* и *Echericia coli* антибактериальная активность экстрактов утрачивалась при хранении биомассы *Hypogymnia physodes* и экстрактов из нее. По отношению к *Staphylococcus aureus* антибактериальная активность экстрактов из *Hypogymnia physodes* утрачивалась при длительном хранении биомассы лишайника и экстракта из него.

Обращают на себя внимание антибактериальные и бактериостатические свойства экстрактов из *Hypogymnia physodes* в отношении *Pseudomonas aeruginosa*. Устойчивость к большим дозам антибиотиков данного вида бактерий связана с их способностью формировать биопленку, защищающую колонию от попадания в нее вредных веществ [16]. Настоящим исследованием показано ингибирующее действие ацетоновых экстрактов из *Hypogymnia physodes* в отношении *Pseudomonas aeruginosa* как в бульонных культурах, так и в посевах на твердые среды.

Заключение. Исследовано влияние продолжительности хранения биомассы лишайника *Hypogymnia physodes* и экстрактов из нее на антибактериальные свойства в отношении культур *Staphylococcus aureus*, *Escherichia coli*, *Bacillus subtilis* и *Pseudomonas aeruginosa*. Установлено, что на протяжении 1–2 лет с момента сбора биомассы лишайника антибактериальные свойства ацетоновых экстрактов из него снижаются. Быстрее всего антибактериальная активность теряется в отношении *Bacillus subtilis*. При хранении биомассы лишайника на протяжении двух лет перед экстракцией антибактериальные свойства экстракта теряются в отношении *Staphylococcus aureus*, *Escherichia coli* и *Bacillus subtilis*. Показано антибактериальное действие ацетоновых экстрактов из *Hypogymnia physodes* в отношении *Pseudomonas aeruginosa* как в бульонных культурах, так и в посевах на твердые среды вне зависимости от продолжительности хранения биомассы лишайника и экстрактов из нее.

Литература

1. The Lichens of Great Britain and Ireland / C.W. Smith [et al.]. – 2nd ed. – London : British Lichen Society, 2009. – 700 p.
2. Ranković, B. Lichen Secondary Metabolites: Bioactive Properties and Pharmaceutical Potential / B. Ranković. – Springer : Heidelberg, 2015. – 201 p.
3. Elix, J.A. A catalogue of standardized thin layer chromatographic data and biosynthetic relationships for lichen substances / J.A. Elix. – Canberra : Australian National University, 2014. – 330 p.
4. Huneck, S. Identification of lichen substances / S. Huneck, I. Yoshimura. – Berlin : Springer, 1996. – 493 p.
5. Nash III T.H. Lichen biology / T.H. Nash III. – Cambridge University Press, 1999. – 486 p.
6. Тарасова, В.Н. Лишайники: физиология, экология, лишеноиндикация: учебное пособие / В.Н. Тарасова, А.В. Сониная, В.И. Андреева. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2012. – 368 с.
7. Rundel, P.W. The ecological role of secondary lichen substances / P.W. Rundel // Biochem. Syst. Ecol. – 1978. – Vol. 6. – P. 157–170.
8. The isolation, analytical characterization by HPLC–UV and NMR spectroscopy, cytotoxic and antioxidant activities of baecomycesic acid from *Thamnolia vermicularis* var. *subuliformis* / N.T. Manojlović [et al.] // Hem. ind. – 2011. – Vol. 65 (5). – P. 591–598.
9. Fahselt, D. Secondary biochemistry of lichens / D. Fahselt // Symbiosis. – 1994. – Vol. 16. – P. 117–165.
10. Ranković, B. Antioxidant and antimicrobial Activity of some lichen species / B. Ranković, D. Ranković, D. Marić // Microbiology. – 2010. – Vol. 79. – P. 809–815.
11. Molnar, K. Depsides and depsidones in populations of the lichen *Hypogymnia physodes* and its genetic diversity / K. Molnar, E. Farkas // Ann. Bot. Fennici. – 2011. – Vol. 48. – P. 473–482.
12. Определитель лишайников СССР / Е.Г. Копачевская [и др.]; под ред. И.И. Абрамова // Вып. 1. Пертузариевые, Леканоровые, Пармелиевые. – Л. : Наука, 1971. – 412 с.
13. Горбач, Н.В. Лишайники Белоруссии. Определитель / Н.В. Горбач. – Мн. : Наука и техника, 1973. – 368 с.
14. Справочное пособие по хемотаксономии лишайников (методическое пособие) / Е.А. Вайнштейн [и др.]; под ред. Н.С. Голубковой. – Л. : БИН АН СССР, 1990. – 152 с.
15. Воскресенский, П.И. Техника лабораторных работ / П.И. Воскресенский. – М. : Химия, 1973. – 717 с.
16. Определитель бактерий Берджи / под ред. Дж. Хоулт. – М. : Мир, 1997. – Т. 1. – 432 с.
17. Meynell, G.G. Theory and practice in experimental bacteriology / G.G. Meynell, E. Meynell. – Cambridge University Press, 1970. – 347 p.

Информатика

УДК 519.174

Вероятностно-алгебраическое моделирование как средство оценки надёжности при проектировании электроэнергетических систем

М.А. БУЖАН, Ю.В. ЖЕРДЕЦКИЙ, Е.И. СУКАЧ

Рассматривается один из подходов к оценке надёжности электроэнергетических объектов, функционирующих в условиях воздействия случайных факторов. Построение и эксплуатация моделей надёжности электроэнергетических систем различной структурной организации обеспечены программными средствами, автоматизирующими основные этапы формирования моделей и получения вероятностных оценок надёжности функционирования электроэнергетических систем. Представлены результаты апробации программного средства, применённого для оценки надёжности фрагмента электроэнергетической системы районного центра.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, надёжность, графы, автоматизация расчета надёжности, вероятностное моделирование.

One of the approaches to assessing the reliability of electric power facilities operating under the influence of random factors is considered. The construction and operation of reliability models of electric power systems of various structural organizations are provided with software that automates the main stages of model formation and obtaining probabilistic estimates of the reliability of the functioning of electric power systems. The results of approbation of the software used to assess the reliability of a fragment of the power system of the district center are presented.

Keywords: electric power system, reliability, graphs, automation of reliability calculation, probabilistic modeling.

Введение. Проблема надёжности электроэнергетических систем относится к задачам определения и оптимизации их показателей на этапах планирования, проектирования, сооружения и эксплуатации. Надёжность – свойство объекта или технического устройства выполнять заданные функции, сохраняя во времени значения установленных эксплуатационных показателей в заданных пределах, соответствующих заданным режимам и условиям использования, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортировки. Надёжность любой электроэнергетической, как и любой технической системы, один из основных показателей, характеризующих ее эффективность.

Существующие расчетные методы [1], [2], позволяющие произвести оценки надёжности сетевых структур, применимы при определенных ограничениях. Как результат не учитывается нелинейность изменений, происходящих с элементами.

Для оценки и прогнозирования надёжности организации электроэнергетических объектов используются различные математические модели, позволяющие описать структуру объекта и оценить характеристики его функционирования одномоментно и с учётом динамически изменяющихся характеристик надёжности составляющих его элементов. Большой класс таких методов учитывает изменения, происходящие с каждым из элементов, их взаимное влияние и их влияние на систему в целом [3]. Одним из эффективных расчётных методов оценки надёжности организации электроэнергетических объектов является вероятностное моделирование [4], основанное на математическом аппарате стохастических алгебр и предполагающее учёт вероятностных связей между отказами системы и случайными событиями, от которых они зависят – отказами элементов.

Отказы элементов исследуемых объектов, возникающие при передаче электричества от электрической станции к подстанции, могут приводить к существенному снижению надёжности функционирования электроэнергетической сети, а в предельном случае служить причиной аварии.

В статье описывается один из подходов и программное средство, позволяющие оценить влияние характеристик надёжности отдельных участков на надёжность системы в целом и обосновать выбор варианта структурной организации электроэнергетической системы в результате расчета вероятностей состояний системы, характеризующих уровни её надежности.

Описание объекта исследования. Любая электроэнергетическая система представляет собой план размещения электростанций и электросетевых объектов на основе оценки прогнозов электропотребления в виде детальных схем, описывающих физическое расположение структурных элементов электросетевых объектов, выполненного согласно установленным стандартам. Главная задача системы – формирование надежной, экономически эффективной и оптимальной структуры генерирующих мощностей и электросетевых объектов, создание условий для предотвращения наиболее эффективным способом прогнозируемых дефицитов электрической энергии.

Упрощение подобных схем позволяет интерпретировать объекты в виде графов, в которых физическим элементам с вероятностными характеристиками надёжности ставятся в соответствие вершины или рёбра. Формализация электроэнергетических систем в виде графов позволяет оперативно и максимально точно отобразить структурную организацию объектов, а применение специальных методик расчёта их вероятностных характеристик надёжности (безопасности) обеспечивает получение оценочных данных надёжности их организации с учетом числа и состав терминальных вершин.

Предполагается, что электроэнергетическая система представляется совокупностью элементов $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$, число которых выделяется в соответствии с уровнем детализации объекта. Это могут быть как неделимые элементы, представляющие самый высокий уровень детализации сложных систем, так и подсистемы, включающие совокупность неделимых элементов, которые рассматриваются как самостоятельные неделимые элементы системы выбранного уровня абстрагирования. Например, при исследовании надежности электрической станции, считаем ее системой, а в качестве элементов рассматриваем генераторы, трансформаторы, выключатели, шины и т. д. При оценке надежности генератора элементами будут статор, ротор, обмотки и др.

После выбора уровня детализации определяются численные значения совокупности параметров, изменяющиеся в процессе функционирования и характеризующие состояние надёжности элементов. Иными словами, формируется вероятность нахождения в определенном состоянии элемента в текущий момент времени, где вероятностная характеристика надёжной работы элемента 1, а вероятностная характеристика отказа элемента 0.

Анализ электроэнергетических систем позволил сделать вывод о том, что состояния элементов могут характеризовать различные уровни износа элементов, соответствовать различным видам отказов или определять возможные значения исследуемого свойства, имеющего вероятностную природу, и, зачастую, не всегда достаточно рассмотреть два состояния (1 и 0). В общем случае число состояний надёжности элементов определяется множеством, которое формируется с учётом особенностей объекта исследования и степени его детализации.

Выбор структурных элементов электроэнергетических систем: устройств (станций, подстанций, генераторов и т. д.) или линий связи (воздушные, подземные), при оценке их надежности, определяет схему формализации исследуемого объекта, а именно: «элементы-вершины», «элементы-ребра» [5]. Разработанный математический аппарат, позволяет на любом этапе оценки надёжности модели системы изменить вариант схемы её формализации.

В качестве характеристик надёжности элементов при оценке надёжности организации участков электроэнергетической системы рассматриваются вероятности отказов, возникающих в ходе доставки электроэнергии, которые описываются векторами:

$$P^i = (p_0^i, p_1^i), \sum_{j=0}^1 p_j^i = 1, i = \overline{1, m} \quad (1)$$

Первые составляющие p_0^i векторов (1) определяют вероятность надёжной работы i -ых элементов, выделенных в процессе формализации. Вторые составляющие векторов p_1^i векторов (1) определяют вероятность отказа работы i -ых элементов системы.

При исследовании системы с тремя терминальными вершинами ставится задача определения вектора вероятностей состояний надёжности, который имеет вид:

$$P^s = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_5^s), \sum_{j=1}^5 p_j^s = 1. \quad (2)$$

При увеличении числа терминальных вершин увеличивается. В частности для систем с тремя терминальными вершинами рассчитывается вектор вероятностей вида

$$P^s = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_{15}^s), \sum_{j=1}^{15} p_j^s = 1. \quad (3)$$

Средство автоматизации расчёта надёжности электроэнергетических систем. Разработка вероятностных моделей организации электроэнергетических объектов, функционирующих в условиях риска и неопределённости, представляет собой длительный, трудоёмкий процесс, и довольно часто к моменту эксплуатации реализованные модели оказываются непригодными из-за существенных изменений, произошедших в структуре и параметрах исследуемых объектов. Поэтому автоматизация процессов построения и эксплуатации вероятностных моделей электроэнергетических объектов, функционирующих в условиях риска и неопределённости, сокращает сроки выполнения проектных работ и обеспечивает выбор надёжного (безопасного) варианта организации электроэнергетических объектов, функционирующих в условиях риска и неопределённости, для заданного критерия оценки.

Выбор одной из моделей определяется структурной сложностью исследуемого объекта, числом его терминальных вершин и заданием типа элементов (элементы-вершины или элементы ребра) исследуемой электроэнергетической системы. Параметризованные модели в составе инструментария расчёта надёжности электроэнергетических систем (рисунок 1) ориентированы на выявление вероятностных предельных значений надёжности структурных элементов объектов, приводящих к авариям на уровне всей системы.

Form1

Сохранить Загрузить Принять Редактировать Очистить

Исходные данные Результат

Матрица смежности

0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Схема форматизации

☐ Элементы-вершины

☒ Элементы-ребра

Вероятности

p1	0,95747
p2	0,89998
p3	0,96878
p4	0,91932
p5	0,97854
p6	0,94254

☐ Трёхполюсник

☒ Четырёхполюсник

Вычислить

Рисунок 1 – Интерфейс программного средства автоматизации расчёта надёжности электроэнергетических систем

Пример расчёта надёжности фрагмента электроэнергетической системы районного центра. На рисунке 1 представлен фрагмент электроэнергетической сети районного центра (рисунок 2). А на рисунке 3 фрагмент системы представлен в виде графа $G(N, K)$, где $N = \{N_v\}, v = \overline{1,9}$, $K = \{K_i\}, i = \overline{1,10}$. Система может быть формализована в виде структуры-трёхполюсника и структуры-четырёхполюсника. В качестве терминальных вершин выступают $N_1, N_2 \in N$ (источники электроэнергии) и два выхода $N_3, N_4 \in N$ (потребители электроэнергии).

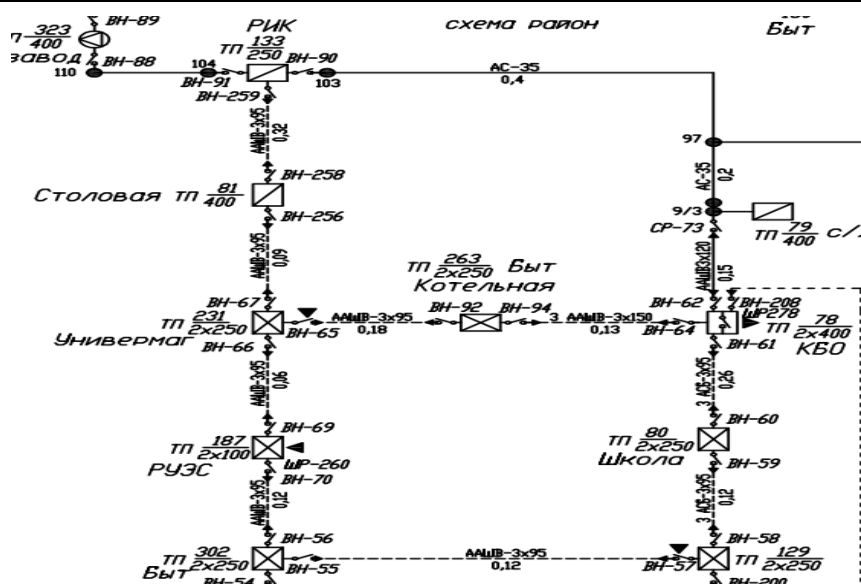


Рисунок 2 – Схема фрагмента электроэнергетической сети

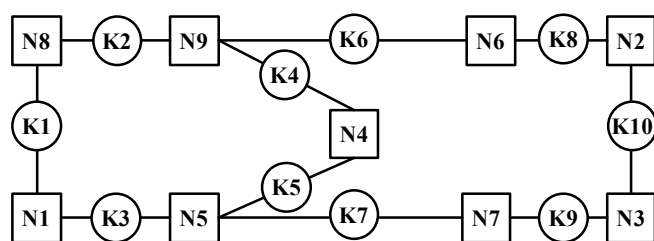


Рисунок 3 – Граф модели фрагмента электроэнергетической сети

В виду того, что представленная модель электроэнергетической системы является примером, позволяющим продемонстрировать возможности разработанного математического аппарата, исходные данные (значения векторов (1)) были выбраны случайным образом в рабочей точке области параметров элементов, выделенных в процессе формализации объекта исследования (таблицы 1, 2).

Таблица 1 – Показатели надежности вершин графа модели электроэнергетической системы

Элемент	Надежность	Элемент	Надежность	Элемент	Надежность
N1	0,8730	N4	0,8985	N7	0,9000
N2	0,8685	N5	0,8970	N8	0,8880
N3	0,8880	N6	0,8745	N9	0,8685

В таблице 2 приведены показатели надежности ребер графа модели электроэнергетической системы, на основе данных из таблицы 1, для оценки надежности электроэнергетической системы по элементам-ребрам.

Таблица 2 – Показатели надежности ребер графа модели электроэнергетической системы

Элемент	Надежность	Элемент	Надежность
K1	0,8625	K6	0,8625
K2	0,8910	K7	0,8625
K3	0,8625	K8	0,8625
K4	0,8625	K9	0,8625
K5	0,8625	K10	0,8625

В результате модельных экспериментов были получены следующие вероятностные оценки надежности организации электроэнергетической системы (таблицы 3, 4), формализованной в виде структуры-трёхполюсника.

Таблица 3 – Вероятностные оценки результирующих состояний графа модели электроэнергетической системы на основе параметров надёжности ее ребер, формализованной в виде структуры-трехполюсника

Состояния системы	Вероятностные оценки
Состояние S1	6,7579689588E-06
Состояние S2	2,73913492942E-5
Состояние S3	1,68285224562E-5
Состояние S4	0,030609456390761
Состояние S5	0,96933956576853

Таблица 4 – Вероятностные оценки результирующих состояний графа модели электроэнергетической системы на основе параметров надёжности ее вершин, формализованной в виде структуры-трехполюсника

Состояния системы	Вероятностные оценки
Состояние S1	4,23908958435058E-5
Состояние S2	0,0002659065284729
Состояние S3	0,00246567871856689
Состояние S4	0,00814756166077
Состояние S5	0,98907846219635

Имея высокие показатели надёжности элементов электроэнергетической сети, наибольшую вероятность имеет последнее состояние системы S5, описывающее ситуацию, когда все три терминальные вершины соединены. Среди остальных вероятностных оценок можно выделить S4. Остальные состояния электроэнергетической системы маловероятны. Результаты расчёта оценок надёжности при формализации фрагмента электроэнергетической системы в виде системы-четырёхполюсника представлены на рисунках 4 и 5, соответственно для схем формализации «элементы-рёбра» и «элементы-вершины».

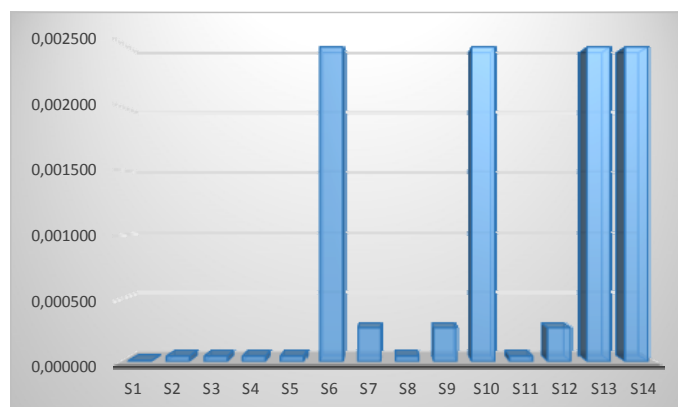


Рисунок 4 – Вероятности результирующих состояний надёжности (S1–S14) для схемы формализации «элементы-вершины»

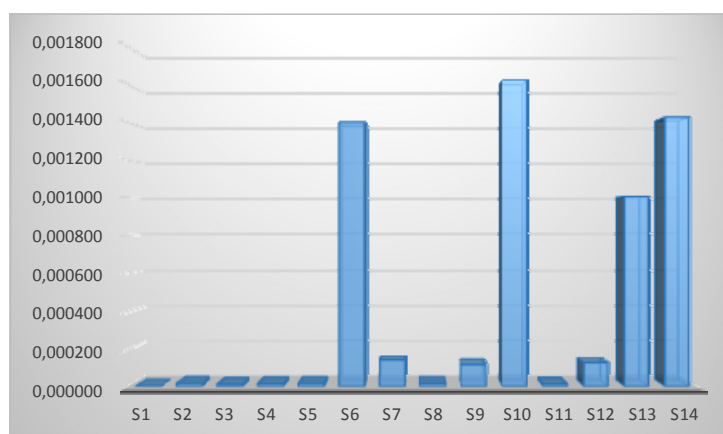


Рисунок 5 – Вероятности результирующих состояний надёжности (S1–S14) для схемы формализации «элементы-рёбра»

В обоих случаях для заданных исходных данных наибольшую вероятность имеет последнее состояние системы S15, описывающее ситуацию, когда 4-е терминальные вершины соединены.

Представленные данные свидетельствуют о том, что общая структура исследуемого фрагмента электроэнергетической системы, функционирующей в условиях риска и неопределенности, указанного района, с инженерной точки зрения имеет надежную и безопасную структуру, а так же обеспечивает бесперебойной подачей электроэнергии всех потребителей.

Заключение. Для оценки вероятностных характеристик надежности многоэлементных электроэнергетических систем, элементами которых являются трансформаторные подстанции; точки поступления и потребления электроэнергии; места сопряжения с внешними линиями электропередач; переключатели, определяющие места возможных разъединений в электроэнергетической сети, линии связи и др., в ряде случаев удобно использовать методику расчёта надёжности систем (n-полюсников), имеющих множество входов и выходов, разработанную в рамках вероятностно-алгебраического подхода и позволяющую оценить вероятностные характеристики показателей надежности системы по вероятностным характеристикам показателей надежности её элементов. Она обеспечивает получение точных вероятностных оценок характеристик исследуемого показателя надёжности системы, представляющих собой вектора вероятностей результирующих состояний систем для различных сочетаний заданных входов и выходов. Программное средство, автоматизирующее расчёты, представляет собой инструментарий, имеющий удобный графический интерфейс создания моделей и реализующий алгоритмы, которые позволяют сформировать оценки надежности функционирования вероятностных моделей электроэнергетических систем. Универсальность алгоритмов заключается в возможности однотипного описания характеристик элементов и системы, в универсальности производимых расчётов для различных схем формализации, в возможности одномоментного получения вероятностных характеристик надёжности всех элементов и системы в целом за один шаг моделирования.

Литература

1. Рябинин, И.А. Надёжность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. – 276 с.
2. Можаяев, А.С. Универсальный графоаналитический метод, алгоритм и программный модуль построения монотонных и немонотонных логических функций работоспособности систем / А.С. Можаяев // Труды третьей Международной научной школы «Моделирование и Анализ Безопасности и Риска (МА БР-2003)», август 20–23, 2003 г. – СПб., 2003. – 517 с.
3. Сукач, Е.И. Вероятностно-алгебраическое моделирование сложных систем графовой структуры / Е.И. Сукач. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 224 с.
4. Демиденко, О.М. Анализ надёжности электроэнергетических систем на основе вероятностно-алгебраического моделирования/ О.М. Демиденко, Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, Ю.В. Жердецкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (13). – С. 87–94.
5. Бужан, М.А. Вероятностно-алгебраическое моделирование технологических систем производства с элементами потенциальной опасности / Е.И. Сукач, Ю.В. Жердецкий, М.А. Бужан // Десятая международная научно-практическая конференция «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС'2015», 23–27 июня 2015 г. – Киев-Жукин, 2015. – С. 198–202.

УДК 007.003; 007.008; 65.0; 681.3

Методика оценки надежности и безопасности систем управления технологическим циклом

В.С. СМОРОДИН, А.В. КЛИМЕНКО, С.П. ЖОГАЛЬ

Определяется актуальность разработки методики оценки надежности и безопасности систем управления технологическим процессом производства с учетом результатов моделирования на основе анализа надежностных характеристик функционирования оборудования для обеспечения максимальной средней производительности системы в единицу времени и снижения рисков возникновения чрезвычайных ситуаций в процессе функционирования производственных систем. Рассматриваются особенности функционального взаимодействия компонентов модели. Предложена технология оперативного управления надежностью функционирования оборудования.

Ключевые слова: система управления, технологический процесс моделей, имитационная модель, вероятностный сетевой график, технологические операции.

The urgency of developing a methodology for assessing the reliability and safety of production process control systems, taking into account the results of modeling, is determined on the basis of the analysis of reliability characteristics of the equipment operation in order to ensure the maximum average system capacity per unit of time and reduce the risks of emergencies during the operation of production systems. Features of functional interaction of model components are considered. The technology of operational control of equipment operation reliability is proposed.

Keywords: control system, technological process of models, simulation model, probabilistic network graph, technological operations.

Введение. На практике технологические процессы производства представляют собой множество взаимосвязанных входящих в состав технологических операций (TXO_{ij} , где $i, j = \overline{1, N}$) микротехнологических операций ($\{MTXO_{ij}\}$, где $i, j = \overline{1, n}$), характеристики выполнения и порядков следования которых являются вероятностными. Некоторые из связей между $MTXO_{ij}$ также могут быть случайными. По этой причине в качестве аппарата описания ПС было предложено [1] использовать вероятностные сетевые графики (ВСГР) и сочетать их с имитационным моделированием с применением процедур метода Монте-Карло, заменяя ВСГР последовательностью обычных сетевых графиков ($\{SGP_l\}$, где $l = \overline{1, N}$) с постоянными параметрами микротехнологических операций $MTXO_{ij}$, где N – количество реализаций ВСГР по методу Монте-Карло.

С целью повышения надежности потенциально техногенно опасных производственных систем (ПС) и обеспечения требуемого уровня безопасности производства возникла необходимость расширения области применения существующих методов управления такими системами, а также разработки новых для производственных систем с изменяющейся в процессе функционирования структурой с использованием возможностей имитации моделируемых объектов. Отсутствие эффективных средств исследования потенциально техногенно опасных технологических процессов производства в данном случае, а также средств разработки систем управления надежностью ПС, обусловили новизну предлагаемого подхода и определили актуальность выполнения данной разработки.

Целью данной работы является разработка методики управления технологическим процессом производства с учетом результатов моделирования на основе анализа надежностных характеристик функционирования оборудования для обеспечения максимальной средней производительности системы в единицу времени и снижения рисков возникновения чрезвычайных ситуаций в процессе функционирования ПС с использованием агрегатно-процессного стенда имитации для контроля реализаций технологии опасного производства [2].

Нами предлагается методика управления работающим в режиме реального времени технологическим производственным процессом на основе системы автоматизации моделирования

агрегатного типа [3] и специализированной имитационной модели, построенной с учетом особенностей применения имитации при моделировании технологии управления процессом производства [4], состоящей из следующих асинхронно работающих компонентов:

- человека-эксперта (*EXPERT*) с низкой скоростью реакции на события, происходящие в ПС в процессе его функционирования;
- относительно медленно (по сравнению со скоростью человеческой реакции) функционирующей в режиме реального времени производственной системы;
- программной системы (*SPRESH*) управления, контроля функционирования оборудования и принятия решений, которая должна упреждать возможные «нештатные» ситуации на основе реализованных алгоритмов, указаний эксперта, результатов предыдущей имитации и анализа операционной обстановки в ПС;
- имитационной модели ВСГР, которая позволяет прогнозировать возможное развитие технологического процесса при реализации ПС.

При решении задачи повышения надежности функционирования оборудования потенциально техногенно опасных производственных систем для обеспечения требуемого уровня безопасности производства, в данной работе положено сочетание идей метода имитационного моделирования, методики сетевого планирования и процедур метода Монте-Карло на базе создания специализированной имитационной модели для управления надежностью функционирования оборудования [1].

Особенности функционального взаимодействия компонентов модели. При взаимодействии компонентов имитационной модели (ИМ) и работающего в режиме реального времени замкнутого цикла технологического процесса осуществляется непрерывный мониторинг оборудования и параметров его состояния с помощью регистров-индикаторов и технических средств сопряжения. Имитационная модель, осуществляющая оперативное управление технологическим процессом производства, состоит из следующих компонентов:

- имитационной модели технологического процесса производства, структура которого определяется с помощью вероятностного сетевого графика;
- системы принятия решений *SPRESH*, осуществляющей контроль планового или «нештатного» развития операционной обстановки в имитационной модели ВСГР;
- блока управления *EXPERT*, выполняющего функции посредника между системой принятия решений и группой экспертов-специалистов высокой квалификации.

Оперативное управление основными компонентами модели реализуется с помощью следующих глобальных переменных:

- надежностных характеристик G_{rh}^* функционирования оборудования;
- индикаторов ind_{rh}^* текущего состояния оборудования, в которых накапливается суммарное время наработки на отказ соответствующих устройств ПС;
- указателей π_{abr}^* появления аварий, влияющих на конфигурацию соответствующего варианта моделируемого технологического процесса производства;
- текущих значений U_{fh}^* переменных управления технологическим процессом;
- значений корректирующих воздействий ΔU_{fh}^* на переменные управления;
- параметров функционального состояния Z_{fh}^* технологического процесса;
- значений статистик ST_{kh}^* , $k = \overline{1, N}$, характеризующих динамику развития текущего варианта контролируемого технологического процесса производства;
- значений откликов Y_{mh}^* управляемого технологического процесса.

Система принятия решений *SPRESH* взаимодействует с оборудованием и регистрами управления технологическим процессом, используя три типа воздействий:

- корректирующие воздействия ΔU_{fh}^* на переменные управления технологическим процессом производства;

– сигналы α_{rh}^* переключения устройства оборудования на резервное или перевода соответствующих устройств на профилактику.

С имитационной моделью вероятностного сетевого графика, который является аналогом реального технологического процесса производства, система принятия решений *SPRESH* связана аналогичным набором переменных, параметров управления и индикаторов. На входы и выходы системы *SPRESH* через соответствующие средства сопряжения от имитационной модели поступают множества индикаторов, глобальных переменных и параметров моделирования $\{G_{rh}\}$, $\{ind_{rh}\}$, $\{\pi_{abr h}\}$, $\{Z_{fh}\}$, $\{U_{fh}\}$, $\{ST_{kh}\}$, $\{Y_{mh}\}$, которые имеют тот же смысл, что и рассмотренные выше.

От системы *SPRESH* на имитационную модель вероятностного сетевого графика поступают корректирующие воздействия ΔU_{fh} на переменные управления технологическим процессом, сигналы α_{rh} переключения оборудования на резервное или перевода соответствующих устройств на общую профилактику, а также значения X_{nh} , где $n = \overline{1, N_h}$, n -го параметра описания процесса в h -м варианте его реализации.

Для связи системы *SPRESH* с блоком управления *EXPERT* используется множество воздействий $\{\theta_{q_i}\}$, где $q_i = \overline{1, l}$, с одной стороны понятных эксперту, а с другой стороны преобразующихся системой *SPRESH* во внутреннее представление для использования в имитационной модели вероятностного сетевого графика. Для обеспечения этой функции в составе *SPRESH* имеется системный модуль связи с блоком управления *EXPERT*, который является переводчиком информации между системой *SPRESH*, блоком управления *EXPERT*, имитационной моделью ВСГР и реальным технологическим процессом производства.

Перечисленные выше глобальные переменные комплекса имитации, управляющие воздействия и индикаторы формируются специальными схемами контроля за функционированием оборудования и запоминаются в информационной базе данных имитационной модели (ИБД).

Организация оперативного управления надежностью функционирования оборудования. Особенностью использования ИМ ВСГР является наличие блока управления *EXPERT*, который осуществляет непосредственное взаимодействие с системой принятия решений *SPRESH*. При этом учитывается, что скорость реакции человека значительно ниже скорости обработки управляющей информации системой *SPRESH*. Поэтому в качестве буфера обмена между ними используется информационная база данных модели, а информация о состояниях технологического процесса передается в блок управления *EXPERT* в виде, удобном для ее восприятия специалиста-эксперта.

В качестве входной информации через блок управления эксперт получает отображение индикаторов состояния оборудования (θ_1), график использования ресурсов и диаграммы работы оборудования (θ_2), а также таблицы интегральных откликов и статистик моделирования (θ_3). Отметим, что на динамику имитации ВСГР влияют следующие управляющие воздействия эксперта: немедленная остановка имитации (θ_4), переход на профилактику или групповое резервирование оборудования (θ_5), установка новых начальных значений (θ_6) компонентов вектора параметров $\{X_{nh}\}$ или модификация диапазонов изменения индикаторов состояния ПС $TGZ = (Z_{fh}^-, Z_{fh}^+)$, а также модификация содержимого таблицы корректировки вектора U_{fh} переменных управления технологическим процессом.

Перед каждой реализацией ВСГР эксперт может изменять значения множества $\{X_{hs}\}$ и характеристики G_{rh} надежности устройств $MTXO_{ij}$. Такой подход к заданию исходных данных превращает специализированную модель в инструмент управления динамикой реализации тех-

нологических процессов производства. Это тем более важно, когда имитация на модели происходит с упреждением τ_{upr} функционирования реального технологического процесса, и результаты имитационного моделирования можно учесть при модификации переменных управления технологическим процессом производства для контроля за состоянием оборудования.

Особенно эффективно использование специализированной модели в тех случаях, когда интервалы времени τ_{SOB_j} между чрезвычайными событиями в медленно развивающемся технологическом процессе достаточны для оперативного управления ($\tau_{SOB_j} > T_{kph}$, где T_{kph} – критическое время реализации процесса, ранее полученное на имитационной модели).

Кроме того, важной задачей использования имитационной модели ВСГР является постановка серий имитационных экспериментов по методике Монте-Карло с помощью модели для нахождения графиков изменения в модельном времени значений глобальных переменных $Z_{jh}(t_0)$ и $U_{jh}(t_0)$. В дальнейшем эти зависимости используются для сравнения полученных модельных значений с реальными значениями этих характеристик: $Z_{jh}(t_0)$ с $Z_{jh}^*(t)$ и $U_{jh}(t_0)$ с $U_{jh}^*(t)$, где t_0 и t – соответственно моменты времени в имитационной модели ВСГР и реальном ПС. Если для всех компонентов этих векторов абсолютное значение разности соответствующих координат находится в пределах ошибки имитации ($|Z_{jh}(t_0) - Z_{jh}^*(t)| < \delta$; $|U_{jh}(t_0) - U_{jh}^*(t)| < \delta$), то это означает, что достигнута адекватность имитационной модели в динамике реализации управления технологическим процессом производства с помощью специализированной имитационной модели.

Для обеспечения выполнения ремонтно-профилактических работ используются возможности технологического резервирования оборудования производственной системы. При этом требуется обеспечить максимально возможную производительность $\Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ производственной системы в единицу времени:

$$\Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \delta_i \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\tau_i} \int_0^{\tau_i - t_{ni}} \rho_i(t) dt \right] \rightarrow \max, \quad (1)$$

на основании измерений показаний монитора надежностных характеристик функционирования оборудования и регрессионного анализа полученных данных, где $\rho_i(t)$ – соответствующие уравнения линейной регрессии (функции падения производительности устройства i -го типа с течением времени его использования); $0 \leq \delta_i \leq 1$ – коэффициенты удельного веса оборудования i -го типа в целевой функции производительности системы; t_{ni} – время, необходимое по регламенту для проведения ремонтно-профилактических работ на оборудовании i -го типа; τ_i – оптимальное в смысле критерия (1) время между двумя последовательными операциями восстановления работоспособности на i -м оборудовании.

Таким образом, используя соответствующие вычисления, находятся оптимальные в смысле критерия (1) интервалы времени восстановлений работоспособности i -го типа оборудования производственной системы ($i = \overline{1, n}$) между двумя последовательными операциями его восстановления, доставляющих максимум целевой функции $\Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ производительности системы, что обеспечивает решение поставленной задачи.

Заключение. Приведенные в данной статье результаты относятся к вопросам, связанным с разработкой систем управления надежностью функционирования технологических процессов производства, включающих в свой состав системы управления надежностью функционирования оборудования и системы управления надежностью реализации технологических операций.

Необходимо иметь в виду, что, на современном этапе развития технологических процессов, производственные системы характеризуются широким внедрением и использованием

сложных технических комплексов, которые базируются на средствах вычислительной техники, включают в свой состав измерительные и управляющие устройства, технологическое оборудование и обслуживающий персонал.

Исследование таких систем традиционными математическими методами стало невозможным, поскольку их поведение описывается настолько большим количеством математических соотношений, что найти решения возникающих задач практически невозможно в приемлемое время даже с помощью мощных вычислительных машин.

Кроме того, аналитические соотношения, описывающие законы функционирования подобных систем, не всегда известны и имеют вероятностную природу. Их поведение зачастую определяется человеческим фактором, создающим дополнительную неопределенность при попытке его учета, а качество работы оценивается по многим составляющим.

Данная работа представляет собой реализацию универсальной методики управления вероятностным технологическим процессом производства и описание средств управления функционированием оборудования.

Практическая значимость полученных результатов состоит в обеспечении возможности непрерывного контроля за ходом развития ПС, своевременном переключении оборудования на резервное, переводе оборудования на профилактику с остановкой производства в целях предупреждения отказов и недопущения аварии в процессе реализации замкнутого технологического цикла, а также возможности внедрения данной методики и соответствующего программного обеспечения в учебный процесс для подготовки специалистов, работающих в области прикладной математики и системе министерства по чрезвычайным ситуациям.

Литература

1. Максимей, И.В. Проблемы теории и практики моделирования сложных систем / И.В. Максимей, В.С. Смородин, О.М. Демиденко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – 263 с.
2. Смородин, В.С. Метод динамической имитации вероятностных производственных систем / В.С. Смородин // Математичні машини і системи (Mathematical Machines and Systems). – 2012. – № 2. – С. 96–101.
3. Смородин, В.С. Имитационное моделирование и средства оптимизации сложных технических систем / В.С. Смородин, А.В. Клименко // Математичні машини і системи (Mathematical Machines and Systems). – 2014. – № 4. – С. 171–178.
4. Смородин, В.С. Реструктуризация имитационных моделей управляемых систем при автоматизации проектного моделирования / В.С. Смородин, А.В. Клименко, Е.И. Сукач // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 80–84.

Методика расчёта эффективности организации транспортной системы, функционирующей в условиях воздействия случайных факторов

Е.И. СУКАЧ, С.П. ЖОГАЛЬ, Д.В. ДЕРЕВЯНКО, Е.С. АБРАМОВ

Рассматривается методика оценки и прогнозирования эффективности организации транспортных систем с использованием математической модели, позволяющей описать структуру объекта и оценить характеристики его функционирования одновременно и с учётом динамически изменяющихся характеристик эффективности составляющих его элементов.

Ключевые слова: транспортная система, надёжность, эффективность, графы, автоматизация расчёта вероятностных характеристик, вероятностное моделирование.

The technique of estimation and forecasting of efficiency of the organization of transport systems with use of the mathematical model which allows describing structure of object and estimating characteristics of its functioning simultaneously and taking into account dynamically changing characteristics of efficiency of its constituent elements is considered.

Ключевые слова: transport system, reliability, efficiency, graphs, automation of calculation of probability characteristics, probabilistic modeling.

Введение. Эксплуатация транспортных систем (ТС) предполагает, как правило, различные варианты организации выполнения предписанных им функций. Выбор лучшего варианта функционирования системы в смысле исследуемого свойства должен основываться на математически обоснованном сравнении вариантов, отличающихся как структурной организацией, так и параметрами элементарных участков, составляющих систему.

Для управления дорожным движением на транспортной сети городов повсеместно используются системы управления, алгоритмы работы которых основаны на моделях потоков транспортных систем (ТС). Актуальной задачей является задача маршрутизации – нахождение кратчайшего маршрута следования. Решение этой задачи возможно с использованием классических алгоритмов Дейкстры, Беллмана-Форда, Флойда-Уоршелла [1].

Однако они применимы при определенных ограничениях ТС и их участков. В классической постановке задачи определения кратчайшего пути между заданными пунктами ТС предполагается постоянная величина характеристик участков ТС. Если такой характеристикой является длина участков, то указанные алгоритмы, основанные на аналитических расчётах [1], позволяют найти кратчайший путь. Однако выбор кратчайшего пути в смысле времени перемещения транспортных средств, стоимости и общей эффективности организации транспортного процесса требует разработки специальных методов, позволяющих учесть случайный характер этих величин.

Поэтому актуально применение методологии вероятностного моделирования [2], которая позволит последовательно решить типовые задачи моделирования, результаты которого могут служить основой принятия решения при управлении потоками ТС.

В статье излагается и иллюстрируется один из подходов для вероятностной оценки интервальных значений минимальной стоимости (максимальной эффективности) организации ТС, имеющей структурно-сложную организацию.

Вероятностная методика расчёта эффективности организации транспортной системы. Объектом исследования является ТС, которая представляется в виде графа $G(N, K)$, где $N = \{N_\nu\}, \nu = \overline{1, l}$ – вершины, $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$ – рёбра, соответствующие участкам ТС. Выбираются две терминальные вершины $N_1, N_2 \in N$, определяющие вход/выход исследуемой системы.

Исходными данными для расчёта являются вектора вероятностей, характеризующие возможные значения выбранного показателя эффективности перемещения транспорта по

участкам сети, полученные с использованием экспериментальных данных, и определяющие вероятностные состояния участков ТС.

При этом предполагается, что значение показателя эффективности организации перемещения по участкам (стоимости/времени перемещения единицы транспорта) изменяется в пределах заданных интервалов, а именно:

$$ST_i \in [ST_{i0}, ST_{in}], i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где m – число участков ТС, ST_i – стоимость/время перемещения единицы транспорта по i -му участку, ST_{i0} – нижняя граница стоимости/времени перемещения единицы транспорта по i -му участку, ST_{in} – верхняя граница стоимости/времени перемещения единицы транспорта по i -му участку. Будем полагать, участки могут находиться в двух состояниях, которым соответствуют граничные значения стоимости/времени, то есть

$$S_1 = ST_{i0}, S_2 = ST_{in}. \quad (2)$$

Ставится задача вероятностной оценки показателя эффективности (стоимости/времени) организации ТС, то есть определения значений вектора вероятностей состояний эффективности и соответствующих интервальных значений показателя эффективности по вероятностным значениям показателя эффективности перемещения единиц транспорта по участкам ТС.

Методика оценки вероятностных показателей эффективности организации ТС реализуется последовательностью следующих шагов.

Шаг 1. Генерируются все детерминированные варианты реализации случайного графа $G(N, K)$, рёбра которого имеют вероятностные веса:

$$P^i = (p_1^i, p_2^i), \sum_{j=1}^2 p_j^i = 1, i = \overline{1, m} \quad (3)$$

определяющие вероятности возможных значений показателя эффективности перемещения единиц транспорта по участкам. При рассмотрении двух значений (2) число таких вариантов $H = 2^m$. Обозначим множество вариантов реализаций случайного графа

$$H_VAR = \{G_h(N, K)\}, h = \overline{1, H} \quad (4)$$

Шаг 2. Для полученных вариантов (4), представляющих собой графы $G_i(N, K)$ с детерминированными значениями затрат на прохождение участков, на основе одного из детерминированных алгоритмов расчёта кратчайшего пути в графе [Ж] определяется величина пути минимальной стоимости/времени (максимальной эффективности) и формируется его вид в графе. В результате каждой реализации случайного графа ставится в соответствие значение стоимости/времени Φ_h , то есть:

$$G_h(N, K) \rightarrow \Phi_h, h = \overline{1, H} \quad (5)$$

Шаг 3. Вычисляются вероятности возможных значений стоимости/времени, соответствующие вариантам реализации случайного графа:

$$P(\varphi_h) = \prod_{i=1}^m p_{hi}, h = \overline{1, H}, \quad (6)$$

где p_{hi} – вероятность значения стоимости/времени прохождения i -го участка в h -ом варианте реализации случайного графа $G(N, K)$.

Шаг 4. Формируются интервальные оценки значений показателя эффективности организации ТС, образом которой является граф $G(N, K)$. С этой целью среди всех вариантов определяются минимальное и максимальное значения стоимости/времени, определяющие границы изменения стоимости/времени прохождения транспорта по сети:

$$ST_o^s = \varphi_{max} = \max_h(\varphi_h), ST_n^s = \varphi_{min} = \min_h(\varphi_h) \quad (7)$$

После чего интервал изменения стоимости/времени прохождения транспорта по сети разбивается на n интервалов, каждый из которых характеризует j -ое вероятностное состояние системы:

$$[ST_o^s, ST_n^s] \rightarrow \{[ST_0^s, ST_1^s], [ST_1^s, ST_{j+1}^s], j = \overline{1, n-2}, [ST_{n-1}^s, ST_n^s]\} \quad (8)$$

Шаг 5. Вычисляются вероятности состояний стоимости/времени перемещения транспорта, соответствующие интервалам стоимостей/времени:

$$\begin{aligned}
 P(S_1) &= \sum_{h=1}^H P(\varphi_h), \varphi_h \in [ST_0^s, ST_1^s] \\
 P(S_2) &= \sum_{h=1}^H P(\varphi_h), \varphi_h \in [ST_1^s, ST_2^s] \\
 &\dots\dots\dots \\
 P(S_n) &= \sum_{h=1}^H P(\varphi_h), \varphi_h \in [ST_{n-1}^s, ST_n^s].
 \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, результатом оценки вероятностных значений состояний показателя эффективности организации ТС является два вектора, а именно, вектор интервальных значений стоимости (8) и вектор вероятностей, характеризующий эти интервальные оценки стоимости/времени:

$$P^s = (P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_n)), \sum_{j=1}^n P(S_j) = 1. \tag{10}$$

Особенностью предложенной методики является то, что для двух состояний стоимости/времени перемещения транспорта по участкам, имеющих вероятностную природу, формируется множество состояний стоимости/времени перемещения по сети, то есть имеем отображение:

$$\{[ST_{i0}, ST_{in}], j = \overline{1, n}\} \rightarrow \{[ST_0^s, ST_1^s], \{[ST_j^s, ST_{j+1}^s], j = \overline{1, n-2}\}, [ST_{n-1}^s, ST_n^s]\} \tag{11}$$

При этом два состояния стоимости/времени прохождения участков отображаются в n состояний стоимости/времени всей ТС:

$$\{S_1, S_2\} \rightarrow \{S_1, S_2, \dots, S_n\}, \tag{12}$$

а множество векторов вероятностей отображаются в один вектор.

Полученные результаты расчета представляются в виде гистограммы, характеризующей интервальные значения стоимости/времени для заданных значений стоимости/времени прохождения транспорта по участкам.

Очевидно, что описанный алгоритм работает для ТС, включающих ограниченное число участков, поскольку увеличение числа участков приводит к экспоненциальной сложности расчётов. При рассмотрении трёх состояний пропускной способности участков число вариантов будет $H = 3^m$ и т. д. Кроме этого, применение для каждой реализации случайного графа $G(N, K)$ детерминированных алгоритмов со своими итерациями, также сказывается на времени расчёта. Поэтому при рассмотрении структурно-сложных ТС большой размерности необходим переход к методике расчёта вероятностного показателя эффективности организации ТС с использованием аппарата вероятностно-алгебраического моделирования [3].

Пример оценки эффективности организации транспортной системы структурно-сложной организации. Рассматривается типовой вариант организации ТС (рисунок 1). Схема представляет собой упрощённый вариант организации ТС и включает соединённые графические примитивы, обозначающие типовые элементы (ребра-дороги, вершины-города), имеющие вероятностные параметры.

С целью вероятностного моделирования схема была преобразована в граф (рисунок 2), с выделением элементов вероятностной модели.

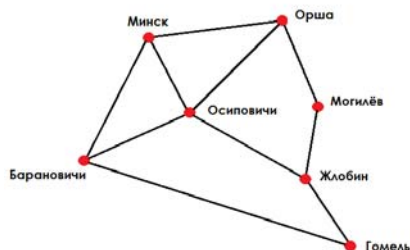


Рисунок 1 – Схема транспортной системы

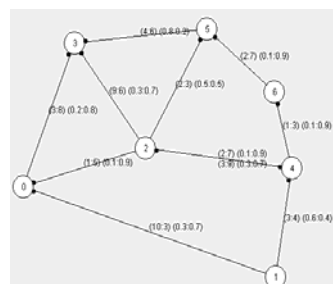


Рисунок 2 – Граф модели ТС

С учетом заданных исходных данных (рисунок 2) в результате расчёта были получены вероятностные оценки, характеризующие найденные варианты эффективности (стоимости) организации ТС (таблица 1).

Таблица 1 – Результаты расчёта вероятностей путей и их стоимостей с учётом вероятностных характеристик стоимости перемещения по участкам

Стоимость варианта пути	Вершины пути	Вероятность пути	Стоимость варианта пути	Вершины пути	Вероятность пути
11	1-0-3	0,557312	12	1-4-2-5-3	0,006286896
6	1-0-3	0,14	16	1-4-6-5-3	0,0048384
18	1-0-3	0,0719712	14	1-4-2-5-3	0,00439344
17	1-4-6-5-3	0,0671328	10	1-4-6-5-3	0,004128
13	1-0-3	0,04021812	14	1-4-6-5-3	0,00193104
12	1-4-2-3	0,036747648	15	1-4-2-3	0,0011664
13	1-4-2-3	0,024498432	10	1-4-2-0-3	0,00107136
12	1-4-6-5-3	0,009927288	11	1-4-6-5-3	0,00096
13	1-4-2-5-3	0,009906624	15	1-4-2-5-3	0,00085536
15	1-4-6-5-3	0,00854496	16	1-4-2-3	0,0007776
13	1-4-6-5-3	0,006618192	11	1-4-2-0-3	0,00071424

Максимальное значение вероятности установлено для пути 1-0-3, стоимость которого имеет значение 11 условных единиц. Наиболее эффективным является путь 1-0-3, вероятность которого принимает значение 0,14. Время расчёта составило 0,29 секунды.

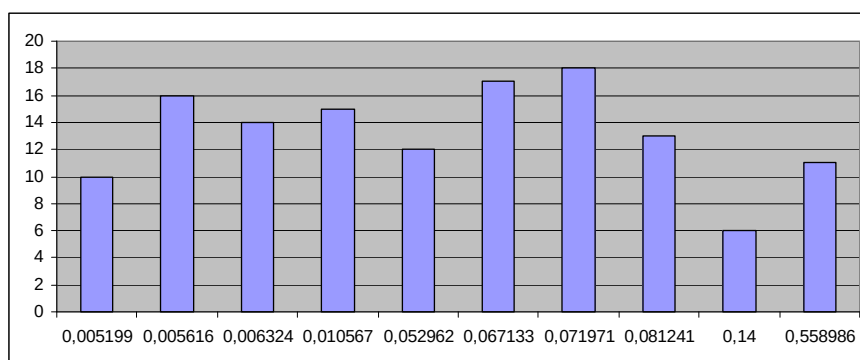


Рисунок 3 – Диаграмма вероятностных значений путей ТС и их стоимостей

Заключение. Изложенная методика направлена на решение важной практической задачи поиска максимально эффективного пути (с минимальной стоимостью/временем перемещения транспортных потоков) ТС, включающих множество участков с вероятностно изменяющимися значениями параметров эффективности (стоимости/времени). Расчёты с использованием программных средств, автоматизирующих все этапы методики, позволяют получить вероятностные оценки исследуемого свойства с вероятностной природой объекта исследования.

Литература

1. Задачи и модели исследования операций : учебное пособие / И.В. Максимей, В.Д. Левчук, С.П. Жогаль, В.Н. Подобедов ; под общ. ред. И.В. Максимей – Гомель : БелГУТ, 1999. – Ч. 3. Технология имитации на ЭВМ и принятие решений. – 150 с.
2. Сукач, Е.И. О различных подходах к исследованию вероятностных характеристик надёжности информационно-вычислительных сетей/ Е.И. Сукач, Е.И. Карасёва, Ю.В. Жердецкий, М.А. Бужан // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2015. – № 3 (90). – С. 83–87.
3. Сукач, Е.И. Метод вероятностно-алгебраического моделирования надёжности структурно-сложных систем большой размерности / Е.И. Сукач // Математические машины и системы. – 2014. – № 1. – С. 195–200.

Математика

УДК 512.542

Роль критических групп в изучении строения конечных групп

И.В. БЛИЗНЕЦ, В.Н. СЕМЕНЧУК, В.М. СЕЛЬКИН, В.Н. КОПАЧЁВ

Найдены новые характеристики критических групп (групп Шмидта, минимальных несверхразрешимых групп). Исследуется строение конечных групп по заданным свойствам критических подгрупп.

Ключевые слова: группа, критическая группа, группа Шмидта, формация, насыщенная формация.

New characterizations of critical groups (Schmidt groups, minimal non-supersolvable groups) have been found. The structure of finite groups with given properties of critical of subgroups is studied.

Keywords: group, critical group, Schmidt group, formation, saturated formation.

Введение Напомним, что минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой (критической группой) называется группа, не принадлежащая некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.

Важность изучения таких групп следует из того факта, что любая группа не принадлежащая $\mathfrak{F}$ содержит минимальную не $\mathfrak{F}$ -подгруппу.

Начало изучения таких групп восходит к работе Миллера-Морена [1]. В данной работе были изучены минимальные неабелевы группы. В настоящее время такие группы называют группами Миллера-Морена.

Следующий важный шаг в данном направлении был сделан О.Ю. Шмидтом, который в работе [2] изучил минимальные ненильпотентные группы (группы Шмидта).

В 1954 г. Хупперт [3], а затем Дерк [4] изучили минимальные несверхразрешимые группы. В 1979 г. В.Н. Семенчук в работе [5] описал строение разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп для произвольной насыщенной наследственной формации $\mathfrak{F}$. Впервые на возможность изучения строения конечных групп с помощью критических подгрупп обратил внимание С.А. Чунихин в работе [6]. Именно развитию данного направления и посвящена настоящая работа. В работе, в частности, исследуется влияние внешних свойств групп Шмидта и минимальных несверхразрешимых групп на строение конечных групп.

Предварительные результаты. Необходимые определения и обозначения можно найти в [9]. Напомним некоторые из них. Пусть P – множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$ и $p' = P \setminus \{p\}$;

$\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G ;

p -группа – группа G , у которой $p \in \pi(G)$;

G_p – силовская p -подгруппа группы G ;

$\langle H, K \rangle$ – подгруппа, порожденная подгруппами H и K ;

$\pi(X)$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из X ;

Формация $\mathfrak{F}$ – класс групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если она замкнута относительно фраттининовых расширений.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то:

$G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -абнормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ – формацию всех нильпотентных групп.

$\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$ – произведение формаций $\mathfrak{F}, \mathfrak{X}$.

$\mathfrak{N}^n$ – формация всех разрешимых групп с нильпотентной длиной равной n .

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация. Подгруппа H группы G называется:

$\mathfrak{F}$ -субнормальной, если существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H,$$

такая, что для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$ -нормальна в H_{i-1} .

В следующих леммах приводятся известные свойства $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп, которые сыграли важную роль при доказательстве основных результатов данной работы.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда:

- 1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G ;
- 2) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G , K – подгруппа группы G , то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$ -субнормальна в K ;
- 3) если H_1 и H_2 $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы G , то $H_1 \cap H_2$ – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G ;
- 4) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в K , а K $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G , то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G ;
- 5) если все композиционные факторы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то каждая субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$ -субнормальной;
- 6) если H – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы G , то H^x $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G для любых $x \in G$.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H – подгруппа группы G , N – нормальная подгруппа из G . Тогда:

- 1) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G , то HN $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G и HN/N $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G/N ;
- 2) если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G/N .

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Если H – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы G , то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G .

Основные результаты. Говорят, что некоторое множество подгрупп $\mathfrak{M}$ конечной группы G образует решетку, если $A \cap B \in \mathfrak{M}$, $\langle A, B \rangle \in \mathfrak{M}$ для любых двух подгрупп A и B из $\mathfrak{M}$. Согласно классической теореме Виландта [7], множество всех субнормальных подгрупп в любой конечной группе образует решетку. Естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$ -субнормальности.

Если $\mathfrak{F}$ – класс всех нильпотентных групп, то в каждой разрешимой группе G множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп совпадает с множеством всех субнормальных подгрупп группы G . Однако для произвольной группы это не так.

Будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством, если в любой конечной группе множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп образует решетку.

Примерами формаций с решеточным свойством являются формации всех нильпотентных, всех p -разложимых групп.

Кегель [8] и Л.А. Шеметков [9] поставили задачу о нахождении новых формаций $\mathfrak{F}$, у которых множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп в любой группе образует решетку.

Данная задача была полностью решена для насыщенных наследственных формаций в работах [10], [11]. При доказательстве теорем 1 и 2 важную роль сыграли следующие леммы.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, обладающая решеточным свойством. Тогда любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа G содержится среди групп следующих типов:

1) $|G| = p$ – простое число, $p \notin \pi(F)$;

2) G – группа Шмидта;

3) $G/\Phi(G)$ – такая монолитическая группа с неабелевым монолитом $N/\Phi(G)$, что G/N – циклическая примарная группа и $N/\Phi(G) = (G/\Phi(G))^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация. Тогда любая группа $G = F(G)H$, где H – $\mathfrak{F}$ -субнормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$.

В следующей теореме получена новая характеристика критических групп.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если в группе G существует максимальная $\mathfrak{F}$ -абнормальная подгруппа M , у которой все максимальные подгруппы $\mathfrak{F}$ -субнормальные, то G – бипримарная группа Миллера-Морена.

Следствие 1. Если в группе G существует ненормальная максимальная подгруппа M , у которой все максимальные подгруппы субнормальны в G , то G – бипримарная группа Миллера-Морена.

Следствие 2. Если в группе G существует максимальная $\mathfrak{F}$ -абнормальная подгруппа M , где $\mathfrak{F}$ – формация всех p -разложимых групп. Если все максимальные подгруппы из M $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G , то G – бипримарная группа Миллера-Морена.

Важную роль при изучении строения конечных групп играют критические группы. Эта роль проиллюстрирована на следующих теоремах.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация содержащая все нильпотентные группы с решеточным свойством, у которой все минимальные не $\mathfrak{F}$ -группы разрешимы. Если в группе G все минимальные не $\mathfrak{F}$ -подгруппы $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G , то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – формация всех нильпотентных групп, то из теоремы 2 получаем

Следствие 1. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то $G/F(G)$ – нильпотентная группа.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, R – подгруппа, порожденная всеми минимальными не $\mathfrak{F}$ -группами группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $G = RH$, где $H \in \mathfrak{F}$;

2) если максимальная подгруппа M группы G перестановочна со всеми минимальными не $\mathfrak{F}$ -подгруппами из G , то $M/M_G \in \mathfrak{F}$;

3) если $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация и все минимальные не $\mathfrak{F}$ -группы из G разрешимы и перестановочны со всеми силовскими подгруппами из G , то G разрешима;

4) если все минимальные не $\mathfrak{F}$ -группы группы G разрешимы и субнормальны в G , то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Следствие 1. Если в группе G все подгруппы Шмидта перестановочны со всеми силовскими подгруппами из G , то G – разрешимая группа.

В работе [12] были полностью описаны конечные группы, у которых все подгруппы Шмидта субнормальны. Отсюда возникает следующая задача.

Задача 1. Получить описание конечных групп, у которых все подгруппы Шмидта перестановочны со всеми силовскими подгруппами.

Следствие 2. Если в группе G все минимальные несверхразрешимые подгруппы субнормальны, $G/F(G)$ – сверхразрешимая группа.

Задача 2. Получить описание конечных групп, у которых все минимальные несверхразрешимые подгруппы субнормальны.

Следствие 3. Если в группе G все минимальные несверхразрешимые подгруппы перестановочные со всеми силовскими подгруппами G , то G – разрешимая группа.

Задача 3. Получить описание конечных групп G , у которых все минимальные несверхразрешимые подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами из G .

Обозначим через $\mathcal{U}$ – формацию всех сверхразрешимых групп.

Теорема 4. Пусть в разрешимой группе G существует максимальная подгруппа M непримарного индекса и любая максимальная подгруппа из M $\mathcal{U}$ -субнормальна в G . Тогда G – минимальная несверхразрешимая группа.

Литература

1. Miller, G.A. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A. Miller, H.C. Moreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – V. 4. – P. 398–404.
2. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31, № 3. – С. 366–372.
3. Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlichen Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – V. 60. – P. 409–434.
4. Doerk, K. Minimal nicht Ueberauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math.Z. – 1966. – V. 91. – P. 198–205.
5. Семенчук, В.Н. Минимальные не F -группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.
6. Семенчук, В.Н. Конечные группы с системой минимальных не F -подгрупп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных групп: Тр. / Ин-т математики АН БССР. – Минск : Наука и техника, 1981. – С. 138–149.
7. Wielandt, H. Uber den Normalisator der subnormalen Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1958. – V. 69, № 8. – P. 463–465.
8. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – V. 30. – P. 225–228.
9. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
10. Ballester-Bolinches, A. On the lattice of F -subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, V.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – V. 148. – P. 42–52.
11. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: Тр. / Институт математики АН Украины. – Киев, 1993. – С. 27–54.
12. Семенчук, В.Н. Конечные группы с системой минимальных не F -подгрупп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных групп: Тр. / Ин-т математики АН БССР. – Минск : Наука и техника, 1981. – С. 138–149.

Определение рациональной конструкции РИТ-свай в нелинейно-деформируемом неоднородном грунтовом основании

Ю.Д. БОНДАРЕВА

Методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования определяется рациональная конструкция РИТ-свай.

Ключевые слова: РИТ-свая, количество уширений, зоны уплотнения, нелинейность, осадка.

The method of computer object-oriented modeling is determined by a rational construction RIT-piles.

Keywords: RIT-piles, quantity of broadening, seal area, the nonlinearity, sediment.

Физические предпосылки работы. При проектировании строительных объектов всегда возникает необходимость определения экономически эффективных фундаментов зданий для каждой строительной площадки. При определённых свойствах грунтового основания строительной площадки экономически целесообразным может оказаться фундамент на основе свай, устроенных с применением резонансно-импульсной технологии (РИТ-свай). Возникающая при этом взрывная волна в однородной среде согласно закону Паскаля по всем направлениям действует равнозначно. Диаметр образуемой полости будет зависеть от первичных характеристик грунта, от мощности и количества электровзрывов и их концентрации. Если взрывы производить в одной точке, то образуемая полость будет квазисферической. Камуфлетные уширения могут устраиваться с различными расстояниями между ними. Вокруг камуфлетных уширений образуются зоны уплотнённого грунта, которые будут частично или полностью накладываться, только соприкасаться или находиться на некотором расстоянии между собой. Несущая способность такой сваи будет определяться её геометрическими размерами, количеством уширений и физико-механическими характеристиками элементов структуры грунтового основания естественного залегания и в зонах уплотнения. Вследствие этого возникает задача определения рациональной конструкции и геометрических размеров РИТ-свай под заданную нагрузку. В целом РИТ-свая и грунтовое основание образуют сложную по структуре и свойствам нелинейную и неоднородную геотехническую систему деформируемых твёрдых тел. Исследование такой системы возможно комплексно: методами натурного эксперимента и методами математического и компьютерного моделирования [1], [3], [4].

Закон деформирования уплотняемого грунтового основания. Закон деформирования элементов структуры уплотняемого грунтового основания принят в виде степенной функции гиперболического типа в цилиндрической системе координат

$$E = a \cdot r^n, \quad a > 0, \quad n < 0; \quad R_{\text{уш}} \leq r \leq R_{\text{упл}}. \quad (1)$$

При $r = R_{\text{упл}}$ $E = E_0$, поэтому из (1) следует $E_0 = a R_{\text{упл}}^n$, $a = E_0 / R_{\text{упл}}^n$ и уравнение (1) примет вид

$$E_{\text{упл}} = E_0 \left(\frac{r}{R_{\text{упл}}} \right)^n. \quad (2)$$

В работе [2] показано, что

$$R_{\text{упл}} = (1,2 - 2) R_{\text{уш}}, \quad (3)$$

где $R_{\text{упл}}$ и $R_{\text{уш}}$ – внешний и внутренний радиусы зоны уплотнения.

Используя (1)–(3) и результаты натурного эксперимента методом компьютерного моделирования исследовалось влияние количества уширений на несущую способность свай.

Экспериментальные исследования зависимости осадки свай-РИТ от количества уширений при вертикальной нагрузке. В настоящей работе при выполнении исследований были использованы результаты натурного эксперимента по определению осадки РИТ-свай,

выполненные в отделе «Основания и фундаменты» РУП БелНИИС. На рисунках 1, 2 представлены графики зависимости осадки свай от количества уширений при различных нагрузках.

Паспорт испытания свай Рит-1 статической вдавливающей нагрузкой по СТБ 2242 на опытной площадке ОП 1 (глинистые грунты), рисунок 1, диаметр ствола сваи 151 мм, длина 3 м, уширение в уровне пяты диаметром 460 мм.

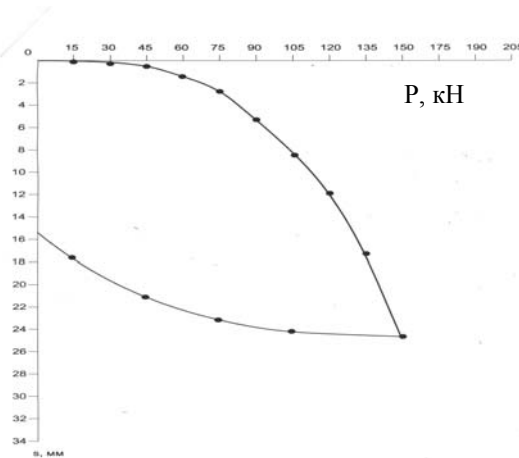


Рисунок 1 – График испытания сваи-РИТ № 1 статической вдавливающей нагрузкой

Паспорт испытания свай Рит-2–4 статической вдавливающей нагрузкой по СТБ 2242 на опытной площадке ОП 2 (слоистое основание), рисунок 2.

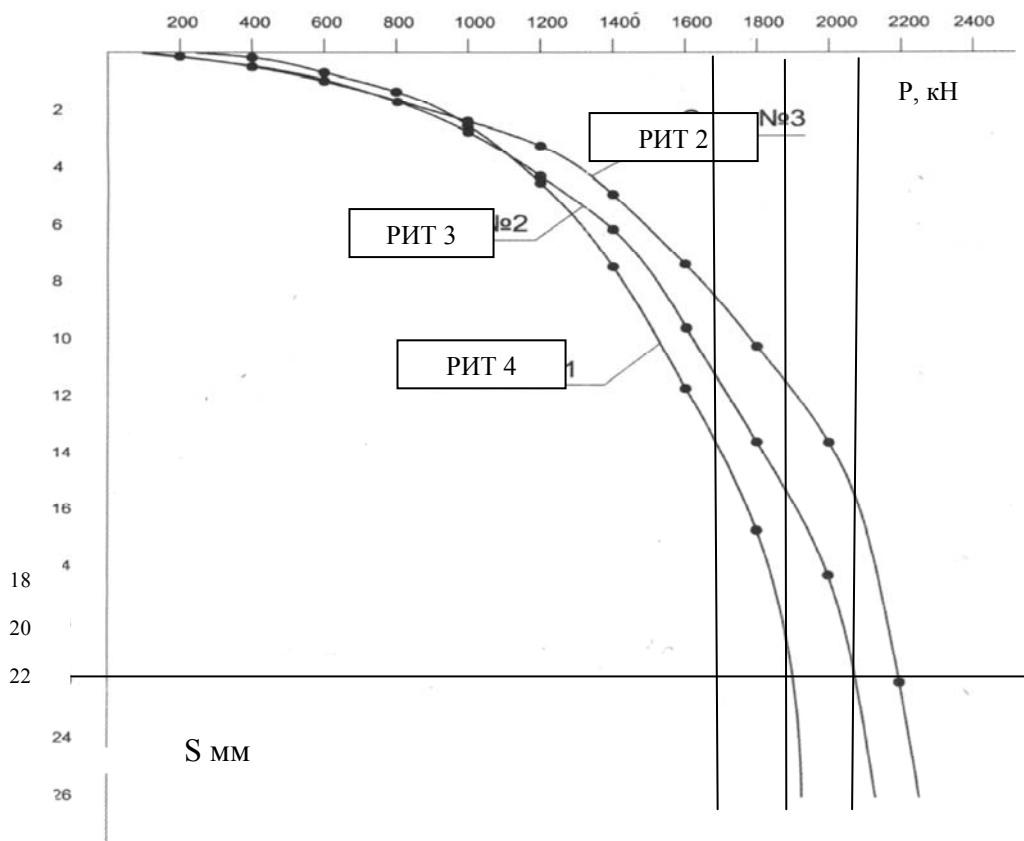


Рисунок 2 – Графики испытания свай-РИТ № 2–4 статической вдавливающей нагрузкой

1. Характеристика свай РИТ 2–4: буронабивные с диаметром ствола $\varnothing 250$ мм, выполнены по технологии РИТ, длиной 16,7 м, с уширениями $\varnothing 650$ мм вдоль ствола для РИТ-2 через 0,5 м начиная от уровня пяты; для РИТ-3 через 0,75 м; для РИТ-4 через 1 м.

2. Грунтовые условия для свай РИТ 2–4: слоистое основание из грунтов.

Средневзвешенные значения физико-механических характеристик грунтового основания получены следующие: $\varphi = 28.47$, $c = 0.004$ МПа, $E = 19.77$ МПа.

Математическая модель системы РИТ-сваи и грунтового основания. Концептуальная модель системы основания и фундаментов. Структурно грунтовые основания представлены весьма сложными напластованиями различных грунтовых слоёв, линз, включений и вклиниваний. Геометрические и физико-механические характеристики и законы деформирования каждого из указанных элементов структуры могут быть самые разнообразные, но сплошность среды не нарушается даже в случае подработанных оснований. Совершенствование методов расчёта и применение современных компьютерных технологий позволило подойти к расчёту оснований с общих позиций и учесть при этом много таких факторов, которые ранее не могли быть учтены в связи с возникающими при этом большими математическими трудностями. Всё это даёт возможность рассматривать грунтовые основания и фундаменты как произвольную неоднородную нелинейно-деформируемую среду с произвольными законами деформирования любого её элемента. Напряжения и деформации в элементах этой зоны по мере удаления от контактной поверхности убывают до полного исчезновения. Поверхность, на которой напряжения и (или) деформации равны нулю будет границей деформируемой зоны. В границах деформированной зоны будет некоторое количество структурных элементов с различными свойствами и связями между ними [5], [6].

Следовательно, основание, фундамент и здание образуют единую систему и её исследование правомочно проводить в соответствии с принципами системного подхода посредством применения компьютерных технологий [1], [2].

Для этого необходимо от определенной в полупространстве системы перейти к адекватной системе, определенной в пространственной конечномерной области. В настоящей работе в основу концептуальной модели системы основания и фундаментов положены следующие критерии:

1. Основание, фундамент и здание рассматриваются как единая система.
2. Основание по своей структуре, геологическим напластованиям и их физико-механическим свойствам может быть произвольным. Все элементы структуры основания должны быть геометрически и физически описаны.
3. В общем случае основание считается нелинейно-деформируемым.
4. Форма, размеры и жесткость фундамента могут быть произвольными.

Таким образом, концептуальная модель системы представляется как конечная совокупность механико-математических моделей элементов системы, т. е. основание, фундамент и здание рассматриваются как сложная единая система.

Общая структура математической модели систем механики грунтов. Учитывая произвольность постановки задачи решать ее лучше методом математического моделирования на основе метода конечных элементов и методов численного решения нелинейных краевых задач. Это сразу накладывает свои требования на структуру ядра математической модели. Будем строить его на основе одного из энергетических принципов, например, на основе принципа минимума полной энергии системы. Математическая модель системы оснований и фундаментов будет иметь следующее содержание:

1. Геометрическая модель геологического разреза основания.
2. Механико-математическая модель элементов грунтового основания в общем случае

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i),$$

для грунтов естественного залегания в настоящей работе принято

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^m, \quad A > 0, \quad 0 < m < 1,$$

где σ_i , ε_i – интенсивности напряжений и интенсивности деформаций, для уплотняемых элементов грунтового основания модуль деформации

$$E = a \cdot r^n, \quad a > 0, \quad n < 0; \quad R_{\text{уш}} \leq r \leq R_{\text{упл}},$$

где $R_{\text{упл}}$ и $R_{\text{уш}}$ – внешний и внутренний радиусы зоны уплотнения.

3. Система краевых условий задаётся в соответствии с классификацией поставленной задачи как краевой задачи математической физики.

4. Условия равновесия системы (ядро математической модели):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = 0, \text{ где } \Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\},$$

где Π – полная энергия деформируемой системы, $\{P\}$ – вектор внешних сил, $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{U\}$ – векторы напряжений, деформаций и перемещений, V – объём области существования исследуемой системы.

Учёт локального уплотнения и нелинейной деформируемости грунтового основания РИТ-свай. Особенностью системы грунтового основания и РИТ-свай является неоднородность её структуры и свойств. Изначально грунтовое основание может быть даже однородным, но вследствие устройства РИТ-свай всегда появляются зоны уплотнённого грунта, примыкающие к стволу сваи. На этапе построения математической модели исследуемой системы размеры и физико-механические характеристики этих зон должны быть определены. В работе [2] предложено численно-аналитическое решение этой задачи, (см. (2, 3)). Наиболее эффективная методика исследования математической модели получаемой физической системы может быть построена только на основе метода конечных элементов и метода энергетической линеаризации [1], [3].

В методе энергетической линеаризации краевой задаче нелинейной теории упругости телу объёма V с границей Γ и законом деформирования ставится в соответствие геометрически тождественное гипотетическое линейно-упругое тело с законом деформирования

$$\sigma_i^r = E^r \varepsilon_i.$$

Модуль деформации E^r подлежит определению и должен быть таким, чтобы при тождественных граничных условиях для обоих тел их смещения совпадали.

В силу поставленного условия для модуля деформации E^r и тождественности граничных условий для рассматриваемых твёрдых тел можно утверждать, что работы внешних сил на смещениях для исследуемого нелинейно – деформируемого и гипотетического линейно-упругого тел будут равны, т. е. будем иметь $W^n = W^r$, тогда

$$\delta \int_V (\Pi^n - \Pi^r) dV = \delta \int_V (\int \sigma_i^n d\varepsilon_i - \int \sigma_i^r d\varepsilon_i) dV = \delta \int_V (\int f^{(**)} \varepsilon_i d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i d\varepsilon_i) dV = 0,$$

где Π^n – энергия деформации нелинейно-упругого тела; Π^r – энергия деформации гипотетического линейно-упругого тела; индексы « n » и « r » – признаки нелинейно-упругого и гипотетического линейно-упругого тел.

Полученное выражение представим в следующей форме

$$\delta \int_V \varepsilon_i (F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r / 2) dV = \int_V \delta \varepsilon_i (F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r / 2) dV = 0, \quad (4)$$

где $F(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-1} \int f^{(**)} \varepsilon_i d\varepsilon_i$.

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления из (4) следует:

$$F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r / 2 = 0. \quad (5)$$

При законе деформирования в виде степенной функции из (5) получим:

$$\sigma_i^n = 0,5 (1 + m) \sigma_i^e \quad (6)$$

Подставим (6) в уравнение состояния

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^m, \quad A > 0, \quad 0 < m < 1,$$

и, учитывая закон Гука $\sigma_i^e = E \varepsilon_i^e$, решим его относительно ε_i , получим:

$$\varepsilon_i = \left(\frac{1 + m}{2 A} E_0 \varepsilon_i^e \right)^{\frac{1}{m}}, \quad E^r = \frac{\sigma_i^e}{\varepsilon_i} = E_0 \left[\frac{2 A}{(1 + m) E_0 \varepsilon_i^{1-m}} \right]^{\frac{1}{m}}.$$

Для полученных значений E^r решается линейная задача. Полученное решение будет являться и решением исходной нелинейной задачи.

Компьютерное моделирование осадки РИТ-свай в грунтовом основании в зависимости от количества уширений и внешней нагрузки.

Исходные данные. При компьютерном моделировании сложной нелинейной системы «РИТ-свая – грунтовое основание» необходимы следующие исходные данные:

1. Область определения системы: определяется форма и начальные размеры расчётной области, при этом определяется мощность и глубина залегания слоёв, линз и включений грунтов с указанием их физико-механических характеристик и законов деформирования.

2. Величина и характер распределения внешней нагрузки.

3. Параметры дискретизации: определяются исходя из размеров, структуры и свойств грунтового основания и РИТ-свай.

Построение виртуальной модели системы. При работе с программным обеспечением компьютерного моделирования заданной структуры сваи и грунтовых оснований выполняются следующие действия, рисунок 3:

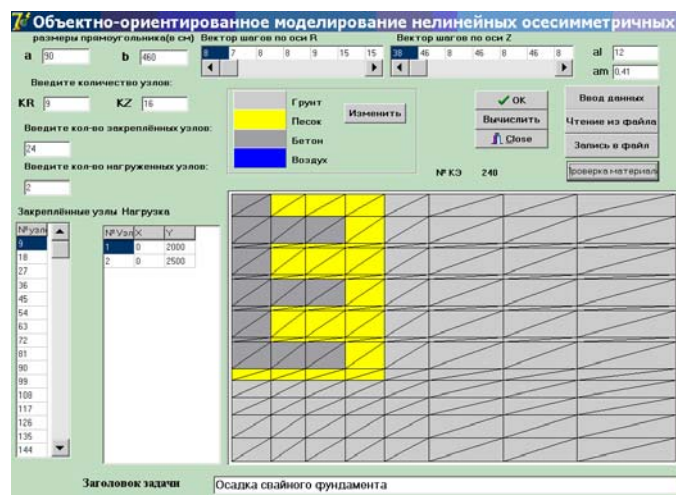


Рисунок 3 – Главное окно приложения – Компьютерная модель системы

1. Формируются вектора для автоматического построения дискретизованной области;
2. Создается наполнение базы данных характеристик грунтового основания;
3. Формируются вектора граничных условий для заданной системы;
4. На экране монитора строится пространственная виртуальная физическая модель системы, производится адресная привязка конструктивных элементов фундамента, при этом каждому конечному элементу системы назначаются его начальные свойства, считываемые из соответствующей базы данных (рисунок 3).

Далее происходит численное решение сформированной задачи. Результаты решения представлены значениями компонент векторов перемещений для каждого узла дискретизованной области при условиях линейного и нелинейного деформирования.

Компьютерное моделирование. В плане приведенных экспериментальных исследований зависимости осадки сваи-РИТ от количества уширений при вертикальной нагрузке методом компьютерного моделирования исследовалась зависимость осадки РИТ-свай от количества и расположения уширений и зон локального уплотнения

РИТ-свая № 1: рисунок 1, опытная площадка ОП 1, диаметр ствола сваи 151 мм, длина 3 м, уширение в уровне пяты диаметром 460 мм.

Для этой физической системы было построено несколько модельных задач, отличающихся количеством уширений и расстояниями между ними. Для каждой модельной задачи по приведенному выше алгоритму определялись зоны уплотнения грунта и его физико-механические характеристики. Определялись осадки РИТ-свай в зависимости от количества уширений, их расположения и внешней нагрузки, соответствующей данным эксперимента. Результаты вычислений представлены в таблицах № 1, 2, 3 и в графиках на рисунках 4, 5.

Таблица № 1 – Осадка РИТ-свай, S_{mm} , в зависимости от нагрузки и количества уширений

P, τ n	3	6	9	12	14
Опыт	0,2	1,7	5,6	12,1	18,8
1	0,32	1,88	5,7	12,3	18,54
2	0,164	1,0	2,9	6,2	9,3
3	0,1	0,6	1,77	3,78	5,7
4	0,085	0,52	1,53	3,28	4,94

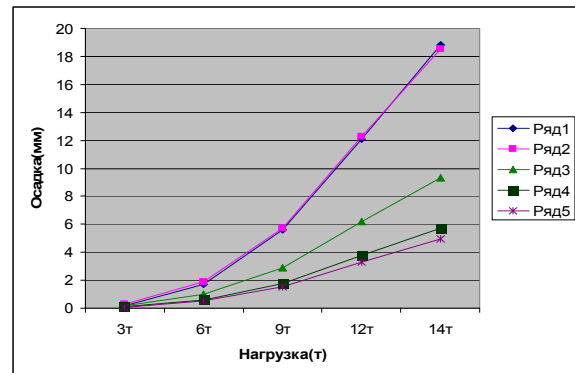


Рисунок 4 – Графики осадки $S(mm)$ РИТ-свай в зависимости от нагрузки при фиксированном количестве уширений

Таблица № 2 – Осадка РИТ-свай, S_{mm} , в зависимости от количества уширений при заданных нагрузках

опыт	1	2	3	4+
0,2	0,32	0,164	0,1	0,085
1,7	1,88	1,0	0,6	0,52
5,6	5,7	2,9	1,77	1,53
12,1	12,3	6,2	3,78	3,28
18,8	18,5	9,3	5,7	4,94

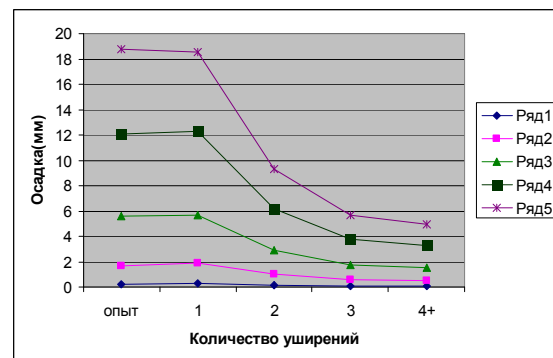


Рисунок 5 – Графики осадки РИТ-свай в зависимости от количества уширений при заданных нагрузках

Таблица 3 – Осадка РИТ-свай, S_{mm} , в зависимости от нагрузки и диаметра

P_t h	3	6	9	12	14
опыт	0,2	1,7	5,6	12,1	18,8
тонкая	3,75	23,9	70,6	152,5	230

Устройство одного уширения позволило увеличить несущую способность свай не менее как в 10 раз (таблица № 3). Устройство второго уширения, по сравнению с предыдущим вариантом, увеличило несущую способность почти в 2 раза. Устройство третьего уширения увеличило несущую способность на 35 %.

Для рассматриваемой свай оптимальное количество уширений $n = 3$, т. е. расстояние между уширениями равно их диаметру.

Следовательно, устройством для трехметровой свай с тремя уширениями является оптимальным вариантом и позволяет уменьшить расход материала на 25 %.

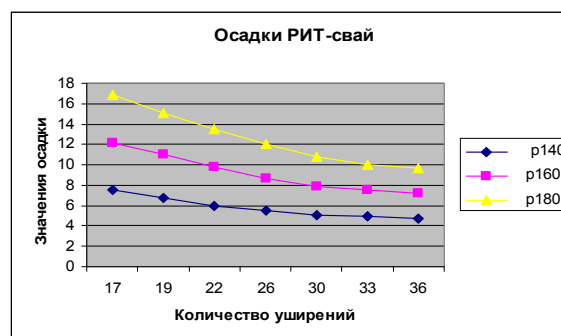
РИТ-свай № 2–4: рисунок 2, опытная площадка ОП 2 (слоистое основание), диаметр ствола свай $\varnothing 250$ мм, длиной 16,7 м, с уширениями $\varnothing 650$ мм вдоль ствола для РИТ-2 через 0,5 м начиная от уровня пяты; для РИТ-3 через 0,75м; для РИТ-4 через 1м.

Согласно данным эксперимента количество n уширений, начиная от уровня пяты, для испытываемых РИТ-свай будет равно для РИТ-2 через 0,5 м $n = 33$; для РИТ-3 через 0,75м $n = 22$; для РИТ-4 через 1м $n = 17$. Зона уплотнения образуется только в зоне РИО (резонансно – импульсной обработки) грунта и геометрически будет подобна зоне уширения. Внешний и внутренний радиусы зоны уплотнения $R_{упл}$ и $R_{уш}$.

На рисунке 6 представлены данные зависимости осадки РИТ-свай от количества n уширений при различных нагрузках и построены соответствующие графики. Для рассматриваемых свай рациональным будет $n = 26$ при всех нагрузках. При этом условии для исследуемых РИТ-свай расстояние между уширениями будет $H = L/n = 1760 / 26 = 64,23$ см.

Таблица №4 – Осадка РИТ-свай в зависимости от нагрузки и уширений

n	p140	p160	p180
17	7,5	12,2	16,9
19	6,7	11	15,1
22	6	9,8	13,5
26	5,5	8,7	12
30	5,1	7,9	10,8
33	4,9	7,5	10
36	4,7	7,2	9,7

Рисунок 5 – Графики осадки $S(\text{mm})$ РИТ-свай в зависимости от количества уширений при заданных нагрузках

Вследствие общего анализа результатов исследования показано:

1. Для РИТ-свай любой длины расстояние между уширениями можно принимать $H = D_{\text{уш}} = 2 R_{\text{уш}}$.
2. Уплотнение грунта вокруг тела РИТ-свай с диаметром ствола равном диаметру уширения увеличивает несущую способность сваи почти в 2 раза (таблица № 5).

Таблица №5 – Влияние уплотнения на осадку сваи при различных нагрузках

P_t	3	6	9	12	14
$D_{\text{св}}$					
$D_{\text{св}} = D_{\text{уш}} + \text{упл.}$	0,09	0,52	1,48	3,1	4,6
$D_{\text{св}} = D_{\text{уш}} - \text{упл.}$	0,14	0,93	2,74	5,9	8,9

Литература

1. Быховцев, В.Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.
2. Быховцев, В.Е. Математическое и компьютерное моделирование осадки РИТ-свай в нелинейно-деформируемом грунтовом основании / В.Е. Быховцев, Ю.Д. Бондарева // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2016. – № 3 (96). – С. 92–95.
3. Бондарева, Ю.Д. Моделирование методом конечных элементов неоднородных систем деформируемых твёрдых тел / Ю.Д. Бондарева // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2015. – № 6 (93). – С. 80–86.
4. Журавков, М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твёрдых деформируемых средах / М.А. Журавков. – Мн. : БГУ, 2002. – 456 с.
5. Цытович, Н.А. Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М. : Стройиздат, 1963. – 542 с.
6. Технические рекомендации по проектированию и устройству свайных фундаментов, выполненных с использованием разрядно-импульсной технологии для зданий повышенной этажности (свай-РИТ) ТР 50-180-06. – М., 2006.

Неразрешимые группы с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам

Т.В. БОРОДИЧ

Поскольку в каждой конечной группе любая подгруппа обладает добавлением, то задача исследования группы с ограничениями на добавления охватывает класс всех конечных групп. В данной работе исследуется строение конечной неразрешимой группы с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, дисперсивная по Оре подгруппа, абелева группа.

Since in every finite group any subgroup has a supplement, the problem of studying a group with restrictions on the supplement covers the class of all finite groups. The structure of a finite not solvable group with abelian additions to the non-dispersive by Ore subgroups is investigated.

Keywords: finite group, solvable group, dispersive by Ore subgroups, abelian subgroup.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Все встречающиеся обозначения и определения стандартны, их можно найти в [1], [2].

В работе [3] Л.А. Шеметков ввел понятие добавления (см. также [1, с. 132]). Добавлением к подгруппе A конечной группы G называется такая подгруппа B из G , что $AB = G$, но $AB_1 \neq G$ для любой собственной подгруппы B_1 из B . Если, кроме того, $A \cap B = 1$, то B называется дополнением к подгруппе A .

Строение групп, у которых подгруппы обладают дополнениями, исследовались в работах Ф. Холла [4], С.Н. Черникова [5, с. 291] и других авторов.

В.А. Шериев в своей работе [6] изучил строение конечной группы с дополняемыми ненормальными подгруппами. Позже в работе [7] Л.А. Шеметков исследовал группы с ограничениями на дополнения и добавления к нормальным подгруппам.

Поскольку в каждой конечной группе любая подгруппа обладает добавлением, то аналогичная задача относительно добавлений охватывает класс всех конечных групп. Однако при дополнительных ограничениях на добавления или на добавляемые подгруппы можно выделять разнообразные классы групп.

Отметим, что конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса изучены С.С. Левищенко [8]. Среди них нет неразрешимых групп.

В работе [9] В.С. Монахов исследовал свойства неразрешимой группы с нильпотентными добавлениями к несверхразрешимым подгруппам.

В настоящей заметке изучается строение неразрешимых групп с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам.

Доказывается следующий результат:

Теорема. Конечная неразрешимая группа с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам изоморфна $SL(2, 2^n) \times K$ и $SL(2, 5) \times K$, где K – абелева подгруппа, а $(2^n - 1)$ и n – простые числа.

1. Используемые обозначения и определения. Группа G называется дисперсивной, если она имеет нормальный ряд, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ называется ϕ -дисперсивной, если $p_1 \nmid \phi p_2 \nmid \dots \nmid \phi p_n$ и для любого i группа G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$. Если при этом упорядочение ϕ таково, что $p \nmid q$ влечет $p > q$, то ϕ -дисперсивная группа называется дисперсивной по Оре.

Группа с нормальной силовой p -подгруппой называется p -замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p -нильпотентной.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Конкретные группы обозначаются следующим образом: Z_n – циклическая группа порядка n ; D_{2n} – диэдральная группа порядка $2n$; E_{p^n} – элементарная абелева p -группа порядка p^n ; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно; $SL(n, P)$ – специальная линейная группа степени n над полем P ; $PGL(n, P)$ и $PSL(n, P)$ – проективная полная и специальная линейные группы степени n над полем P .

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. В простой группе $SL(2, 2^n)$, где n и $2^n - 1$ – простые числа. Каждая не дисперсивная по Оре подгруппа изоморфна $[E_{2^n}]Z_{2^n-1}$.

Доказательство. По теореме 2.54 [10, ст. 99] группа $PSL(2, p^n)$ содержит только следующие подгруппы:

- 1) элементарные абелевы p -группы порядков $p, p^2, \dots, p^n$;
- 2) циклические группы порядков z в случае, когда z делит $(p^n \pm 1)/d$, где $d = (2, p^n - 1)$;
- 3) диэдральные группы порядков $2z$, где число z такое как в пункте 2;
- 4) A_4 в случае, когда $p > 2$ или $p = 2$ и n – четное;
- 5) S_4 в случае, когда $p^{2n} \equiv 1 \pmod{16}$;
- 6) A_5 в случае, когда $p = 5$ или $p^{2n} \equiv 1 \pmod{5}$;
- 7) полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^k с циклической группой порядка t в случае, когда t делит $(p^k - 1)/d$ и t делит $(p^n - 1)$;
- 8) $PSL(2, p^k)$ в случае, когда k делит n ;
- 9) $PGL(2, p^k)$ в случае, когда p – нечетное и $2k$ делит n .

Для нашего случая, будем полагать $p = 2$, имеем $PSL(2, p^k) = SL(2, p^k)$, где n и $(2^n - 1)$ – простые числа.

Группы из пунктов 1–3 дисперсивны по Оре.

В пункте 4, группа $SL(2, 2^n)$ содержит подгруппу A_4 . Имеем $A_4 = [E_4]Z_3$, данная факторизация удовлетворяет условию леммы, когда $n=2$.

Случай из пункта 5 невозможен, так как 2^{2n} не сравнимо с 1 по модулю 16.

В пункте 6 группа $SL(2, 2^n)$ содержит подгруппу A_5 в случае, когда $p^{2n} \equiv 1 \pmod{5}$. Данная подгруппа не является не дисперсивной по Оре подгруппой.

В пункте 7 группа $SL(2, 2^n)$ содержит подгруппу являющуюся полупрямым произведением элементарной абелевой группы порядка p^k с циклической группой порядка t в случае, когда t делит $(p^k - 1)/d$ и t делит $(p^n - 1)$. По условию леммы $(2^n - 1)$ – простое число, следовательно, $tl = 2^n - 1$ отсюда $l = 1$ и $t = 2^n - 1$. Имеем $2^n - 1 = 2^k - 1$ и $k = n$. Таким образом, получаем подгруппу $[E_{2^n}]Z_{2^n-1}$, которая не дисперсивна по Оре. Данная подгруппа удовлетворяет условию леммы.

Группы из пунктов 8 и 9 не подходят, так как n – простое число и $p = 2$. Лемма доказана полностью.

Лемма 2. Пусть $N \triangleleft G$. Тогда, если $K \triangleleft G$, то либо $N \leq K$, либо $N \cap K = E$ и $NK = N \times K$.

Доказательство. Пусть $N \not\leq K$. Тогда $N \cap K \triangleleft G$ и $N \cap K$ – собственная подгруппа в N . Поэтому $N \cap K = E$ и $NK = N \times K$.

Лемма 3. (т. 2.8 [11]) Пусть $G = AB$ – неразрешимая группа, где A – группа Шмидта, B – нильпотентная группа. Тогда $G/R(G)$, где $R(G)$ – наибольшая разрешимая нормальная подгруппа, изоморфна одной из групп: $PSL(2, 7)$, $PGL(2, 7)$, $SL(2, 2^n)$ и $(2^n - 1)$ – простое число, $AutSL(2, 2^n)$, где n – некоторое простое число.

Лемма 4. (т. 2.1 [11]) Пусть A – p -группа, где p – простое число, B – группа Шмидта и $G = AB$. Если G – неразрешимая группа, то в A существует нормальная в G подгруппа P , такая,

что G/P изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,5)$, $PSL(2,7)$, $SL(2,8)$, $PGL(2,7)$, $AutSL(2,8)$ или $SL(2,5)$.

3. Строение неразрешимых конечных групп с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам.

Лемма 5. Пусть в конечной группе G каждая не дисперсивная по Оре подгруппа обладает абелевым добавлением. Тогда в любой подгруппе и в любой фактор-группе группы G каждая не дисперсивная по Оре подгруппа обладает абелевым добавлением.

Доказательство. Пусть H – произвольная подгруппа конечной группы G , и пусть A не дисперсивная по Оре подгруппа из H . Поскольку $A \leq H \leq G$, то в группе G существует абелево добавление B к не дисперсивной по Оре подгруппе A . Поэтому $G = AB$, а подгруппа $H = A(H \cap B)$, где $(H \cap B)$ – абелева в H . Следовательно, подгруппа A обладает абелевым добавлением в H .

Пусть L – нормальная в группе G подгруппа, и A/L – не дисперсивная по Оре подгруппа в G/L . Тогда A не дисперсивная по Оре подгруппа в группе G , и в G существует абелева подгруппа B такая, что $G = AB$. Поскольку BL/L абелева в G/L , то $G/L = A/L \cdot B/L$, т. е. к подгруппе A/L можно найти в G/L абелево добавление.

Теорема. Конечная неразрешимая группа с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам изоморфна $SL(2,2^n) \times K$ и $SL(2,5) \times K$, где K – абелева подгруппа, а $(2^n - 1)$ и n – простые числа.

Доказательство. Пусть G – конечная неразрешимая группа с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам. Так как группа G неразрешима, то она не 2-нильпотентна. Следовательно, по теореме IV.5.4 [2, с. 434] в G существует 2-замкнутая подгруппа Шмидта $A = [S]P$, где S – нормальная в A силовская 2-подгруппа, подгруппа P – циклическая. Поскольку A не дисперсивная по Оре подгруппа, то по условию теоремы существует абелева подгруппа B такая, что $G = AB$. Из леммы 3 заключаем, что факторгруппа G/K изоморфна $PSL(2,7)$, $PGL(2,7)$, $SL(2,2^n)$ и $(2^n - 1)$ – простое число, $AutSL(2,2^n)$, где n – некоторое простое число, а K – наибольшая разрешимая нормальная в G подгруппа.

1) Пусть $K = 1$.

а) Группа $G \cong PSL(2,7)$. По теореме 0.8. [11] данная группа факторизуется следующим образом:

$$PSL(2,7) = ([Z_7]Z_3)D_8 = ([Z_7]Z_3)S_4 = ([Z_7]Z_3)S_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*,$$

где S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL(2,7)$ симметрические группы степени 4. Так как факторизации не содержат не дисперсивных 2-замкнутых групп Шмидта, то данная группа исключается из рассмотрения.

б) Группа $G \cong PGL(2,7)$. Известно, что $|PGL(2,7) : PSL(2,7)| = 2$ и факторизуется $PGL(2,7) = [PSL(2,7)] < \alpha >$, где $|< \alpha >| = 2$. Обозначим через $N = PSL(2,7)$ нормальную подгруппу в группе $PGL(2,7)$, в данной подгруппе есть не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа $S = A_4$. По условию теоремы она должна иметь абелево добавление в группе G . Пусть B – абелево добавление в группе G к подгруппе S и $G = SB$. Следовательно, по лемме 5 $PSL(2,7) = N = N \cap G = N \cap SB = S(N \cap B)$ получаем противоречие, так как в $PSL(2,7)$ нет абелева добавления к A_4 .

в) Группа $G \cong SL(2,2^n)$ и $(2^n - 1)$ – простое число. По лемме 1 в простой группе $SL(2,2^n)$ каждая не дисперсивная по Оре подгруппа изоморфна группе $[E_{2^n}]Z_{2^n-1}$. По теореме 0.8 [11] последняя подгруппа имеет в $SL(2,2^n)$ циклическое дополнение Z_{2^n+1} . Поскольку циклическая подгруппа является абелевой, тогда группа $SL(2,2^n)$ удовлетворяет условию теоремы, когда n и $(2^n - 1)$ – простые числа.

г) Группа $G \cong AutSL(2,2^n)$. Покажем, что она не удовлетворяет условию теоремы. Пусть $X = AutSL(2,2^n)$ и $Y = SL(2,2^n)$. Известно, что Y нормальная в X подгруппа, а X/Y – циклическая группа порядка n . Используя теорему 0.8 [11] о том, что группа $SL(2,2^n)$ имеет следующие две факторизации:

$$SL(2, 2^n) = ([E_{2^n}]Z_{2^{n-1}}) \cdot Z_{2^{n+1}} = ([E_{2^n}]Z_{2^{n-1}}) \cdot D_{2(2^n+1)}.$$

Так как первая факторизация присутствует всегда, то можем ограничиться только ее рассмотрением. Для силовой 2-подгруппы Y_2 из Y по лемме Фраттини [10, ст. 55] имеем

$$X = YN_X(Y_2) = ([Y_2]Z_{2^{n-1}}) \cdot Z_{2^{n+1}} N_X(Y_2) = Z_{2^{n+1}} \cdot N_X(Y_2).$$

Если $H = Z_{2^{n+1}} \cap N_X(Y_2) \neq 1$, то H нормальна в подгруппе $Z_{2^{n+1}}$ и $H^X = H^{Z_{2^{n+1}}N_X(Y_2)} \subseteq N_X(Y_2)$. Поэтому H^X – разрешимая нормальная подгруппа группы G , что противоречит рассматриваемому пункту, где $K = 1$.

Следовательно, будем считать, что $Z_{2^{n+1}} \cap N_X(Y_2) = 1$. Имеем

$$|X| = |Z_{2^{n+1}} N_X(Y_2)| = \frac{|Z_{2^{n+1}}| \cdot |N_X(Y_2)|}{|Z_{2^{n+1}} \cap N_X(Y_2)|} = |Z_{2^{n+1}}| \cdot |N_X(Y_2)|,$$

получаем $n2^n(2^n - 1)(2^n + 1) = (2^n + 1)|N_X(Y_2)|$. Имеем $|N_X(Y_2)| = n2^n(2^n - 1)$.

Покажем, что $N_X(Y_2)$ – разрешима. Так как $N_X(Y_2) \cap Y \triangleleft N_X(Y_2)$ и $X/Y \cong N_X(Y_2)/N_X(Y_2) \cap Y$ – циклическая, то $N_X(Y_2)$ – разрешима. Следовательно, по теореме 4.35 [10, ст. 142] существует в $N_X(Y_2)$ подгруппа F порядка $n2^n$.

Для $n > 2$ подгруппа F – 2-замкнута, так как силовая 2-подгруппа нормальна в $N_X(Y_2)$. Предположим, что подгруппа F дисперсивна по Оре, тогда F – 2-нильпотентна и $F = F_2 \times F_{2'}$, но этого быть не может так как внешний автоморфизм $SL(2, 2^n)$ не централизует силовскую 2-подгруппу. Поэтому F не дисперсивна по Оре. Так как

$$|X| = |AutSL(2, 2^n)| = n |SL(2, 2^n)| = n2^n(2^n - 1)(2^n + 1),$$

то в X нет абелевой подгруппы порядка $(2^n - 1)(2^n + 1)$. Если бы такая подгруппа была, то она должна содержаться в $SL(2, 2^n)$. По выше приведенной факторизации группы $SL(2, 2^n)$ видно, что в данной группе абелевой подгруппы порядка $(2^n - 1)(2^n + 1)$ нет. Следовательно, $AutSL(2, 2^n)$ не удовлетворяет условию теоремы при $n > 2$.

Если $n = 2$, то для $AutSL(2, 4)$ справедливо следующее включение $AutSL(2, 4) > SL(2, 4) > A_4 = [E_4]Z_3$, где не дисперсивная по Оре подгруппа изоморфна знакопеременной группе A_4 порядка 12. Так как $|AutSL(2, 4)| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, то группа $AutSL(2, 4)$ по условию теоремы должна обладать абелевой подгруппой B порядка, делящегося на 10. Но такой абелевой подгруппы в $AutSL(2, 4)$ нет.

Таким образом, при $K = 1$ группа G изоморфна $SL(2, 2^n)$, если n и $2^n - 1$ – простые числа.

II) Пусть теперь $K \neq 1$.

а) Предположим, что K не является минимальной нормальной в G подгруппой, и пусть L – минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в K . По индукции, $\bar{G} = G/L = \bar{F} \times \bar{K}$, где $\bar{K}$ – абелева, а $\bar{F}$ изоморфна $SL(2, 2^n)$ или $SL(2, 5)$, n и $2^n - 1$ – простые числа. Так как $K \neq 1$, то $\bar{F}$ – собственная в $\bar{G}$ подгруппа, и для ее прообраза F в группе G по индукции получаем, что $F = F_1 \times L$, где подгруппа F_1 изоморфна $SL(2, 2^n)$ или $SL(2, 5)$.

Если α – автоморфизм группы F , то $\alpha(F_1) \cong F_1$ и их пересечение $\alpha(F_1) \cap F_1$ – нормальная в F_1 подгруппа. Если $\alpha(F_1) \neq F_1$, то $\alpha(F_1)F/F_1 \cong \alpha(F_1)/\alpha(F_1) \cap F$ является подгруппой абелевой группы $F/F_1 \cong L$. Но $\alpha(F_1) \cong SL(2, 2^n)$ или $SL(2, 5)$, а эти группы совпадают со своими коммутантами. Поэтому $\alpha(F_1) = F_1$ и подгруппа F_1 характеристическая в F .

Поскольку подгруппа F_1 характеристическая в F , а F нормальна в G , тогда F_1 нормальна в G . Из условия $L \leq K$ и индукции $F = F_1 \times L$ следует, что $L = F \cap K = (F_1 \times L) \cap K = (F_1 \cap K) \times L$. Получаем, что условие $L = (F_1 \cap K) \times L$ выполняется, когда $F_1 \cap K = 1$ и имеем $G = F_1 \times K$. Поскольку для не дисперсивной по Оре подгруппы A из

F_1 существует абелево добавление B такое, что $G = AB$. Следовательно, $K \cong G/F_1 = AB/F_1 = F_1B/F_1 \cong B/B \cap F_1$ будет абелевой подгруппой, как факторгруппа абелевой подгруппы. Условие теоремы в данном случае справедливо.

б) Теперь рассмотрим случай, когда K минимальная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что коммутант G' собственная в G подгруппа. Так как по свойствам коммутантов лемма 4.6 [10, с. 119] $(G/K)' = G'K/K$. Так как G/K – простая группа, то $(G/K)' = G/K$ и $G = G'K$. По лемме 2 получаем, что из минимальности K получаем, что либо $K \leq G'$, либо $G' \cap K = 1$. Если $K \leq G'$, то $G = G'$ – противоречие с тем, что G' собственная в G подгруппа. Следовательно, $G' \cap K = 1$ и $G = G' \times K$. Так как $G' \cong G/K \cong SL(2, 2^n)$, где n и $2^n - 1$ – простые числа. В этом случае теорема доказана.

Итак, пусть $G = G'$. Если K – собственная подгруппа в своем централизаторе, то из простоты G/K и $1 \neq C_G(K)/K \triangleleft G/K$ следует, что $C_G(K) = G$, то есть K содержится в центре G . Теперь по теореме V.25.7 [2, с. 646], получаем, что группа G изоморфна $SL(2, 2^n)$ или $SL(2, 5)$.

Пусть $K = C_G(K)$, то есть самоцентрализуема. Поскольку K разрешима, то K – r -группа, для некоторого простого числа r . Допустим, что существует простое $t > r$ делящее порядок группы G , и пусть T – силовская t -подгруппа из G . Если подгруппа $[K]T$ дисперсивна по Оре, то подгруппа у которой порядок есть степень наибольшего числа нормальна в группе, т. е. $T \triangleleft G$ и получаем $[K]T = K \times T$ нильпотентна и K не самоцентрализуема. Если $[K]T$ не дисперсивна по Оре, то по условию теоремы в группе существует абелева подгруппа D такая, что $G = ([K]T)D$. Но теперь $G/K = KT/K \cdot DK/K$. Так, как $KT/K \cong T/T \cap K = T$ будет примарной подгруппой и $DK/K \cong D/D \cap K$ – абелева подгруппа, то $G/K = KT/K \cdot DK/K$ является разрешимой группой как произведение двух нильпотентных подгрупп, противоречие с условием. Итак, r – наибольшее простое число, делящее порядок группы G .

Допустим, что K не содержится в абелевом добавлении B . Тогда B – собственная в BK подгруппа. Так, как $G = AB$, то $A \cap BK \neq 1$, где A – подгруппа Шмидта. Порядок подгруппы $|\bar{B}| = |BK/K| = 2^n + 1$ и K – r -группа, то BK группа нечетного порядка. Подгруппа $A = [S]P$ имеет порядок $2^n(2^n - 1)$ и $2^n - 1$ – простое число. Поэтому $A \cap BK = P$ так, как r – наибольшее простое число, делящее порядок G и теперь $G = S(BK)$. Поскольку $SK/K \cong S/S \cap K = S$ будет 2-подгруппой, а $BK/K \cong B/B \cap K$ – абелева подгруппа, то фактор-группа $G/K = SK/K \cdot BK/K$ будет разрешимой, как произведение двух нильпотентных подгрупп. Противоречие с условием.

Следовательно, K содержится в абелевом добавлении B и из самоцентрализуемости K и абелевости B получаем, что B – r -группа для наибольшего простого r , делящего порядок G . Из лемме 4 получаем, что G/K изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 7)$, $SL(2, 8)$, $PGL(2, 7)$, $AutSL(2, 8)$ или $SL(2, 5)$.

1) Группа $G/K \cong PSL(2, 5) = A_4Z_5$. Имеем из условия теоремы $G/K = A/K \cdot B/K$, где $A/K \cong A_4$ – не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа, а $B/K \cong Z_5$ – абелево добавление к не дисперсивной по Оре подгруппе, где K – r -группа наибольшего порядка, $r = 5$. По теореме Шура-Цассенхауза [10, ст. 136] получаем $A = L[K]$ и $L \cong A_4$. По условию теоремы в группе найдется абелево добавление N к не дисперсивной по Оре подгруппе L такое, что $G = LN$. Но теперь $K \subseteq N^X$, $G = LN^X$ и $K < N^X \subseteq C_G(K)$ – противоречие. Так как K – самоцентрализуемая подгруппа.

2) Группа $G/K \cong PSL(2, 7)$. По теореме 0.8.[7] данная группа факторизуется следующим образом:

$$PSL(2, 7) = ([Z_7]Z_3)D_8 = ([Z_7]Z_3)S_4 = ([Z_7]Z_3)S_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*,$$

где S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL(2, 7)$ симметрические группы степени 4. В данной факторизации нет не дисперсивных по Оре подгрупп, поэтому данная группа исключается из рассмотрения.

3) Группа $G/K \cong SL(2, 8)$. Имеем из условия теоремы $G/K = A/K \cdot B/K$, где по лемме 1 фактор-группа $A/K \cong [E_8]Z_7$ – не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа, а $B/K \cong Z_9$ – абелево добавление к не дисперсивной по Оре подгруппе, где K – r -группа, $r = 3$. По теореме Шура-Цассенхауза [10, ст. 136] получаем $A = L[K]$ и $L \cong [E_8]Z_7$. По условию теоремы в группе найдется абелево добавление N к не дисперсивной по Оре подгруппе L такое, что $G = LN$. Но теперь $K \subseteq N^X$, $G = LN^X$ и $K < N^X \subseteq C_G(K)$ – противоречие. Так как K – самоцентризуемая подгруппа.

4) Группа $G/K \cong PGL(2, 7)$. Известно, что $|PGL(2, 7) : PSL(2, 7)| = 2$. Отсюда получаем следующую факторизацию $PGL(2, 7) = [PSL(2, 7)] \langle \alpha \rangle$, где $|\langle \alpha \rangle| = 2$, где

$$PSL(2, 7) = ([Z_7]Z_3)D_8 = ([Z_7]Z_3)S_4 = ([Z_7]Z_3)S_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*,$$

причем S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL(2, 7)$ симметрические группы степени 4. Имеем из условия теоремы $G/K = A/K \cdot B/K$, где $A/K \cong A_4$ – не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа. По теореме Шура-Цассенхауза [10, ст. 136] получаем $A = L[K]$ и $L \cong A_4$. По условию теоремы в группе найдется абелево добавление N к не дисперсивной по Оре подгруппе L такое, что $G = LN$. Но теперь $K \subseteq N^X$, $G = LN^X$ и $K < N^X \subseteq C_G(K)$ – противоречие. Так как K – самоцентризуемая подгруппа.

5) Группа $G/K \cong AutSL(2, 8) = AutSL(2, 2^3)$. В пункте I г) показано, что в группе $AutSL(2, 2^n)$ нет не дисперсивных по Оре подгрупп, при $n > 2$.

6) Группа $G/K \cong SL(2, 5)$. В $SL(2, 5)$ существует не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа Шмидта $[Q_8]Z_3$. Имеем из условия теоремы $G/K = A/K \cdot B/K$, где $A/K \cong [Q_8]Z_3$ – не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа, а B/K – абелево добавление к не дисперсивной по Оре подгруппе. По теореме Шура-Цассенхауза [10, ст. 136] получаем $A = L[K]$ и $L \cong [Q_8]Z_3$. По условию теоремы в группе найдется абелево добавление N к не дисперсивной по Оре подгруппе L такое, что $G = LN$. Подгруппа N – r -группа наибольшего порядка, $r = 5$. Следовательно, $N = G_r$ и получаем цепь включений $K < N \subseteq C_G(K)$ – противоречие. Так как K – самоцентризуемая подгруппа. Теорема доказана полностью.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1967. – 793 p.
3. Шеметков, Л.А. Факторизация конечных групп / Л.А. Шеметков // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 178 (3). – С. 559–662.
4. Hall, Ph. Complemented groups / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Т. 12. – С. 201–204.
5. Черников, С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп / С.Н. Черников. – М. : Наука, 1980. – 382 с.
6. Шериев, В.А. Группы с дополняемыми инвариантными подгруппами / В.А. Шериев // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8(4). – С. 893–912.
7. Шеметков, Л.А. Дополнения и добавления к нормальным подгруппам конечных групп / Л.А. Шеметков // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23(5). – С. 678–689.
8. Левищенко, С.С. Конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса / С.С. Левищенко // Некоторые вопросы теории групп. – 1975. – С. 173–196.
9. Монахов, В.С. Неразрешимые конечные группы с нильпотентными добавлениями к несверхразрешимым подгруппам / В.С. Монахов // Вести академии наук Беларуси. – 1993. – Т. 3. – С. 27–29.
10. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Высшая школа, 2006. – 320 с.
11. Монахов, В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // Конечные группы. – Мн. : Наука и техника, 1975. – С. 70–100.

Маркерная кольцевая локальная сеть со случайным выбором дисциплины обслуживания с сокращением

В.В. БУРАКОВСКИЙ

Рассматривается несимметричная кольцевая локальная сеть с протоколом маркерного доступа с N абонентскими станциями, на каждой из которых имеется буфер конечной емкости. При поступлении маркера случайным образом включается дисциплина обслуживания с сокращением k . Потоки поступающих сообщений предполагаются пуассоновскими, независимыми интенсивностей $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$. Получены матрично-векторная система, позволяющая вычислить стационарные вероятности, а также основные вероятностно-временные характеристики рассматриваемой локальной сети.

Ключевые слова: маркерная кольцевая локальная сеть, станция, сообщение, буфер конечной емкости, дисциплина обслуживания с сокращением k , стационарные вероятности состояний.

The asymmetric token-passing ring local area network with N stations in which each station has a finite capacity buffer is studied. When token arrives the decrementing k discipline is on in random way. The message arrival streams are assumed to be independent, Poisson, processes with rates $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$. Matrix-vector system for the steady-state probabilities and main characteristics of the considered network are obtained.

Keywords: token-passing ring local area network, station, message, finite capacity buffer, decrementing k service discipline, steady-state probabilities.

Введение. В настоящее время среди различных классов вычислительных сетей большой интерес для автоматизации производства, учрежденческой деятельности представляют локальные вычислительные сети (ЛВС). Применение ЛВС приобрело массовый характер во многих отраслях машиностроения, особенно наукоемких, к которым относятся авиаприборостроение, ракетостроение и другие. Поэтому представляет интерес проблема повышения эффективности их практического применения.

Протокол маркерного доступа [1, с. 101] является одной из самых эффективных схем, обеспечивающих связь между станциями в кольцевой сети передачи данных. При помощи этого протокола происходит подключение подавляющего числа пользователей высокоскоростного, беспроводного и телефонного Интернета. Кольцевая ЛВС [2, с. 121] с маркерным доступом относится к протоколам детерминированного множественного доступа циклического типа. Она представляет собой совокупность абонентских станций (АС), соединенных последовательно двухточечными линиями. АС получают право на передачу данных при получении специального служебного кадра – маркера, циркулирующего по кольцу. Функционирование сети происходит в соответствии со стандартом ANSI/IEEE 802.5 [3, с. 23]. При поступлении маркера на АС случайным образом подключается дисциплина обслуживания сообщений с сокращением k [4, с. 10]. Математическими моделями КЛВС с маркерным доступом являются циклические системы массового обслуживания [5, с. 64]. Адекватность математических моделей, описывающих КЛВС с дисциплиной обслуживания с сокращением k (decrementing k) стоящих в буфере АС сообщений, проверялась при помощи разработанных имитационных моделей [6, с. 19]. Основные вероятностно-временные характеристики, полученные с помощью стационарных вероятностей состояний рассматриваемой сети, необходимы для анализа эффективности и оптимизации функционирования КЛВС [7, с. 9]. Процедура определения стационарных вероятностей состояний исследуемой сети является универсальной с учетом дисциплины обслуживания с сокращением k , которая обобщает ординарную (ordinary) и вентильную (gated) дисциплины [8, с. 39].

Описание математической модели. Рассмотрим несимметричную кольцевую локальную вычислительную сеть (КЛВС) с протоколом маркерного доступа (стандарт ANSI/IEEE 802.5). На каждой из абонентских станций (АС) КЛВС имеется конечный буфер емкости m

($m > 0$). Дисциплина обслуживания сообщений на каждой АС – с сокращением k (decrementing k). Данная дисциплина предусматривает, что маркер уходит с АС после обслуживания r сообщений, где $r = \min(\xi, k)$, ξ – число сообщений в буфере в момент поступления маркера на АС. При поступлении маркера на произвольную АС случайным образом подключается дисциплина обслуживания с сокращением k с вероятностью $g_k, 1 \leq k \leq m$. Данная дисциплина обобщает ординарную и вентильную дисциплины обслуживания при $k=1$ и $k=m$ соответственно.

Всего в сети имеется конечное число N АС. Поступающие на i -ю станцию сообщения образуют простейший поток интенсивности $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$. Обозначим через a время приема сообщения на АС-адресате, $\Delta = N\delta + a$ – время передачи сообщения по кольцу. Если с АС передаются l сообщений, то время передачи маркера на следующую АС – $\delta + l\Delta, l \leq k$.

Будем считать, что с момента прихода маркера на АС и до окончания обслуживания (до момента ухода маркера) происходит блокировка буфера станции, с которой передаются сообщения (там находится маркер). Кроме того, $\sum_{k=1}^m g_k = 1$. При поступлении сообщения на АС, буфер которой полностью занят, или на АС, где уже находится маркер, происходит его потеря.

Стационарные вероятности и вероятностно-временные характеристики. Каждая АС может находиться в одном из $(m+1)$ -го состояния в зависимости от того, сколько сообщений находится в буфере станции. Будем рассматривать поведение КЛВС в моменты поступления маркера на АС.

Под состоянием КЛВС будем понимать состояния всех АС в момент поступления маркера на каждую АС, то есть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, где $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Матрицы вероятностей переходов обозначим через $A_{i,i+1}$, где i – номер АС, на которой находится маркер, $i+1$ – номер АС, на которую переходит маркер. Эти матрицы размерности $((m+1)^N \cdot (m+1)^N)$, состоящие из вероятностей переходов, ненулевые элементы которых вычисляются по формуле:

$$a(i, j; i+1, j') = \sum_{k=1}^m g_k p_{\alpha'_i - \alpha_i + \xi_i}^{(i)}(\delta) I_{\{\alpha_i - \alpha'_i \leq k\}} \prod_{c=1, c \neq i}^N I_{\{\alpha_c < \alpha'_c\}} p_{\alpha'_c - \alpha_c}^{(c)}(k\Delta + \delta),$$

$$\text{где } \xi_i = \min(\alpha_i, k), p_r^{(i)}(t) = \frac{(\lambda_i t)^r}{r!} e^{-\lambda_i t}, p_m^{(i)}(t) = 1 - \sum_{r=0}^{m-1} p_r^{(i)}(t), i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$j = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N), j' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_N).$$

Через $P(i)$ обозначим вектор-строку стационарных вероятностей состояний i -го периодического класса, где i – номер станции, на которой находится маркер, $1 \leq i \leq N$.

Процедура определения стационарных вероятностей состояний рассматриваемой КЛВС является универсальной и имеет вид:

$$P(j) = P(1) \prod_{i=1}^{j-1} A_{i,i+1},$$

$$P(1)(I - \prod_{i=1}^N A_{i,i+1}) = 0,$$

$$P(1)(I + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k A_{i,i+1}) \hat{=} 1,$$

где $2 \leq j \leq N$, $\hat{=}$ – единичный вектор-столбец размера $(m+1)^N$, I – единичная $((m+1)^N \times ((m+1)^N))$ матрица.

Состояния КЛВС можно закодировать парами чисел (i, j) , где $1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq (m+1)^N - 1$. Здесь i определяет класс состояний, то есть равно номеру АС, на которую поступает маркер. Коэффициенты $\alpha_i, 1 \leq i \leq N$ состояния $j = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ получается из разложения j по модулю $m+1$ для $i=1$ следующим образом: $j = \sum_{r=1}^N \alpha_r (m+1)^{r-1}$. Состояния оставшихся $N-1$ классов

определяются по следующему алгоритму: состояние $(i+1, j')$ получается из (i, j) при помощи циклического сдвига всех коэффициентов $\alpha_i, 1 \leq i \leq N$, на одну позицию вправо, причем α_N становится на место α_1 .

Основными характеристиками, определяющими эффективность функционирования рассматриваемой КЛВС, являются следующие:

1. Вероятность того, что все АС свободны

$$P_0 = \sum_{i=1}^N P(i, 0).$$

2. Вероятность того, что все АС заняты

$$PZ = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{(m+1)^N-1} P(i, j) \prod_{r=1}^N I_{\{\alpha_r \neq 0\}}.$$

3. Среднее число занятых АС

$$LZ = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{(m+1)^N-1} P(i, j) \sum_{r=1}^N I_{\{\alpha_r \neq 0\}}.$$

4. Среднее число свободных АС

$$LE = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{(m+1)^N-1} P(i, j) \sum_{r=1}^N I_{\{\alpha_r = 0\}}.$$

5. Средняя длина очереди на АС в КЛВС

$$LQ = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{(m+1)^N-1} P(i, j) \sum_{r=1}^N \alpha_r.$$

6. Средняя продолжительность обслуживания сообщений на АС в КЛВС за время обращения маркера

$$TM = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{(m+1)^N-1} P(i, j) \sum_{k=1}^m g_k (k I_{\{\alpha_i \geq k\}} + \alpha_i I_{\{\alpha_i < k\}}) \Delta.$$

7. Среднее время обращения маркера по кольцу

$$TL = N\delta + TM.$$

8. Среднее число сообщений, поступивших за время обслуживания сообщений на АС КЛВС

$$MS = \lambda \times TM.$$

9. Среднее число сообщений, обслуженных на АС

$$MSS = \frac{TM}{\Delta}.$$

10. Среднее число сообщений, оставшихся в буферах АС после обслуживания

$$MNM = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{(m+1)^N-1} P(i, j) \sum_{k=1}^m g_k (\alpha_i - k) I_{\{\alpha_i > k\}}.$$

11. Среднее число свободных мест в буфере АС после обслуживания

$$MNF = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{(m+1)^N-1} P(i, j) \sum_{k=1}^m g_k ((m - \alpha_i + k) I_{\{\alpha_i \geq k\}} + (m - \alpha_i) I_{\{\alpha_i < k\}}).$$

12. Среднее число сообщений, поступивших в КЛВС за время обращения маркера

$$MNA = \lambda \times TL.$$

13. Среднее число потерянных за время обращения маркера сообщений

$$MLS = MNA - MNF.$$

14. Вероятность потери сообщения

$$PL = \frac{MLS}{MNA}.$$

Заключение. В результате проведенных исследований разработана математическая модель несимметричной кольцевой локальной сети с протоколом маркерного доступа, на каждой станции которой имеется буфер конечной емкости. Обслуживание сообщений происходит по одной из дисциплин с сокращением k , которые подключаются к очереди случайным образом в зависимости от параметра k . Предложенная модель основана на описании процесса функционирования несимметричной маркерной кольцевой ЛВС при помощи циклических марковских процессов. Показано, что стационарные вероятности состояний рассматриваемой сети определяются из систем векторно-матричных уравнений, размерность которых зависит от емкости буферов на АС и параметра k дисциплины обслуживания сообщений. На основе анализа периодов занятости получены формулы для вычисления основных характеристик функционирования сети. Локальные сети такого типа очень широко используются в настоящее время и проблемы их оптимизации, эффективности работы являются актуальными.

Литература

1. Takagi, H. Analysis of Polling Systems / H. Takagi. – Cambridge, M.A. : MIT Press, 1986. – 198 p.
2. Бакс, В. Кольцевые локальные сети с маркерным доступом и их производительность / В. Бакс // ТИИЭР. – 1989. – № 2. – С. 121–142.
3. ANSI/IEEE 802.5 Standard-1985. Token-passing Ring Access Method and Physical Layer Specification // IEEE Press. – 1985. – 89 p.
4. Бураковский, В.В. Локальные вычислительные сети : курс лекций / В.В. Бураковский, В.О. Родченко. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2008. – 78 с.
5. Бураковский, В.В. Маркерная кольцевая локальная сеть с конечными буферами и ординарным обслуживанием сообщений / В.В. Бураковский // Сборник научных трудов. – 1998. – Вып. 1. Аэрокосмическое приборостроение России. Сер. 2. Авионика. – С. 63–67.
6. Бураковский, В.В. Имитационная модель КЛВС с бесконечными буферами и вентильным обслуживанием / В.В. Бураковский // Materiály IX mezinárodní vědecko-praktická conference «Efektivní nástroje moderních věd – 2013». – Praha, 27 dubna – 05 květn 2013 roku. – Díl 40: Matematika. – Praha : Publishing House «Education and Science» s.r.o., 2013. – P. 19–22.
7. Бураковский, В.В. Кольцевая локальная сеть с протоколом маркерного доступа / В.В. Бураковский, Г.А. Медведев // Техника средств связи. Сер. Системы связи. – 1990. – Вып. 7. – С. 9–16.
8. Бураковский, В.В. Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть со случайным выбором дисциплины обслуживания / В.В. Бураковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 39–41.

А.М. ГАЛЬМАК¹, М.В. СЕЛЬКИН², А.Д. РУСАКОВ²

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, ассоциативность, идемпотент.

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, associativity, idempotent.

Ясно, что ассоциативная l -арная операция является и полуассоциативной.

Элемент a l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют его *идемпотентом*, если

$$[\underbrace{a \dots a}_l] = a.$$

Определение 1.1 [1], [3] Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k l -арную операцию $[]_{l, \sigma, k}$ следующим образом: если

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l,$$

то

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Теорема 1.1 [1], [3]. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \text{id}$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной.

2. Основной результат.

Теорема 2.1. Если полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна.

Доказательство. Необходимость. Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

Достаточность. Для любого

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$$

положим

$$[[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l]_{l, \sigma, k} \underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a} \mathbf{x}}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k),$$

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{l-1} [\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a} \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, k}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k),$$

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a} \mathbf{x}}_{l-1}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k),$$

где

$$\mathbf{a} = (\underbrace{a, \dots, a}_k).$$

Тогда согласно определению 1.1,

$$u_j = \underbrace{a \dots a}_{2l-2} x_{\sigma^{l-1}(j)},$$

$$v_j = \underbrace{a \dots a}_{l-1} s_{\sigma^{l-1}(j)} = \underbrace{a \dots a}_{l-1} \underbrace{a \dots a}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))},$$

то есть

$$v_j = \underbrace{a \dots a}_{2l-2} x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))}.$$

Так как a – идемпотент полугруппы A , то

$$u_j = a x_{\sigma^{l-1}(j)}, v_j = a x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))}.$$

Кроме того, так как l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ – полуассоциативна, то $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, откуда, $u_j = v_j$. Таким образом,

$$a x_{\sigma^{l-1}(j)} = a x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))}. \quad (2.1)$$

Предположим, что подстановка σ^{l-1} множества $\{1, \dots, k\}$ не является тождественной. Тогда найдётся такое $r \in \{1, \dots, k\}$, что

$$\sigma^{l-1}(r) \neq r.$$

Ясно, что

$$r = \sigma^{l-1}(j)$$

для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Таким образом, равенство (2.1) принимает вид

$$ax_{\sigma^{l-1}(j)} = ax_{\sigma^{l-1}(r)}, \quad (2.2)$$

при этом

$$\sigma^{l-1}(r) \neq \sigma^{l-1}(j).$$

Это неравенство позволяет положить

$$a = x_{\sigma^{l-1}(j)}, b = x_{\sigma^{l-1}(r)}.$$

Тогда равенство (2.2) принимает вид

$$aa = ab.$$

А так как a – идемпотент в полугруппе A , то получаем равенство $a = ab$, которое противоречит неравенству из условия теоремы. Таким образом, предположение о нетождественности подстановки σ^{l-1} неверно. Следовательно, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда по теореме 1.1 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ ассоциативна. Теорема доказана.

Теоремы 1.1 и 2.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.2. Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

2) $\Rightarrow$ 3) В доказательстве достаточности теоремы 2.1 установлено, что из полуассоциативности l -арной операция $[]_{l, \sigma, k}$ следует равенство $\sigma^l = \sigma$, что равносильно тождественности подстановки σ^{l-1} .

3) $\Rightarrow$ 1) Применяется теорема 1.1. Теорема доказана.

Теорема 2.2 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

Теорема 2.3. Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

3. Следствия.

Так как всякая регулярная полугруппа обладает идемпотентом, то теоремы 2.1–2.3 позволяют сформулировать следующие три следствия.

Следствие 3.1. Если A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна.

Следствие 3.2. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Следствие 3.3. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Напомним, что группоид A называют группоидом с левым сокращением, если для любых $x, a, b \in A$ из $xa = xb$ следует $a = b$.

Следствие 3.4. Если неоднородная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна.

Доказательство. Зафиксируем идемпотент a полугруппы A и предположим, что в A имеется такой элемент b , что

$$b \neq a, ab = a.$$

Тогда

$$ab = aa,$$

откуда, применяя левую сократимость в A , получаем $b = a$, что противоречит неравенству $b \neq a$. Таким образом, для любого элемента $b \in A$, отличного от идемпотента a , верно $ab \neq a$. Осталось применить теорему 2.1. Теорема доказана.

Следующие два следствия вытекают соответственно из теорем 2.2 и 2.3.

Следствие 3.5. Пусть неоднородная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Следствие 3.6. Пусть неоднородная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Так как всякий идемпотент полугруппы с левым сокращением является её левой единицей, то идемпотенты, о которых идёт речь в следствиях 3.4–3.6, являются левыми единицами полугруппы A .

4. Приложения для некоторых конкретных подстановок.

Применим полученные в предыдущих разделах результаты к некоторым конкретным подстановкам.

Теорема 4.1. Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k порядка $d \geq 2$. Тогда:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + 1 \mid t = 1, 2, \dots\}; \quad (4.1)$$

- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, d\}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Множество всех натуральных чисел $l \geq 2$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, присутствующих в (4.1) и (4.2).

Так как подстановка σ имеет порядок d , то для всех l из (4.1) верно равенство $\sigma^l = \sigma$, а для всех l из (4.2) верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$.

1) Пусть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (4.1). Тогда l принадлежит множеству из (4.2), и верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 2.3 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ – неассоциативна, что противоречит её ассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (4.1), то верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 1.1 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной.

2) Пусть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (4.2). Тогда l принадлежит множеству из (4.1), и верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 1.1 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ – ассоциативна, что противоречит её неассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (4.2), то верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 2.3 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной. Теорема доказана.

Так как любой цикл длины k из S_k имеет порядок k , то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + 1 \mid t = 1, 2, \dots\}; \quad (4.3)$$

- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, k\}. \quad (4.4)$$

Полагая в следствии 4.1 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 4.2. Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$. Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.3);

2) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.4).

Если в (4.1) и (4.2) положить $d = 2$, то множество всех l в (4.1) совпадает с множеством всех нечётных чисел без единицы, а множество всех l в (4.2) совпадает с множеством всех чётных чисел. Если при этом учесть, что порядок любой транспозиции равен двум, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.3. Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Полагая в следствии 4.3 $\sigma = (12)$, получим

Следствие 4.4. Пусть полугруппа A обладает идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$. Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $[]_{l, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Замечание 4.1. В теореме 4.1, а значит и в следствиях 4.1–4.4, можно заменить ассоциативность на полуассоциативность. Это вытекает из теоремы 2.1.

Случай регулярных полугрупп. Результаты, аналогичные теореме 4.1 и следствиям 4.1–4.4, имеют место для регулярных полугрупп.

Теорема 4.2. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.2).

Следствие 4.5. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.3);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.4).

Следствие 4.6. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$. Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.3);

2) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.4).

Следствие 4.7. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Следствие 4.8. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$. Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $[]_{l, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Замечание 4.2. В теореме 4.2, а значит и в следствиях 4.5–4.8, можно заменить ассоциативность на полуассоциативность. Это вытекает из следствия 3.1.

Случай полугрупп с левым сокращением. Результаты, аналогичные теореме 4.1 и следствиям 4.1–4.4, имеют место для полугрупп с левым сокращением.

Теорема 4.3. Пусть неоднородная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.2).

Следствие 4.9. Пусть неоднородная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.3);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.4);

Следствие 4.10. Пусть неоднородная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.3);

2) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.4).

Следствие 4.11. Пусть неоднородная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Следствие 4.12. Пусть неоднородная полугруппа A с левым сокращением обладает идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $[]_{l, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Замечание 4.3. В теореме 4.3, а значит и в следствиях 4.9–4.12, можно заменить ассоциативность на полуассоциативность. Это вытекает из следствия 3.4.

Литература

1. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

¹Могилевский государственный университет продовольствия

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Об асимптотике многочленов Эрмита-Паде экспоненциальных функций

Е.П. КЕЧКО

Изучается асимптотика многочленов Эрмита-Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\}_{p=0}^k$, где $\{\tilde{\lambda}_p\}_{p=0}^k$ – комплексные числа, расположенные на произвольной прямой в комплексной области.

Доказанные теоремы дополняют и обобщают известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, А.П. Старовойтова и А.В. Астафьевой.

Ключевые слова: система экспонент, многочлены Эрмита-Паде, асимптотика многочленов Эрмита-Паде.

In this paper we have derived asymptotics of Hermite-Padé I type polynomials for the exponential system $\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\}_{p=0}^k$, where $\{\tilde{\lambda}_p\}_{p=0}^k$ are complex numbers, located on an arbitrary line in the complex domain. The proven theorems complement and generalize known results by P. Borwein, F. Wielonsky, A.P. Starovoitov and A.V. Astafieva.

Keywords: exponential system, Hermite-Padé polynomials, asymptotic Hermite-Padé polynomials.

Введение. В работе Эрмита [1], посвященной доказательству трансцендентности числа e , были введены в рассмотрение рациональные функции

$$\pi_{n,n}^j(z; e^{j\xi}) = \frac{P_n^j(z)}{Q_n(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где многочлены $Q_n(z)$, $P_n^j(z)$ имеют степени не выше kn и определяются из равенств

$$Q_n(z)e^{jz} - P_n^j(z) = O(z^{kn+n-1}), \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

В современной терминологии многочлены $Q_n(z)$, $\{P_n^j(z)\}_{j=1}^k$ называются диагональными многочленами Эрмита-Паде 2-го рода, а дроби $\{\pi_{n,n}^j(z; e^{j\xi})\}_{j=1}^k$ – аппроксимациями Эрмита-Паде 2-го рода для системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$.

Позже Эрмит [2] определил многочлены $A_0(z), A_1(z), \dots, A_k(z)$ степени не выше $n-1$, которые тождественно не равны нулю и удовлетворяют условию

$$\sum_{p=0}^k A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (2)$$

Многочлены $\{A_p(z)\}_{p=0}^k$ принято называть диагональными многочленами Эрмита-Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$.

В одномерном случае общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде [3], а построенные в обоих случаях многочлены выражаются друг через друга:

$$A_0(z) = -P_{n-1}^1(z), \quad A_1(z) = Q_{n-1}(z).$$

Теорема Паде утверждает, что если нормировать многочлены так, чтобы $A_1(0) = 1$, то при $n \rightarrow \infty$ локально равномерно по $z \in \mathbb{C}$, т. е. на любом компакте в $\mathbb{C}$, справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad A_1(z) = e^{z/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

В многомерном случае, когда $k \geq 2$, начало интенсивного и систематического изучения свойств многочленов Эрмита-Паде 1-го и 2-го рода для произвольных систем аналитических функций связано с появлением работ К. Малера [4], [5]. Оба типа многочленов, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений в различных областях анализа (см. [6]–[8]).

В работе [9] П. Борвейн нашел асимптотику квадратичных диагональных многочленов Эрмита-Паде для системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$. Ф. Вилонский [10] получил аналогичный результат для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$ при произвольном k . В работе [11] найдена асимптотика диагональных многочленов Эрмита-Паде в случае системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ с произвольными различными отличными от нуля числами $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$, которые принадлежат действительной прямой.

В данной работе изучается асимптотика диагональных многочленов Эрмита-Паде для системы экспонент $\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\}_{p=0}^k$ в случае, когда числа $\{\tilde{\lambda}_p\}_{p=0}^k$ лежат на произвольной прямой комплексной плоскости.

Предварительные результаты. Полиномы $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, удовлетворяющие равенствам (2), могут быть получены решением линейной системы $kn + n - 1$ однородных уравнений с $kn + n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть $\tilde{C}_p$ – граница круга с центром в точке $\tilde{\lambda}_p$ столь малого радиуса, что все остальные $\tilde{\lambda}_j$ лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\tilde{\lambda}_p z}}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\tilde{\varphi}(\xi)]^n}, \quad 0 \leq p \leq k, \quad (3)$$

где $\tilde{\varphi}(\xi) = (\xi - \tilde{\lambda}_0)(\xi - \tilde{\lambda}_1) \cdots (\xi - \tilde{\lambda}_k)$ удовлетворяют (2) и всем другим условиям. Равенства (3) не являются новыми и, по всей видимости, было известно ещё Эрмиту (см. [1], [2]).

Далее при изучении асимптотики полиномов (3) будем использовать известный метод комплексного анализа. Приведем без доказательства в удобном для нас виде необходимую лемму [12, с. 415].

Лемма (метод перевала). Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой односвязной области G , содержащей кусочно гладкую кривую γ и

$$F_n = \int_{\gamma} f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Предположим, что $\max_{\xi \in \gamma} S(\xi)$ достигается только в точке z_0 , которая является внутренней точкой контура γ и простой точкой перевала, т.е. $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$. Считаем также, что в окрестности z_0 контур γ проходит через оба сектора (см. [12, с. 414]), в которых $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $f(z_0) \neq 0$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} \left(f(z_0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (4)$$

Выбор ветви корня в (4) определяется из условий

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 – угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением действительной оси, а l – линия наискорейшего спуска, проходящая через точку z_0 , т. е. для l в окрестности z_0 выполняются условия: $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ при $z \in l$, $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ при $z \in l$, $z \neq z_0$.

Асимптотика многочленов Эрмита-Паде экспоненциальных функций. Рассмотрим полиномы $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, удовлетворяющие равенству (3), где $\tilde{\lambda}_p = e^{i\alpha} \lambda_p + b$, $p = 0, 1, \dots, k$, $b \in \mathbb{R}$, а $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные действительные числа занумерованные так, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$. Если сделать замену $\xi = e^{i\alpha} \tau + b$ в равенстве (3), то получим

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha} \lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{C_p} \frac{e^{e^{i\alpha} \tau z} d\tau}{[\varphi(\tau)]^n}, \quad 0 \leq p \leq k,$$

где $\varphi(\tau) = (\tau - \lambda_0)(\tau - \lambda_1) \cdots (\tau - \lambda_k)$.

Перейдем к изучению асимптотики полиномов $A_n^p(z)$, $0 \leq p \leq k$. Для этого введем необходимые обозначения. Пусть x_j , $j = 1, 2, \dots, k$ нули функции $\varphi(\tau)$, т. е. $\varphi'(x_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$. Ясно, что x_j – действительные числа и $x_j \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$. Считаем, что G – такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^k \subset G \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_p\}_{p=0}^k$. Тогда (см. [12]) функция

$$S(\tau) = -\ln \varphi(\tau),$$

где

$$S(x_1) = -\ln |\varphi(x_1)|, \text{ если } \varphi(x_1) > 0,$$

$$S(x_1) = -\ln |\varphi(x_1)| - i\pi, \text{ если } \varphi(x_1) < 0,$$

является однозначной аналитической функцией в G . Значение функции $S(\tau)$ вычисляется по формуле

$$S(\tau) = -\ln |\varphi(\tau)| - i \left[\operatorname{Im} S(x_1) + \Delta_\gamma \arg \varphi(\tau) \right],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и τ , а $\Delta_\gamma \arg \varphi(\tau)$ – приращение аргумента $\varphi(\tau)$ вдоль кривой γ .

Если $\tau \in G$, то справедливы равенства

$$S'(\tau) = -\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = -\frac{1}{\tau - \lambda_0} - \frac{1}{\tau - \lambda_1} - \dots - \frac{1}{\tau - \lambda_k},$$

$$S''(\tau) = -\frac{\varphi''(\tau)\varphi(\tau) - [\varphi'(\tau)]^2}{[\varphi(\tau)]^2} = \frac{1}{(\tau - \lambda_0)^2} + \frac{1}{(\tau - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{1}{(\tau - \lambda_k)^2},$$

из которых следует, что $S'(x_j) = 0$,

$$S''(x_j) = -\varphi''(x_j)/\varphi(x_j) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_j) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_j)}} e^{nS(x_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Теорема 1. Пусть $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ многочлены Эрмита-Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\}_{p=0}^k$. Тогда для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$ и $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(z) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_1) e^{e^{i\alpha} (x_1 - \lambda_0) z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (5)$$

$$A_n^p(z) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_{p+1}) e^{e^{i\alpha}(x_{p+1}-\lambda_p)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_p) e^{e^{i\alpha}(x_p-\lambda_p)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad p = \overline{1, k-1}, \quad (6)$$

$$A_n^k(z) = -\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_k) e^{e^{i\alpha}(x_k-\lambda_k)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (7)$$

Доказательство. Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $\lambda_0 = 0$. Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{C_0} \frac{e^{e^{i\alpha}\tau z} d\tau}{[\varphi(\tau)]^n}, \quad (8)$$

докажем равенство (5) для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$. Для этого в интеграле (8) деформируем контур интегрирования C_0 в прямоугольник R , принадлежащий полуплоскости $\{z: -\infty < \operatorname{Re} z < \lambda_1\}$, с вершинами в точках $A(-a', -r)$, $B(-a', r)$, $C(a, r)$, $D(a, -r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a \in (0, \lambda_1)$, $a' > 0$. Так как

$$|\varphi(a + ir)| = \prod_{j=0}^k \sqrt{(a - \lambda_j)^2 + t^2} > |\varphi(a)|, \quad t \in [-r, r] \setminus \{0\},$$

то на вертикальном отрезке, соединяющем точки A и B , минимум функции $|\varphi(\tau)|$ достигается в единственной точке $-a'$. Аналогично, на вертикальном отрезке, соединяющем точки C и D , минимум функции $|\varphi(\tau)|$ достигается в единственной точке a . На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом r значения $|\varphi(\tau)|$ больше каждого из значений $|\varphi(\tau)|$ в точках $-a'$ и a . Действительно, если только $r > 2 \max\{a', \lambda_k\}$, то при $t \in [-a', a]$

$$|\varphi(t + ir)| = \prod_{j=0}^k \sqrt{(t - \lambda_j)^2 + t^2} > \max\{|\varphi(a)|, |\varphi(-a')|\}.$$

Определимся теперь с выбором a' и a . Положим $a = x_1$, а a' возьмём таким, чтобы $|\varphi(-a')| > |\varphi(a)|$. Такой выбор возможен, так как $|\varphi(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \in \mathbb{R}$ и $t \rightarrow -\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[L, N]$ направление от L к N и полагаем

$$F_n^{[L, N]}(z) = \frac{1}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{[L, N]} \frac{e^{e^{i\alpha}\tau z} d\tau}{[\varphi(\tau)]^n}.$$

Область G можно выбрать так, что $[D, C] \subset G$. Поэтому

$$F_n^{[D, C]}(z) = \frac{1}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{[D, C]} e^{e^{i\alpha}\tau z} e^{nS(\tau)} d\tau.$$

В силу выбора точки a максимум функции $\operatorname{Re} S(\tau)$ на отрезке $[D, C]$ достигается в единственной точке x_1 , которая является простой точкой перевала. Поэтому нахождение асимптотики интеграла $F_n^{[D, C]}(z)$ можно применить метод перевала (лемма). Тогда

$$F_n^{[D, C]}(z) = \frac{1}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{e^{i\alpha}x_1 z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (9)$$

Выбираем ветвь корня в (9) с учётом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_1) e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_0)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (10)$$

Применяя к интегралу $F_n^{[B,A]}(z)$ аналогичные рассуждения и учитывая выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что имеем место оценка

$$|F_n^{[B,A]}(z)| \leq \theta |e^{n(S(x_1)-\delta)}|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n \rightarrow \infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}(z)$ экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(x_1)}$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,B]}(z)$, $F_n^{[A,D]}(z)$. Значит, основной вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по отрезку $[D,C]$. Поэтому из (10) следует справедливость равенства (5) для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}$.

Равенство (7) доказывает аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учётом того, что угол $\varphi_0 = -\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенства (6). Зафиксируем произвольное $z \in \mathbb{C}$ и представим многочлен $A_n^p(z)$ в виде

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{C_p} e^{e^{i\alpha}\tau z} e^{nS(\tau)} d\tau, \quad p = \overline{1, k-1}. \quad (11)$$

В интеграле (11) деформируем контур интегрирования C_p в прямоугольник R' , принадлежащий области $\{z: \lambda_{p-1} < \operatorname{Re} z < \lambda_{p+1}\}$ с вершинами в точках $A^*(a', -r)$, $B^*(a', r)$, $C^*(a, r)$, $D^*(a, -r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a' \in (\lambda_{p-1}, \lambda_p)$, $a \in (\lambda_p, \lambda_{p+1})$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем B^* и A^* , минимум функции $|\varphi(\tau)|$ достигается в единственной точке a' , а на отрезке $[D^*, C^*]$ он достигается в единственной точке a . При достаточно большом r ($r > 2\lambda_k$) значения $|\varphi(\tau)|$ на оставшихся двух горизонтальных отрезках $[C^*, B^*]$ и $[A^*, D^*]$ больше каждого из значений $|\varphi(\tau)|$ в точках a' и a . Если положить $a' = x_p$, а $a = x_{p+1}$, то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику A_n^p будут вносить интегралы по отрезкам $[B^*, A^*]$ и $[D^*, C^*]$. Применив к ним предыдущие рассуждения, получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$F_n^{[D^*, C^*]}(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_{p+1})}} e^{nS(x_{p+1})} e^{e^{i\alpha}x_{p+1}z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (12)$$

$$F_n^{[B^*, A^*]}(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}} e^{nS(x_p)} e^{e^{i\alpha}x_p z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (13)$$

Заметим, что при выборе ветви корня в (12) $\varphi_0 = \pi/2$, а при выборе ветви корня в (13) $\varphi_0 = -\pi/2$. С учётом этого, из (12) и (13) следует равенство (6). Таким образом, для каждого фиксированного z асимптотические равенства (5)–(7) доказаны.

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(0) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_1) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^p(0) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_{p+1}) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_p) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad p = \overline{1, k-1},$$

$$A_n^k(z) = -\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_k) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Пример. Рассмотрим систему экспонент $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^2$ с различными произвольными комплексными множителями в показателях степеней, где $\tilde{\lambda}_p = e^{i\alpha} \lambda_p + b$, $p = 0, 1, 2$, $b \in \mathbb{R}$, $\{\lambda_p\}_{p=0}^2$ – набор произвольных различных действительных чисел таких, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Введем обозначения

$$p = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_0 \lambda_1 - \lambda_0 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2},$$

$$h = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 - 3(\lambda_0^3 + \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + 6\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2).$$

Проводя несложные вычисления, приходим к равенствам

$$x_1 = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - p}{3}, \quad x_2 = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + p}{3},$$

$$\varphi(x_1) = \frac{h + 2p^3}{27}, \quad \varphi(x_2) = \frac{h - 2p^3}{27},$$

$$S''(x_1) = \frac{54p}{h + 2p^3}, \quad S''(x_2) = \frac{54p}{h - 2p^3}.$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. При $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(z) = \frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}} B_n(x_1) e^{e^{i\alpha}(x_1 - \lambda_0)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^1(z) = \frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}} B_n(x_2) e^{e^{i\alpha}(x_2 - \lambda_1)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}} B_n(x_1) e^{e^{i\alpha}(x_1 - \lambda_1)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^2(z) = -\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}} B_n(x_2) e^{e^{i\alpha}(x_2 - \lambda_2)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Положим

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

тогда

$$\tilde{\lambda}_0 = b, \quad \tilde{\lambda}_1 = e^{i\alpha} + b, \quad \tilde{\lambda}_2 = e^{i\alpha}(1 + \varepsilon) + b, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$A_n^0(z) \sim \frac{1}{e^{i(3n-2)\alpha}} \sqrt{\frac{2p^3 + h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 + h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(2+\varepsilon-p)z/3},$$

$$A_n^1(z) \sim \frac{(-1)^n}{e^{i(3n-2)\alpha}} \sqrt{\frac{2p^3 - h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1+\varepsilon+p)z/3} -$$

$$-\frac{1}{e^{i(3n-2)\alpha}} \sqrt{\frac{2p^3 + h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 + h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1+\varepsilon-p)z/3},$$

$$A_n^2(z) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{e^{i(3n-2)\alpha}} \sqrt{\frac{2p^3 - h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1-2\varepsilon+p)z/3}.$$

При $\varepsilon = 1$ и $\alpha = 0$ из теоремы 1 получим асимптотические равенства, которые согласуются с соответствующими утверждениями из работ [9], [10] и [11]:

$$A_n^0(z) \sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z},$$
$$A_n^1(z) \sim (-1)^n \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^{n-1} e^{-z/\sqrt{3}} \right),$$
$$A_n^2(z) \sim (-1)^{n-1} \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}.$$

Литература

1. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci.(Paris) – 1873. – V. 77. – P. 18–293.
2. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – V. 21. – P. 289–308.
3. Padé, H. Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques / H. Padé // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – V. 16, № 3. – P. 394–426.
4. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – V. 166. – P. 118–150.
5. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – V. 168. – P. 200–227.
6. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite-Padé polynomials, in «Progress in Approximation Theory» (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York/Berlin : Springer-Verlag, 1992. – P. 127–167.
7. Суетин, С.П. Аппроксимации Падэ и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.
8. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Падэ, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.
9. Borwein, P.B. Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – V. 62. – P. 291–302.
10. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 90, № 2. – P. 283–298.
11. Астафьева, А.В. Аппроксимации Эрмита-Падэ экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.
12. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 480 с.

Многокритериальная оптимизация оценки потребительского выбора населения по товарам и товарным группам

С.В. КРАВЧЕНКО, Е.А. СИНЕЛЬНИКОВА

Определены наиболее значимые факторы, влияющие на решения потребителей и потребительские предпочтения населения по товарам и товарным группам, и их весовые коэффициенты с использованием разработанного американским математиком Т. Саати метода анализа иерархий. Обобщенное влияние факторов учтено при разработке коэффициента потребительского выбора на основе метода логарифмирования. Разработанный коэффициент потребительского выбора позволит повысить обоснованность дифференциации цен и торговых надбавок, уровень потребительской полезности выбора, усовершенствовать политику формирования структуры розничного товарооборота.

Ключевые слова: метод анализа иерархий, матрицы парных сравнений, метод логарифмирования, аддитивная модель, потребительские предпочтения, индекс потребительских цен, коэффициент потребительского выбора.

The most important factors affecting consumer decisions and consumer preferences on goods and commodity lines and their indexes using the analytic hierarchy process developed by American mathematician T. Saaty are identified. Generalized influence of the factors in the analysis of consumer choice coefficient is based on the logarithmic method. The proposed consumer choice coefficient will enhance the validity of prices and trade margins differentiation, of the level of consumer utility selection, to improve the strategy of retail trade turnover structure.

Keywords: Analytic hierarchy process, pair wise comparison matrix, logarithmic method, additive model, consumers' preference, consumer price index, consumer choice coefficient.

Введение. В отечественной практике в качестве показателя для корректировки прогнозных объемов продаж используются индексы потребительских цен (ИПЦ), чего явно недостаточно, так как потребительское поведение может меняться по отдельным товарным позициям, на отдельных сегментах рынка и учесть эти перемены в ИПЦ невозможно.

Различным аспектам теории потребления посвящены труды таких зарубежных и отечественных ученых, как Л. Клейн, Д. Робертсон, Дж. Нейман, О. Моргенштерн, П. Самуэльсон, Дж. Хикс, Р. Аллен, Г. Хатэккер, Ф. Котлер, И.Л. Акулич, Т.Н. Байбардина; исследованию взаимовлияния цен и потребительского выбора – А.С. Баздникин, Л.А. Данченко, И.В. Липсиц, М.Ю. Лев, Т.А. Слепнева; моделированию спроса и потребления – К.К. Вальтух, А.Ю. Шевяков, А.Я. Кирута. В рассмотренных работах декларируется сам факт наличия влияния разных факторов на потребительский выбор, встречаются разрозненные попытки его определения, однако комплексные исследования по проблеме и методика их проведения отсутствуют. Наибольшее распространение получила экономико-математическая модель оптимизации потребительского поведения с ограничениями бюджетного типа, где целевая функция потребления характеризует предпочтение потребителя относительно объема потребления товара (услуги) в зависимости от цены и среднедушевого дохода. Однако потребительский выбор населения определяется не только ценами на товар и размерами потребительского бюджета, но и преимуществами, полученными потребителем при его покупке или использовании. Покупатель отдает потребительское предпочтение какому-то набору товаров или признает их эквивалентными в зависимости от субъективных факторов, формирующих индивидуальный спрос. В работе И.В. Липсица сделан акцент на многофакторной функции спроса [1], построение точных и достоверных прогнозов с помощью которых при большом количестве переменных представляет собой трудоемкий процесс составления уравнений множественной регрессии в основном нелинейного характера, практическая применимость которых ставится под сомнение при эконометрическом анализе выполнения всех условий верификации модели.

Необходимость разработки метода определения предлагаемого коэффициента потребительского выбора подтверждается, во-первых, отсутствием такого коэффициента и, во-вторых,

возможностью отражения в нем положений теории и практики поведения потребителей. Объяснение изменения в потребительском поведении только изменениями цен далеко от реальности.

Основная часть. Коэффициент потребительского выбора характеризует изменение физического объема потребительских предпочтений населения по товару и i -й товарной группе в условиях сложившегося объема и структуры денежных доходов.

Значение коэффициента потребительского выбора означает:

– $K_{ПВ} > 1$ – потребительский интерес к товару (покупке) возрос;

– $K_{ПВ} = 1$ – потребительский выбор к товару (покупке) не изменился;

– $K_{ПВ} < 1$ – произошло снижение потребительского интереса к товару (покупке), поэтому следует провести дополнительные исследования для выявления причин и принятия решения о возможности сохранения данной товарной группы в прогнозируемой структуре розничного товарооборота.

В качестве аргументов коэффициента потребительского выбора нами определены наиболее значимые факторы, влияющие на решения потребителей и потребительские предпочтения населения для конкретной товарной группы.

Введем обозначения:

y_i – коэффициент потребительского выбора для i -й товарной группы;

x_{1i} – индекс потребительских цен по i -й товарной группе;

x_2 – индекс роста денежных доходов населения;

x_{3i} – индекс роста покупательной способности среднедушевых располагаемых денежных доходов населения по i -й товарной группе;

x_{4i} – динамика изменения физического объема потребления по i -й товарной группе;

x_{5i} – индекс роста доли потребительских расходов по i -й товарной группе;

x_{6i} – степень достижения медицинских норм потребления по i -й товарной группе.

Основным показателем, отражающим потребительский выбор, являются потребительские расходы по i -й товарной группе как результат полезности покупных товаров. Денежные доходы населения и цены тесно связаны между собой: первые оказывают прямое и непосредственное воздействие на потребительский выбор, вторые – на количество покупаемых товаров. Потребительская ценность (потребительский потенциал) денежных доходов непосредственно зависит от складывающихся на рынке уровня и динамики розничных цен, а уровень денежных доходов в свою очередь определяет уровень цен. Покупательная способность среднедушевых располагаемых денежных доходов населения отражает потенциальную возможность приобретения им товаров и услуг выражается через товарный эквивалент среднемесячных среднедушевых располагаемых денежных доходов. Показатель степени достижения медицинских норм потребления $H_{П}$ характеризует возможности населения по приобретению продуктов питания в количестве, удовлетворяющем потребности организма практически здорового человека в необходимых пищевых веществах и энергии. Медицинские нормы потребления продуктов питания (физические нормы питания) в Республике Беларусь научно обосновываются и утверждаются Министерством здравоохранения. Значение показателя степени достижения медицинских норм потребления $H_{П} < 1$ свидетельствует об отсутствии у населения возможности их поддержания; в этом случае значение коэффициента потребительского выбора уменьшается, отражая перераспределение потребностей в сторону других товаров. $H_{П} > 1$ означает активное потребление данного товара. Динамику физического объема потребления $P_{ф}$, характеризующую тенденции изменения потребностей населения, предлагается рассчитывать как среднее значение изменения физического объема потребления за последние три года.

Отбор факторов проведен с использованием разработанного американским математиком Т. Саати метода анализа иерархий, который позволил нам не только выделить наиболее значимые факторы, но и определить их весовые коэффициенты и направления влияния. Суть метода заключается в декомпозиции проблемы выбора товара на составляющие части и обработке суждений лиц, принимающих решения, с использованием специального приема –

метода парных сравнений (попарные сравнения факторов относительно друг друга в их влиянии на потребительский выбор). В качестве достоинств данного метода отметим простоту в применении и соответствие интуитивным и логически выверенным представлениям (специальная шкала для попарных сравнений психологически более свойственна человеку).

Нами составлены и заполнены матрицы парных сравнений значимости факторов относительно потребительского выбора для трех товаров – мука пшеничная (входит и в перечень социально значимых товаров, цены на которые регулируются Министерством торговли Республики Беларусь не более 90 дней, и в набор материальных благ и услуг для расчета бюджета прожиточного минимума; товар первой необходимости, длительного хранения с ограничением срока годности от одного месяца до года и более), сыр твердый (не входит в перечень социально значимых товаров, цены на которые регулируются Министерством торговли Республики Беларусь не более 90 дней, но входит в набор материальных благ и услуг для расчета бюджета прожиточного минимума; скоропортящийся товар, который не может храниться длительное время без холода – срок годности 90 сут.), консервы рыбные (не входит и в перечень социально значимых товаров, цены на которые регулируются Министерством торговли Республики Беларусь не более 90 дней, и не входит в набор материальных благ и услуг для расчета бюджета прожиточного минимума; товар длительного хранения без утраты основных потребительских свойств в течение нескольких лет - срок годности 24 месяца).

Для установления относительной важности факторов использовалась шкала отношений, которая позволила экспертам установить соответствие степеням предпочтения одного сравниваемого фактора перед другим с помощью дискретной шкалы 1–9: 1 – равная значимость; 3 – некоторое преобладание значимости одного фактора над другим; 5 – существенная или сильная значимость; 7 – очевидная или очень сильная значимость; 9 – абсолютная значимость; 2, 4, 6, 8 – промежуточные значения между двумя соседними суждениями. Результаты попарных сравнений факторов для муки пшеничной, сыра твердого и консервов рыбных даны в матрицах A_1 – A_3 (рисунки 1–2) соответственно.

Факторы							Факторы							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$A_1 =$	x_1	1	1/7	1	1/9	1/9	1/3	x_1	1	1/3	3	1/3	1/5	7
	x_2	7	1	5	3	1/5	5	x_2	3	1	7	3	1/3	9
	x_3	1	1/5	1	1/5	1/7	1/3	x_3	1/3	1/7	1	1/3	1/7	3
	x_4	9	1/3	5	1	1/3	3	x_4	3	1/3	3	1	1/7	5
	x_5	9	5	7	3	1	5	x_5	5	3	7	7	1	7
	x_6	3	1/5	3	1/3	1/5	1	x_6	1/7	1/9	1/3	1/5	1/7	1

Рисунок 1 – Матрицы парных сравнений факторов, влияющих на потребительский выбор муки пшеничной и сыра твердого

<i>Факторы</i>		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$A_3 =$	x_1	1	1/3	3	3	1/3	9
	x_2	3	1	5	5	1/3	9
	x_3	1/3	1/5	1	1/3	1/5	5
	x_4	1/3	1/5	3	1	1/5	7
	x_5	3	3	5	5	1	9
	x_6	1/9	1/9	1/5	1/7	1/9	1

Рисунок 2 – Матрица парных сравнений факторов, влияющих на потребительский выбор консервов рыбных

После составления матриц оценивалась их логическая согласованность, которая производилась с помощью индекса однородности (индекса согласованности) или отношения однородности (отношения согласованности).

Проверим, являются ли положительные обратносимметричные квадратные матрицы A_1 – A_3 согласованными, что означает выполнение для их элементов соотношения $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$, $i, j, k = \overline{1, n}$, где n – размер матрицы [2, с. 154].

Пусть $\mu = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1)$, где $\lambda_{\max}$ - наибольшее собственное значение матрицы. Полная согласованность матрицы суждений может быть сформулирована в виде нулевой гипотезы $H_0 : \mu = 0$, а альтернативная гипотеза $H_1 : \mu > 0$ [2, с. 168].

Соответствующая тестовая статистика будет равна $m = \frac{\tilde{\lambda}_{\max} - n}{n - 1}$, где $\tilde{\lambda}_{\max}$ - максимальное наблюдаемое собственное значение матрицы, элементы которой a_{ij} содержат случайную ошибку. Величина m называется индексом согласованности [2, с. 25].

Для расчета $\tilde{\lambda}_{\max}$ определим компоненты главного собственного вектора матрицы $\omega_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}$, $i = \overline{1, n}$, которые затем нормируем: $\omega_{in} = \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i}$.

Главный собственный вектор после нормализации ω_{in} - это вектор приоритетов рассматриваемых факторов потребительского выбора. Тогда формула $\tilde{\lambda}_{\max} = \sum_{i=1}^n \left(\omega_{in} \sum_{j=1}^n a_{ji} \right)$ позволит рассчитать $\tilde{\lambda}_{\max}$.

Расчет $\tilde{\lambda}_{\max}$ матрицы парных сравнений факторов, влияющих на потребительский выбор муки, и вектора приоритетов этих факторов представлен в таблице 1. Аналогичные таблицы получены для факторов, влияющих на потребительский выбор двух других товаров.

Индекс согласованности, сгенерированной случайным образом по шкале от 1 до 9 обратносимметричной матрицы с соответствующими обратными величинами элементов, называется случайным индексом (СИ). Для матрицы порядка 6 среднее СИ равно 1,24 [2, с. 25]. Если отношение индекса согласованности к среднему СИ для матрицы того же порядка не превосходит 0,10, то матрица считается согласованной.

Результаты расчетов согласованности матриц парных сравнений факторов, влияющих на потребительский выбор по муке (0,084), сыру (0,097), консервам рыбным (0,091), подтвердили согласованность оценки суждений.

Построенные матрицы парных сравнений факторов потребительского выбора позволили определить относительную важность факторов при выборе товаров и отобрать наиболее значимые.

Таблица 1 – Расчет согласованности матрицы парных сравнений факторов, влияющих на потребительский выбор муки

Факторы	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ω_i	ω_{in}	Расчет $\tilde{\lambda}_{\max}$
x_1	1	0,14	1	0,11	0,11	0,33	0,29	0,03	0,95
x_2	7	1	5	3	0,20	5	2,17	0,24	1,63
x_3	1	0,20	1	0,20	0,14	0,33	0,35	0,04	0,84
x_4	9	0,33	5	1	0,33	3	1,57	0,17	1,31
x_5	9	5	7	3	1	5	4,10	0,45	0,89
x_6	3	0,20	3	0,33	0,20	1	0,70	0,08	1,12
Сумма	30,00	6,88	22,00	7,64	1,99	14,67	9,18	1,00	6,73

– для муки пшеничной – изменение денежных доходов (0,24), изменение потребительских расходов (0,45), степень достижения медицинских норм потребления (0,08), изменение физического объема потребления (0,17);

– для сыра твердого – изменение потребительских цен (0,10), изменение денежных доходов (0,26), изменение потребительских расходов (0,45), изменение физического объема потребления (0,12);

– для консервов рыбных – изменение потребительских цен (0,16), изменение денежных доходов (0,27), изменение потребительских расходов (0,40).

Таким образом, безусловными факторами, определяющими потребительский выбор, являются изменение денежных доходов и изменение потребительских расходов. Для товаров, относящихся к товарам первой необходимости, большее значение имеет изменение физического объема потребления, чем изменение потребительских цен.

Метод логарифмирования позволяет решить мультипликативную модель, представленную в виде произведения взаимозависимых относительных показателей динамики отдельных факторов, приведя ее к виду аддитивной. В отличие от интегрального метода, при использовании которого обобщенное влияние распределяется между факторами в одинаковой мере, при применении метода логарифмирования имеет место логарифмически пропорциональное распределение величины совместного действия факторов между последними пропорционально доле влияния каждого отдельного фактора на сумму обобщающего показателя, что делает расчеты влияния факторов более обоснованными.

Общий вид формулы расчета коэффициента потребительского выбора (формула 1):

$$\lg y_i = \beta_i \sum_j \alpha_{ij} \lg x_{ij} \quad (1)$$

Частные случаи формулы расчета коэффициента потребительского выбора (формулы 2–4):

Для муки пшеничной:

$$\lg K_{пв_i} = \frac{0,24 \cdot \lg I_{дд} + 0,45 \cdot \lg I_{пр_i} + 0,08 \cdot \lg H_{п_i} + 0,17 \cdot \lg I_{пф_i}}{0,86} \quad (2)$$

Для сыра твердого:

$$\lg K_{пв_i} = \frac{0,10 \cdot \lg I_{ц_i} + 0,26 \cdot \lg I_{дд} + 0,45 \cdot \lg I_{пр_i} + 0,12 \cdot \lg I_{пф_i}}{0,93} \quad (3)$$

Для консервов рыбных:

$$\lg K_{пв_i} = \frac{0,16 \cdot \lg I_{ц_i} + 0,27 \cdot \lg I_{дд} + 0,40 \cdot \lg I_{пр_i}}{0,83} \quad (4)$$

При расчете нами принят ряд допущений: в качестве индекса роста денежных доходов населения использован индекс роста номинальной начисленной среднемесячной заработной платы работников; при определении индекса роста потребительских расходов, степени достижения медицинских норм потребления, динамики физического объема потребления использованы данные по сельским населенным пунктам, поскольку выше было доказано отсутствие влияния фактора региона на потребительские расходы; для всех временных периодов применены одинаковые весовые коэффициенты факторов.

Расчет коэффициента потребительского выбора населения избранного сегмента рынка Республики Беларусь за 2012–2014 гг. (таблица 2) по определенным группам товаров свидетельствует о том, что изменение потребительских предпочтений в этот период обусловлено, прежде всего, замедлением темпов роста денежных доходов. Рост потребительских цен при незначительном его росте оказывает положительное, так как потребители ожидают еще большего повышения цены вследствие чего увеличивают объемы покупок. Более значительный рост цен, конечно, не содействует росту покупок, а во многих случаях изменяет их структуру. Однако во взаимосвязи с действиями других факторов повышение цен (до 10 %) положительно влияет на объемы покупок. Так, если темпы роста денежных доходов населения превышают темпы роста индекса потребительских цен, то это способствует повышению потребительского потенциала в связи с наличием бюджетных возможностей у населения приобретать товара больше и по повышенной цене. Рост показателя степени достижения медицинских норм потребления (при условии недостижения) означает активное потребление данного товара и, следовательно, положительно влияет на рост коэффициента потребительского выбора.

Таблица 2 – Расчет коэффициента потребительского выбора населения Каменецкого района Брестской области по ряду товаров за 2012–2014 гг.

Год	Индекс потребительских цен, x_{1i}		Индекс роста денежных доходов населения, x_{2i}		Индекс роста потребительских расходов, x_{5i}		Степень достижения медицинских норм потребления x_{6i}		Динамика физического объема потребления, x_{6i}		Коэффициент потребительского выбора
	Значение	Весовой ко-эффицент	Значение	Весовой ко-эффицент	Значение	Весовой ко-эффицент	Значение	Весовой ко-эффицент	Значение	Весовой ко-эффицент	
Мука пшеничная											
2012	-	-	2,07	0,24	0,98	0,45	0,99	0,08	1,01	0,17	1,21
2013	-	-	1,36	0,24	0,99	0,45	0,99	0,08	1,02	0,17	1,09
2014	-	-	1,25	0,24	1,01	0,45	0,99	0,08	1,02	0,17	1,07
Сыр твердый											
2012	1,233	0,10	2,07	0,26	1,12	0,45	-	-	1	0,12	1,32
2013	1,101	0,10	1,36	0,26	1,00	0,45	-	-	0,99	0,12	1,10
2014	1,178	0,10	1,25	0,26	1,09	0,45	-	-	1	0,12	1,13
Консервы рыбные											
2012	1,111	0,16	2,07	0,27	1,14	0,4	-	-	-	-	1,38
2013	1,119	0,16	1,36	0,27	0,88	0,4	-	-	-	-	1,06
2014	1,092	0,16	1,25	0,27	1,05	0,4	-	-	-	-	1,12

Источник: Рассчитано на основе статистических данных [3, с. 177], [4, с. 160], [5, с. 171], [6, с. 128, 136].

Дополнительные исследования по выявлению причин развития потребительского выбора населения предлагается проводить на основе маркетинговых исследований либо экспертной оценки путем проведения анкетного опроса населения.

Заключение. Современная информационная база требует совершенствования и детализации, поскольку носит усредненный характер и не является достаточной для принятия обоснованных управленческих решений. На практике торговая организация имеет дело не с идеальным «средним потребителем», а с особенностями распределения доходов и расходов населения своего сегмента рынка, от объемов потребления которого зависят ее финансовые результаты. В условиях бюджетных ограничений необходима исходная информация, охватывающая все важнейшие аспекты рассматриваемой проблемы. Разработанный метод определения коэффициента потребительского выбора можно использовать для разных уровней управления (макроэкономический, микроэкономический), субъектов хозяйствования всех форм собственности и определенных сегментов рынка.

Литература

1. Липсиц, И.В. Коммерческое ценообразование: учебник / И.В. Липсиц. – М. : БЕК, 1997. – 353 с.
2. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.
3. Регионы Республики Беларусь, 2013 : стат. сб. : в 3 т. / Нац. стат. ком. Респ. Беларусь ; редкол. : В.И. Зиновский (пред.) [и др.]. – Минск : Нац. стат. ком. Респ. Беларусь, 2013. – Т. 2 : Основные социально-экономические показатели городов и районов. – 453 с.
4. Регионы Республики Беларусь, 2014 : стат. сб. : в 3 т. / Нац. стат. ком. Респ. Беларусь ; редкол. : В.И. Зиновский (пред.) [и др.]. – Минск : Нац. стат. ком. Респ. Беларусь, 2014. – Т. 2 : Основные социально-экономические показатели городов и районов. – 580 с.
5. Регионы Республики Беларусь. Социально-экономические показатели городов и районов, 2015 : стат. сб. : в 2 т. / Нац. стат. ком. Респ. Беларусь ; редкол. : И.В. Медведева (пред.) [и др.]. – Минск : Нац. стат. ком. Респ. Беларусь, 2015. – Т. 2. – 581 с.
6. Социальное положение и уровень жизни населения Республики Беларусь : стат. сб. / Нац. стат. ком. Респ. Беларусь ; редкол. : И.В. Медведева (пред.) [и др.]. – Минск : Нац. стат. ком. Респ. Беларусь, 2015. – 333 с.

Фигура Томсена, центроиды и самосовмещение элементов n -арных групп

Ю.И. КУЛАЖЕНКО

Установлено существование последовательности параллелограммов, которые образуют фигуру Томсена. Доказано, что вершины построенной фигуры Томсена, взятые в определенной последовательности образуют такие треугольники, что их центроиды совпадают.

Ключевые слова: n -арная группа, параллелограмм G , вектор G , центроид многоугольника G .

The existence of a sequence of parallelograms that form the Thomsen figure is considered. It is proved that the vertices of the constructed Thomsen figure taken in a certain sequence form such triangles that their centroids coincide.

Keywords: n -ary group, parallelogram G , vector G , centroid of polygon G .

Введение. В математике выделяется ряд геометрических фигур с настолько интересными свойствами, что эти фигуры получили названия, совпадающие с фамилиями их исследователей. Одна из таких фигур носит название фигуры Томсена.

Указанная фигура имеет несколько интерпретаций. Приведем, для наглядности, одну из них.

Если рассмотреть произвольный треугольник ABC и представить, что луч пересекает сторону этого треугольника (пусть BC) в произвольной точке M так, что «внутри» треугольника проходит параллельно одной из сторон (пусть AB) до пересечения с другой стороной AC в точке Q , отражается от нее, и идет параллельно BC до пересечения с AC в точке R , отражается от нее и идет параллельно AC до пересечения с BC в точке H , отражается от нее и идет параллельно AB до пересечения с AC в точке T , отражается от нее и идет параллельно BC до пересечения с AB в точке N , отражается от нее и идет параллельно AC до пересечения с BC в точке M . Таким образом, «внутри» треугольника получается замкнутая ломаная $MQRHTN$. Полученная фигура $MQRHTN$ и носит название фигуры Томсена.

В представленной работе рассматривается один из возможных n -арных аналогов фигуры Томсена, построенный на n -арной группе.

В качестве n -арного аналога параллельности берется понятие параллелограмма n -арной группы G , введенное С.А. Русаковым в [1]. Теорема 1 устанавливает существование последовательности параллелограммов, которые характерны для вышеупомянутой фигуры Томсена. Теорема 2 устанавливает, что вершины построенной фигуры Томсена, взятые в определенной последовательности образуют такие треугольники, что их центроиды совпадают [2].

Интерес, на наш взгляд, представляют полученные следствия из теоремы 2. Следствие 2.1 подтверждает, что произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин специально построенного шестиугольника – фигуры Томсена. В следствии 2.2 установлено свойство специально построенного шестиугольника (фигуры Томсена), связанное с его центроидом.

1. Используемые определения и понятия.

Определение 1 [3]. Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in G$ называют направленным отрезком G и обозначают через $\overline{ab}$.

Определение 2 [3]. Пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$ и говорят, что направленные отрезки $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ G равны, если четырехугольник $\langle a, c, d, b \rangle$ является параллелограммом G .

Пусть V – множество всех направленных отрезков G .

Отношение « $=$ » разбивает множество V на классы эквивалентности (см. [1]).

Определение 3 [3]. Если $\overline{ab} \in V$, то множество $\{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in V, \overline{uv} = \overline{ab}\}$ называют вектором G и обозначают через $\overline{ab}$ или одной малой буквой латинского алфавита; например $\overline{ab} = \overline{p}$. Через $V(G)$ обозначают множество всех векторов G .

Определение 4. Центроидом треугольника $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ n -арной группы G называют точку x из G , которая удовлетворяет следующему равенству

$$\overline{xa_1} + \overline{xa_2} + \overline{xa_3} = \vec{0}.$$

Определение 5 [3]. Два вектора $\vec{p} = \overline{ab}$ и $\vec{q} = \overline{cd}$ из $V(G)$ называют равными и пишут $\vec{p} = \vec{q}$, если их представители $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равны.

Определение 6 [3]. n -Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ справедливо равенство

$$[x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n] = [x_n x_2 \dots x_{n-1} x_1].$$

2. Основные результаты.

Теорема 1. Если G – полуабелева n -арная группа, a, b, c – произвольные точки из G , а точки $x, y \in G$ такие, что четырехугольники $\langle c, x, S_{S_b(a)}(a), b \rangle$, $\langle x, S_b(a), a, c \rangle$, $\langle S_b(a), S_c(a), y, S_{S_b(a)}(a) \rangle$ – параллелограммы G , то четырехугольник $\langle y, b, c, S_{S_c(a)}(c) \rangle$ – параллелограмм G .

Доказательство. На основе определения параллелограмма G имеем:

$$[cx^{[-2]} x^{2n-4} S_{S_b(a)}(a)] = b, \quad (1)$$

$$[x(S_b(a))^{[-2]} \underbrace{S_b(a) \dots a}_{2n-4}] = c, \quad (2)$$

$$[S_b(a)(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}] = S_{S_b(a)}(a). \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1), имеем

$$[[x(S_b(a))^{[-2]} \underbrace{S_b(a) \dots a}_{2n-4}] x^{[-2]} x^{2n-4} [S_b(a)(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}]] = b. \quad (4)$$

Преобразуем левую часть равенства (4) с учетом свойства полуабелевости G и нейтральности последовательностей $zz^{[-2]} z^{2n-4}$ и $z^{[-2]} z^{2n-4} z$ для любого $z \in G$.

$$\begin{aligned} & [[x(S_b(a))^{[-2]} \underbrace{S_b(a) \dots a}_{2n-4}] x^{[-2]} x^{2n-4} [S_b(a)(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}]] = \\ & = [[a(S_b(a))^{[-2]} \underbrace{S_b(a) \dots a}_{2n-4}] x^{[-2]} x^{2n-4} S_b(a)] [(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}] = \\ & = [[S_b(a)(S_b(a))^{[-2]} \underbrace{S_b(a) \dots a}_{2n-4}] [(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}]] = \\ & = [a(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}]. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом (5), равенство (4) перепишем в виде

$$[a(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}] = b. \quad (6)$$

Для доказательства того, что $\langle y, b, c, S_{S_c(a)}(c) \rangle$ – параллелограмм G , нам необходимо установить справедливость равенства

$$[yb^{[-2]} \underbrace{b \dots c}_{2n-4}] = S_{S_c(a)}(c). \quad (7)$$

Рассмотрим выражение $[yb^{[-2]} \underbrace{b \dots c}_{2n-4}]$ с учетом равенства (6), 2.27 из [1], нейтральности последовательностей и определения симметричных точек. Имеем

$$[yb^{[-2]} \underbrace{b \dots c}_{2n-4}] = [y([a(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}])^{[-2]} \underbrace{[a(S_c(a))^{[-2]} \underbrace{S_c(a) \dots y}_{2n-4}] \dots c}_{2n-4}] =$$

$$\begin{aligned}
&= [y y^{[-2]}]^{2n-4} y S_c(a) a^{[-2]} a^{2n-4} c = [S_c(a) a^{[-2]}]^{2n-4} a c = \\
&= [S_c(a) c^{[-2]}]^{2n-4} c [c a^{[-2]}]^{2n-4} a c = [S_c(a) c^{[-2]}]^{2n-4} c S_c(a) = \\
&= S_{S_c(a)}(c).
\end{aligned} \tag{8}$$

На основании (8) имеем, что

$$[y b^{[-2]}]^{2n-4} b c = S_{S_c(a)}(c),$$

а значит, на основании определения параллелограмма G , заключаем, что четырехугольник $\langle y, b, c, S_{S_c(a)}(c) \rangle$ – параллелограмм G .

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть a, b, c – произвольные точки n -арной группы G . n -Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда центроиды хотя бы двух из следующих треугольников $\langle c, S_b(a), [S_c(a) a^{[-2]}]^{2n-4} a b \rangle$, $\langle a, S_{S_b(a)}(b), S_{S_c(a)}(c) \rangle$, $\langle b, [c a^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a), S_c(a) \rangle$ совпадают, т.е. когда существует такая точка $x \in G$, что справедливо хотя бы одно из равенств:

$$\overrightarrow{xc} + \overrightarrow{xS_b(a)} + x[S_c(a) a^{[-2]}]^{2n-4} a b = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{xS_{S_b(a)}(b)} + \overrightarrow{xS_{S_c(a)}(c)}, \tag{9}$$

$$\overrightarrow{xa} + \overrightarrow{xS_{S_b(a)}(b)} + \overrightarrow{xS_{S_c(a)}(c)} = \overrightarrow{xb} + x[c a^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a) + \overrightarrow{xS_c(a)}, \tag{10}$$

$$\overrightarrow{xb} + x[c a^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a) + \overrightarrow{xS_c(a)} = \overrightarrow{xc} + \overrightarrow{xS_b(a)} + x[S_c(a) a^{[-2]}]^{2n-4} a b. \tag{11}$$

Доказательство 1. Пусть G – полуабелева n -арная группа, установим справедливость равенства (9). Обозначим

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{xc} + \overrightarrow{xS_b(a)} + x[S_c(a) a^{[-2]}]^{2n-4} a b. \tag{12}$$

Выполним преобразования правой части равенства (12) с учетом леммы 2.2.2 и 2.2.1 из [3], определения симметричных точек и нейтральности последовательностей. Имеем

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{U} &= \overrightarrow{xc} + x[ba^{[-2]}]^{2n-4} a b + x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a [ca^{[-2]}]^{2n-4} a b = \\
&= x[cx^{[-2]}]^{2n-4} x ba^{[-2]} a b + x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a [ca^{[-2]}]^{2n-4} a b = \\
&= x[cx^{[-2]}]^{2n-4} x ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a [ca^{[-2]}]^{2n-4} a b.
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{xS_{S_b(a)}(b)} + \overrightarrow{xS_{S_c(a)}(c)}. \tag{14}$$

Преобразуем первую часть равенства (14) с учетом лемм 2.2.2 и 2.2.1 из [3], определения симметричных точек и нейтральной последовательности. Имеем

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V} &= \overrightarrow{xa} + x[S_b(a) b^{[-2]}]^{2n-4} b S_b(a) + x[S_c(a) c^{[-2]}]^{2n-4} c S_c(a) = \\
&= \overrightarrow{xa} + x[ba^{[-2]}]^{2n-4} a bb^{[-2]} b ba^{[-2]} a b + x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a cc^{[-2]} c ca^{[-2]} a c = \\
&= \overrightarrow{xa} + x[ba^{[-2]}]^{2n-4} a ba^{[-2]} a b + x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a ca^{[-2]} a c = \\
&= x[ax^{[-2]}]^{2n-4} x ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a b + x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a ca^{[-2]} a c = \\
&= x[ax^{[-2]}]^{2n-4} x ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a ca^{[-2]} a c.
\end{aligned} \tag{15}$$

Обозначим

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{xb} + x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a) + \overrightarrow{xS_c(a)}. \tag{16}$$

С учетом определения симметричных точек, нейтральной последовательности и лемм 2.2.2 и 2.2.1 из [3], имеем

$$\begin{aligned}
 \overline{W} &= \overline{xb} + \overline{x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a ba^{[-2]} a b} + \overline{x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a c} = \\
 &= \overline{x[bx^{[-2]}]^{2n-4} x ca^{[-2]} a ba^{[-2]} a b} + \overline{x[ca^{[-2]}]^{2n-4} a c} = \\
 &= \overline{x[bx^{[-2]}]^{2n-4} x ca^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a c}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Используя свойство полуабелевости G и определение нейтральных последовательностей, имеем

$$\begin{aligned}
 \overline{U} &= \overline{x[cx^{[-2]}]^{2n-4} x ba^{[-2]} a [[bx^{[-2]}]^{2n-4} x c]a^{[-2]} a c a^{[-2]} a b} = \\
 &= \overline{x[cx^{[-2]}]^{2n-4} x ba^{[-2]} a [ca^{[-2]}]^{2n-4} a [bx^{[-2]}]^{2n-4} x c} a^{[-2]} a b = \\
 &= \overline{x[cx^{[-2]}]^{2n-4} x [ba^{[-2]}]^{2n-4} a c a^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a b} = \\
 &= \overline{x[bx^{[-2]}]^{2n-4} x ca^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a c}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 \overline{V} &= \overline{x[[ax^{[-2]}]^{2n-4} x b]a^{[-2]} a ba^{[-2]} a [[bx^{[-2]}]^{2n-4} x c]a^{[-2]} a c a^{[-2]} a c} = \\
 &= \overline{x[bx^{[-2]}]^{2n-4} x aa^{[-2]} a ba^{[-2]} a [ca^{[-2]}]^{2n-4} a [bx^{[-2]}]^{2n-4} x c} a^{[-2]} a c = \\
 &= \overline{x[bx^{[-2]}]^{2n-4} x [ba^{[-2]}]^{2n-4} a c a^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a c} = \\
 &= \overline{x[bx^{[-2]}]^{2n-4} x ca^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a c}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Мы показали, что правые части равенств (17), (18), (19) равны. Следовательно $\overline{U} = \overline{V} = \overline{W}$.

Из равенств (17)–(19) следует справедливость равенств (9)–(11), а значит точка x – общий центроид треугольников $\langle c, S_b(a), [S_c(a)a^{[-2]}]^{2n-4} a b \rangle$, $\langle a, S_{S_b(a)}(b), S_{S_c(a)}(c) \rangle$, $\langle b, [ca^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a), S_c(a) \rangle$.

Доказательство 2. Пусть справедливо равенство (10). Докажем, что G – полуабелева.

Поскольку в первой части доказательства свойство полуабелевости мы применили только для равенств (10) и (19), то будем считать равенства (9)–(10) справедливыми. Тогда из (10) следует, что

$$\begin{aligned}
 &\overline{x[ax^{[-2]}]^{2n-4} x ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a ca^{[-2]} a c} = \\
 &= \overline{x[bx^{[-2]}]^{2n-4} x ca^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a c}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Из (20) следует, что

$$\begin{aligned}
 &x[ax^{[-2]}]^{2n-4} x ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a ca^{[-2]} a c = \\
 &[bx^{[-2]}]^{2n-4} x ca^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a c. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Умножим обе части равенства (21) слева на выражение $xb^{[-2]} b ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b xa^{[-2]} a$, а справа на выражение $c^{[-2]} c ac^{[-2]} c a$. С учетом нейтральных последовательностей, получим

$$c = [xb^{[-2]}]^{2n-4} b ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b xa^{[-2]} a bx^{[-2]} x ca^{[-2]} a ba^{[-2]} a bx^{[-2]} x a. \quad (22)$$

Поскольку a, b, c – произвольные точки, то положим $a = x_n$, $b = x_1$, $c = [x_1^n]$ и $x = x_1$. Имеем

$$[x_1^n] = [x_1 x_1^{[-2]}]^{2n-4} x_1 x_n x_1^{[-2]} x_1 x_n x_1^{[-2]} x_1 x_1 x_n^{[-2]} x_n x_1 x_1^{[-2]} x_1 [x_1^n] x_n^{[-2]} x_n x_1 x_n^{[-2]} x_n x_1 x_1^{[-2]} x_1 x_n \quad (23)$$

С учетом нейтральных последовательностей равенство (23) перепишем в виде

$$[x_1^n] = [x_n x_1^{[-2]}]^{2n-4} x_1 [x_1^n] x_n^{[-2]} x_n x_1. \quad (24)$$

Поскольку

$$[x_n x_1^{[-2]}]^{2n-4} x_1 [x_1^n] x_n^{[-2]} x_n^{2n-4} x_1 = [x_n x_1^{[-2]}]^{2n-4} x_1 x_1 x_2^{n-1} x_n x_n^{[-2]} x_n^{2n-4} x_1 = [x_n x_2^{n-1} x_1]. \quad (25)$$

Из (25) и (22) заключаем, что

$$[x_1^n] = [x_n x_2^{n-1} x_1]. \quad (26)$$

На основании определения полуабелевой n -арной группы и равенства (26) заключаем, что G – полуабелева.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть a, b, c – произвольные точки полуабелевой n -арной группы G . Произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника

$$\langle c, b, S_b(a), [ca^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a), [S_c(a)a^{[-2]}]^{2n-4} a b, S_c(a) \rangle \quad (27)$$

Доказательство. Поскольку, согласно теореме 2, треугольники $\langle c, S_b(a), [S_c(a)a^{[-2]}]^{2n-4} a b \rangle$ и $\langle b, [ca^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a), S_c(a) \rangle$ имеют общий центроид, то, согласно теореме 1 из [4], этот же центроид будет и центроидом шестиугольника (27).

Следствие 2.2. Пусть a, b, c – произвольные точки полуабелевой n -арной группы G . Центроиды треугольников $\langle c, S_b(a), [S_c(a)a^{[-2]}]^{2n-4} a b \rangle$ и $\langle b, [ca^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a), S_c(a) \rangle$ и шестиугольника $\langle c, b, S_b(a), [ca^{[-2]}]^{2n-4} a S_b(a), [S_c(a)a^{[-2]}]^{2n-4} a b, S_c(a) \rangle$ совпадают.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 2 и теоремы 2 из [4].).

Литература

1. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1992. – 264 с.
2. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 167 с.
3. Кулаженко, Ю.И. Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск : Изд. Центр БГУ, 2014. – 311 с.
4. Кирилюк, Д.И. Центроиды многоугольников и самосовмещение элементов n -арных групп / Д.И. Кирилюк // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2016. – № 3 (96). – С. 102–107.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступила в редакцию 16.04.2017

Частично-квазинормальные подгруппы конечных π -разрешимых групп

Н.М. Курносенко¹, В.Е. Евдокимович²

Установлен ряд свойств конечной π -разрешимой группы, связанный с частичной перестановочностью подгрупп. С использованием понятий слабого нормализатора, слабой нормальности и слабой субнормальности подгруппы в π -разрешимой группе устанавливаются несколько признаков π -сверхразрешимости конечных групп.

Ключевые слова: конечная π -разрешимая группа, слабый нормализатор, слабонормальная подгруппа, слабо субнормальная подгруппа, π -сверхразрешимость.

A number of properties of a finite-solvable group connected with partial permutability of subgroups are established. Using the concepts of a weak normalizer, weak normality, and a weak subnormality of a subgroup in a π -solvable group, several signs of π -supersolvability of finite groups are established.

Keywords: finite π -solvable group, weak normalizer, weak normal subgroup, weak subnormal subgroup, π -supersolvability.

Пусть G – конечная π -разрешимая группа, H – подгруппа группы G и $\Sigma_H = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ – силовская система подгруппы H , где $P_0 = H_{\pi'}$.

Подгруппа K называется Σ_H -квазинормальной в π -разрешимой группе G , если $KA=AK$ для всех $A \in \Sigma_H$. Элемент x называется Σ_H -квазинормальным в группе G , если $\langle x \rangle$ является Σ_H -квазинормальной подгруппой группы G .

Следуя [1], слабым нормализатором подгруппы H в π -разрешимой группе G будем называть подгруппу $N_G^*(H) = HN_G^*(\Sigma_H)$, где $N_G^*(\Sigma_H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle A = A \langle x \rangle \text{ для всех } A \in \Sigma_H \rangle$ – системный квазинормализатор силовской системы Σ_H подгруппы H [2].

Если $G = N_G^*(H)$, то подгруппа H называется слабонормальной в G .

Рассмотрим свойства π -разрешимых групп со слабонормальными и Σ_H -квазинормальными подгруппами. Для этого приведем некоторые результаты из [3].

Лемма 1. Пусть G – конечная, π -разрешимая группа, H – слабонормальная подгруппа группы G , $N \triangleleft G$. Тогда HN/N – слабонормальная подгруппа из G/N .

Лемма 2. Пусть H – подгруппа π -разрешимой группы G такая, что $H \subseteq L \subseteq G$. Если H – слабонормальная подгруппа в G , то H – слабонормальная подгруппа в L .

Лемма 3. Пусть H – подгруппа π -разрешимой группы G , $\Sigma_H = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ – силовская система подгруппы H , $T \subseteq H$ – Σ_H -квазинормальная подгруппа группы G . Тогда силовская система подгруппы H редуцируется на подгруппу T , то есть $\Sigma_H \cap T$ есть силовская система подгруппы T .

Лемма 4. Пусть H – подгруппа π -разрешимой группы G , $\Sigma_H = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ – силовская система подгруппы H , $T \subseteq H$ – Σ_H -квазинормальная подгруппа группы G . Тогда $T \cap P_i, i = 0, 1, 2, \dots, k$, есть Σ_H -квазинормальные подгруппы группы G .

Лемма 5. Пусть H – подгруппа π -разрешимой группы G , $\Sigma_H = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ – силовская система подгруппы H , T – подгруппа группы G , порожденная некоторым множеством Σ_H -квазинормальных элементов группы G . Тогда T есть Σ_H -квазинормальная подгруппа группы G .

Лемма 6. Пусть H – подгруппа π -разрешимой группы G , $\Sigma_H = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ – силовская система подгруппы H . Тогда системный квазинормализатор $N_H^*(\Sigma_H)$ порождается Σ_H -квазинормальными элементами, порядок каждого из которых есть степень некоторого числа p из π либо π' -число.

Следствие 1. Системный квазинормализатор $N_H^*(\Sigma_H)$ есть Σ_H -квазинормальная подгруппа группы G .

Теорема 1. Пусть G – конечная, π -разрешимая группа и M – максимальная подгруппа из G с силовской системой Σ_M , такая, что $[G:M] = p^\alpha$ для некоторого $p \in \pi$. Если $G = MN_G^*(\Sigma_M)$, то $[G:M] = p$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Выберем тогда среди групп, для которых теорема не выполняется, группу G наименьшего порядка. Таким образом, в π -разрешимой группе G имеется максимальная подгруппа M с силовской системой Σ_M такая $G = MN_G^*(\Sigma_M)$, но $[G:M]$ не является простым числом.

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа из G , удовлетворяющая условиям теоремы. Пусть $[G:M] = p^\alpha$ для некоторого $p = p_i \in \pi$. Пусть $\Sigma = \{G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_k}, G_{\pi'}\}$ – силовская система группы G . Так как M должна содержать некоторое p -дополнение группы G , то можно считать, что $M \supseteq G_p = G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_{i-1}}, G_{p_{i+1}}, \dots, G_{p_k}, G_{\pi'}$, где $p = p_i$. Поэтому силовская система Σ группы G , содержащая G_{p_i} , редуцируется на M . Пусть M_G является ядром M в G . Рассмотрим факторгруппу G/M_G . Тогда M/M_G является максимальной подгруппой G/M_G с ядром, равным единичной подгруппе. Так как $N_G^*(\Sigma_M)M_G/M_G \subseteq N_{G/M_G}^*(\Sigma_{M/M_G})$, то $G/M_G = MN_G^*(\Sigma_M)/M_G = M/M_G N_{G/M_G}^*(\Sigma_{M/M_G})$. Для группы G/M_G условия теоремы выполняются. Поэтому $[G/M_G : M/M_G] = p$. Но $[G:M] = [G/M_G : M/M_G] = p$. Пришли к противоречию. Следовательно, ядро подгруппы M тривиально. Тогда, по теореме 5.3 [4], подгруппа M дополняема в G при помощи единственной минимальной инвариантной абелевой подгруппы H , причем каждый неединичный элемент из M индуцирует нетождественный автоморфизм этого дополнения. Таким образом, $G = MH$ и $M \cap H = 1$. По условию $G = MN_G^*(\Sigma_M)$. Поэтому существует Σ_M -квазинормальные элементы из G , которые не лежат в M . Пусть g – элемент наименьшего порядка, имеющий это свойство. Ввиду максимальной M , получаем, что $G = M\langle g \rangle$. Так как ядро M тривиально, то $M \cap \langle g \rangle = 1$. Следовательно $|g| = [G:M] = p^\alpha$.

Если $M = G_p$, то $G = HG_p$ и $H = G_p$. Тогда $\langle g \rangle G_p = G_p \langle g \rangle = \langle g \rangle M = G$. Отсюда $G_p = \langle g \rangle$ и H – циклическая подгруппа простого порядка. Поэтому $|g| = |H| = [G:M] = p$. Противоречие.

Значит, M не совпадает с G_p . Пусть M_p – силовская p -подгруппа из M в Σ_M . Так как $\langle g \rangle$ перестановочна с M_p , то $G_p = M_p \langle g \rangle$ является силовской p -подгруппой из G . Пусть R – максимальная подгруппа из G_p , такая, что $R \supseteq M_p$. Так как $R = M_p(\langle g \rangle \cap R)$, то $p = [G_p : R] = [\langle g \rangle : \langle g \rangle \cap R]$. Поэтому $\langle g \rangle \cap R = \langle g^p \rangle$. Следовательно $R = M_p \langle g^p \rangle$, и поэтому $\langle g^p \rangle$ перестановочна с M_p .

Пусть M_q – силовская q -подгруппа из M в Σ_M при $p \neq q$. Тогда подгруппа $M_q \langle g \rangle$ будет p -сверхразрешимая. Если T – максимальная подгруппа из $M_q \langle g \rangle$, содержащая M_q , то $T = M_q(\langle g \rangle \cap T)$. Ввиду p -сверхразрешимости $M_q \langle g \rangle$, $p = [\langle g \rangle : \langle g \rangle \cap T]$, и поэтому $\langle g \rangle \cap T = \langle g^p \rangle$. Тогда $T = M_q \langle g^p \rangle$ и $\langle g^p \rangle$ перестановочна с M_q . Пусть $M_{\pi'}$ – π' -подгруппа из M в Σ_M . Рассмотрим подгруппу $M_{\pi'} \langle g \rangle$. Эта подгруппа p -сверхразрешима. Пусть L – максимальная подгруппа из $M_{\pi'} \langle g \rangle$, содержащая $M_{\pi'}$. Тогда $L = M_{\pi'}(\langle g \rangle \cap L)$ и, ввиду p -сверхразрешимости $M_{\pi'} \langle g \rangle$, $p = [M_{\pi'} \langle g \rangle : L] = [\langle g \rangle : \langle g \rangle \cap L]$. Следовательно, $\langle g \rangle \cap L = \langle g^p \rangle$. Значит, $L = M_{\pi'} \langle g^p \rangle$, и $\langle g^p \rangle$ перестановочна с $M_{\pi'}$.

Таким образом, $\langle g^p \rangle$ перестановочна с каждым элементом на Σ_M , т. е. элемент $g^p \Sigma_M$ – квазинормален. Ввиду выбора элемента g , получаем, что $g^p \in M$. Следовательно, g^p лежат в $\langle g \rangle \cap M = 1$. Тогда $|g| = [G : M] = p$. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть G – конечная, π -разрешимая группа. Если для каждого $p \in \pi$ p -дополнение G_p есть слабонормальная подгруппа группы G , то группа G является π -сверхразрешимой.

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых теорема не верна. Выберем тогда среди них группу G , имеющую наименьший порядок. Если N – нормальная подгруппа группы G , то заключение теоремы для группы G/N выполняется по индукции. Пусть $\Sigma = \{G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_k}, G_{\pi}\}$ – силовская система π -разрешимой группы G . Пусть $p = p_i \in \pi$ и $G_p = G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_{i-1}}, G_{p_{i+1}}, \dots, G_{p_k}, G_{\pi}$. Так как G_p является слабонормальной подгруппой группы G , то $G = G_p \cdot N_G^*(\Sigma_{G_p})$, где $N_G^*(\Sigma_{G_p}) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle A = A \langle x \rangle \text{ для всех } A \in \Sigma_{G_p} \rangle$. Для доказательства π -сверхразрешимой группы G достаточно доказать, что индекс каждой максимальной подгруппы группы G либо равен некоторому простому числу p из π , либо есть π' -число ввиду теоремы 6.9.3 [5].

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G . По теореме 1.9.2 С.А. Чунихина [6], индекс ее или является степенью некоторого простого числа p из π или же не делится ни на одно простое число из π . Пусть $[G : M] = p^\alpha$. Ввиду того, что M должна содержать некоторое p -дополнение группы G , можно предположить, что $M \supseteq G_p$. Если ядро M_G подгруппы M неединично, то $G/M_G = G_p \cdot N_G^*(\Sigma_{G_p})/M_G$. Очевидно, что M/M_G является максимальной подгруппой группы G/M_G с единичным ядром. По лемме 1, $G_p \cdot M_G/M_G$ есть слабонормальная подгруппа группы G/M_G . Следовательно, для группы G/M_G условия теоремы выполняются. В силу выбора группы G , группа G/M_G является π -сверхразрешимой. Значит, $[G/M_G : M/M_G] = p$, где $p \in \pi$. Но $[G : M] = [G/M_G : M/M_G] = p$. Получаем, что группа G в этом случае π -сверхразрешима. Пришли к противоречию.

Следовательно, ядро подгруппы M тривиально. Тогда по теореме 2.6 [7] подгруппа M дополняема в G при помощи единственной минимальной нормальной абелевой подгруппы N . Таким образом, $G = MN$ и $M \cap N = 1$.

Кроме того, так как $G/N \cong M$, то подгруппа M является π -сверхразрешимой по индукции.

Если $M = G_p$, то $G = NG_p$ и $N = G_p$. Поскольку $G_p \in \Sigma$ порождается Σ -квазинормальными элементами из G , то существует элемент $x \in G_p$ такой, что $\langle x \rangle G_p = G_p \langle x \rangle = \langle x \rangle M = G$ в силу максимальной подгруппы M . Значит, $G_p = \langle x \rangle$ и N есть циклическая подгруппа. Следовательно, $[G : M] = |N| = p$. Противоречие.

Поэтому подгруппа $Q = NG_p$ есть собственная подгруппа из G . Так как группа G π -разрешима, то и подгруппа Q также является π -разрешимой.

Так как $Q = NG_p$, то силовская система Σ группы G редуцируется на Q , причем $Q = G \cap Q = G_p \cdot N_G^*(\Sigma_{G_p}) \cap Q = G_p \cdot (N_G^*(\Sigma_{G_p}) \cap Q)$. По лемме 2 получаем, что G_p есть слабонормальная подгруппа группы Q , то есть $Q = N_Q^*(G_p)$.

Следовательно, для группы Q выполняются все условия теоремы. Поскольку Q – собственная подгруппа группы G , то, в силу выбора G , подгруппа Q является π -сверхразрешимой.

Пусть S – наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа из Q . Если p' -подгруппа из S отлична от единичной, то $C_G(N) \neq N$, что невозможно. Поэтому S -силовская p -подгруппа из Q , то есть $S = N$. Так как $S = N$ – наибольшая p -нильпотентная подгруппа в p -сверхразрешимой группе Q , и учитывая, что коммутант p -сверхразрешимой группы p -нильпотентен, то получим, что группа $G_p \cdot N / N$ абелева. Тогда $G_p \cong G_p \cdot N / N$ также абелева группа, и группа $G = G_p G_{p'}$ разрешима. Так как G_p есть слабонормальная подгруппа группы G для любого $p \in \pi = \pi(G)$, то по теореме 1.6 [8] получаем, что группа G сверхразрешима. В результате пришли к противоречию с выбором группы G . Теорема доказана.

Теорема 3. Если в конечной π -разрешимой группе G каждая максимальная подгруппа M из G является слабонормальной в G , то группа G π -сверхразрешима.

Доказательство. Чтобы доказать π -сверхразрешимость группы G , достаточно показать, что индекс каждой максимальной подгруппы группы G либо равен некоторому простому числу p из π , либо есть π' -число ввиду теоремы 6.9.3 [5].

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G . Тогда по теореме 1.9.2 [6] индекс ее или является степенью некоторого простого числа p из π , или же есть π' -число.

Пусть $[G : M] = p^\alpha$ для некоторого простого числа p из π . Так как подгруппа M является слабонормальной в G , то по теореме 1 имеем, что $[G : M] = p$.

Следовательно, индекс любой максимальной слабонормальной подгруппы M π -разрешимой группы G либо равен некоторому простому числу p из π , либо есть π' -число, то есть группа G является π -сверхразрешимой. Теорема доказана.

Определение [7]. Подгруппа H группы G называется слабосубнормальной в G , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G,$$

где H_{i-1} – слабонормальная подгруппа в H_i для $i = 1, 2, \dots, n$.

С учетом этого определения следствием из теоремы 2 является следующая

Теорема 4. Если в конечной π -разрешимой группе G каждая собственная подгруппа из G слабосубнормальна в G , то группа G является π -сверхразрешимой.

Литература

1. Курносенко, Н.М. О максимальных подгруппах простого индекса в π -разрешимых группах / Н.М. Курносенко. – Мн., 1990. – 8 с. – (Препринт / АН БССР, Ин-т математики; № 19 (419)).
2. Мыщик, Т.Д. Признаки π -сверхразрешимости конечных групп / Т.Д. Мыщик // Исслед. нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн., 1984. – С. 111–123.
3. Курносенко, Н.М. О π -сверхразрешимости конечных групп / Н.М. Курносенко. – Мн., 1990. – 10 с. – (Препринт / АН БССР, Ин-т математики; № 46 (446)).
4. Кравчук, М.И. О разрешимых и π -разрешимых конечных группах / М.И. Кравчук // ДАН БССР. – 1967. – Т. II, № 2. – С. 97–100.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Heidelberg–New York : Springer, 1967. – Bd. 1. – 793 s.
6. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Мн. : Наука и техника, 1964. – 158 с.
7. Кравчук, М.И. Системные нормализаторы π -разрешимых групп / М.И. Кравчук // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1971. – № 6. – С. 18–27.
8. Venzke, P.A. Contribution to the theory of finite supersolvable groups / P.A. Venzke // J. Algebra. – 1979. – Vol. 57. – P. 567–579.

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Белорусский государственный университет транспорта

Трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства

Н.П. МОЖЕЙ

Цель работы – классификация трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят главным образом локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: алгебра Ли, редуктивное пространство, группа преобразований, симметрическое пространство.

The purpose of the work is the classification of three-dimensional reductive nonsymmetric homogeneous spaces. We concerned the case, when Lie group of transformations is unsolvable. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as compound of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

Keywords: Lie algebra, reductive space, transformation group, symmetric space.

Введение. П. К. Рашевский ввел в рассмотрение класс пространств аффинной связности с кручением, у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения [1]. Этот класс однородных пространств, получивших название «редуктивных», изучается в дифференциальной геометрии и ее приложениях. Все геодезические на редуктивных пространствах являются однородными [2]. Симметрические пространства – это пространства аффинной связности без кручения, при параллельном переносе у которых сохраняется тензор кривизны. Название «симметрическое» связано тем, что геодезическая симметрия относительно любой точки есть автоморфизм пространства. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков [3]. Классификация римановых симметрических пространств получена Э. Картаном, им была решена и задача локальной классификации симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами. Найдена также классификация симметрических однородных пространств с простыми некомпактными основными группами (см. [4], [5]). Трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальные связности изучались в работе [6]. В данной работе найдены все редуктивные несимметрические однородные пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{g}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [7, с. 89–91]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $\text{Diff}(M)$, т.е. достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M . Пусть $\bar{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а g – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{g}, g)$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра g не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{g}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве $T_x M$ – это фактордействие

присоединенного действия G на $\bar{g}: s.(x+g) = (Ads)(x) + g$ для всех $s \in G, x \in \bar{g}$. При этом алгебра g действует на $T_x M = \bar{g}/g: x.(y+g) = [x, y] + g$ для всех $x \in g, y \in \bar{g}$. Пара $(\bar{g}, g)$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление g . Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x, x \in M$ на $T_x M$ имеет нулевое ядро. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [2, т. 2, с. 177–179].

Пусть $M = \bar{G}/G$ – однородное пространство, на котором связная группа $\bar{G}$ действует транзитивно и эффективно. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{g}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли g и $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства m , т. е. если $\bar{g} = g + m, g \cap m = 0; \text{ad}(G)m \subset m$. Второе условие влечет $[g, m] \subset m$, и наоборот, если G связна. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к g в $\bar{g}$, и факторпространство $m = \bar{g}/g$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{g}, g)$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(m)$, что его ограничение на g есть изотропное представление подалгебры g , а все отображение является g -инвариантным, т. е. $\Lambda([x, y]) = [\Lambda(x), \Lambda(y)]$ для всех $x \in g, y \in \bar{g}$. Известно (см., например, [8]), что инвариантные аффинные связности на $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\bar{g}, g)$. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G всегда точное.

Говорят, что многообразие M с аффинной связностью является аффинным *симметрическим*, если для каждого $x \in M$ симметрия s_x может быть продолжена до глобального аффинного преобразования для M . На каждом связном аффинном симметрическом пространстве группа аффинных преобразований транзитивна, т. е. аффинное симметрическое пространство M может быть представлено как однородное пространство $\bar{G}/G$. Более того, поскольку $M = \bar{G}/G$ редуктивно (а $\bar{G}$ транзитивна), достаточно рассматривать только изотропно-точные пространства. Таким образом, симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G для $\bar{G}$ и инволютивного автоморфизма σ для $\bar{G}$ такого, что $\sigma(g) = s_o g s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$, где s_o – симметрия для M , а o – неподвижная точка для s_o . Пусть $(\bar{g}, g, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и -1 , а g – собственное подпространство для 1. Пусть m – собственное подпространство для -1 . Разложение $\bar{g} = g + m$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{g}, g, \sigma)$. Если $\bar{g} = g + m$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{g}, g, \sigma)$, то $[g, g] \subset g, [g, m] \subset m, [m, m] \subset g$. Если же первых два условия выполняются, а последнее условие нет, то соответствующее однородное пространство является редуктивным, но не является симметрическим.

Классификация редуктивных несимметрических однородных пространств. Определим пару $(\bar{g}, g)$ таблицей умножения алгебры $\bar{g}$. Через $\{e_1, \dots, e_n, u_1, u_2, u_3\}$ обозначим базис $\bar{g}$ ($n = \dim g$). Предположим, что алгебра Ли g порождается $e_1, \dots, e_n$, а $\{u_1, u_2, u_3\}$ – базис m , если обратное не установлено. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [9, с. 31–42], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{g}, g)$. Через λ, α, β и т. д. обозначены параметры, появляющиеся в процессе классификации. Если на них накладываются некоторые дополнительные условия, то они записаны сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегает все $\mathbb{R}$.

Теорема. *Трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства $(\bar{g}, g)$, такие, что $\bar{g}$ не является разрешимой ($g \neq \{0\}$), имеют вид:*

– $\mathfrak{g}$ разрешима:

$\dim \mathfrak{g}=1$.

1.1.7.		e_1	u_1	u_2	u_3	1.3.3		e_1	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	u_1	$-u_2$	0		e_1	0	$-u_2$	u_1	0
	u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0		u_1	u_2	0	e_1+u_3	0
	u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0		u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0
	u_3	0	0	0	0		u_3	0	0	0	0
1.8.2.		e_1	u_1	u_2	u_3	1.3.4		e_1	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	0	u_1	u_2		e_1	0	$-u_2$	u_1	0
	u_1	0	0	u_1	u_2		u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0
	u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3		u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0
	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0		u_3	0	0	0	0

$\dim \mathfrak{g}=2$.

2.21.4.		e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
	e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
	u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
	u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
	u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

– $\mathfrak{g}$ не является разрешимой:

$\dim \mathfrak{g}=3$.

3.3.2.		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	3.3.3.		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0		e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
	e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0		e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
	e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0		e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0		u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	u_1
	u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0		u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
	u_3	0	0	0	0	0	0		u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0

$\dim \mathfrak{g}=4$.

4.2.2.		e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
	e_1	0	0	0	0	$(1/2)u_1$	$(1/2)u_2$	u_3
	e_2	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	$-u_2$	0
	e_3	0	$-2e_3$	0	e_2	0	u_1	0
	e_4	0	$2e_4$	$-e_2$	0	u_2	0	0
	u_1	$-(1/2)u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
	u_2	$-(1/2)u_2$	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
	u_3	$-u_3$	0	0	0	0	0	0

$\dim \mathfrak{g}=5$.

5.2.2.		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3	
	e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0	
	e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0	
	e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0	
	e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1	$, \alpha \leq 1,$
	e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2	$\alpha \neq -1$
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1	
	u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2	
	u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	$-\alpha u_1$	$-\alpha u_2$	0	

5.2.3.		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3	
	e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0	
	e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0	
	e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0	
	e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1+\alpha e_4$	$\alpha \neq 0$
	e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	$u_2+\alpha e_5$	
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1-e_4	
	u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2-e_5	
	u_3	0	0	0	$-u_1-\alpha e_4$	$-u_2-\alpha e_5$	$-\alpha u_1+e_4$	$-\alpha u_2+e_5$	0	

Замечание. В случае 5.2.2 базис $\mathfrak{m}$ в каноническом разложении имеет вид $\{u_1 + e_4, u_2 + e_5, u_3\}$, а в случае 5.2.3 – $\{u_1 + \alpha e_4, u_2 + \alpha e_5, u_3\}$, в остальных случаях – стандартный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Доказательство. Сначала найдены все трехмерные изотропно-точные пары. Для этого классифицированы подалгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности, а далее найдены (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такие пары $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ выписаны в [9]. Из них выбраны редуктивные несимметрические пары с неразрешимой алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$, т. е. те, для которых $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, но не выполняется условие $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ задает трехмерное редуктивное несимметрическое однородное пространство, а $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$), то $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$\begin{array}{llll} 1.1. \begin{bmatrix} x & & \\ & -x & \\ & & \end{bmatrix}; & 1.3. \begin{bmatrix} x & & \\ & -x & \\ & & \end{bmatrix}; & 1.8. \begin{bmatrix} x & & \\ & & x \\ & & \end{bmatrix}; & 2.21. \begin{bmatrix} x & y & \\ & y & \\ & & -x \end{bmatrix}; \\ & & & 3.3. \begin{bmatrix} x & y & \\ & -x & \\ & & \end{bmatrix}; \\ & 4.2. \begin{bmatrix} (1/2)x + y & & z \\ & u & (1/2)x - y \\ & & & x \end{bmatrix}; & 5.2. \begin{bmatrix} x & u & v \\ z & -x & u \end{bmatrix}. \end{array}$$

Здесь переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$, базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такая, что подалгебра $\mathfrak{g}$ типа 3.3 (далее соответствующую пару также будем называть парой типа 3.3), эквивалентна одной и только одной из пар 3.3.1 (тривиальная пара), 3.3.2, 3.3.3. Действительно, пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1 . Заметим, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \times U^\alpha(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Тогда

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}), \text{ где} \\ \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2.$$

Поэтому $[u_1, u_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = \beta_1 u_1$, $[u_2, u_3] = \gamma_2 u_2$. Используя тождество Якоби, видим, что $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \gamma_2$, а $\alpha_3 \gamma_2 = 0$. Рассмотрим следующие случаи:

1°. $\alpha_3 = \gamma_2 = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре 3.3.1.

2°. $\alpha_3 \neq 0, \gamma_2 = 0$. Тогда отображение $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i, i = 1, 2, 3, \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_3} u_3,$$

показывает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.3.2.

3°. $\alpha_3 = 0, \gamma_2 \neq 0$. Отображение $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i, i = 1, 2, 3, \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = \gamma_2 u_3,$$

показывает, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.3.3 эквивалентны.

Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$, мы видим, что пары 3.3.1 и 3.3.2 не эквивалентны. Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_1$, заключаем, что пары 3.3.3 и 3.3.1 не эквивалентны. Поскольку $Z\bar{\mathfrak{g}}_2 = \mathbb{R}u_3$ и $Z\bar{\mathfrak{g}}_3 = 0$, заключаем, что пары 3.3.3 и 3.3.2 не эквивалентны. Заметим, что у пары 3.3.1 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{\{-2u_2, -2u_1, u_3\}, \{-4e_1 + 2u_2, -4e_2 - 2u_1, -4e_3\}\}$, у пары 3.3.2 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}} = \{\{u_3, -u_2, u_1\}, \{2e_2 + 2u_1 + u_3, -2e_3, e_1 - u_2\}\}$, у пары 3.3.3 – $\{\{-2u_2, -2u_1, u_3\}, \{-4e_1 + 2u_2, -4e_2 - 2u_1, -4e_3\}\}$. Пара 3.3.1 является симметрической и не входит в рассматриваемый в работе класс пар. Пары 3.3.2 и 3.3.3 не являются симметрическими, но являются редуктивными.

Опишем аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Пусть

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix},$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (для всех $i, j = 1, 2, 3$). Рассмотрим локально однородное пространство 3.3.2. Поскольку ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, и отображение является $\mathfrak{g}$ -инвариантным, имеем

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1),$$

следовательно, $p_{1,1} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,1} = p_{3,3} = 0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_2),$$

$$q_{1,1} = q_{1,2} = q_{1,3} = q_{2,1} = q_{2,2} = 0, \quad q_{2,3} = p_{1,3}, \quad q_{3,1} = p_{3,2}, \quad q_{3,2} = q_{3,3} = 0.$$

Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = 0$, $r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,1} = r_{2,3} = r_{3,1} = r_{3,2} = 0$. Если $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = 0$, то $r_{2,2} = r_{1,1}$. Нашли аффинную связность на паре 3.3.2:

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Для пары 3.3.3 рассуждения аналогичны.

Рассмотрим теперь, например, подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ типа 2.21. Пусть $E = \{e_1, e_2\}$ – базис $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1 .

Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \times U^\alpha(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Тогда

$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_1, U^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_1, \mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_2, U^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_2, U^{(-1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_3,$$

проверив тождество Якоби, получим, что $[u_1, u_2] = \alpha_1 u_1, [u_1, u_3] = \alpha_1 u_2, [u_2, u_3] = \alpha_1 u_3$.

При $\alpha_1 \neq 0$ отображение $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_4 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, где $\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2, \pi(u_1) = \frac{1}{\alpha_1} u_1, \pi(u_2) = \frac{1}{\alpha_1} u_2,$

$\pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_1} u_3$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 2.21.4 (это пространство является редуктивным с каноническим разложением).

При $\alpha_1 = 0$ пара $(\bar{g}, g)$ тривиальна, т. е. у полученной пары алгебра $\bar{g}$ является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр. Разумеется, пары не сопряжены друг другу, т. к. в случае 2.21.4 алгебра $\bar{g}$ не является разрешимой (ее разложение Леви – $\{\{e_1 + u_2, -e_2 + u_1\}, \{u_1, -u_3, u_2\}\}$).

Пусть далее, $(\bar{g}, g)$ – локально однородное пространство 2.21.4. Отображение является g -инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, получим $p_{2,1} = 0$, $p_{2,2} = p_{1,1}$, $p_{2,3} = p_{1,2}$, $p_{3,1} = 0$, $p_{3,2} = p_{2,1}$, $p_{3,3} = p_{1,1}$, $p_{3,2} = 0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1), \quad p_{1,1} = p_{1,3} = 0.$$

Так как $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_2, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, $q_{2,2} = q_{1,1} + p_{1,2}$, $q_{2,3} = q_{1,2} + p_{1,3}$, $q_{3,3} = q_{2,2} + p_{1,2}$, $q_{2,1} = q_{3,1} = q_{3,2} = 0$. Если $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_1, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{1,2} = q_{1,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_2, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1} = -p_{1,2} = r_{2,1} = r_{3,2}$, $r_{2,2} = r_{1,1}$, $r_{2,3} = r_{1,2}$, $r_{3,1} = 0$, $r_{3,3} = r_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_1, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = -\Lambda(u_3)$, имеем $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = 0$, таким образом,

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь случай 5.2. Разложение Леви g имеет вид $\{\{-e_5, e_4\}, \{2e_2, -2e_3 - 2e_5, e_1 + e_4\}\}$, h порождена e_1 . Так как $\bar{g} = \bar{g}^{(-2)}(h) \oplus \bar{g}^{(-1)}(h) \oplus \bar{g}^{(0)}(h) \oplus \bar{g}^{(1)}(h) \oplus \bar{g}^{(2)}(h)$, где $\bar{g}^{(-2)}(h) = \mathbb{R}e_3$, $\bar{g}^{(-1)}(h) = \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{R}u_2$, $\bar{g}^{(0)}(h) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_3$, $\bar{g}^{(1)}(h) = \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}u_1$, $\bar{g}^{(2)}(h) = \mathbb{R}e_2$, имеем $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = b_4 e_4 + \beta_1 u_1$, $[u_2, u_3] = c_5 e_5 + \gamma_2 u_2$. Используя тождество Якоби, определим, что $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = \alpha e_4 + \beta u_1$, $[u_2, u_3] = \alpha e_5 + \beta u_2$.

1° $\alpha = \beta = 0$. Пара $(\bar{g}, g)$ эквивалентна тривиальной паре 5.2.1, которая является симметрической.

2° $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$. Пара эквивалентна 5.2.2 посредством $\pi: \bar{g}_2 \rightarrow \bar{g}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = e_4 + u_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_2) = e_5 + u_2$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = \lambda u_3$, $\pi(e_4) = \lambda e_4$, $\pi(e_5) = \lambda e_5$, а $\lambda = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}) / 2 \neq 0$. Полученная пара является редуктивной, но не является симметрической. Разложение Леви $\bar{g} - \{\{-2e_4, -2u_1, u_3, -2u_2, -2e_5\}, \{-4e_1 + 2e_5 - 4e_2 - 2e_4, -4e_3\}\}$.

3° $\beta^2 + 4\alpha < 0$. Эквивалентность пар $(\bar{g}, g)$ и 5.2.3 показывает $\pi: \bar{g}_3 \rightarrow g$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = u_1 + (\beta\lambda / 2)e_4$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_2) = u_2 + (\beta\lambda / 2)e_5$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = \lambda^{-1}u_3$, $\pi(e_4) = \lambda e_4$, $\pi(e_5) = \lambda e_5$, а $\lambda = 2 / \sqrt{-\beta^2 - 4\alpha}$. Полученная пара является редуктивной, но не является симметрической, разложение Леви $\bar{g} - \{\{u_3, -2u_2, -2u_1, -2e_5, -2e_4\}, \{-4e_1 + 2e_5, -4e_2 - 2e_4, -4e_3\}\}$.

Пусть τ_i – радикал $\bar{g}_i$ для $i = \overline{1, 3}$. Рассмотрим $f_i: \bar{g}_i \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, где $f_i(x)$ – матрица $ad_{\tau_i} x$ в базисе $\{e_4, e_5, u_1, u_2\}$ пространства τ_i , $x \in \bar{g}_i$. Поскольку $f_i(\bar{g}_i)$ не сопряжены, пары не эквивалентны.

Аналогично рассматриваются остальные случаи. В частности, любая пара типа 4.2 эквивалентна одной из пар 4.2.1 (тривиальная пара), 4.2.2. Действительно, пусть h порождена векторами e_1 и e_2 (заметим, что $\mathfrak{a} = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4$ – полупростая подалгебра алгебры Ли g). Тогда $\bar{g}^{(0,0)}(h) \supset \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, $\bar{g}^{(0,2)}(h) \supset \mathbb{R}e_3$, $\bar{g}^{(0,-2)}(h) \supset \mathbb{R}e_4$, $\bar{g}^{(1/2,1)}(h) \supset \mathbb{R}u_1$, $\bar{g}^{(1/2,-1)}(h) \supset \mathbb{R}u_2$, $\bar{g}^{(1,0)}(h) \supset \mathbb{R}u_3$. Поэтому $[u_1, u_2] \in \bar{g}^{(1,0)}(h)$, $[u_1, u_3] \in \bar{g}^{(1/2+1,1)}(h)$, $[u_2, u_3] \in \bar{g}^{(1/2+1,-1)}(h)$, имеем $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = 0$, $[u_2, u_3] = 0$. В силу тождества

Якоби $[u_1, u_2] = \alpha_3 u_3$. При $\alpha_3 = 0$ пара $(\bar{g}, g)$ эквивалентна 4.2.1, при $\alpha_3 \neq 0$ эквивалентность пар $(\bar{g}, g)$ и 4.2.2 показывается посредством отображения $\pi: \bar{g}_2 \rightarrow \bar{g}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, 4}$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2$, $\pi(u_3) = \alpha_3 u_3$. Поскольку $\dim D(\bar{\tau}(D\bar{g}_1)) \neq \dim D(\bar{\tau}(D\bar{g}_2))$, пары 4.2.1 и 4.2.2 не эквивалентны. Пара 4.2.1 является симметрической и не входит в рассматриваемый в работе класс пар, пара 4.2.2 не является симметрической, но является редуктивной. Заметим, что у пары 4.2.2 разложение Леви $\bar{g} = \{\{e_1, u_2, -(1/2)u_1, (1/4)u_3\}, \{-4e_2 + u_1, -4e_4 + u_2 + (1/8)u_3, -4e_3\}\}$, а разложение Леви $g = \{\{e_1\}, \{-4e_2, -4e_3, -4e_4\}\}$.

Прямыми вычислениями получаем результат и в остальных случаях.

Для остальных найденных пар также выпишем разложение Леви:

Пара	Разложение Леви $\bar{g}$	Пара	Разложение Леви $\bar{g}$
1.1.7	$\{\{u_3\}, \{-e_1 - u_3, -u_1, -u_2\}\}$	1.3.4	$\{\{u_3\}, \{-e_1 + u_3, -u_1, -u_2\}\}$
1.3.3	$\{\{u_3\}, \{e_1 + u_3, u_1, u_2\}\}$	1.8.2	$\{\{-e_1 + u_1\}, \{u_1, u_2, u_3\}\}$

Заключение. Таким образом, найдены все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также могут иметь приложения в различных областях геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, анализа, алгебры, в общей теории относительности, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на редуктивных и симметрических пространствах.

Литература

1. Рашевский, П.К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением / П.К. Рашевский // Труды семин. по векторн. и тенз. анализу. – 1969. – № 8. – С. 82–92.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – 2 т. – 414 с.
3. Широков, П.А. Симметрические пространства первого класса / П.А. Широков // Избранные работы по геометрии. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – С. 366–383.
4. Картан, Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан // Сборник работ. – М., 1949. – 384 с.
5. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон; Пер. с англ. – М., 1964. – 608 с.
6. Можей, Н.П. Нормальные связности на редуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований / Н.П. Можей // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 28–36.
7. Онищик, А.Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
8. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.
9. Можей, Н.П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н.П. Можей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

К методам построения оптимальных параметров целевой функции в задачах дробно-линейного потокового программирования

Л.А. Пилипчук

Предлагаются математические модели и методы решения следующей обратной задачи дробно-линейного программирования (ДЛП). Дана задача ДЛП и выбрано одно из ее допустимых решений. Требуется минимально изменить коэффициенты целевой функции задачи, чтобы выбранное допустимое решение стало оптимальным. Мера близости векторов (допустимых решений) оценивается с помощью нормы l_1 , что позволяет оставаться в рамках линейного программирования (ЛП). Для решения задачи, которая является двойственной к обратной задаче потокового программирования, разработан конструктивный метод декомпозиции ограничений.

Ключевые слова: линейное программирование, дробно-линейное программирование, обратная задача дробно-линейного программирования, двойственность, разреженные системы линейных алгебраических уравнений, конструктивная теория декомпозиции, норма.

Mathematical models and methods for solving the following inverse linear-fractional programming (LFP) problem are proposed. For a given LFP problem and one of its feasible solutions, it is required to adjust the objective function coefficients as little as possible so that the given feasible solution becomes optimal. The closeness of vectors (of feasible solutions) is estimated by means of the l_1 norm. This makes it possible stay within the framework of linear programming (LP). To solve the problem that is dual to the inverse of network flow programming problem, a constructive method for decomposing constraints has been developed.

Keywords: linear programming, linear-fractional programming, inverse linear-fractional programming problem, duality, sparse systems of linear algebraic equations, constructive theory of decomposition, norm.

1. Математические модели прямой и обратной задач дробно-линейного потокового программирования. Пусть $S = (V, E)$ – конечный связный граф, V – множество узлов и E – множество дуг, определенных на $V \times V$ ($|V| < \infty, |E| < \infty$). Рассмотрим математическую модель прямой задачи дробно-линейного потокового программирования с взаимосвязью дуговых потоков:

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in E} p_{ij} x_{ij} + \beta}{\sum_{(i,j) \in E} q_{ij} x_{ij} + \gamma} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in I_i^+(E)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(E)} x_{ji} = b_i, i \in V, \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ij}^p x_{ij} = \alpha_p, \quad p = \overline{1, l}, \quad x_{ij} \geq 0, (i, j) \in E. \quad (3)$$

Вектор $x = (x_{ij}, (i, j) \in E)$ – допустимое решение задачи (1)–(3), если выполняются ограничения (2)–(3), X – множество допустимых решений, $x \in X$. $p_{ij}, q_{ij}, \beta, \gamma, b_i, \lambda_{ij}^p, \alpha_p$ – параметры задачи (1)–(3), $I_i^+(E) = \{j \in V : (i, j) \in E\}$, $I_i^-(E) = \{j \in V : (j, i) \in E\}$. Знаменатель $q(x)$ дробно-линейной целевой функции (1) не меняет знак на множестве X . Положим $q(x) > 0, \forall x \in X$.

Предположим, что неточными данными [1] являются параметры $p_{ij}, (i, j) \in E$ дробно-линейной функции (1). Для изменения параметров $p_{ij}, (i, j) \in E$ применим принципы обратной оптимизации [2]–[5].

Теорема 1. Если заданного допустимого решения $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in E)$ прямой задачи (1)–(3) и некоторого допустимого решения (y, r, z) двойственной задачи:

$$g(y, r, z) = z \rightarrow \max,$$

$$y_i - y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z \leq c_{ij}, (i, j) \in E,$$

$$-\sum_{i \in I} a_i y_i - \sum_{p=1}^l \alpha_p r_p + \gamma z = \beta,$$

$z \in R^1$, $y = (y_i, i \in I)$, $r = (r_p, p = \overline{1, l})$ выполняются условия:

$$(y_i - y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z - c_{ij}) x_{ij}^0 = 0, (i, j) \in E$$

то x^0 – оптимальное решение задачи (1)–(3).

Доказательство *теоремы 1* аналогично [5] для случая фиксированного потока в неоднородной задаче линейной оптимизации с неточными данными.

2. Математические модели и конструктивные методы для определения минимальных изменений параметров целевой функции. Для задачи (1)–(3) построим математическую модель обратной задачи. Обозначим через θ_{ij} – увеличение и ψ_{ij} – уменьшение параметра p_{ij} , $\theta_{ij} \geq 0$, $\psi_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in E$, при этом изменения θ_{ij} и ψ_{ij} каждого параметра p_{ij} не могут одновременно принимать положительные значения: $\theta_{ij} \psi_{ij} = 0, (i, j) \in E$. Пусть $\tilde{p}_{ij} = p_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}$, $(i, j) \in E$ – новые параметры целевой функции (1). Введем норму

$$l_1 = \|\tilde{p} - p\|_1 = \sum_{(i,j) \in E} |\tilde{p}_{ij} - p_{ij}| = \sum_{(i,j) \in E} |\theta_{ij} - \psi_{ij}| = \sum_{(i,j) \in E} (\theta_{ij} + \psi_{ij}).$$

Математическая модель обратной задачи для определения минимальных изменений параметров $p_{ij}, (i, j) \in E$ имеет следующий вид:

$$u(\theta, \psi) = - \sum_{(i,j) \in E} (\theta_{ij} + \psi_{ij}) \rightarrow \max,$$

$$y_i - y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z - \theta_{ij} + \psi_{ij} \leq p_{ij}, (i, j) \in B_1,$$

$$y_i - y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z - \theta_{ij} + \psi_{ij} = p_{ij}, (i, j) \in B_2,$$

$$-\sum_{i \in I} b_i y_i - \sum_{p=1}^l \alpha_p r_p + \gamma z = \beta,$$

$$\theta_{ij} \geq 0, \psi_{ij} \geq 0, (i, j) \in E, B_1 = \{(i, j) \in E : x_{ij}^0 = 0\}, B_2 = \{(i, j) \in E : x_{ij}^0 > 0\},$$

где $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in E)$ – известное допустимое решение задачи (1)–(3).

Для нахождения минимальных изменений θ_{ij} и ψ_{ij} , $(i, j) \in E$ параметров $p_{ij}, (i, j) \in E$ целевой функции (1) для обратной задачи (6)–(7) построим двойственную задачу, которая имеет следующий вид:

$$f(z, t) = \sum_{(i,j) \in E} p_{ij} z_{ij} + \beta t \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j \in I_i^+(E)} z_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(E)} z_{ji} - b_i t = 0, i \in V,$$

$$\sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ij}^p z_{ij} - \alpha_p t = 0, p = \overline{1, l},$$

$$\sum_{(i,j) \in E} q_{ij} z_{ij} + \gamma t = 0,$$

$$0 \leq z_{ij} \leq 1, (i, j) \in B_1, B_1 = \{(i, j) \in E : x_{ij}^0 = 0\}; |z_{ij}| \leq 1, (i, j) \in E \setminus B_1,$$

где $(z, t) = (z_{ij}, (i, j) \in E; t)$ – допустимое решение задачи (8)–(11), $(z, t) \in Z$. Заметим, что вектор (z, t) , где $t = 0$, $z = (z_{ij} = 0, (i, j) \in E)$ является допустимым решением задачи (8)–(11).

Теорема 2. Если $L = \{I_L; E_L\}$ – опора графа $S = (V, E)$ для системы (9) [6]–[7] и опорная матрица является матрицей инцидентности графа $S = (V, E)$ [7], то общее решение разреженной недоопределенной системы (7) может быть представлено в следующем виде:

$$z_{ij} = \delta_{ij}^{\xi} t + \sum_{(\tau, \rho) \in E \setminus E_L} \delta_{ij}^{\tau \rho} z_{\tau \rho}, (i, j) \in E_L, \quad (12)$$

где совокупность векторов $\delta(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^{\tau \rho}, (i, j) \in E; \delta^{\tau \rho})$, $(\tau, \rho) \in E \setminus E_L$, порожденных дугами $(\tau, \rho) \in E \setminus E_L$, и вектор $\delta(\xi) = (\delta_{ij}^{\xi}, (i, j) \in E; \delta^{\xi})$ при неизвестной t составляют базис пространства решений однородной системы (9), $t, z_{\tau \rho}$ – свободные переменные, $(\tau, \rho) \in E \setminus E_L$. Совокупность дуг E_L опоры графа $S = (V, E)$ для системы (9) является остовным деревом графа S [7]–[8].

Матрица инцидентности связного графа $S = (V, E)$ графа является матрицей неполного ранга, который равен $|V| - 1$. Для систем неполного ранга в [8]–[9] приведены алгоритмы построения аналитических и численных решений с использованием результатов разреженного матричного анализа и технологий потокового программирования.

Теорема 3. Если $L = \{I_L; E_L, v_t\}$ – опора графа $S = (V, E)$ для системы (9), где v_t – индекс последнего столбца матрицы системы (9), то общее решение разреженной недоопределенной системы (9) может быть представлено в следующем виде:

$$z_{ij} = \sum_{(\tau, \rho) \in E \setminus E_L} \delta_{ij}^{\tau \rho} z_{\tau \rho}, (i, j) \in E_L, \quad t = \sum_{(\tau, \rho) \in E \setminus E_L} \delta^{\tau \rho} z_{\tau \rho}, \quad (13)$$

где векторы $\delta(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^{\tau \rho}, (i, j) \in E; \delta^{\tau \rho})$, $(\tau, \rho) \in E \setminus E_L$, порожденные дугами $(\tau, \rho) \in E \setminus E_L$ составляют базис пространства решений однородной системы (9), $z_{\tau \rho}$ – свободные переменные, $(\tau, \rho) \in E \setminus E_L$ [7]–[8].

Для создания эффективного метода решения задачи (8)–(11) большой размерности исследованы свойства разреженной матрицы системы (9), разработан алгоритм построения базиса пространства решений однородной системы (9) и на его основе получено ее общее решение как линейная комбинация векторов базиса пространства решений. Число операций для вычисления каждого вектора базиса пространства решений пропорционально числу его ненулевых компонент. Для решения задачи (8)–(11) разработаны конструктивные методы декомпозиции разреженных систем линейных алгебраических уравнений с применением технологий потокового программирования [8]–[9]. Разработаны вычислительные технологии для решения больших задач потокового программирования, возникающих на практике, с учетом результатов разреженного матричного и сетевого анализа.

3. Определение минимальных изменений параметров целевой функции. Восстановим компоненты векторов $\theta = (\theta_{ij}, (i, j) \in E)$, $\psi = (\psi_{ij}, (i, j) \in E)$ по оптимальному решению задачи (8)–(11). Имеем два случая: 1) столбец с индексом $v_t \in J_B$ (входит в состав опоры) и 2) столбец с индексом $v_t \notin J_B$ (не входит в состав опоры).

Рассмотрим случай 1): $v_t \in J_B$. Оценки $\tilde{\Delta}_{ij}, (i, j) \in E_N = E \setminus E_B$ для оптимальной опоры E_B графа S для системы (9)–(10) известны:

$$\tilde{\Delta}_{ij} = p_{ij} - \left(u_i - u_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p v_p + q_{ij} w \right), (i, j) \in E_N,$$

где потенциалы $u = (u_i, i \in V)$, $v = (v_p, p = \overline{1, l})$, w удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} u_i - u_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p v_p + q_{ij} w &= p_{ij}, (i, j) \in E_B, \\ -\sum_{i \in V} b_i u_i - \sum_{p=1}^l \alpha_p v_p + \gamma w &= \beta. \end{aligned} \quad (14)$$

Из соотношений $\tilde{\Delta}_{ij} = -\theta_{ij} + \psi_{ij}, (i, j) \in E$ определим искомые значения изменений $\theta_{ij}, \psi_{ij}, (i, j) \in E$ параметров $p_{ij}, (i, j) \in E$ дробно-линейной целевой функции (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= |\tilde{\Delta}_{ij}|, \psi_{ij} = 0, \text{ если } \tilde{\Delta}_{ij} < 0; \\ \theta_{ij} &= 0, \psi_{ij} = \tilde{\Delta}_{ij}, \text{ если } \tilde{\Delta}_{ij} > 0; \\ \theta_{ij} &= \psi_{ij} = 0, \text{ если } \tilde{\Delta}_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим случай 2): $v_t \notin J_B$. Вычислим оценки $\tilde{\Delta}_{ij}, (i, j) \in E_N$ и $\tilde{\Delta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{ij} &= p_{ij} - \left(u_i - u_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p v_p + q_{ij} w \right), (i, j) \in E_N = E \setminus E_B, \\ \tilde{\Delta} &= \beta + \sum_{i \in V} b_i u_i + \sum_{p=1}^l \alpha_p v_p - \gamma w, \end{aligned}$$

где E_B – множество опорных дуг оптимальной опоры обобщенного графа S для системы (9)–(10) и потенциалы $u = (u_i, i \in V)$, $v = (v_p, p = \overline{1, l})$, w удовлетворяют следующей системе:

$$u_i - u_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p v_p + q_{ij} w = p_{ij}, (i, j) \in E_B. \quad (16)$$

Искомые величины $\theta_{ij}, \psi_{ij}, (i, j) \in E$ изменений параметров $p_{ij}, (i, j) \in E$ дробно-линейной целевой функции (1) вычисляются согласно (15).

Окончательно, по оптимальному решению $t, z_{ij}, (i, j) \in E$ задачи (8)–(11) и оптимальной опоре графа $S = (V, E)$ для системы (9)–(10) получены минимальные изменения $\theta_{ij}, \psi_{ij}, (i, j) \in E$ (15) коэффициентов $p_{ij}, (i, j) \in E$ дробно-линейной целевой функции (1). Допустимое решение $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in E)$ прямой задачи (1)–(3) является оптимальным решением для новых параметров $\tilde{p}_{ij} = p_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}, (i, j) \in E$ числителя дробно-линейной целевой функции (1).

Литература

1. Фидлер М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерман. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 288 с.
2. Burton D. On an instance of the inverse shortest paths problem / D. Burton, Ph. L. Toint // Mathematical Programming. – 1992. – Vol. 53, Is. 1. – P. 45–61.
3. Ahuja, R. K. Inverse Optimization / R.K. Ahuja, J.B. Orlin // Operation Research. – 2001. – Vol. 49, Is. 5. – P. 771–783.
4. Jain, S. An Inverse Capacitated Transportation Problem / S. Jain, N. Arya // IOSR Journal of Mathematics. – 2013. – Vol. 5, Is. 4. – P. 24–27.
5. Пилипчук, Л.А. Методы построения оптимальных параметров целевой функции в неоднородных сетевых задачах линейной оптимизации с неточными данными / Л.А. Пилипчук // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2016. – № 3 (96). – С. 113–117.
6. Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. / Р. Габасов, Ф.М Кириллова. – Минск : БГУ, 1980. – Ч. 3. Специальные задачи. – 368 с.

7. Пилипчук, Л.А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2012. – 260 с.
8. Pilipchuk, L.A. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. – 2015. – Vol. 1690, 060006. – Doi : 10.1063/1.4936744. – 9 p.
9. Pilipchuk, L.A. Computational techniques and data structures of the sparse underdetermined systems with using graph theory / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk // American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc. – 2016. – Vol. 1789, 060014. – Doi : 10.1063/1.4968506. – 7 p.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 13.03.2017

УДК 621.396.67

Метод конечных элементов в прикладной электродинамике

В.П. Кудин

Излагаются основные идеи, возможности и преимущества метода конечных элементов (МКЭ). Описана общая схема МКЭ, на примере одномерного дифференциального уравнения второго порядка изложена идея МКЭ. Обсуждены векторный МКЭ и решение систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей. Приведены примеры решения задач электродинамики с помощью МКЭ.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, метод конечных элементов, система линейных алгебраических уравнений, разреженная матрица.

The paper outlines the main ideas, possibilities and advantages of the finite element method (FEM). The general scheme of an FEM is described; with the example of a one-dimensional differential equation of the second order the idea of an FEM is presented. The vector FEM and the solution of systems of linear algebraic equations with a sparse matrix are discussed. Examples of the solution of the electrodynamics problems with the help of FEM are given.

Keywords: partial differential equations, finite element method, system of linear algebraic equations, sparse matrix.

Введение. На сегодняшний день метод конечных элементов (МКЭ) является общепризнанным основным методом численного анализа в целом ряде областей науки и техники. Созданные на его основе комплексы программ широко используются в различных областях: строительстве, кораблестроении, аэрокосмической и автомобильной промышленности, акустике, оптике и т. д. По своей сущности – это вариационный метод с кусочно-полиномиальными базисными функциями, обладающий большой гибкостью и применимый к широкому классу уравнений в частных производных. Он позволяет достаточно точно описать сложные криволинейные границы области определения решения и краевые условия. В отличие от метода конечных разностей МКЭ обеспечивает единственность приближенного решения во всех точках рассматриваемой области и является значительно более эффективным на практике.

МКЭ имеет историю более чем 70 лет. Он был впервые предложен в 1940-х гг. Курантом для решения проблем равновесия и вибрации [1], и его использование началось в 1950-е гг. для проектирования самолетов. После этого метод стал широко применяться к задачам теории упругости и структурного анализа и все чаще к проблемам в других областях, таких как динамика жидкости и электромагнетизм.

МКЭ имеет непревзойденные возможности для моделирования сложных геометрических конструкций с разнообразными материалами. При использовании неструктурированных сеток с криволинейными треугольниками и тетраэдрическими элементами, метод может точно моделировать искривленные поверхности, тонкие структуры, а также различные материалы. Хотя МКЭ требует решения систем уравнений высокого порядка, сама матрица является разреженной и часто симметрической, что позволяет использовать эффективные методы решения. Кроме того, МКЭ хорошо подходит для параллельных вычислений за счет использования различного рода разложений. МКЭ решает дифференциальные уравнения в частных производных напрямую, без использования функций Грина. Как таковой, он требует дискретизации трехмерной области, окружающей исследуемый объект, и усечения этой области, чтобы сделать ее конечной. Надлежащая технология усечения была одним из главных пред-

метов исследования для анализа МКЭ антенных задач, и в настоящее время разработан ряд плодотворных подходов. Кроме того, созданы разнообразные высокоэффективные и надежные алгоритмы и программы для генерации сетки разбиения.

В данной работе излагаются основные идеи МКЭ, его возможности и преимущества с целью привлечения исследователей к его использованию.

Общая схема МКЭ. Типичная граничная задача в заданной области V может быть определена с помощью дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений)

$$L(u) = f, \quad (1)$$

вместе с граничными условиями на границе S области V .

Общая процедура решения граничной задачи (1) с помощью МКЭ состоит из следующих шагов.

Первоначально область V делится на ячейки или элементы. Например, двумерная область может быть разбита на треугольники или четырехугольники (рисунок 1).

Искомое решение представляется в виде конечного разложения

$$u = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n, \quad (2)$$

по выбранной системе базисных функций φ_n , $n = 1, 2, \dots, N$, максимально полно учитывающих особенности решения (что позволит уменьшить число слагаемых в (2)). В общем случае базисные функции представляют собой полиномы невысокой степени, отличные от нуля лишь в нескольких соседних элементах (так называемые функции подобластей).

Потребуем, чтобы разность $r = L(u) - f$ была минимально возможной. В общем случае сделать ее равной нулю во всех точках области нельзя, но можно добиться этого в среднем.

Выбираем тестовые или весовые функции ψ_m , $m = 1, 2, \dots, N$ в таком же количестве, что и базисные. Если весовые функции совпадают с базисными, то в таком случае метод называется методом Галеркина.

Из условия $\langle r \psi_m \rangle = \int_V r \psi_m dv = \int_V [L(u) - f] \psi_m dv = 0$ получаем систему линейных алгебраических уравнений, решение которой дает набор коэффициентов разложения искомой функции по базисным.

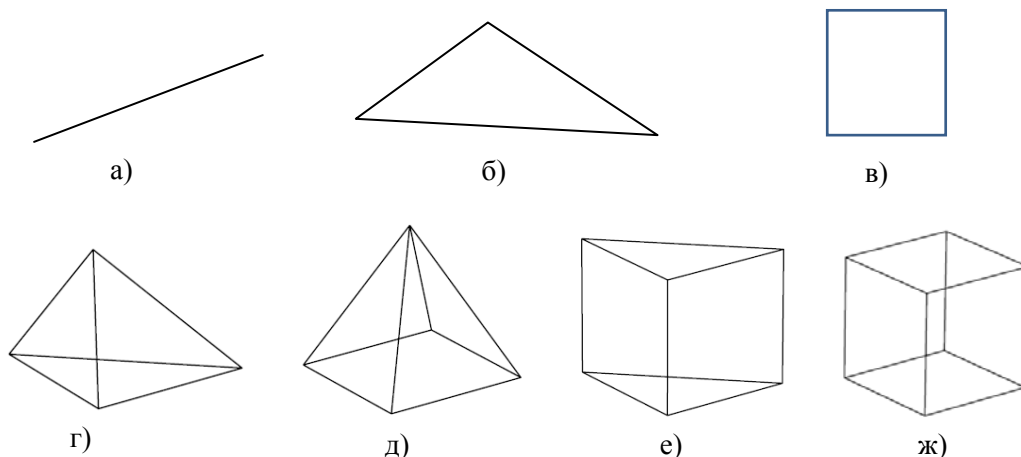


Рисунок 1 – Примеры конечных элементов:

а) для одномерной задачи; б), в) для двумерной задачи; г), д), е), ж) для трехмерной задачи

МКЭ в одномерном случае. Идею МКЭ рассмотрим на примере решения одномерного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$-\frac{d}{dx} \left[\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + \beta(x) u(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b. \quad (4)$$

Подобное дифференциальное уравнение возникает, например, при исследовании распространения плоской волны в неоднородной среде.

Согласно общей схеме МКЭ весь отрезок $[a, b]$ делится на N подынтервалов (элементов), вообще говоря, разной длины $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, где x_n , $n = 1, 2, \dots, N+1$ – концы элементов, называемые узлами. При этом, $x_1 = a$, $x_{N+1} = b$. Мы введем узловые базисные функции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots, N+1$, отличные от нуля только на двух соседних элементах, за исключением крайних (при $n = 1$ и $n = N+1$), которые определены на одном элементе. Эти функции линейны на каждом элементе, равны единице на общем узле (к которому привязаны) и нулю на двух оставшихся узлах. Математически эти базисные функции выражаются формулой

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} < x \leq x_n, \quad n = 2, 3, \dots, N+1 \\ \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n}, & x_n < x \leq x_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{cases}. \quad (5)$$

Данные базисные функции хорошо известны в теории тонкопроволочных антенн и носят название треугольных базисных функций.

Таким образом, решение задачи (3), (4) ищется в виде конечного ряда

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N+1} c_n \varphi_n(x). \quad (6)$$

Для выбранных базисных функций в соответствии с (5) и (6) в узловых точках $u(x_n) = c_n$, $n = 2, 3, \dots, N$. Кроме того, на концах отрезка $[a, b]$ согласно (4) $c_1 = f(a)$, $c_{N+1} = f(b)$.

На следующем шаге, следуя схеме метода Галеркина, выберем весовые функции $\psi_m(x) = \varphi_m(x)$, $m = 2, 3, \dots, N$. При этом концевые точки исключены, поскольку соответствующие коэффициенты уже известны. Умножим исходное уравнение (3) на весовые функции и проинтегрируем на интервале $[a, b]$. Применяя интегрирование по частям, смысл которого в понижении порядка производных, и учитывая равенство нулю весовых функций на концах, получим $(N-1)$ соотношение для $m = 2, 3, \dots, N$:

$$\int_a^b \left[\alpha(x) \frac{d\psi_m(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} + \beta(x) \psi_m(x) u(x) - \psi_m(x) f(x) \right] dx = 0. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), учитывая, что коэффициенты известны, после перегруппировки получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из $(N-1)$ уравнений относительно $(N-1)$ неизвестных $c_2, c_3, \dots, c_N$:

$$\begin{pmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,N} \\ A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & A_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,2} & A_{N,3} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{2,1}c_1 + A_{2,N+1}c_{N+1} \\ A_{3,1}c_1 + A_{3,N+1}c_{N+1} \\ \vdots \\ A_{N,1}c_1 + A_{N,N+1}c_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь элементы матрицы $\mathbf{A}$ и столбца правой части $\mathbf{b}$ есть

$$A_{m,n} = \int_a^b \left[\alpha(x) \frac{d\psi_m(x)}{dx} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} + \beta(x) \psi_m(x) \varphi_n(x) \right] dx = 0, \quad (9)$$

$$b_m = \int_a^b \psi_m(x) f(x) dx, \quad (10)$$

причем индексы в (9), (10) принимают значения $m, n = 1, 2, \dots, N+1$.

В компактном виде СЛАУ (8) может быть записана в виде

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{B}^{<1>}c_1 - \mathbf{B}^{<N+1>}c_{N+1}.$$

В последнем выражении матрица $\mathbf{B}$ представляет собой матрицу $\mathbf{A}$, из которой удалили крайние (первый и последний) столбцы и крайние строки. Аналогично вектор $\mathbf{d}$ получается удалением из вектора $\mathbf{c}$ первого и последнего элементов. Верхними угловыми скобками обозначена операция извлечения из матрицы соответствующего столбца.

Из (9) следует, что матрица $\mathbf{A}$ является симметрической, если весовые функции взяты такими же, как и базисные (метод Галеркина). Кроме того, для базисных функций вида (5), да и вообще любых, отличных от нуля только на двух соседних интервалах, матрица $\mathbf{A}$ будет иметь ненулевые элементы только на трех диагоналях: главной, и двух соседних. Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ является разреженной, что позволяет использовать эффективные и экономичные алгоритмы решения СЛАУ с подобными матрицами. Это обстоятельство является ключевым для МКЭ и позволяет решать с его помощью системы большой размерности. Вторым ключевым обстоятельством, как уже указывалось при выводе формулы (9), является отсутствие вторых производных базисных и весовых функций в данной формуле, что крайне важно при построении численной процедуры решения.

Аналогично решается и задача Неймана, когда на концах заданного отрезка накладываются граничные условия на производную искомой функции. В этом случае СЛАУ (8) должна быть дополнена двумя уравнениями, получающимися при использовании весовых функций $\psi_1(x)$ и $\psi_{N+1}(x)$, а коэффициенты c_1, c_{N+1} также должны быть найдены в процессе решения.

Векторный МКЭ. При решении векторных уравнений Максвелла в трехмерной области с помощью МКЭ возможно появление ложных мод при неудачном выборе сетки дискретизации. Причина заключается в том, что узловые базисные функции для каждой из трех декартовых компонент поля принципиально не обеспечивают непрерывность производных полей. Поэтому в этом случае необходимо применять векторные конечные элементы [2], получившие по имени их создателя название «элементы Неделека». В отличие от классического узлового МКЭ базисные функции векторного МКЭ связаны не с узлами дискретизации, а с ребрами и гранями ячейки дискретизации. Именно последнее обстоятельство и обеспечивают непрерывность производных полей.

Векторные конечные элементы имеют определенные преимущества перед классическими узловыми конечными элементами:

- ВКЭ базисные функции позволяют естественным образом учитывать граничные условия для тангенциальных или нормальных компонент полей.
- ВКЭ базисные функции корректно описывают электромагнитные поля при наличии различных по свойствам областей, обеспечивая непрерывность нормальной или тангенциальной компонент решения, допуская разрывность другой.
- Использование ВКЭ при решении задачи на собственные значения не приводит к появлению ложных мод на любых типах сеток.

Решение СЛАУ с разреженной матрицей. При решении задач с помощью МКЭ, особенно в трехмерном векторном случае, получаются СЛАУ с матрицами большой размерности. Здесь число неизвестных может составлять несколько миллиардов или более. Поэтому использование обычных процедур, вроде метода Гаусса, применяемых для матриц общего вида, невозможно. Ситуацию спасает то, что метод конечных элементов порождает разреженные матрицы, т. е. такие, в которых количество отличных от нуля элементов сравнительно невелико, причем все они сгруппированы вблизи главной диагонали с всегда ненулевыми элементами. В таком случае имеет место существенная экономия машинного времени и памяти при вычислении самих матричных элементов (поскольку их мало) и их хранения (поскольку достаточно хранить только сами элементы и их местоположение). Также удастся построить эффективные алгоритмы умножения матрицы на вектор и методы решения СЛАУ (итерационные и др.) [3], [4].

Примеры решения задач электродинамики с помощью МКЭ. Здесь приводятся некоторые результаты, которые демонстрируют возможности МКЭ.

В работе [5] предложена модель для электродинамического моделирования тонких проводников – классической задачи, традиционно и естественно решаемой методом инте-

гральных уравнений. Уравнения Максвелла дискретизируются с помощью разбиения на тетраэдры. Ток на проводнике описывается дифференциальным уравнением второго порядка.

В качестве примера рассмотрен тонкий провод длиной 41 м и радиусом 10 мм. Провод дискретизируется 42 тетраэдрами с длиной ребра 1,08 м. Антенна возбуждается в средней точке источником напряжения. Была проведена проверка метода при различных относительных положениях провода и сетки.

На рисунке 2 показана частотная зависимость входного сопротивления тонкого провода при различных сетках и в сравнении с результатами, полученными методом моментов. Хорошо видно, что от сетки результаты не зависят, в то время как с повышением частоты расхождения с методом моментов увеличиваются.

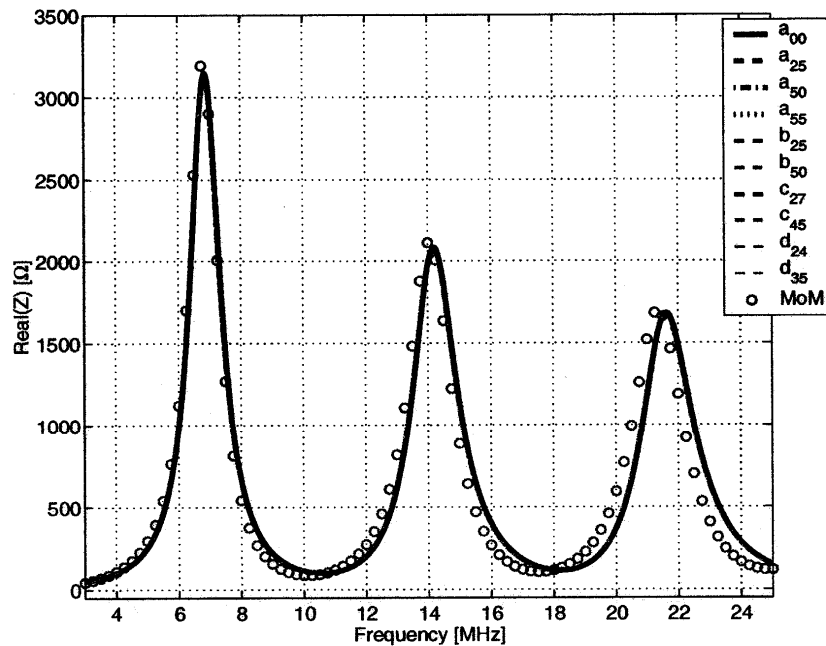


Рисунок 2 – Частотная зависимость входного сопротивления тонкого провода [6] при различных сетках (сплошная кривая) и в сравнении с результатами, полученными методом моментов (кружочки)

Ряд работ посвящен применению метода конечных элементов для анализа двоякопериодических структур. В частности, в [6] предложена формулировка трехмерного МКЭ во временной области применительно к расчету рассеяния наклонно падающей плоской волны на бесконечной двоякопериодической структуре, основанная на использовании единичной ячейки. При этом вся частотная характеристика может быть получена путем единственного вычисления. Метод развит для задачи рассеяния, однако он может быть непосредственно распространен и на задачи излучения.

В [7] предложен быстрый метод моделирования конечных решеток произвольных трехмерных элементов. Метод использует повторяющийся характер конечных решеток и трехмерную функцию Грина, на основе которых создается блочно-теплицева структура СЛАУ. Это позволяет существенно уменьшить требования к памяти и применить быстрое преобразование Фурье для ускорения матрично-векторного умножения в итерационном процессе решения. Каждый элемент решетки моделируется на основе МКЭ и интегральных уравнений. Все это в совокупности дает метод, который гораздо эффективнее прямого МКЭ в части затрат времени и памяти.

В [8] МКЭ используется для анализа и оптимизации 8-канального модуля из антенн Вивальди совместно с диаграммообразующей схемой (рисунок 3). Модуль формирует веер из 8-ми независимых лучей в диапазоне частот 8...12 ГГц.

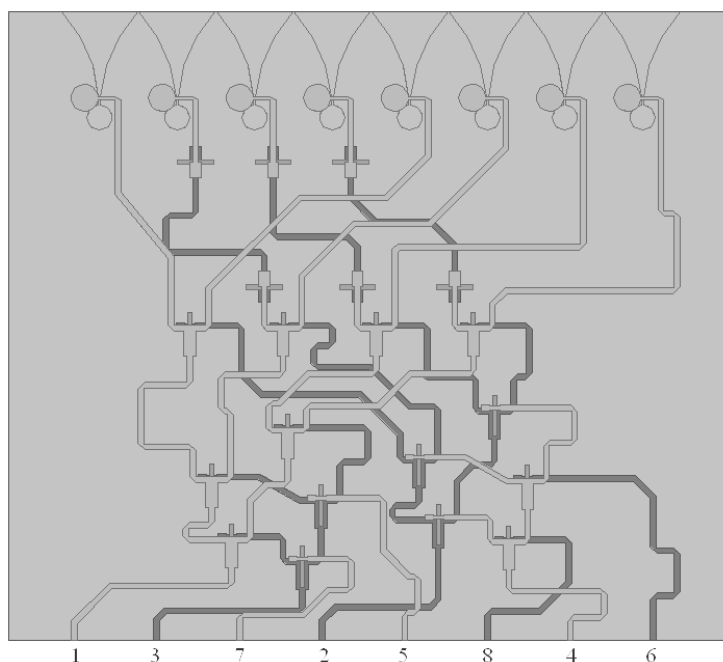


Рисунок 3 – Антенный модуль на основе антенны Вивальди с восьмиканальной параллельной диаграммообразующей схемой

Программные продукты, реализующие МКЭ. Программный комплекс HFSS (аббревиатура от High Frequency Structural Simulator) американской компании ANSYS в настоящее время является, по-видимому, наиболее популярным инструментом радиоинженеров для проектирования электронных приборов и антенных систем. Он предлагает набор встроенных модулей, основанных на МКЭ, методе интегральных уравнений, асимптотических методах физической оптики и гибридных лучевых методах, для решения широкого круга задач практически во всем частотном диапазоне.

HFSS использует трехмерный векторный вариант МКЭ в частотной области. Это позволяет определить все интересующие параметры – S -, Y -, Z -матрицы, трехмерные поля в ближней и дальней зонах и провести удобную визуализацию результатов.

HFSS обладает автоматической технологией построения сетки, которая требует лишь задания геометрии и свойств материала. В качестве элемента используется тетраэдр, что дает возможность адекватно геометрически и электродинамически описать практически любой объект. Сеточная технология позволяет уменьшить затраты машинной памяти и времени вычислений. HFSS также позволяет использовать криволинейные элементы. Эти элементы конформны любой связанной криволинейной поверхности, что в итоге дает высшую степень точности описания геометрии.

Модуль HFSS во временной области основан на трехмерном МКЭ для временной области и той же процедуре автоматического построения сетки на основе тетраэдров.

Программный комплекс CST MICROWAVE STUDIO является частью комплекса программ для моделирования электромагнитного поля CST STUDIO SUITE немецкой (а теперь международной) компании CST – Computer Simulation Technology, которая продолжает динамично развиваться. Комплекс включает инструменты для проектирования и оптимизации устройств, работающих в широком диапазоне частот – от статических до оптических. Анализ может включать тепловые и механические эффекты, также как и моделирование цепей.

В последние годы активно развивается пакет COMSOL Multiphysics, который позволяет моделировать практически все физические процессы, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Программа содержит различные решатели, которые позволяют справиться даже с самыми сложными задачами, а простая структура приложения обеспечивает простоту и гибкость использования. Решение любой задачи базируется на численном решении уравнений в частных производных с помощью МКЭ.

Спектр задач, которые поддаются моделированию в пакете, чрезвычайно широк. Он позволяет решать задачи из области электромагнетизма, теории упругости, динамики жидкостей и газов, химической газодинамики, термодинамики и многих других. Набор специальных модулей в программе охватывает практически все сферы приложений уравнений в частных производных. У пользователя есть также возможность построить и решить свою систему уравнений. Замечательной особенностью пакета COMSOL Multiphysics является возможность взаимодействия модулей, решающих разные физические задачи. Например, можно совместно исследовать взаимодействующие электромагнитные и тепловые процессы в электрических машинах.

Закключение. Таким образом, в настоящее время наблюдается тенденция доминирования МКЭ в области численных процедур решения задач прикладной физики и техники.

Достоинства МКЭ:

- Возможность решения векторных трехмерных (или четырехмерных – включая время) систем дифференциальных уравнений в частных производных.
- Естественное включение граничных условий на поверхностях раздела сред.
- Результирующие матрицы являются разреженными – ненулевые элементы сгруппированы вблизи главной диагонали, что позволяет построить эффективные методы решения СЛАУ с такими матрицами.
- Количество неизвестных может достигать 10^9 – 10^{10} .

Литература

1. Courant, R.L. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration / R.L. Courant // Bull. Am. Math. Soc. – 1943. – Vol. 49. – P. 1–23.
2. Nedelec, J.C. A new family of mixed finite elements in R^3 / J.C. Nedelec / Numer. Math. – 1986. – Vol. 50. – P. 57–81.
3. Писсанецки, С. Технология разреженных матриц / С. Писсанецки. – М. : Мир, 1988. – 410 с.
4. Баландин, М.Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
5. Edelvik, F. An Unconditionally Stable Subcell Model for Arbitrarily Oriented Thin Wires in the FETD Method / F. Edelvik [et al] // IEEE Transactions. – 2003. – Vol. AP-51, № 8. – P. 1797–1805.
6. Rickard Petersson, L.E. A Three-Dimensional Time-Domain Finite-Element Formulation for Periodic Structures / L.E. Rickard Petersson, J.M. Jin // IEEE Transactions. – 2006. – Vol. AP-54, № 1. – P. 12–19.
7. Kindt, R.W. Array Decomposition Method for the Accurate Analysis of Finite Arrays / R.W. Kindt [et al] // IEEE Transactions. – 2003. – Vol. AP-51, № 6. – P. 1364–1372.
8. Фаняев, И.А. Топология и характеристики антенного модуля X-диапазона / И.А. Фаняев, В.П. Кудин // Доклады БГУИР. – 2014. – № 4 (82). – С. 87–92.

Полная кратность разнесения сигналов в системах с многоканальной передачей и приемом сигналов при коррелированных рэлеевских замираниях

В.П. ТУЗЛУКОВ

Передача сигналов в соответствии с диаграммой направленности антенны и их сложение в месте приема являются простыми в реализации линейными операциями, позволяющими получать значительный выигрыш при эксплуатации многоканальных систем при пространственном разнесении сигналов. В настоящее время отмечается растущий интерес к исследованию и эксплуатации подобной технологии в системах с частотным разделением каналов, использующих ограниченную глубину обратной связи от приемной стороны к передающей. Подобные технологии используют множество векторов диаграммы направленности антенны, что затрудняет вывод математического выражения для вероятности ошибки в строгом виде и определение приемлемых границ сверху и снизу. Необходимо гарантировать выбор векторов диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема так, чтобы достигалась полная кратность разнесения сигналов.

Ключевые слова: Диаграмма направленности антенны, коррелированные замирания, разнесенный прием, многоканальные системы, рэлеевский канал.

The transmission of signals in accordance with the antenna pattern and their combination at the receiving point are simple in the implementation and linear in nature operations that make it possible to obtain a significant gain when operating multichannel systems with spatial diversity of signals. At present, there is a growing interest in researching and operating such a technology in systems with frequency division channels, using a limited depth of feedback from the receiving side to the transmitter. Such technologies often use multiple vectors of the antenna pattern, which makes it difficult to derive a mathematical expression for the error probability in pure form and to determine acceptable boundaries from above and below. It is necessary to guarantee the selection of the vectors of the radiation pattern of the transmitting antenna and the combination of signals at the receiving site in such a way that the full diversity of the signals is achieved. Therefore, it is very important to clearly define the necessary and sufficient conditions ensuring the full diversity of the signal diversity under the condition of the presence of correlated Rayleigh fading in the communication channel.

Keywords: beam forming, correlated Rayleigh fading, diversity methods, MIMO systems, Rayleigh channel.

Введение. Передача сигналов в соответствии с диаграммой направленности передающей антенны и их сложение в месте приема являются линейными процедурами, повышающими мощность сигнала и уменьшающими уровень флуктуаций в месте приема при наличии замираний в канале связи [1]. В течение последних 50 лет основное внимание в исследованиях передачи сигналов в соответствии с диаграммой направленности передающей антенны и их сложения в месте приема было направлено на применение систем с одноканальным/многоканальным входом и многоканальным/одноканальным выходом, используя методы многоканальной обработки сигналов. Для подобных систем математический анализ и получение строгого математического выражения вероятности ошибки в общем виде представляет собой трудную математическую задачу. В [2] было предложено строгое математическое определение вероятности ошибки для нескольких частных случаев, широко используемое для сравнения методов передачи сигналов в соответствии с диаграммой направленности передающей антенны, многоканальной обработки сигналов, сложения сигналов в месте приема, и анализа передачи сигналов по каналу связи с учетом замираний сигнала.

Последние несколько лет большой интерес вызывает анализ систем связи с многоканальной передачей и обработкой сигналов в месте приема, использующих одновременно множество передающих и приемных антенн [3], [4]. В этих системах многоканальная передача сигналов в соответствии с диаграммой направленности передающей антенны и сложение их приемной антенной осуществляется одновременно. Вектора диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема при многоканальной обработке должны быть согласованы [5]–[8]. Получение строгого математического выражения для вероятности ошибки, которое можно было бы без особого затруднения анализировать при мно-

гоканальной передаче сигналов в соответствии с диаграммой направленности передающей антенны и их сложении в месте приема при многоканальной обработке приемной антенной, является сложной, но решаемой задачей. В связи с этим, асимптотические определения коэффициента усиления антенной решетки и кратности разнесения сигналов при передаче/приеме сигналов часто используются для сравнения различных методов разнесенного приема сигналов.

Кратность разнесения (число независимых копий сигнала) была определена для многоканальных систем специфического назначения в соответствии с диаграммой направленности при передаче сигналов и их сложении в месте приема, используя каналы без запоминания данных и с некоррелированными рэлеевскими замираниями. К таким специфическим системам относятся системы с многоканальной обработкой сигналов: оптимальная передача и оптимальное сложение сигналов в месте приема [5], [9]; выборочное разнесение при передаче и оптимальное сложение сигналов в месте приема [6]; одинаковый коэффициент передачи и оптимальное сложение сигналов в месте приема [7]; одинаковый коэффициент передачи и выборочное сложение разнесенных сигналов в месте приема [7]; одинаковые коэффициенты передачи и сложения сигналов в месте приема [7]; ступенчатая диаграмма направленности передающей антенны [7], [8]. Для каждой из этих систем диаграмма направленности передающей антенны выбирается из некоторого множества возможных векторов диаграммы направленности, а вектор сложения сигналов в месте приема выбирается из некоторого множества возможных векторов сложения. Эти множества могут быть бесконечными или конечными, например, квантованные методы [7], [8]. За исключением настоящей статьи, точные характеристики для множества возможных векторов диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема, гарантирующие полную кратность разнесения сигналов в месте приема при передаче и приеме сигналов в условиях коррелированных рэлеевских замираний в канале связи, еще не получены. По этой причине, в настоящей статье мы определяем необходимые и достаточные условия для выбора множества векторов формирования диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема, которые обеспечивают полную кратность разнесения (полный набор независимых копий сигнала) при передаче сигналов по каналам связи без памяти данных и с коррелированными рэлеевскими замираниями. Некоррелированные рэлеевские замирания рассматриваются здесь как частный случай.

Математический анализ выполняется для произвольных методов модуляции передаваемых сигналов, где кратность разнесения сигналов, используя системы с оптимальными передачей и сложением сигналов в месте приема и с выборочным разнесением, используя каналы связи без запоминания данных и некоррелированными рэлеевскими затуханиями, задается для определения числа передающих и приемных антенн. Предполагаем линейное сложение сигналов в месте приема и используем модель рэлеевских замираний в канале связи из [9]–[11]. Результаты моделирования вероятности ошибки для систем с конечным числом передающих и приемных антенн подтверждают справедливость наших теоретических исследований. Моделирование осуществлялось генерированием случайных выборок векторов диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема.

Анализ модели системы. Мы рассматриваем многоканальную систему с M_t передающими и M_r приемными антеннами и канал связи без памяти данных с рэлеевскими замираниями. Используя диаграмму направленности передающей антенны и методы сложения сигналов в месте приема, принимаемый сигнал есть $y_k = (\mathbf{z}^* \mathbf{H} \mathbf{w}) s_k + \mathbf{z}^* \mathbf{n}$, где s_k – одномерный вещественный ($s_k \in \mathcal{R}$) или комплексный ($s_k \in \mathcal{C}$) символ, переданный по k -му каналу; $\mathbf{H}$ – матрица коэффициентов канала связи размером $M_r \times M_t$; $\mathbf{w}$ – $1 \times M_t$ вектор-столбец формирования диаграммы направленности передающей антенны; $\mathbf{z}$ – $1 \times M_r$ вектор-столбец сложения сигналов в месте приема; $\mathbf{n}$ – $1 \times M_r$ вектор-столбец аддитивного шума канала связи; символ $*$ обозначает сопряженное транспонирование. Полагаем, что элементы n_p вектор-столбца $\mathbf{n}$ распределены в соответствии с нормальным законом $\mathcal{GN}(0, \sigma_n^2)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_n^2 . Все элементы вектор-столбца $\mathbf{n}$ независимы меж-

ду собой, т. е., элемент n_p независим от элемента n_q , если $p \neq q$. Полагаем, что передаваемая группа сигналов должна быть нормализована так, что энергия передаваемого сигнала равна $\mathcal{E} = E_{s_k} [|s_k|^2]$, и символ $|\cdot|$ обозначает абсолютную величину. Сигналы, передаваемые по разным каналам связи, некоррелированы между собой, $E_{s_k, s_l} [s_k^* s_l] = 0$ при $k \neq l$.

Множества, из которых выбираются вектора диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема, играют важную роль. Множество, по которому оптимизируется функция стоимости, называется допустимым множеством оптимизации [12]. Мы будем называть множество всех возможных векторов диаграммы направленности передающей антенны допустимым множеством формирования направления передаваемых сигналов, а множество всех возможных векторов сложения сигналов в месте приема допустимым множеством векторов сложения сигналов в месте приема. Например, система с выборочным разнесением использует допустимое множество формирования направления передаваемых сигналов, состоящее из столбцов единичной матрицы размером $M_t \times M_t$, и допустимое множество векторов сложения сигналов в месте приема, состоящее из столбцов единичной матрицы размером $M_r \times M_r$. Коррелированность рэлеевских замираний в канале связи для многоканальной системы может быть представлено следующей моделью замираний: $\mathbf{H} = \sqrt{\mathbf{R}_R} \mathbf{G} \times \sqrt{\mathbf{R}_T}$, где $\mathbf{R}_R = \sqrt{\mathbf{R}_R^* \mathbf{R}_R}$ и $\mathbf{R}_T = \sqrt{\mathbf{R}_T \mathbf{R}_T^*}$ – ковариационные матрицы в месте приема и передачи сигналов, соответственно; $\mathbf{G}$ – матрица, элементы которой $g_{p,q}$ являются случайными величинами нормального закона распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией $\mathcal{CN}^0(0, \sigma_n^2)$. Элементы матрицы $\mathbf{G}$ не зависят друг от друга. Аналогичная модель была предложена в [9] и экспериментально подтверждена в [10]. Эта модель также предлагается стандартом IEEE 802.11 [13].

В настоящей работе мы полагаем, что $\mathbf{R}_R$ и $\mathbf{R}_T$ – матрицы полного ранга. Если $\mathbf{R}_T = \mathbf{I}_{M_t}$, $\mathbf{I}_{M_t}$ – единичная матрица размером $M_t \times M_t$, и $\mathbf{R}_R = \mathbf{I}_{M_r}$, $\mathbf{I}_{M_r}$ – единичная матрица размером $M_r \times M_r$, модель представляет собой множество передающих и приемных систем при некоррелированных рэлеевских замираниях в канале связи. Аналогично как для систем с коррелированными, так и для систем с некоррелированными рэлеевскими замираниями, канал связи моделируется как квазистатический канал с замираниями. Вектора $\mathbf{z}$ и $\mathbf{w}$ выбираются для каждого канала с целью минимизации вероятности ошибки. При фиксированной матрице $\mathbf{H}$ принимаемый сигнал будет обладать следующим отношением сигнал/помеха

$$Q_r = \frac{|\mathbf{z}^* \mathbf{H} \mathbf{w}|^2 \mathcal{E}}{\|\mathbf{z}\|_2^2 \sigma_n^2} = \frac{\mathcal{G}_r \mathcal{E}}{\sigma_n^2}, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма; $\mathcal{G}_r$ – эффективный коэффициент усиления канала связи системы с одноканальными входом и выходом. Заметим, что (1) представляет собой мгновенное или текущее значение отношения сигнал/помеха в смысле матрицы $\mathbf{H}$.

Усреднение значения отношения сигнал/помеха выполняется по шуму и переданному символу. Для любого данного символа средняя энергия, зависящая от диаграммы направленности передающей антенны, определяется как $\|\mathbf{w}\|_2^2 \mathcal{E}$. Для корректного сравнения мощности переданных символов полагаем $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$. Выражение (1) также изменяется, если вектор $\mathbf{z}$ умножается на любое ненулевое комплексное число. Без потери общности, полагаем $\|\mathbf{z}\|_2 = 1$. После выбора векторов направленности диаграммы передающей антенны и сложения сигналов в месте приема, наша модель есть система с одноканальными входом и выходом с замираниями $\mathbf{z}^* \mathbf{H} \mathbf{w}$ и шумом $\mathbf{z}^* \mathbf{n}$ в канале связи и эффективным коэффициентом усиления канала связи

$$\mathcal{G}_r = |\mathbf{z}^* \mathbf{H} \mathbf{w}|^2. \quad (2)$$

Полагаем, вектор-столбцы $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$, матрица $\mathbf{H}$ известны точно в месте приема. При передаче сигналов требуется информация о векторе-столбце $\mathbf{w}$. Подобный аналитический подход применяется для систем при отсутствии информации о матрице $\mathbf{H}$ в месте передачи сигналов. Вектор-столбец $\mathbf{w}$ определяется в месте приема. Используя ограниченную обратную связь,

информация о векторе-столбце $\mathbf{w}$ передается передатчику. Мгновенное значение вероятности ошибки для произвольного типа модуляции переданного сигнала выражается условной вероятностью ошибки на символ $P_s(\text{ошибка} | Q_r)$ для канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом при данном отношении сигнал/помеха в месте приема. Эта функция убывает с ростом Q_r . Средняя вероятность ошибки на символ $P_s^{out} = E_H[P_s(\text{ошибка} | Q_r)]$ определяется математическим ожиданием по отношению к матрице $\mathbf{H}$. Для минимизации условной вероятности ошибок полагаем, что приемное устройство выбирает вектора $\mathbf{w}$ и $\mathbf{z}$ так, что отношение сигнал/помеха в (1) максимальное. Тогда приемник посылает передатчику оптимальный вектор-столбец $\mathbf{w}$ диаграммы направленности передающей антенны. Заметим, что в этом случае, если допустимое множество векторов диаграммы направленности передающей антенны конечное, то вектор-столбец $\mathbf{w}$ может быть передан передатчику по обратной связи, используя ограниченное число бит.

Вывод точного математического выражения для вероятности ошибки P_s^{out} при произвольных подходах к алгоритмам сложения сигналов в месте приема является большой проблемой. Эта проблема может быть решена. Используем полный набор передающих M_t и приемных M_r антенн независимо от замираний в канале связи, характерных для систем с многоканальными входом и выходом. Введем ограничения на кратность разнесения сигналов при формировании диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема. В этом случае, эти системы обладают кратностью разнесения сигналов D и коэффициентом усиления антенной решетки A , если средняя вероятность ошибки на символ уменьшается пропорционально $A(\mathcal{E}/\sigma_n^2)^D$ при $(\mathcal{E}/\sigma_n^2) \rightarrow \infty$. Для многих специфических случаев было показано, что системы с оптимальными передачей и сложением сигналов в месте приема и выборочным разнесением для многоуровневой фазовой и квадратурной амплитудной модуляции сигналов [5], [12] обеспечивают полную кратность разнесения сигналов в месте приема. Системы с выборочным разнесением с многоуровневой фазовой и квадратурной амплитудной модуляции сигналов анализировались в [14] и [15], соответственно.

Необходимые и достаточные условия. Рассмотрим необходимые и достаточные условия формирования допустимых множеств векторов диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема. Используем эффективный коэффициент канала связи (2) вместо отношения сигнал/помеха на входе приемного устройства.

Теорема: Система связи, использующая диаграмму направленности антенны и сложение переданных сигналов в месте приема при наличии канала связи без памяти данных и коррелированных рэлеевских замираний, обеспечивает полную кратность разнесения тогда и только тогда, когда векторы диаграммы направленности антенны заполняют допустимое множество $\mathcal{G}^{M_t}$ и векторы сложения сигналов в месте приема заполняют допустимое множество $\mathcal{G}^{M_r}$.

Доказательство: Докажем достаточность условий. Полагаем, что вектора диаграммы направленности антенны и сложения сигналов в месте приема заполняют допустимые множества $\mathcal{G}^{M_t}$ и $\mathcal{G}^{M_r}$, соответственно. Кратность разнесения сигналов всегда будет меньше или равна $M_t \times M_r$, потому, что существует только $M_t \times M_r$ независимых параметров замирания. Обозначим допустимое множество векторов диаграммы направленности антенны $\mathcal{W}$ и допустимое множество векторов сложения сигналов в месте приема $\mathcal{Z}$. Мы можем определить невырожденную (обратимую) матрицу $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{R}_T} \mathcal{W} = \sqrt{\mathbf{R}_T} [\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_{M_t}]$, где $\mathbf{w}_i \in \mathcal{W}$ для $\forall i$. Аналогично, можно определить невырожденную (обратимую) матрицу $\mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{R}_R} \mathcal{Z} = \sqrt{\mathbf{R}_R} [\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \dots \mathbf{z}_{M_r}]$, где $\mathbf{z}_i \in \mathcal{Z}$, $\forall i$. Так как матрицы невырожденные или обратимые, мы можем определить декомпозицию сингулярного числа каждой матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{V}_L \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}_R$ и $\mathbf{C} = \mathbf{U}_L \mathbf{F} \mathbf{U}_R$, где $\mathbf{V}_L$ и $\mathbf{V}_R$ – унитарные матрицы размером $M_t \times M_t$; $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица с элементами $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{M_t} > 0$; $\mathbf{U}_L$ и $\mathbf{U}_R$ – унитарные матрицы размером $M_r \times M_r$; $\mathbf{F}$ – диагональная матрица с элементами $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_{M_r} > 0$. Для этой системы

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_r &= \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} |\mathbf{z}^* \mathbf{H} \mathbf{w}|^2 \geq \max_{1 \leq p \leq M_r} \max_{1 \leq q \leq M_t} |\mathbf{z}_p^* \mathbf{H} \mathbf{w}_q|^2 = \max_{1 \leq p \leq M_r} \max_{1 \leq q \leq M_t} |(\mathbf{U}_R)_p^* \mathbf{F} \mathbf{U}_L^* \mathbf{G} \mathbf{V}_L \mathbf{A} (\mathbf{V}_R)_q|^2 \\ &\stackrel{d}{=} \max_{1 \leq p \leq M_r} \max_{1 \leq q \leq M_t} |(\mathbf{U}_R^* \mathbf{F} \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{G}_R)_{(p,q)}|^2 \geq \frac{1}{M_t M_r} f_{M_r}^2 \lambda_{M_t}^2 \max_{1 \leq p \leq M_r} \max_{1 \leq q \leq M_t} |g_{p,q}|^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $(\mathbf{A})_p$ – p -й столбец матрицы $\mathbf{A}$; $(\mathbf{A})_{p,q}$ – (p,q) -й элемент матрицы $\mathbf{A}$; $\stackrel{d}{=}$ – означает эквивалентность в распределении. В (3) используется инвариантность комплексных стандартных (нормальных) матриц по отношению к унитарному преобразованию. При выводе (3) использовались преобразования из [16]. Отмечая, что максимум по всем элементам $|g_{p,q}|^2$ есть эффективный коэффициент канала связи для систем с выборочным разнесением, вероятность ошибки равна $P_s^{out} \leq E_G[P_s(\text{ошибка} | (M_t M_r)^{-1} f_{M_r}^2 \lambda_{M_t}^2 Q_{r_{SD}})]$, где $Q_{r_{SD}} = \max_{1 \leq p \leq M_r} \max_{1 \leq q \leq M_t} |g_{p,q}|^2 \mathcal{E} / \sigma_n^2$. Мы получили вероятность ошибки на символ для некоррелированных рэлеевских замираний в канале связи для системы с выборочным разнесением с коэффициентом $(M_t M_r)^{-1} f_{M_r}^2 \lambda_{M_t}^2$, который обеспечивает кратность $M_t M_r$. Таким образом, доказано, что рассматриваемая система связи обладает кратностью разнесения сигналов порядка $M_t M_r$.

Докажем необходимое условие. Пусть подмножество S_{η_r} , покрываемое векторами из допустимого множества $\mathcal{W}$, после умножения на $\sqrt{\mathbf{R}_T}$ имеет размерность M_{η_r} . Пусть подмножество S_Z , покрываемое векторами из допустимого множества $\mathcal{Z}$, после умножения на $\sqrt{\mathbf{R}_R}$ имеет размерность M_Z . При условии $M_{\eta_r} M_Z < M_t M_r$ можно определить матрицу $\mathbf{V}$ размером $M_t \times M_{\eta_r}$, покрывающую подмножество S_{η_r} , и матрицу $\mathbf{U}$ размером $M_r \times M_Z$, покрывающую подмножество S_Z , полагая $\mathbf{V}^* \mathbf{V} = \mathbf{I}_{M_{\eta_r}}$ и $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}_{M_Z}$. Для обеих матриц мы можем создать квадратичные унитарные матрицы $\bar{\mathbf{V}}$ и $\bar{\mathbf{U}}$, соединяя в цепочку ортогональные векторы размером $M - M_{\eta_r}$ и $M_r - M_Z$ с матрицами $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$, соответственно. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_r &= \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} |\mathbf{z}^* \mathbf{H} \mathbf{w}|^2 \leq \max_{\alpha: \alpha^* \alpha = 1} \max_{d: d^* d = 1} \beta |\mathbf{d}^* \mathbf{U}^* \mathbf{G} \mathbf{V} \mathbf{a}|^2 = \max_{\alpha: \alpha^* \alpha = 1} \max_{d: d^* d = 1} \beta \left| \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^* \bar{\mathbf{U}}^* \mathbf{G} \bar{\mathbf{V}} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \tilde{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \right|^2 \\ &\stackrel{d}{=} \max_{\alpha: \alpha^* \alpha = 1} \max_{d: d^* d = 1} \beta \left| \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^* \mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \tilde{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \right|^2 = \beta \|\mathbf{G}_{(1:M_Z, 1:M_{\eta_r})}\|_2^2, \end{aligned} \quad (4)$$

$\beta = \|\mathbf{R}_T\|_2 \times \|\mathbf{R}_R\|_2$, $\mathbf{0}$ и $\tilde{\mathbf{0}}$ – нулевые векторы; $\mathbf{G}_{(1:M_Z, 1:M_{\eta_r})}$ – матрица, образованная из первых M_Z строк и M_{η_r} столбцов; $\mathcal{G}_r$ – эффективный коэффициент канала связи для $M_{\eta_r} \times M_Z$ системы с оптимальными передачей и сложением сигналов в месте приема с антенной решеткой, обладающей переменными коэффициентами направленного действия. Тогда, $P_s^{out} \geq E_G[P_s(\text{ошибка} | \|\mathbf{R}_T\|_2 \times \|\mathbf{R}_R\|_2 Q_{r_{MRC}})]$, $Q_{r_{MRC}} = \|\mathbf{G}_{(1:M_Z, 1:M_{\eta_r})}\|_2^2 \mathcal{E} / \sigma_n^2$. Отметим, $M_{\eta_r} \times M_Z$ система связи с оптимальными передачей и сложением сигналов в месте приема обеспечивает кратность разнесения порядка $M_t \times M_r$. Так как это граничное значение справедливо для произвольного отношения $\mathcal{E} / \sigma_n^2$, можно сделать вывод, что система связи не достигает полного разнесения сигналов.

Результаты моделирования. Моделирование проводилось методом Монте-Карло. Алгоритмы формирования диаграммы направленности антенны и сложения сигналов генерировались случайным образом. Демонстрируется важность полного покрытия допустимого множества $\mathcal{G}^{M_t}$ векторами диаграммы направленности антенны. Для системы $M_t = 2$, $M_r = 1$ используется двоичная фазовая модуляция передаваемого сигнала при наличии 2-х допустимых множеств векторов формирования диаграммы направленности передающей антенны. Результаты представлены в виде функциональной зависимости вероятности ошибки на символ от отношения сигнал / помеха на входе приемной антенны (рисунок 1). Первое допустимое множество содержит $\{\mathbf{w}_1\}$. Для этой системы кратность разнесения сигналов равна 1. При моделировании

системы второго порядка использовалось множество $\{\mathbf{w}_1, \sqrt{0.99}\mathbf{w}_1 + \sqrt{0.01}\mathbf{w}_2\}$, где $\mathbf{w}_1^* \mathbf{w}_2 = 0$. Из рисунка 1 видно, что добавление второго вектора с большим значением коэффициента корреляции относительно первого вектора гарантирует полную кратность разнесения сигналов. Вероятность ошибки на символ, когда допустимое множество векторов, формирующих диаграмму направленности передающей антенны, состоит из $\{\mathbf{w}_1, \sqrt{0.99}\mathbf{w}_1 + \sqrt{0.01}\mathbf{w}_2\}$, представлена на рисунке 1 для демонстрации зависимости коэффициента передачи антенной решетки от степени коррелированности между двумя векторами, что хорошо согласуется с [8].

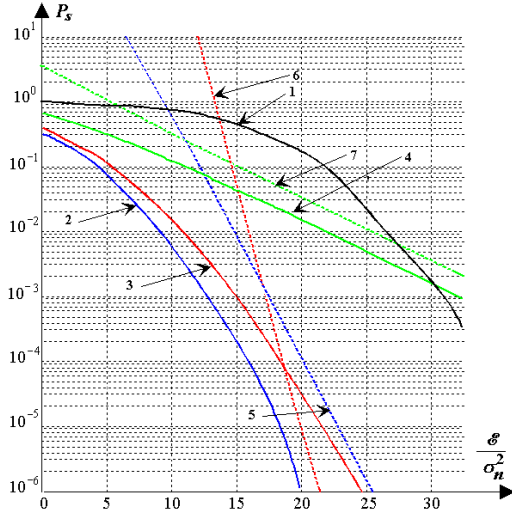


Рисунок 1 – Вероятность ошибки; система $M_t = 2, M_r = 1$: 1 – случайное разнесение, кратность 1; 2 – случайное разнесение, коэффициент корреляции 0,99; 3 – случайное разнесение, коэффициент корреляции 0,95; 4 – асимптотическое разнесение, кратность 1; 5 – асимптотическое разнесение, кратность 2.

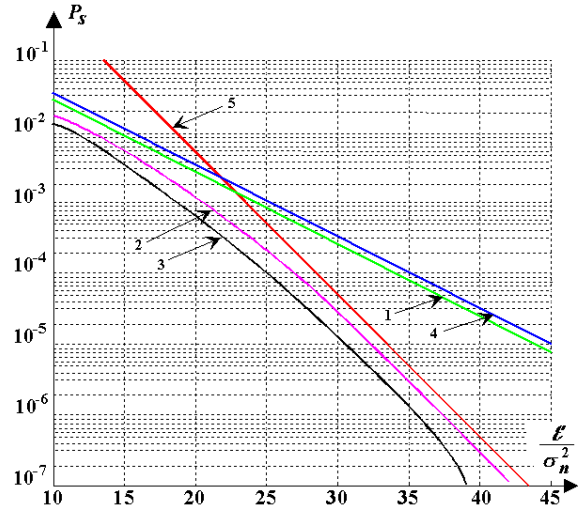


Рисунок 2 – Вероятность ошибки; система $M_t = 4, M_r = 2$: 1 – случайное разнесение, коэффициент корреляции 0,95; 2 – случайное разнесение, кратность 8; 3 – случайное разнесение, кратность 4; 4 – случайное разнесение, кратность 1; 5 – асимптотическое разнесение, кратность 4; 6 – асимптотическое разнесение, кратность 8; 7 – асимптотическое разнесение, кратность 1.

Вероятность ошибки на символ для различных допустимых множеств векторов формирования диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема для системы $M_t = 4, M_r = 2$ при 4-х битовой квадратурной амплитудной модуляции передаваемых сигналов, представлена на рисунке 2. Видно, что кратность разнесения системы, использующей множество $\mathcal{G}^{M_t=4}$ векторов формирования диаграммы направленности передающей антенны и множество $\mathcal{G}^{M_r=2}$ векторов сложения сигналов, равна 8. Если множество векторов формирования диаграммы направленности передающей антенны состоит из 2-мерного подмножества, кратность разнесения сигналов равна 4. Аналогично, когда допустимое множество векторов формирования диаграммы направленности передающей антенны, как и допустимое подмножество векторов сложения сигналов, состоит из одномерного подмножества, кратность разнесения сигналов равна 1. При моделировании используются матрицы полного ранга $\mathbf{R}_T$ и $\mathbf{R}_R$, генерируемые случайным образом для допустимого множества $\mathcal{G}^{M_t=4}$ векторов формирования диаграммы направленности передающей антенны и для допустимого множества $\mathcal{G}^{M_r=2}$ векторов сложения сигналов в месте приема, для того, чтобы показать экспериментально корректность полученных результатов и для коррелированных рэлеевских замираний в канале связи системы с многоканальными входом и выходом. Из рисунка 2 видно, что рассматриваемая система связи обеспечивает кратность разнесения сигналов, равную 8.

Выводы. Определены необходимые и достаточные условия для выбора допустимых Множеств векторов диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема для обеспечения полной кратности разнесения сигналов при передачи сигнала, используя канал связи без памяти данных и с коррелированными рэлеевскими замираниями. Эти условия позволяют с достаточной легкостью и без проведения моделирования или экс-

перимента определить кратность разнесения сигналов систем связи с диаграммой направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема, что при аналитическом рассмотрении вызывает очень большие трудности, особенно в случае ограниченной обратной связи. Полученные результаты работы справедливы для любого вида модуляции передаваемого сигнала при доказуемой полной кратности разнесения сигналов в системах с оптимальными передачей и сложением сигналов в месте приема и с выборочным разнесением передающих сигналов, используя канал связи без памяти данных и с некоррелированными рэлеевскими замираниями. В будущем предполагается провести исследования о влиянии допустимых множеств векторов диаграммы направленности передающей антенны и сложения сигналов в месте приема на величину коэффициента направленного действия антенной решетки. Подобное исследование проводилось для систем с многоканальным входом и одноканальным выходом [17] и многоканальными входом и выходом [4] для некоррелированных рэлеевских замираний в канале связи.

Литература

1. Anderson, J.B. Antenna arrays in mobile communications: Gain, diversity, and channel capacity / J.B. Anderson // *IEEE Antennas Propagation Magazine*. – 2000. – Vol. 42, № 2. – P. 12–16.
2. Soysal, A. Optimality of beamforming in fading MIMO multiple access channels / A. Soysal, S. Ulukus // *IEEE Transactions on Communications*. – 2009. – Vol. 57, № 4. – P. 1171–1183.
3. Jung, S.-H. Cooperative beamforming scheme using MIMO antenna array / S.-H. Jung // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. – 2015. – Vol. 29, Is. 9. – P. 321–335.
4. Liu, Jingui. Non-blind beamforming generalized receiver with DOA estimation in MIMO wireless communications systems / Jingui Liu, V.P. Tuzlukov // *WSEAS Transactions on Communications*. – 2014. – Vol. 13. – P. 402–416.
5. Dighe, P.A. Analysis of transmit-receive diversity in Rayleigh fading / P.A. Dighe, R.K. Mallik, S.S. Jamuar // *IEEE Transactions on Communications*. – 2003. – Vol. 51, № 4. – P. 694–703.
6. Thoen, S. Performance analysis of combined transmit-SC/receive-MRC / S. Thoen, Van der Perre, B. Gyselinckx, M. Engels // *IEEE Transactions on Communications*. – 2001. – Vol. 49, № 1. – P. 5–8.
7. Love, D.J. Equal gain transmission in MIMO wireless systems / D.J. Love, R.W. Heath // *IEEE Transactions on Communications*. – 2003. – Vol. 51, № 7. – P. 1102–1110.
8. Love, D.J. Grassmannian beamforming for MIMO wireless systems / D.J. Love, R.W. Heath, T. Strohmer // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 2003. – Vol. 49, № 10. – P. 2735–2747.
9. Balasem, S.S. Beamforming algorithms technique by using MVDR and LCMV / S.S. Balasem, S.K. Tiong, S.P. Koh // *World Applied Programming*. – 2012. – Vol. 2, № 5. – P. 315–324.
10. Schumacher, L. MIMO channel characterization / L. Schumacher, J.P. Kermoal, F. Frederiksen, K.I. Pedersen, A. Algans, P.E. Mogensen // *Technical Report on European IST-1999-11 729 Project METRA*.-2001.
11. Bodhe, S.K. Beamforming techniques for smart antenna using rectangular array structure / S.K. Bodhe, B.G. Hodage, S.D. Nandgaonkar // *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*. – 2014. – Vol. 4, № 2. – P. 257–264.
12. Wei, Liu. Wideband beamforming: concepts and techniques / Wei Liu, S. Weiss. – New York : Wiley & Sons Inc., 2010. – 302 p.
13. Indoor MIMO WLAN Channel Models // *IEEE 802.11-03/161r2*.-2003.
14. Tuzlukov, V.P. Detection of spatially distributed signals by generalized receiver using radar sensor arrays / V.P. Tuzlukov // *WSEAS Transactions on Communications*. – 2015. – Vol. 14. – P. 186–302.
15. Levin, D.Y. On the average directivity factor attainable with a beamformer incorporating null constraints / D.Y. Levin, E.A.P. Habets, S. Gannot // *IEEE Signal Processing Letters*. – 2015. – № 11. – P. 2122–2126.
16. Hadad, E. The binaural LCMV beamformer and its performance analysis / E. Hadad, S. Doclo, S. Gannot // *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing*. – 2016. – Vol. 24, № 3. – P. 543–558.
17. Elsamuty, R. Beamforming and angle-of-arrival estimation of square planar antenna array / R. Elsamuty, A.M. Attiya, E. Abdallah, A. Ammar // *Open Journal of Antennas and Propagation*. – 2016. – Vol. 4, № 2. – P. 13–23.

Персоналии

УДК 512.5:929*Л.А.Шемятков

К 80-летию со дня рождения Леонида Александровича Шемяткова

А.Н. Скиба, В.С. Монахов, М.В. Селькин

В 2017 г. исполнилось 80 лет со дня рождения всемирно известного алгебраиста, члена-корреспондента НАН Беларуси Леонида Александровича Шемяткова (03.07.1937–24.03.2013).

Ключевые слова: Л.А. Шемятков, алгебраическая школа.

In 2017, the 80th anniversary of the birth of the world-renowned algebraist, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus Leonid Alexandrovich Shemetkov (03.07.1937–24.03.2013) was celebrated.

Ключевые слова: L.A. Shemetkov, algebraic school.

Леонид Александрович Шемятков родился 3 июля 1937 г. в Гомеле. В семье Л.А. Шемяткова были потомственные крестьяне, дед его был рабочим, а отец – военным.

Переломным моментом в судьбе Л.А. Шемяткова было знакомство с профессором С.А. Чунихиным, который переехал в Гомель из Томска и возглавил кафедру высшей математики в только что созданном Белорусском институте инженеров железнодорожного транспорта. С.А. Чунихин окончил Московский университет, был учеником легендарного академика, Героя Советского Союза О.Ю. Шмидта. Постоянное общение с крупным ученым, человеком высочайшей культуры и образованности академиком С.А. Чунихиным стало для Л.А. Шемяткова настоящим университетом. Обучение в аспирантуре (1959–1962) под руководством С.А. Чунихина было успешным. Закончена аспирантура, и в 1962 г. Л.А. Шемятков становится младшим научным сотрудником созданной С.А. Чунихиным в Гомеле лаборатории теории конечных групп Института математики АН БССР. В 1964 г. Л.А. Шемятков стал кандидатом физико-математических наук (защита состоялась в Уральском университете, г. Свердловск).

После защиты кандидатской диссертации научная деятельность Л.А. Шемяткова возросла. В 1966 г. он участвует в работе Международного конгресса математиков в Москве, публикует ряд крупных работ в самых престижных журналах.

В 1969 г. через пять лет после защиты кандидатской Л.А. Шемятков защитил докторскую диссертацию по математике в возрасте тридцати одного года. Защита проходила в Киеве, в Институте математики Академии наук Украины. Докторская защита в молодом возрасте, да еще по математике – явление незаурядное. Немудрено, что еще во время своей защиты Л.А. Шемятков получил приглашение возглавить кафедру в Киевском университете. Но он остался в Гомеле. Ведь здесь он родился, окончил школу, институт, аспирантуру, стал ученым.

Он продолжает работать теперь уже в должности старшего научного сотрудника в той же лаборатории С.А. Чунихина и параллельно читает лекции студентам Гомельского университета, образованного в 1969 г. на базе бывшего пединститута им. В.П. Чкалова. Имя Л.А. Шемяткова становится известным математикам далеко за пределами нашей страны.

В середине прошлого столетия в проблематике алгебраической науки происходят крупные изменения, связанные с возникновением целого ряда новых направлений исследований. Л.А. Шемятков вместе со своими учениками начинает активно развивать новое для СССР направление алгебры – теорию формаций конечных групп. Уже в самом начале своей деятельности в этом направлении он добился значительных результатов.

Новый период в жизни Л.А. Шемяткова начинается в 1977 г., когда по приглашению ректора Гомельского университета Б.В. Бокутя он становится проректором по учебной работе. Более 12 лет он работает в этой должности, отдавая свои силы и знания развитию университета. В это же время Л.А. Шемятков делает ряд докладов на крупных алгебраических конференциях, продолжает активно заниматься научной работой, руководит аспирантами и работой Гомельского семинара «Теория классов конечных групп». После опубликования его мо-

нографии «Формации конечных групп» в издательстве «Наука» (Москва, 1978) она привлекла внимание специалистов многих стран и стала обсуждаться в алгебраических центрах Германии, Англии, Испании, Китая, России, Украины. С выходом этой монографии стала особенно заметна такая особенность научного таланта Леонида Александровича, как генерирование новых идей и постановка новых проблем, стимулирующих развитие алгебраической науки. В дальнейшем решение этих проблем Леонида Александровича составили основу докторских диссертаций А.Н. Скибы, В.С. Монахова, Н.Т. Воробьева, Го Вэньбиня, М.В. Селькина, В.А. Ведерникова, А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова, В.Н. Семенчука, В.Н. Тютянова и многих кандидатских диссертацией отечественных и зарубежных алгебраистов. Полученные результаты стимулировали развитие целого ряда новых направлений в теории классов конечных групп.

В 1980 г. Л.А. Шеметкова избирают членом-корреспондентом Академии наук БССР, а в 1989 г. он становится ректором Гомельского государственного университета.

Как руководитель Л.А. Шеметков много сделал для развития Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины.

Л.А. Шеметков создал в Гомеле всемирно известную научную алгебраическую школу. Начиная с 1968 г., в Гомеле регулярно проводятся международные алгебраические конференции с участием математиков из ближнего и дальнего зарубежья. В Гомельской научной школе, возглавляемой Л.А. Шеметковым, подготовлено свыше 70 кандидатов и докторов наук. Благодаря этому математические кафедры многих вузов Гомеля и других городов Беларуси укомплектованы преподавателями-математиками высшей квалификации. Воспитанники научной школы Л.А. Шеметкова работают также в университетах Иордании, Турции, Китая, России и Казахстана. Ими опубликовано более десятка монографий по теории классов групп и других алгебр.

Среди учеников Л.А. Шеметкова 34 кандидата и 12 докторов наук. Ученики Л.А. Шеметкова – профессора Го Вэньбинь (Китай), А.Н. Скиба, В.С. Монахов, Н.Т. Воробьев – создали и активно развивают свои собственные научные школы, у каждого из них более десятка защищенных кандидатов наук, а три ученика А.Н. Скибы (В.Г. Сафонов, В.М. Селькин и Н.Н. Воробьев) защитили докторские диссертации.

Леонид Александрович был убежден, что для изучения математики нужны не только природные способности. Очень важным при изучении математики, как и любой другой науки, является любовь к своему делу, открытое, дружеское отношение к ученикам. Он выступал против шаблонов в математических исследованиях, силу своей науки видел в многообразии методов и способов достижения целей.

Л.А. Шеметков автор многих научных трудов, в том числе 3-х монографий, принесших ему международную известность. Регулярно выступал с докладами в университетах и на международных конференциях в разных странах. Университетами Великобритании, Испании, Германии, Китая он неоднократно привлекался в качестве приглашенного профессора.

До самых своих последних дней оставался активно работающим математиком – за два месяца до кончины (24 марта 2013 г. перестало биться его сердце) он написал и отправил в печать две замечательные научные статьи.

Леонид Александрович Шеметков в молодые годы избирался членом бюро Гомельского обкома комсомола, председателем Гомельского областного и членом президиума республиканского совета молодых ученых и специалистов. В течение ряда лет он был депутатом Гомельского городского совета, членом областного комитета народного контроля, председателем совета ректоров Гомельской области и членом президиума республиканского совета ректоров, членом республиканского комитета по присуждению государственных премий в области науки и техники. Он являлся членом редколлегии многих научных журналов.

Математика – дело, которому Шеметков без преувеличения посвятил всю свою жизнь. Но в ней всегда было место и для любимой семьи: жены Аллы Михайловны, двух дочерей и пятерых внуков. Кроме этого, всю жизнь Леонида Александровича сопровождала музыка. Он был прекрасным пианистом, исполнителем и аккомпаниатором.

Таким Шеметков Леонид Александрович останется навсегда в нашей памяти.

Краткие сообщения

УДК 599.323/363

Видовой состав мелких млекопитающих станции очистки сточных вод г. Береза (Брестская область)

А.Н. МОЛОШ

В 2015–2016 гг. на территории станции очистки сточных вод г. Береза (Брестская область) проводился отлов мелких млекопитающих. Добыто 340 особей, относящихся к 5 родам и 10 видам (5 видов грызунов и 5 видов насекомоядных млекопитающих). Поимки белобрюхой белозубки (*Crocidura leucodon*) подтверждают точку зрения о широком распространении этого вида на юго-западе Беларуси. Значительный научный интерес представляет находка малой куторы (*Neomys anomalus*).

Ключевые слова: юго-запад Беларуси, станция очистки сточных вод, мелкие млекопитающие, видовой состав.

In 2015–2016 years on the territory of the sewage treatment plant in Bereza (Brest region) small mammals were captured. 340 individuals, belonging to 5 genera and 10 species (5 species of rodents and 5 species of insectivorous mammals) were taken. The capture of *Crocidura leucodon* confirm the view of the widespread distribution of this species in the south-west of Belarus. The discovery of a water shrew (*Neomys anomalus*) is of considerable scientific interest.

Keywords: south-west of Belarus, station of sewage treatment, small mammals, species composition.

Введение. Город Береза расположен в юго-западной части Беларуси, в центральной части Брестской области, географические координаты – 52°33'00" с. ш., 24°58'00" в. д. Станция очистки сточных вод примыкает к юго-восточной части города и располагается по правую сторону р. Ясельда. Вблизи техногенного объекта расположены жилой частный сектор, гаражный кооператив, хозяйственные постройки, сельскохозяйственные угодья и пустыри. Территория станции практически полностью покрыта кустарниковой и рудеральной травянистой растительностью различной высоты, которая варьирует в течение сезона, достигая 1,5 м (периодически проводится кошение растительности коммунальными службами). На очистных сооружениях эксплуатируется 10 иловых площадок общей полезной площадью около 6 га, в непосредственной близости от которых и производился отлов мелких млекопитающих (рисунок 1).



а)



б)

Рисунок 1 – Территория станции по очистке сточных вод
а) расположение ее на карте города; б) место отлова (отмечены иловые площадки)

Цель работы – показать возможность использования территории СОСВ для изучения экологии городской териофауны, а также для уточнения современного списка обитающих на юго-западе Беларуси мелких млекопитающих. Ранее [1] нами сообщалось об обитании на территории станции 8 видов наземной микротериофауны.

Материал и методы. Полевые исследования по сбору материала проводились с мая по октябрь 2015 и 2016 гг. на территории самой СОСВ г. Береза и непосредственно к ней прилегающей. Для отлова зверьков использовались модернизированные ловушки Барбера, представляющие собой ПЭТ-емкости объемом 1 литр, на 2/3 заполненные водой, а также стандартные ловушки Геро [2]. Ловушки устанавливались вблизи иловых площадок, а также на некотором удалении от них, среди сорных трав, кустарников.

Результаты и их обсуждение. За время исследований в 2015 г. отловлено 159, а в 2016 г. – 180 мелких млекопитающих, относящихся к 10 видам, по 5 видов грызунов (Rodentia) и насекомых (Lipotyphla): мыши малая лесная (*Apodemus uralensis*), полевая (*A. agrarius*) и желтогорлая (*A. flavicollis*), полевки обыкновенная (*Microtus arvalis*) и экономка (*M. oeconomus*), бурозубки обыкновенная (*Sorex araneus*) и малая (*S. minutus*), кутора обыкновенная (*Neomys fodiens*) и малая (*N. anomalus*), белозубка белобрюхая (*Crocidura leucodon*). Следует заметить, что *N. anomalus* и *C. leucodon* занесены в Приложение Красной книги Республики Беларусь (2015 г.) [3].

Такое значительное видовое разнообразие мелких млекопитающих определяется целым рядом благоприятных экологических факторов. Содержащаяся на полях станций органическая масса привлекает землероек, которые питаются беспозвоночными различных систематических групп (дождевые черви, двукрылые, жуки и др.). Постоянное выделение тепла при разложении органических веществ и охлаждении воды увеличивает вероятность выживания зверьков в неблагоприятный осенне-зимний период. Холмистая поверхность территорий станций, достаточная увлажненность, многообразие травянистой растительности, а также отсутствие (или малочисленность) хищников обеспечивают благоприятные условия и для поселений грызунов [1]. Кроме того, к СОСВ примыкает пойменный луг у р. Ясельда. Расстояние между станцией и рекой около 1,5 км. Пойменный луг периодически затапливается; обильно зарос древесно-кустарниковой растительностью. Указанные обстоятельства обеспечивают возможность активной миграции зверьков по пойме.

На территориях станции и непосредственно прилегающих к ней возможно обитание еще ряда видов, прежде всего, серой крысы (*Rattus norvegicus*), домовый мыши (*Mus musculus*), полевки восточноевропейской (*M. rossiaemeridionalis*) и мыши-малютки (*Micromys minutus*) и др.

Закключение. Доказано обитание на территории станции по очистке сточных вод г. Береза (Брестская область) 10 видов мелких наземных млекопитающих (по 5 видов грызунов и насекомых). Указанный список является предварительным и вероятно может быть расширен. Наибольший научный интерес представляют поимки *C. leucodon* и *N. anomalus*, которые являются малоизученными видами, занесенными в Приложение Красной Книги. Поимки белобрюхой белозубки подтверждают точку зрения о широком распространении этого вида на юго-западе Беларуси [4].

Литература

1. Молош, А.Н. К экологии микромаммалей, обитающих на территории станции по очистке сточных вод г. Береза / А.Н. Молош, А.А. Саварин // Веснік Віцебскага дзярж. ўн-та. – 2016. – № 4. – С. 31–35.
2. Саварин, А.А. Методические основы изучения мелких млекопитающих (на примере р. *Crocidura*) / А.А. Саварин, А.Н. Молош. – Минск : Колорград, 2016. – 32 с.
3. Красная книга Республики Беларусь : редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды диких животных. – Минск : Беларуская Энцыклапедыя імя П. Броўкі, 2015. – С. 315.
4. Саварин, А.А. К экологии и видовой диагностике белозубок (*Crocidura*, *Soricidae*), обитающих на территории Белорусского Полесья / А.А. Саварин, А.Н. Молош // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2015. – № 6 (93). – С. 29–33.

Технический редактор: *И.В. Близнец*. Корректоры: *Д.Д. Павловец, Г.Н. Петухова*

Подписано в печать 02.06.2017. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 20,0. Уч.-изд. л. 17,42. Тираж 100 экз. Заказ № 529.
Цена свободная

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.