ISSN 1609–9672

И З В Е С Т И Я

Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

№ 6 (99)

Естественные науки

2016

Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины
ИЗВЕСТИЯ

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации
№ 546 от 06.07.2009 года)

Журнал включен ВАК Республики Беларусь
в перечень научных изданий Республики Беларусь,
в которых публикуются результаты
диссертационных исследований
(приказы № 207 от 13.12.2005, № 9 от 15.01.2010,
№ 57 от 16.05.2013)

Журнал включен в библиографические базы данных
ВИНИТИ и Научную электронную библиотеку
eLIBRARY.RU

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор С.А. ХАХОМОВ,
канд. физ.-мат.наук, доцент
Зам. главн. редактора О.М. ДЕМИДЕНКО,
д-р тех. наук, профессор
Зам. главн. редактора М.В. СЕЛЬКИН,
д-р физ.-мат. наук, профессор

Члены редакционной коллегии:

Г.Г. Гончаренко, д-р биол. наук, проф.,
чл.-корр. НАН Беларуси
Ф.В. Кадол, д-р пед. наук, проф.
В.Н. Калмыков, д-р филос. наук, проф.
В.И. Коваль, д-р филол. наук, проф.
Г.Г. Лазько, д-р ист. наук, проф.
И.В. Семченко, д-р физ.-мат. наук, проф.
В.С. Смородин, д-р тех. наук, проф.
Б.В. Сорвиров, д-р экон. наук, проф.
В.М. Хомич, д-р юрид. наук, проф.
О.Г. Шляхтова, ответственный секретарь

**Члены редакционной коллегии
по естественным наукам:**

В.Ф. Багинский, д-р биол. наук, проф., член-корр. НАН Беларуси
А. Баллистер-Болинше (Испания), д-р, проф. математики
Ван Сяо Фэн (Китай), д-р тех. наук, проф.
Го Вэньбинь (Китай), д-р физ-мат. наук, проф.
В.В. Кириченко (Украина), д-р физ-мат. наук, проф.
В.П. Кудин, д-р тех. наук, проф.
А.А. Махнев (Россия), д-р физ-мат. наук, проф., член-корр. РАН
В.В. Можаровский, д-р тех. наук, проф.
А.Н. Сердюков, д-р физ-мат. наук, проф., член-корр. НАН Беларуси
А.Н. Скиба, д-р физ-мат. наук, проф.
Шэн Рику (Китай), д-р тех. наук, проф.
Р. Эстебан Ромеро (Испания), д-р, проф. математики

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
246019, Беларусь, Гомель, ул. Советская, 104,
Телефоны: +375 (232) 60-73-82
E-mail: vesti@gsu.by
Интернет-адрес: http://vesti.gsu.by

Francisk Scorina Gomel State University
PROCEEDINGS

The Journal is registered in the Ministry of Information of Republic of Belarus
(registration certificate
number 546 dated 06.07.2009)

The Journal is included in the Republic of Belarus Higher Attestation Commission list of scientific publications of the Republic of Belarus, which publish the main results for the degree of Doctor (Candidate) of Sciences
(order number 207 dated 13.12.2005, number 9 dated 15.01.2010, number 57 dated 16.05.2013)

The Journal is included in bibliographic databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI), Scientific electronic library eLIBRARY.RU

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief S.A. KHAKHOMOV,
Ph D, Docent of Physics
Deputy editor-in-chief O.M. DEMIDENKO,
Sc. D., Professor
Deputy editor-in-chief M.V. SELKIN,
Sc. D., Professor

Members of editorial board:

G.G. Goncharenko, Sc. D., Professor, Corresponding Member NASB
F. V. Kadol, Sc. D., Professor
V.N. Kalmykov, Sc. D., Professor
V.I. Koval, Sc. D., Professor
G.G. Lazko, Sc. D., Professor
I.V. Semchenko, Sc. D., Professor
V.S. Smorodin, Sc. D., Professor
B.V. Sorvirov, Sc. D., Professor
V.M. Homich, Sc. D., Professor
O.G. Shlyahtova, executive secretary

**Members of editorial board
for the natural sciences**

V.F. Baginsky, Sc. D., Professor, Corresponding Member NASB
A. Ballister-Bolinshes (Spain), Sc. D., Professor
Van Siao Fen (China), Sc. D., Professor
Go Wenbin (China), Sc. D., Professor
V.V. Kirichenko (Ukrain), Sc. D., Professor
V.P. Kudin, Sc. D., Professor
A.A. Makhnev (Russia), Sc. D., Professor, Corresponding Member RAS
V.V. Mozharovsky, Sc. D., Professor
A.N. Serdukov, Sc. D., Professor, Corresponding Member NASB
A.N. Skiba, Sc. D., Professor
Shen Riku (China), Sc. D., Professor
R. Esteban Romero (Spain), Sc. D., Professor

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
246019, Belarus, Gomel, Sovetskaya Str., 104,
Tel: +375 (232) 60-73-82
E-mail: vesti@gsu.by
Site: http://vesti.gsu.by

© Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, 2016
© Proceedings of the F. Scorina Gomel State University, 2016

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

И З В Е С Т И Я

Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

НАУЧНЫЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1999 г.
Выходит 6 раз в год

• 2016, № 6 (99) •
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ:
БИОЛОГИЯ • ТЕХНИКА (ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ; РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ; ЭЛЕКТРОНИКА)• МАТЕМАТИКА • ФИЗИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Биология

Бачура Ю.М. *Особенности организации группировок зеленых водорослей некоторых антропогенно-преобразованных почв Гомельского региона* 5
Гончаренко Г.Г., Катохин А.В. *Исследование описторхоза в Днепровском очаге на основе молекулярно-генетических методов* 12
Иванцов Д.Н., Гулаков А.В. *Радиоактивное загрязнение ихтиофауны водоемов, расположенных на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника* 18
Концевая И.И., Жадько С.В. *Эффективность применения антибиотиков на этапе мультипликации при клонировании березы* 24
Островский А.М. *Sympetrum meridionale (Selys, 1841) (Odonata, Libellulidae) – новый вид стрекоз для фауны Беларуси* 30
Смоляр Н.А., Смаглюк Е.Ю. *Флоросозологическая характеристика лесной растительности бассейна нижней Сулы (Украина)* 34
Храмченкова О.М., Новиков Р.И. *Элементный состав коры сосны (Pinus sylvestris L.) различных типов леса* 39
Храмченкова О.М., Савченко А.М. *Элементный состав коры сосны (Pinus sylvestris L.) различных групп возрастов* 43
Цветкова Е.А., Кадолич Ж.В., Арастович Т.В. *Тенденции в изучении свойств и функций синовиальной жидкости сустава* 47

Информатика

Можаровский В.В., Кузьменков Д.С. *К вопросу о методике расчета напряженно-деформированного состояния слоистой трубы* 54
Осипенко Н.Б., Осипенко А.Н. *Методологические аспекты автоматизации поддержки принятия стратегических решений* 59

Математика

Башлакова О.С., Марченко Л.Н. *Эконометрическая оценка денежного предложения и инфляции в Республике Беларусь* 65
Косенок Н.С. *О p-сверхразрешимости конечных групп с заданными s-добавлениями к ее подгруппам* 69

Можей Н.П. *Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли* 74
Павлив Д.А. *О свойствах одномерной квадратичной модели временной структуры доходности* 81
Пилипчук Л.А. *О методах декомпозиции разреженных недоопределенных систем с матрицами полного и неполного ранга* 87
Сафонов В.Г., Сафонова И.Н. *О минимальных тотально локальных не π-нильпотентных классах Фиттинга* 91
Семенчук В.Н., Селькин В.М. *О конечных группах, в которых каждая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна* 96

РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

Янушкевич В.Ф. *Фазовые характеристики отраженных радиоимпульсных сигналов от анизотропных сред над углеводородными залежами* 103

ФИЗИКА

Капшай В.Н., Шамына А.А. *Генерация второй гармоники от поверхности конечного цилиндра и её зависимость от ориентации эллипса поляризации падающего излучения* 109
Тюменков Г.Ю., Штромберг Д.А. *О моделировании радиальных функций плотности планет земной группы* 116

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЕ

Саварин А.А., Китель Д.А. *О находках орешниковой сони (Muscardinus avellanarius) на юго-западе Беларуси* 120

Ministry of Education of Republic of Belarus
Francisk Scorina Gomel State University

PROCEEDINGS

of Francisk Scorina Gomel State University

SCIENTIFIC, PRODUCTION AND PRACTICAL JOURNAL

There are 6 times a year
Published since 1999

• 2016, № 6 (99) •
NATURAL SCIENCES:
BIOLOGY•TECHNIQUE (INFORMATION EECHNOLOGY;
RADIO ENGINEERING AND COMMUNICATIONS; ELECTRONICS)
• MATHEMATICS • PHYSICS

CONTENTS

BIOLOGY

Y.M. Bachura. *Features of organization of groups of green algae in some anthropogenically transformed soils of the Gomel region* 5
G.G. Goncharenko, A.V. Katokhin. *Research of opisthorchiasis in the Dnieper region based on molecular genetics methods* 12
D.N. Ivantsov, A.V. Gulakov. *Radioactive contamination of the fish fauna of the reservoirs located in the Polesye State Radiation Ecological Reserve* 18
I.I. Kontsevaya, S.V. Zhadko. *The effectiveness of antibiotics at the stage of multiplication while cloning birch* 24
A.M. Ostrovsky. *Sympetrum meridionale (Selys, 1841) (Odonata, Libellulidae) – a new kind of dragonfly for the fauna of Belarus* 30
N.A. Smolyar, E.Y. Smaglyuk. *Florosozological characteristics of the forest vegetation of the lower Sula basin (Ukraine)* 34
O.M. Hramchenkova, R.I. Novikov. *The elemental composition of pine bark (Pinus sylvestris L.) of different forest types* 39
O.M. Hramchenkova, A.M. Savchenko. *The elemental composition of pine bark (Pinus sylvestris L.) of different age groups* 43
E.A. Tsvetkova, J.V. Kadolich, T.V. Arastovich. *Trends in the study of the properties and functions of the synovial fluid* 47

INFORMATION TECHNOLOGY

V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov. *On the question of the method of calculation of stress-strain state of a layered pipe* 54
N.B. Osipenko, A.N. Osipenko. *Methodological aspects of automation of support for strategic decision-making* 59

MATHEMATICS

O.S. Bashlakova, L.N. Marchenko. *The econometric estimation of the money supply and inflation in Belarus* 65
N.S. Kosenok. *On p-supersolvability of finite groups with given s-supplemented to its subgroups* 69
N.P. Mozhey. *Three-dimensional reductive space of solvable Lie groups* 74

D.A. Pavliv. *On the properties of one-dimensional quadratic model of the term structure of yields* 81
L.A. Pilipchuk. *On the methods of decomposition of sparse underdetermined systems with matrices of complete and incomplete grade* 87
V.G. Safonov, I.N. Safonova. *On minimal totally local non π-nilpotent Fitting classes* 91
V.N. Semenchuk, V.M. Selkin. *Finite groups in which each primary subgroup is either $\mathfrak{I}$-subnormal or $\mathfrak{I}$-abnormal* 96

TECHNOLOGY AND COMMUNICATION

V.F. Yanushkevich. *Phase characteristics of the reflected radio pulse signals from anisotropic medium over hydrocarbon deposits* 103

PHYSICS

V.N. Kapshai, A.A. Shamyna. *Second-harmonic generation from the finite cylinder's surface and its dependence on the orientation of the incident wave's polarization ellipse* 109
G.Y. Tyumenkov, D.A. Shtromberg. *On the modeling of the radial density functions of the terrestrial planets* 116

ABSTRACTS

A.A. Savarin, D.A. Kitel. *On clarification of finding of hazel dormouse (Muscardinus avellanarius) in the south-west of Belarus* 120

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

Биология

УДК 631.466.3:582.232:631.44(476.2-37Гомель)

Особенности организации группировок зеленых водорослей некоторых антропогенно-преобразованных почв Гомельского региона

Ю.М. Бачура

В антропогенно-преобразованных почвах Гомельского региона выявлено 76 видов зеленых водорослей. В экологическом отношении отмечено преобладание эдафофильных представителей (88,1 %) Ch-формы (45,5 %); в спектре морфоструктур – видов коккоидного морфотипа (60,5 %), что указывает на экстремальность среды обитания. С увеличением степени антропогенной нагрузки в альгогруппировках показано увеличение доли водорослей кокоидного габитуса Ch-жизненной формы, исчезновение амфибиальных и гидрофильных видов, упрощение спектров жизненных форм и уменьшение доли водорослей с нитчатой морфоструктурой.
Ключевые слова: антропогенно-преобразованные почвы, почвенные зеленые водоросли.

In the anthropogenically transformed soils of the Gomel region 76 species of green algae was found. It was noted the predominance of edafofilnyh representatives (88,1 %) Ch-form (45,5 %); in morphostructures spectrum – coccoid morphotypes of species (60,5 %), which indicates the extremity of habitat. With increasing degree of anthropogenic burden in algae communities it was shown the increase of the proportion of algae of coccoid habit of Ch-life form, disappearance of amphibian and hydrophilic species, simplification of a range of life forms and declining of the share of algae with filamentous morphostructures.
Keywords: anthropogenically transformed soils, soil green algae.

Введение. Преобладание Chlorophyta в видовом составе почвенных водорослей отмечается для Европейской части России, Украины, Молдовы и Беларуси [1]–[5]. Многие зеленые водоросли являются убиквистами и способны существовать в крайне неблагоприятных условиях, способствуя улучшению физико-химических свойств почвы вследствие выделения слизи и биологически активных веществ, механического скрепления почвенных частиц нитчатыми формами, накопления органического вещества в почве. Антропогенно-преобразованные почвы характеризуются изменением основных физико-химических показателей, которые обуславливают специфичность условий существования почвенных микроорганизмов, в том числе и зеленых водорослей. Под влиянием антропогенных нагрузок происходит изменение состава водорослей и структуры их сообществ, что может быть использовано при оценке состояния нарушенных почв. Целью работы являлось изучение структуры группировок зеленых водорослей некоторых антропогенно-преобразованных почв и особенностей изменения состава водорослей в зависимости от вида и степени антропогенной нагрузки.

Материалы и методика исследований. Материалом для исследования послужили результаты обработки 120 смешанных почвенных образцов, отобранных в 2003–2012 гг. на территории г. Гомеля и пригорода [1], [2]. Были выбраны следующие участки для отбора:

1) тропинки в смешанном лесу: Т1 – тропинки хорошо заметны, присутствует изреженный травяной покров лесная подстилка уплотнена, участков с обнажением минерального слоя почвы нет; Т2 – травяной покров сильно изрежен, местами отсутствует, лесная подстилка измельчена, на отдельных участках обнажен минеральный слой уплотненной почвы; Т3 – травяной покров и лесная подстилка отсутствуют, на всем протяжении обнажен минеральный слой сильно уплотненной почвы;

2) туристические стоянки: Тс1 – травяной покров изрежен, сильно примят, почва частично обнажена (~20%), покрыта мусором (бытовыми отходами), имелось кострище; Тс2 – травяной покров менее изрежен и примят, обнажение уплотненной, покрытой мусором почвы – до 10 %, имелось кострище; контролем служил участок ненарушенной почвы (Тс3);

3) места горения разведенных нами одно- и двухчасовых костров и прилегающая к ним территория: анализировали почвенные водоросли кострищ (К1_п и К2_п), проб почвы, взятых на расстоянии 1 м от края кострища (К1_1м и К2_1м), в качестве контроля использовали пробы почвы, отобранные на расстоянии 10 м от кострищ (К_контр);

4) придорожные газоны некоторых улиц города: улица Кирова (Кир) – узкая (трехполосное движение), характеризуется интенсивным транспортным потоком, имеется движение общественного транспорта, разрешен проезд грузовых автомобилей. Улица Советская (Сов) – широкая (шестиполосное движение), с интенсивным движением легкового и общественного транспорта, проезд грузовиков запрещен. Улица Старо-Черниговская (Ст-ч) – узкая (двухполосное движение немногочисленного легкового транспорта), отсутствует общественный и грузовой транспорт;

5) Гомельский городской полигон твердых бытовых отходов (ГГПТБО); площадки, отличались составом отходов: Св1 – промышленные и бытовые; Св2 – бытовые и промышленные, Св3 – строительные, Св4 – промышленные и строительные отходы;

6) отвалы фосфогипса ОАО «Гомельский химический завод» (ГХЗ) и прилегающая к ним территория. Изучали почвенные водоросли свежих отвалов (Фг1) – высшие растения отсутствовали; средневозрастных (Фг2), где выделяли участки, не покрытые высшими растениями (Фг2а), участки с моховым покровом (Фг2б), участки, покрытые высшими растениями, в том числе – мхами (Фг2в); старых (Фг3) – присутствовали травянистые и древесные растения; опушки леса в зоне ветрового переноса фосфогипса свежих отвалов (Пт1); обочины дороги вдоль разновозрастных отвалов (Пт2);

7) деградированные торфяники; участки отличались значениями остаточного содержания органического вещества в агроторфяно-минеральном горизонте и pH почвенного раствора: Дт1 – 20–10,1 %, pH=4,5; Дт2 – менее 5,1 %, pH=5,3; Дт3 – 20–10,1%, pH=5,8; Дт4 – менее 5,1%, pH=7,3.

При установлении видового состава водорослей использовали почвенные и агаровые культуры. Степень развития водорослей оценивали по 3-балльной шкале [6]. Систематическое положение объектов приводили в соответствии с [2]; для видов, отсутствующих в данной сводке, – по данным сайта Algaebase [7]. Жизненные формы определяли по системе Э.А. Штиной и М.М. Голлербаха [5], морфотипы – по Ж.Ф. Пивоваровой [8]. Для сравнения эколого-морфологической структуры группировок зеленых водорослей исследуемых территорий проводили кластерный анализ при помощи программного модуля «GRAPHS» [9].

Результаты исследований и их обсуждение. В ходе исследования в почвах Гомельского региона нами было идентифицировано 76 видов зеленых водорослей из 42 родов, 26 семейств, 15 порядков и 4 классов: Chlorophyceae (54,0 %), Trebouxiophyceae (26,3 %), Ulvophyceae (3,9 %) и Charophyceae (13,2 %), а также два вида с неясным систематическим положением (2,6 %). Наиболее представлены были порядки Volvocales, Scenedesmales (по 20 видов) и Chlorellales (16 видов), наименее – Tetrasporales, Chaetopeltidales, Chlorokybales и Gonatozygales (по 1 виду). В семейственном спектре превалировали Chlamydomonadaceae и Chlorococcaceae, насчитывающие по 9 видов. Большинство семейств зеленых водорослей являлись маловидовыми и включали от 1 до 4 представителей (84,6 %), что свидетельствует об упрощенной организации альгогруппировок исследуемых территорий [10]. В спектре родов доминировали *Chlamydomonas* (9,2 %) и *Chlorella* (7,9 %), *Chlorococcum*, *Scenedesmus* и *Stichococcus* (по 5,4 %) [11].

Известно, что яркую картину организации водорослевых сообществ дает соотношение жизненных форм и морфотипов как основных характеристик биологического спектра группировок зеленых водорослей [8]. Разнообразие морфотипов указывает на всевозможные адаптационные процессы, происходящие внутри экосистем, связанные с особенностями исследованных антропогенно-преобразованных почв. По мнению ряда авторов [5], наиболее показательным является соотношение коккоидных и нитчатых типов, указывающее на степень экстремальности среды. В исследованных нами почвах доля зеленых водорослей коккоидных морфотипов составила 60,5 %, трихальных – 11,8 %. Это указывает на экстремальность среды,

выраженной, вероятно, в снижении влажности и высокой кислотности. Сферическая форма является оптимальной для существования в среде с кислой реакцией [8], [12], что является одним из факторов превалирования коккоидных морфотипов в данных наземных экосистемах.

Экологический анализ показал преобладание в исследованных почвах эдафофильных видов. Доля амфибиальных видов, предпочитающих временно переувлажненные почвы, и гидрофильных, встречающихся в переувлажненных почвах, незначительна (6,6 % и 5,3 % соответственно). В спектре жизненных форм эдафофильных водорослей превалировали виды-убиквисты Ch-формы (45,5 %). Далее в порядке убывания расположились неустойчивые против засухи и сильного нагревания виды H-формы (21,8 %), требовательные к влажности водоросли C-формы (18,2 %) и теневыносливые представители X-формы (14,5 %). Подобное распределение типично для антропогенно-нарушенных почв [12]–[14].

Изучение влияния рекреационного воздействия на зеленые водоросли почв осуществляли на лесных тропинках, туристических стоянках, кострищах и прилегающей к ним территории. При изучении почвенных водорослей кострищ и прилегающей к ним территории было обнаружено 36 видов зеленых водорослей, в почвах лесных тропинок – 30 видов, туристических стоянок – 29 видов. В почвах тропинок с увеличением степени вытаптывания на начальных этапах показано усложнение структуры сообществ зеленых водорослей, а затем – снижение их видового богатства (таблица 1). Вероятно, имеет место эффект «промежуточного нарушения» [1], [15], [16]. В почвах туристических стоянок количество видов и распределение их по таксонам на нарушенных и ненарушенных участках отличались незначительно, что, по-видимому, указывает либо на недостаточную для существования водорослей степень нарушенности участков, либо на высокую устойчивость Chlorophyta [15]. С увеличением продолжительности пирогенного воздействия в почве кострищ имело место сокращение в 2,1 раза видового богатства водорослей, а также существенная перестройка видового состава зеленых водорослей в группировках. Наиболее чувствительными к огневому воздействию оказались требоксиефициевые и харофициевые зеленые водоросли.

Таблица 1 – Сравнение структуры группировок зеленых водорослей рекреационных почв

Место отбора образцов	Таксономическая структура	Экологическая структура	Спектр морфотипов	Общее число видов
Т1	$Chlor_{11}$ $Treb_7$ $Char_2$	Ch_{10} C_2 H_3 X_2 $amph_1$ $hydr_1$ $н/о_1$	$К_{10}$ $КК_5$ $Н_3$ $М_2$	20
Т2	$Chlor_{15}$ $Treb_8$ $Char_5$	Ch_{12} C_3 H_5 X_3 $amph_1$ $hydr_2$ $н/о_2$	$К_{15}$ $КК_6$ $Н_4$ $М_3$	28
Т3	$Chlor_9$ $Treb_7$ $Char_1$	Ch_{10} C_2 H_2 X_2 $hydr_1$	$К_{12}$ $КК_2$ $Н_1$ $М_2$	17
Тс1	$Chlor_9$ $Treb_5$ $Char_4$ Ulv_2	Ch_8 C_2 H_5 X_1 $amph_1$ $н/о_3$	$К_{11}$ $КК_3$ $Н_5$ $М_1$	20
Тс2	$Chlor_9$ $Treb_7$ $Char_3$	Ch_8 C_3 H_4 X_1 $н/о_3$	$К_{11}$ $КК_3$ $Н_3$ $М_2$	19
Тс3	$Chlor_9$ $Treb_5$ $Char_4$ Ulv_1	Ch_9 C_4 H_4 X_1 $н/о_1$	$К_{11}$ $КК_3$ $Н_2$ $М_3$	19
К1_п	$Chlor_{13}$ $Treb_2$ $Char_2$	Ch_8 C_4 H_2 X_1 $н/о_2$	$К_8$ $КК_3$ $Н_2$ $М_4$	17
К2_п	$Chlor_6$ $Treb_2$	Ch_6 C_1 X_1	$К_6$ $КК_1$ $М_1$	8
К1_1м	$Chlor_{14}$ $Treb_7$ $Char_3$	Ch_{11} C_4 H_4 X_2 $hydr_1$ $н/о_2$	$К_{16}$ $КК_2$ $Н_2$ $М_4$	24
К2_1м	$Chlor_{13}$ $Treb_{10}$ $Char_5$	Ch_{10} C_5 H_6 X_3 $hydr_1$ $н/о_3$	$К_{18}$ $КК_2$ $Н_4$ $М_4$	28
К_контр	$Chlor_{14}$ $Treb_6$ $Char_4$	Ch_{11} C_3 H_5 X_2 $hydr_1$ $н/о_2$	$К_{13}$ $КК_5$ $Н_3$ $М_3$	24

**Chlor – Chlorophyceae, Treb – Trebuxiophyceae, Char – Charaphyceae, Ulv – Ulvophyceae; Ch, C, H, X, – жизненные формы эдафофильных видов [5], amph – амфибиальные виды, hydr – гидрофильные виды, н/о – жизненная форма не определена; К – коккоидный, Н – нитчатый, КК – колониально-коккоидный, М – монадный морфотипы; индексы указывают число видов (аналогично в таблицах 2 и 3).*

В почвах рекреационно-нарушенных территорий сохранилось превалирование водорослей коккоидного морфотипа. В почвах тропинок доминировали водоросли родов *Chlorococcum*, *Scotiellopsis*, *Chlorella, Neospongiococcum, Bracteacoccus, Pseudococcomyxa.* На наиболее нарушенных тропинках отмечено сокращение видов колониально-коккоидного морфотипа (водоросли родов *Chlorosarcinopsis*, *Desmotetra*) и практически полное исчезновение представителей нитчатого (виды родов *Leptosira* и *Klebsormidium*). На нарушенных участках

туристических стоянок показано снижение долевого участия форм монадного габитуса – водоросли рода *Chlamydomonas* [1], [8]. При сравнении морфотипов водорослей кострищ и прилегающей к ним территории выявлена тенденция сокращения доли колониальных (pp. *Tetracystis*, *Chlorosarcinopsis*) и нитчатых форм (pp. *Leptosira*, *Gloeotila*, *Klebsormidium*) при увеличении продолжительности огневого воздействия. Изменения в спектрах морфоструктур рекреационно-нарушенных территорий обусловлены ухудшением условий жизнедеятельности почвенных микроорганизмов вследствие уплотнения дернового и гумусового горизонтов, уменьшения их скважности и аэрации на тропинках и туристических стоянках, изменения режима увлажнения почвы вытоптанных и пирогенных участков [15].

Экологическая структура группировок зеленых водорослей рекреационно-нарушенных участков характеризуется преобладанием видов Ch-формы (40,0–77,0 %). Спектры жизненных форм тропинок отличались незначительно; на участках с изреженным травяным покровом расширение видового состава водорослей происходило за счет увеличения числа представителей Ch-формы (*Chlorosarcinopsis* sp.2, *Neospongiococcum* sp., *Chlorella* cf. *ellipsoidea, Coccomyxa* sp.). В спектре жизненных форм нарушенных участков туристических стоянок (Тс1, Тс2) отмечено уменьшение вклада водорослей С-формы (виды рода *Chlamydomonas*) требовательных к влажности почвы [1], [10]. В почве двухчасовых кострищ отмечено выпадение из спектра жизненных форм неустойчивых против засухи и сильного нагревания видов H-формы (pp. *Stichococcus*, *Klebsormidium*) и увеличение доли водорослей Ch-формы (pp. *Chlorococcum*, *Tetracystis*, *Neospongiococcum*, *Bracteacoccus*, *Chlorella*).

Урбанизированные территории были представлены придорожными газонами некоторых улиц г. Гомеля, площадками ГГПТБО и ГХЗ. В почвах придорожных газонов было выявлено 26 видов зеленых водорослей, на отвалах фосфогипса и прилегающей к ним территории – 29 видов, на площадках ГГПТБО – 36 видов. В структуре сообществ зеленых водорослей придорожных газонов улиц г. Гомеля по градиенту транспортной нагрузки (Кир→Сов→Ст-ч) имело место сокращение числа видов из класса Trebouxiophyceae (таблица 2), являющихся толерантными к действию ряда неблагоприятных факторов [1]. В почвах ГГПТБО наблюдали сокращение количества видов и таксономического разнообразия при переходе от участков, содержащих органические вещества (Св2, Св1), к участкам с их меньшим количеством (Св4, Св3). На отвалах фосфогипса с увеличением возраста отвалов отмечено усложнение таксономической структуры альгогруппировок. Многие авторы [5], [12], [14], [17] отмечают, что при естественном биологическом освоении промышленных отвалов зеленые водоросли составляют начальный этап экогенеза. На прилегающих к отвалам территориях видовое богатство водорослей было выше, чем на самих отвалах, изменения происходили за счет вселения харафициевых и ульвофициевых водорослей.

Таблица 2 – Сравнение структуры группировок зеленых водорослей урбанизированных почв

Место отбора образцов	Таксономическая структура	Экологическая структура	Спектр морфотипов	Общее число видов
Кир	$Chlor_{10}$ $Treb_7$ $Char_2$ Ulv_1	Ch_9 C_2 H_5 X_4	K_{11} KK_2 H_5 M_2	20
Сов	$Chlor_6$ $Treb_6$ $Char_1$ Ulv_1	Ch_6 C_2 H_5 X_1	K_6 KK_2 H_4 M_2	14
Ст-ч	$Chlor_{10}$ $Treb_5$ $Char_2$	Ch_6 C_2 H_3 X_3 н/o_3	K_{10} KK_3 H_2 M_2	17
Св1	$Chlor_{10}$ $Treb_6$ $Char_2$	Ch_{10} C_2 H_3 X_1 $amph_1$ н/o_1	K_{10} KK_4 H_2 M_2	18
Св2	$Chlor_{11}$ $Treb_7$ $Char_4$ Ulv_2	Ch_9 C_2 H_4 X_1 $amph_2$ $hydr_1$ н/o_5	K_{13} KK_5 H_4 M_2	24
Св3	$Chlor_5$ $Treb_2$	Ch_5 C_2	K_3 KK_2 M_2	7
Св4	$Chlor_{15}$ $Treb_3$	Ch_8 C_5 X_2 н/o_3	K_{10} KK_3 M_5	18
Фг1	$Chlor_3$ $Treb_5$	Ch_4 C_1 X_1 $amph_1$ н/o_1	K_6 KK_1 M_1	8
Фг2а	$Chlor_7$ $Treb_4$	Ch_5 C_3 H_2 X_1	K_6 KK_1 H_1 M_3	11
Фг2б	$Chlor_3$ $Treb_2$	Ch_3 C_1 X_1	K_3 KK_1 M_1	5
Фг2в	$Chlor_4$ $Treb_5$ Ulv_1	Ch_6 C_2 н/o_2	K_5 KK_4 M_1	10
Фг3	$Chlor_5$ $Treb_5$	Ch_6 C_1 H_2 X_1	K_6 KK_1 H_2 M_1	10
Пт1	$Chlor_8$ $Treb_5$ $Char_2$ Ulv_2	Ch_8 C_2 H_3 X_2 н/o_2	K_{10} KK_3 H_2 M_2	17
Пт2	$Chlor_{12}$ $Treb_6$ $Char_1$ Ulv_2	Ch_9 C_5 H_3 X_2 н/o_2	K_{11} KK_3 H_2 M_5	21

В спектре морфотипов водорослей придорожных газонов показано некоторое увеличение доли нитчатых видов (pp. *Leptosira* и *Ulothrix*) по градиенту возрастания транспортной нагрузки. Подобное изменение, возможно, обусловлено комплексным влиянием на водоросли улицы Старо-Черниговская ряда факторов (выбросы автотранспорта, выгул животных, различия в составе реагентов зимнего ухода за дорожным покрытием и др.). Для ГГПТБО отмечено «выпадение» из состава группировок на участках со строительными и промышленными отходами (Св3, Св4) водорослей с нитчатой морфоструктурой (виды родов *Leptosira*, *Stichococcus*, *Gloeotila*, *Ulothrix* и *Klebsormidium*), что свидетельствует об экстремальности среды. Не выявлены трихальные формы водорослей также на свежих и средневозрастных отвалах фосфогипса. На старых отвалах фосфогипса и прилегающей территории отмечено появление видов, способных к образованию нитевидных структур видов родов *Leptosira* и *Microthamnion.*

В экологической структуре группировок водорослей придорожных газонов отмечено расширение числа видов Ch-формы (за счет представителей родов *Neospongiococcum* и *Bracteacoccus*) и сокращение доли водорослей С-формы (pp. *Chlamydomonas*) по мере увеличения транспортной нагрузки. На участках ГГПТБО с уменьшением числа видов водорослей, входящих в состав группировок, отмечено сокращение разнообразия жизненных форм. На отвалах ГХЗ и прилегающей к ним территории также превалировали водоросли Ch-формы (виды родов *Chlorococcum*, *Tetracystis*, *Chlorosarcinopsis*, *Neospongiococcum*, *Myrmecia*, *Chlorella* – 45,4–75,0 %), что типично для промышленных отвалов [5], [14], [17].

Анализ зеленых водорослей деградированных торфяников проводили на участках, подвергшиеся послемелиоративной деградации; было идентифицировано 60 видов водорослей. Наиболее благоприятными для развития Chlorophyta оказались «слабокислые условия существования» (Дт2, Дт3; таблица 3)

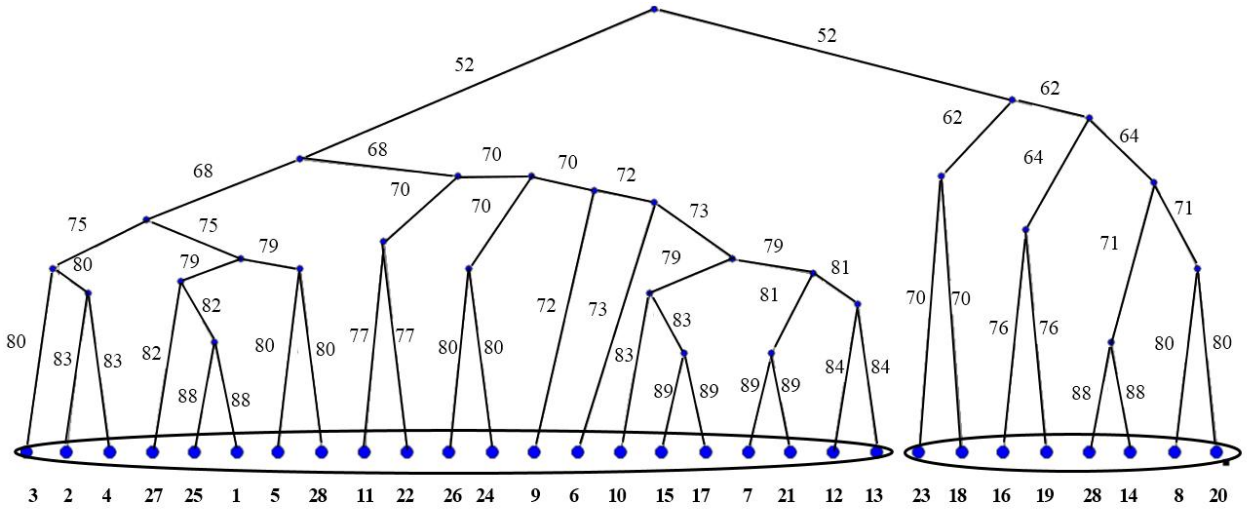
Таблица 3 – Сравнение структуры группировок зеленых водорослей дегроторфяников

Место отбора образцов	Таксономическая структура	Экологическая структура	Спектр морфотипов	Общее число видов
Дт1	$Chlor_{15}$ $Treb_{7}$ $Char_{2}$ Ulv_{2}	Ch_{12} C_{4} H_{6} X_{2} $amph_{1}$ н/о$_{1}$	$К_{15}$ $КК_{3}$ $Н_{4}$ $М_{4}$	26
Дт2	$Chlor_{20}$ $Treb_{11}$ $Char_{7}$ Ulv_{2}	Ch_{14} C_{6} H_{9} X_{5} $amph_{1}$ $hydr_{2}$ н/о$_{3}$	$К_{25}$ $КК_{4}$ $Н_{6}$ $М_{5}$	40
Дт3	$Chlor_{27}$ $Treb_{11}$ $Char_{3}$ Ulv_{1}	Ch_{18} C_{5} H_{7} X_{4} $amph_{1}$ н/о$_{7}$	$К_{22}$ $КК_{9}$ $Н_{6}$ $М_{5}$	42
Дт4	$Chlor_{18}$ $Treb_{9}$ $Char_{4}$ Ulv_{1}	Ch_{13} C_{6} H_{7} X_{2} $amph_{2}$ $hydr_{1}$ н/о$_{1}$	$К_{16}$ $КК_{5}$ $Н_{6}$ $М_{5}$	32

При сравнении морфоструктур водорослей дегроторфяников выявлена тенденция снижения долевого участия нитчатых форм (виды родов *Leptosira*, *Microthamnion*, *Stichococcus*, *Gloeotila*, *Ulothrix* и *Klebsormidium*), с увеличением pH почвенного раствора. Также отмечено увеличение доли трихальных видов в спектре участка со слабощелочной реакцией среды (Дт4), что согласуется с литературными данными [8] и свидетельствует о некотором улучшении условий существования. Экологический анализ показал, что вклад Ch-форм в структуру группировок зеленых водорослей дегроторфяников совпадает с показателями содержания органического вещества в агроторфяно-минеральном горизонте: 51,4–52,5 для 20–10,1 % и 37,8–41,9 % для содержания органического вещества менее 5,1 %. Распределение С-, Н- и Х-форм, по-видимому, отражает характер микроусловий в точках отбора. Гидрофильные представители (pp. *Sphaerocystis*, *Scenedesmus*, *Cosmarium*) обнаружены только на участках с низким содержанием органического вещества (Дт2, Дт4).

Сравнение состава и соотношения жизненных форм и морфотипов зеленых водорослей исследованных территорий позволило выделить 2 группы участков с наиболее сходной эколого-морфологической структурой альгогруппировок (рисунок 1). В составе первой ветви дендрограммы обособлены группировки зеленых водорослей отвалов фосфогипса ГХЗ, улицы Советской, участка ГГПТБО Св3 и участков под двухчасовыми кострищами, которые сходны на уровне 62–88 %. Группировки зеленых водорослей данных участков отличаются

низким видовым богатством, около половины всех обнаруженных видов водорослей встречены единично только на одной из площадок группы. В экологическом отношении представлены исключительно эдафофильными видами с невысоким разнообразием спектров жизненных форм: преобладают представители Ch- и C-формы, менее представлены виды H- и X-форм. В спектре морфоструктур превалируют виды коккоидного габитуса. Данные участки отличаются высоким уровнем антропогенной нагрузки: токсичностью субстратов как среды обитания водорослей (отвалы фосфогипса, участок ГГПТБО со строительными отходами), а также низкой обеспеченностью всех участков влагой.



1 – Дт1, 2 – Дт2, 3 – Дт3, 4 – Дт4, 5 – Т2, 6 – Т3, 7 – Т1, 8 – Сов, 9 – Кир, 10 – Ст-ч, 11 – Тс1, 12 – Тс2, 13 – Тс3, 14 – Фг3, 15 – Пт1, 16 – Фг1, 17 – Пт2, 18 – Фг2в, 19 – Фг2б, 20 – Фг2а, 21 – Св1, 22 – Св2, 23 – Св3, 24 – Св4, 25 – К1_1м, 26 – К1_п, 27 – К2_1м, 28 – К2_п, 28 – К_контр

Рисунок 1 – Дендрограмма сходства состава и соотношения жизненных форм и морфотипов зеленых водорослей антропогенно-преобразованных почв

Группировки зеленых водорослей остальных антропогенно-нарушенных участков сформировали вторую ветвь дендрограммы и характеризуются уровнем сходства 68–89 %. Данные альгосообщества отличаются высоким видовым богатством зеленых водорослей, появлением в экологических спектрах амфибиальных и гидрофильных представителей, расширением спектров жизненных форм эдафофильных видов, увеличением доли водорослей с нитчатой морфоструктурой. Подобные изменения указывают на улучшение условий существования водорослей.

Заключение. В ходе проведенного исследования в антропогенно-преобразованных почвах Гомельского региона было идентифицировано 76 видов зеленых водорослей, относящихся к 42 родам, 26 семействам, 15 порядкам и 4 классам. Преобладание в выявленной альгофлоре представителей коккоидного морфотипа (60,5 %) и эдафофильных видов (88,1 %) Ch-жизненной формы (45,5 %) указывает на экстремальность среды существования.

Показано изменение видового состава и соотношения доминирующих видов в группировках зеленых водорослей исследованных дегроторфяников, рекреационных и урбанизированных территорий в зависимости от интенсивности антропогенного прессинга и особенностей субстрата. С увеличением степени антропогенной нагрузки отмечено либо постепенное снижение видового богатства зеленых водорослей, либо имеет место эффект «промежуточного нарушения».

Выявлен тренд изменения спектров жизненных форм и морфотипов зеленых водорослей исследуемых антропогенно-преобразованных участков: с увеличением степени антропогенной нагрузки отмечено расширение долевого участия водорослей кокоидного габитуса Ch-формы (до 62,5 % на некоторых участках), что свидетельствует о возможности использования спектров морфотипов и жизненных форм для предварительной оценки состояния почвенного покрова.

Установлено, что эколого-морфологическая структура группировок зеленых водорослей участков с невысокой степенью антропогенной нагрузки более разнообразна и отличается присутствием амфибиальных и гидрофильных представителей в группировках, расширением спектров жизненных форм эдафофильных видов, увеличением доли водорослей с нитчатой морфоструктурой.

Литература

1. Штина, Э.А. Экология почвенных водорослей / Э.А. Штина, М.М. Голлербах. – М. : Наука, 1976. – 143 с.
2. Водорості ґрунтів України (історія та методи дослідження, система, конспект флори) / редкол. : І.Ю. Костіков [та інш.]. – Київ : Фітосоціоцентр, 2001. – 300 с.
3. Шалару, В. Почвенные водоросли естественных и искусственных фитоценозов Республики Молдова : автореф. дис. ... докт. биол. наук : 03.00.05 / В. Шалару ; Ин-т Ботаники АН РМ. – Кишинев, 1996. – 48 с.
4. Ваулина, Э.Н. Состав и распределение водорослей в некоторых характерных почвах БССР : дис. … канд. биол. наук / Э.Н. Ваулина. – Л., 1956. – 264 л.
5. Водоросли: проблемы таксономии, экологии и использование в мониторинге: Материалы II всероссийской конференции, Сыктывкар, 5–9 октября 2009 г. [Электронный ресурс]. – Сыктывкар: Институт биологии Коми НЦ УрО РАН, 2009. – Режим доступа : http://ib.komisc.ru/add/conf/algo_2009/. – Дата доступа : 02.17.2016.
6. Кабиров, Р.Р. Выделение почвенных альгоценозов методом Браун-Бланке / Р.Р. Кабиров, Н.В. Суханова, Л.С. Хайбуллина ; Башк. гос. пед. ун-т. – Уфа, 1999. – 35 с. – Деп. в ВИНИТИ 31.03.99, №1014-В99 // РЖ : 04. Биология. Сводный том. – 1999. – № 11. – 04В2.78ДЕП.
7. Database of information on algae that includes terrestrial, marine and freshwater organisms [Electronic resource] / ed. M.D. Guiry. –1996–2013. – Mode of access : http://www.algaebase.org. – Date of access : 15.09.2014.
8. Пивоварова, Ж.Ф. Почвенные водоросли антропогенно нарушенных экосистем / Ж.Ф. Пивоварова, А.Е. Илюшенко, А.Г. Благодатнова [и др.]. – Новосибирск, 2014. – 146 с.
9. Новаковский, А.Б. Возможности и принципы работы программного модуля «GRAPHS» / А.Б. Новаковский. – Сыктывкар : Коми научный центр УрО РАН, 2004. – 31 с.
10. Новаковская, И.В. Почвенные водоросли еловых лесов и их изменения в условиях аэротехногенного загрязнения / И.В. Новаковская, Е.Н. Патова. – Сыктывкар : Коми НЦ УрО РАН, 2011. – 128 с.
11. Бачура, Ю.М. Зеленые водоросли антропогенно-преобразованных почв (на примере Гомельского региона) / Ю.М. Бачура // Вестнік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 5. Эканоміка. Сацыялогія. Біялогія. – 2016. – Т. 6, № 1. – С. 82–93.
12. Кондакова, Л.В. Альго-цианобактериальная флора и особенности ее развития в антропогенно нарушенных почвах (на примере почв подзоны южной тайги Европейской части России) : автореф. дис. ... докт. биол. наук : 03.02.08 ; 03.02.01 / Л.В. Кондакова ; Вятск. гос. гуманитарн. ун-т, лаб. биомониторинга Института биологии Коми НЦ УрО РАН. – Сыктывкар, 2012. – 34 с.
13. Хайбуллина, Л.С. Флора и синтаксономия почвенных водорослей и цианобактерий урбанизированных территорий / Л.С. Хайбуллина, Н.В. Суханова, Р.Р. Кабиров. – Уфа : Гилем, 2011. – 216 с.
14. Штина, Э.А. Почвенные водоросли как пионеры зарастания техногенных субстратов и индикаторы состояния нарушенных земель / Э.А. Штина // Журнал общей биологии. – 1985. – Т. XLVI, № 4. – С. 435–443.
15. Бачура, Ю.М. Структура сообществ почвенных водорослей и их использование для альгоиндикации почв (на примере Гомельского региона): автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.02.08 / Ю.М. Бачура ; Гом. гос. ун-т. – Гомель, 2013. – 28 с.
16. Сугачкова, Е.В. Влияние рекреационной нагрузки на сообщества почвенных водорослей : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Е.В. Сугачкова ; Башк. гос. пед. ун-т. – Уфа, 2000. – 20 с.
17. Кузнецова, Е.В. Альгофлора урбанизированных территорий города Мелеуз и его окрестностей : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Е.В. Кузнецова ; Башк. гос. ун-т. – Уфа, 2006. – 17 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 03.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 576.89:591.69

Исследование описторхоза в Днепровском очаге на основе молекулярно-генетических методов

Г.Г. Гончаренко[1], А.В. Катохин[2]

Были разработаны технологии ДНК-диагностики с использованием спейсера 2 (ITS2) рибосомального кластера для идентификации паразита *O. felineus* у улиток (bithynids) и рыб (cyprinids). С помощью методов ДНК-диагностики и классических методов было установлено, что инвазированность моллюсков личинками *O. felineus* колебалась от 40 до 78 %, а у рыб семейства Карповые личинки описторхид обнаружены в 23 % образцов. В результате комплексных исследований установлено, что очаг описторхоза по-прежнему сохраняется в Жлобинском районе на юге Беларуси. Рассмотрена тесная связь между Днепровским и Обь-Иртышским очагами описторхоза.
Ключевые слова: описторхоз, очаг, животные, заболевание, методы, диагностика.

Technologies of species-specific DNA diagnostics by means of amplification of genomic marker ITS2 spacer for detection parasite *O. felineus* in snails (bithynids) and fishes (cyprinids) were developed. Using the methods DNA diagnostics and classical methods of preparation and identification, it has been established that the infection of snail by *O. felineus* ranged from 40 to 78 %, whereas infection of cyprinids fishes has reached only 23 %. In result of comprehensive investigations the persistence of opisthorchiasis center in the Zhlobin region of Southern Belarus have established. Close relation between opistorchiasis centers of the Ob" river and the Dnieper river is considered.
Keywords: opistorhoz, center, animals, disease, methods of diagnostics.

Важнейшим направлением современных молекулярно-биологических исследований является молекулярно-генетическая паразитология. В последние годы молекулярно-генетические технологии стали успешно применяться в исследовании описторхоза, широко распространенного заболевания, охватывающего территорию от Дальнего Востока до Германии [1]–[8].

Описторхоз (*opisthorchiasis*) – опасное заболевание человека, домашних и диких хищников, вызываемое паразитированием в желчных протоках печени, желчном пузыре, поджелудочной железе половозрелых особей кошачьей двуустки – *Opisthorchis felineus,* (Rivolta, 1884). При длительном течении описторхоз вызывает хроническое заболевание печени, желчного пузыря и поджелудочной железы, способствует раку печени и желчных протоков [9]–[12].

Перед попаданием в человека и животных *O. felineus* проходит личиночные стадии развития в промежуточных хозяевах – пресноводных моллюсках *Bithynia leachii* (Shepard, 1823) и рыбах семейства карповых (Cyprinidae). На этих стадиях видовая идентификация представителей семейства Opisthorchiidae по морфологическим признакам очень трудоемка и дорогостояща, а в ряде случаев просто невозможна.

В связи со всем вышеизложенным, разработка эффективных методов видовой диагностики на основе молекулярно-генетических технологий, таких как полимеразная цепная реакция анализа фрагментов ДНК приобретает особую актуальность.

Объекты и методы исследования. Трематода *O. felineus* имеет сложный жизненный цикл. Взрослые особи (мариты), продуцирующие яйца, паразитируют в печени и желчном пузыре млекопитающих, откуда яйца вместе с желчью поступают в кишечник, а из него наружу. Развиваются только яйца, попавшие в воду, в них образуется личинка – мирацидий. Такие яйца заглатывает пресноводный жаберный моллюск – *B. leachii* (первый промежуточный хозяин).

В кишечнике моллюска мирацидий выходит из яйца и проникает в полость тела, где превращается в спороцисту, содержащую редии. Редии выходят из спороцисты, внедряются в печень моллюска, и там происходит их развитие в церкарии, имеющие хвост. Затем церкарии покидают моллюска, попадают в воду и внедряются во второго промежуточного хозяина – рыб семейства карповых: язя, карпа, линя, плотву, красноперку, густеру и др.

Церкария, попавшая в рыбу, локализуется в подкожном слое мышц. После внедрения церкарий в жировую ткань и мышцы рыбы, они окружаются соединительнотканной оболочкой и превращаются в метацеркарий, способных заразить дефинитивного (окончательного) хозяина.

Инвазированная рыба, будучи съедена человеком или плотоядными животными (ондатрой, выдрой, собакой, кошкой), переваривается в их желудке, где метацеркарии освобождаются от цист, проникают через желчные протоки в желчный пузырь, печень и через 10–12 дней достигают половой зрелости, начиная откладывать яйца. Все этапы жизненного цикла кошачьей двуустки схематически представлены на рисунке 1.

Область распространения заболеваемости описторхозом, вызываемым кошачьей двуусткой (*O. felineus*), простирается от Дальнего Востока до Германии. В настоящее время болезнью поражено более 2 млн. и ежегодно заболевает до 90 тыс. человек. Подавляющая часть мирового ареала описторхоза сосредоточена на территории России и Украины, в трёх очагах – Обь-Иртышском, Волжском и Днепровском. Обь-Иртышский бассейн является крупнейшим эндемичным очагом описторхоза и относится к разряду «неуправляемых» паразитарных болезней в России.

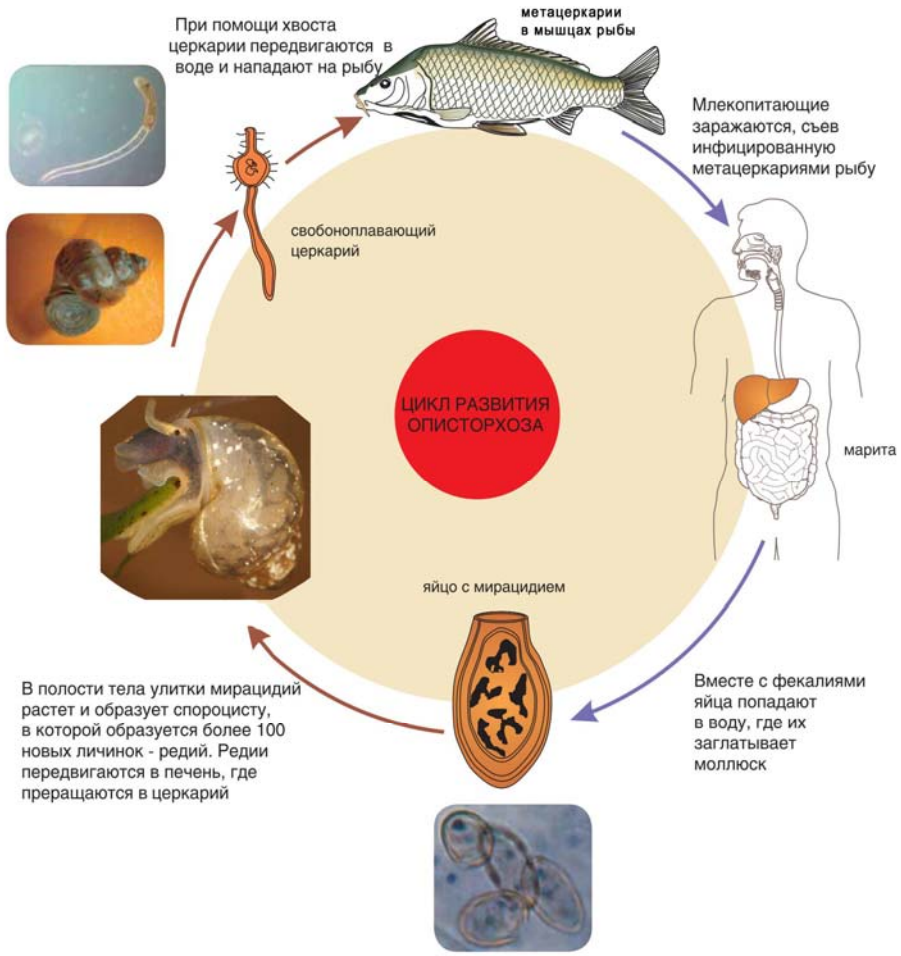


Рисунок 1 – Жизненный цикл кошачьей двуустки *O. felineus* (по [13])

О выявлении случаев заболеваний описторхозом в Беларуси сообщали Пашук и Чуносов еще в 1958 г. [14]. Однако очагов возбудителя ими обнаружено не было. Позднее в 1964 г. Линник обнаружил метацеркарии у рыб в реках бассейна Днепра, что поставило вопрос о наличии местных очагов заболевания (очаги в бассейне Днепра, южнее Беларуси, уже были известны) [15].

На данный момент главным помощником ученых-паразитологов и врачей-лаборантов, диагностирующих заболевание по наличию яиц описторха, остается обычный световой микроскоп. Точность подобной видовой диагностики достигается лишь в результате многолетнего опыта.

В последние годы для целей видовой диагностики учеными с успехом используются рибосомальные гены, поскольку их спейсерные участки очень изменчивы по длине и нуклеотидному составу. У эукариотических организмов рибосомальные гены представлены в виде кластеров, расположенных группами на разных хромосомах. В каждый кластер входит три – 18S, 5,8S и 28S рибосомальных гена, разделенных участками – так называемыми спейсерами (рисунок 2). Такая конструкция в геноме *O. felineus* повторена более сотни раз.

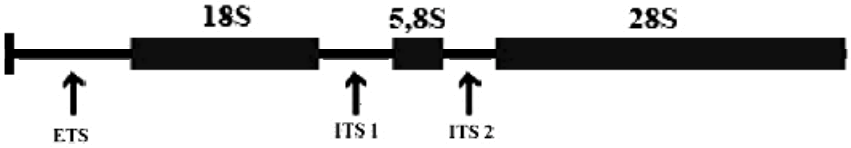


Рисунок 2 – Схема строения рибосомального кластера

В настоящее время, одним из наиболее удобных маркеров видовой диагностики, является внутренний транскрибируемый спейсер-2 (ITS2) из ядерного рибосомального кластера размером около 300 н.п.

Результаты и их обсуждение. Первоочередной задачей нашего исследования было получить простую систему ПЦР-детекции, которая позволила бы распознавать всех описторхид, используя только одно испытание, и в то же время отличать их от других видов Digenea, особенно от представителей так называемых минорных плоских червей, которые паразитируют в кишечнике человека.

Для конструирования праймеров использовалась информация о нуклеотидных последовательностях видов*, O. felineus, O. viverrini, Clonorchis sinensis* и *Metorchis xanthosomus*, взятых нами из GenBank.

Последовательность нуклеотидов ДНК спейсерного участка ITS2 (выделен черным) и 38 нуклеотидов прилегающих 5,8 и 28S рибосомальных генов у *O. felineus* представлена ниже (www./GenBank ID: EF688132.1).

1 **5'**ccacgcctgt ccgagggtcg gct**tataaac tatcacgacg cccaaaaagt cgtggcttgg gtcttgccag**
71 **ctggcatgat ttccccacgc atttgtgtgg ggtgccggat ctatggcttt tccccaatgt gccggacgca**
141 **accatgtctg ggctgactgc ctggatgagg gggtggcggc ggagtcgtgg ctcaattgtt gttgttattg**
211 **ttgtgaatgt gcgcgctccg ttgttggtcc tttgtctttg gttgaggctc cagtggtggc aatgcattcg**
281 **atgcaaatct gttttgcact tcggtgctta act**ttcctga cctcggatc **3'**

В результате нами была сконструирована оптимальная пара праймеров: прямой OF1 5’-CGAGGGTCGGCTTATAAAC-3’ и обратный, OF2 5’-AGCCTCAACCAAAGACAAAG-3’, (уточненные по (2,3)), позволяющие амплифицировать «горячий» фрагмент спейсерного участка ДНК размером в 248 нуклеотидов.

Процесс ПЦР-амплификаци проводили на амплификаторе Терцик. После серии экспериментов были установлены оптимальные термопрофили, позволяющие амплифировать фрагмент ДНК *O. felineus,* содержащий ITS2 участок и прилегающие к нему области 5,8 и 28S рибосомальных генов. Параметры оптимальных термопрофилей приведены ниже в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры оптимальных термопрофилей

1 цикл	94^0C .....3 мин
30 циклов	94^0C .....45 с 58^0C.....30 с 72^0C .....60 с
1 цикл	72^0C.....5 мин
Хранение	10^0C.....∞

Выявление ампликонов проводили с помощью электрофореза в агарозном геле (t = 25 минут при V = 240 В).

На рисунке 3 представлена электрофореграмма спектра фрагментов ДНК, полученных после амплификации с праймерами OF1/OF2, позволяющими амплифицировать участок ДНК только спейсера ITS2 размером около 250 н.п.

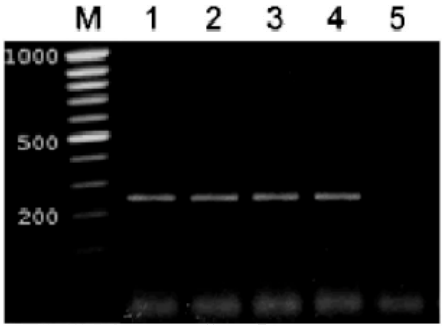


Рисунок 3 – Электрофореграмма продуктов амплификации ДНК *O. felineus* с праймерами OF1/OF2

Однако существует проблема внутривидовой изменчивости *O. felineus*, относительно нуклеотидной последовательности в спейсере ITS2, что требует использования для праймирования высококонсервативных участков ДНК – 5,8 и 28S рибосомальных генов. Ниже приведена последовательность спейсерного участка ITS2 (выделен черным) и нуклеотидов прилегающих 5,8 и 28S рибосомальных генов у *O. felineus*.

1 **5'**gctttgaaca tcgacatctt gaacgcatat tgcggccatg ggtttgcctg tggccacgcc tgtccgaggg
71 tcggct**tata aactatcacg acgcccaaaa agtcgtggct tgggtcttgc cagctggcat gatttcccca**
141 **cgcatttgtg tggggtgccg gatctatggc ttttccccaa tgtgccggac gcaaccatgt ctgggctgac**
211 **tgcctggatg agggggtggc ggcggagtcg tggctcaatt gttgttgtta ttgttgtgaa tgtgcgcgct**
281 **ccgttgttgg tcctttgtct ttggttgagg ctccagtgtt ggcaatgcat tcgatgcaaa tctgttttgc**
351 **acttcggtgc ttaact**ttcc tgacctcgga tcagacgtga ttacccgctg aatttaagca tatcactaag
421 cggaggaaaa gaaactaaca aggattccct cagtaacggc gagtgaacag ggaaaagccc agcaccgaag
491 cctgtggcca attggtcact aggcaatgtg gtgttcaggt cgttccatag aggt **3'**

На основе этих данных российскими генетиками были построены праймеры – прямой ITS2exFw 5'-GAACATCGACATCTTGAACG-3‘ и обратный ITS2exRv 5'-GGAACGACCTGAACACCA-3', позволяющие амплифицировать фрагмент ДНК (531 нуклеотид), включающий весь спейсерный участок и прилегающие последовательности 5,8 и 28 S рибосомальных генов (4).

В ходе исследования материала гепатопанкреасов, выделенных из моллюсков-битинид, обитающих в водоемах Гомельщины на предмет их зараженности описторхидами *O. Felineus,* нами была использована пара праймеров ITS2exFw/ITS2exRv. Электрофоретический спектр продуктов амплификации гепатопанкреасов, выделенных из 6 моллюсков-битиний представлен ниже (рисунок 4).

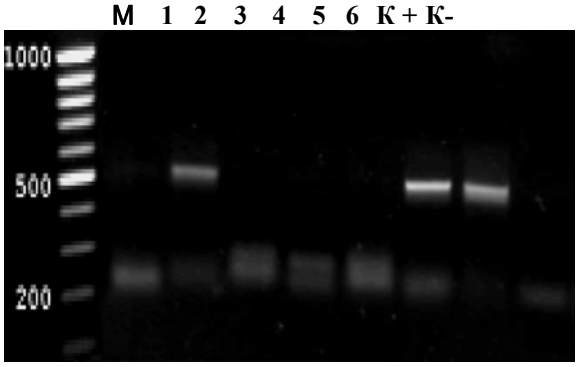


Рисунок 4 – Электрофореграмма продуктов амплификации ДНК *O. felineus* из материала моллюсков с праймерами ITS2exFw/ITS2exRv

Из электрофореграммы на рисунке 4 хорошо видно, что заражены только моллюски – битинии, образцы которых электрофорезированы на дорожках 2 и 6. Причем битинии заражены именно описторхидами вида *O. felineus*, поскольку величина выявленных фракций ДНК составляет около 530 н.п. Исходя из полученных на электрофореграмме данных, зараженность битиний описторхидами вида кошачья двуустка составила около 33 %.

Таким образом, в результате проведенных исследований нами были разработаны и апробированы технологии видоспецифичной ДНК диагностики для выявления описторхид в моллюсках-битиниях речных водоемов Гомельщины, позволяющие четко идентифицировать описторхид в исследуемом материале.

В ходе наших исследований с помощью методов ДНК-диагностики и классических методов идентификации было установлено, что инвазированность моллюсков личинками *O. felineus* колебалась в среднем от 40 до 78 %, а у рыб семейства карповые личинки описторхиса обнаружены в 23 % исследованных образцов. Наиболее подвержены заражению среди карповых рыб язь, густера и плотва.

Комплексные исследования у дефинитивных хозяев (рыбоядные дикие и домашние млекопитающие, включающие собаку, кошку и человека) показали, что очаг описторхоза попрежнему сохраняется в Жлобинском районе. За период 2010–2012 гг. у населения зарегистрировано 94 случая заражения. Установлено, что основной источник заражения − рыба семейства карповые местного улова (р. Днепр).

На следующем этапе исследований было проведено секвенирование, полученных образцов, выделенных из метацеркарий, взятых из мышц карповых рыб. Нуклеотидные последовательности полученных ампликонов расшифровывали в Институте цитологии и генетики СО РАН. В результате проведенного секвенирования ITS2 спейсера и прилегающих участков величиной 426 н.п. (после выравнивания) оказалось, что у метацеркарий *O. felineus* в карповых рыбах Днепра и Березины имеются два аллеля – ITS2H1 и ITS2H2. Нуклеотидная последовательность наиболее частого аллеля H1 (приведена ниже) отличатся от аллеля H2 инсерцией и двумя нуклеотидными замещениями (GenBank DQ513403, DQ513404).

1 cggtggatca ctcggctcgt gtgtcgatga agagcgcagc caactgtgtg aattaatgcg aactgcatac
71 tgctttgaac atcgacatct tgaacgcata ttgcggccat gggtttgcct gtggccacgc ctgtccgagg
141 gtcggcttat aaactatcac gacgcccaaa aagtcgtggc ttgggtcttg ccagctggca tgatttcccc
211 acgcatttgt gtggggtgcc ggatctatgg cttttcccca atgtgccgga cgcaaccatg tctgggctga
281 ctgcctggat gagggggtgg cggcggagtc gtggctcaat tgttgttgtt attgttgtga atgtgcgcgc
351 tccgttgttg gtccttttgtc tttggttgag gctccagt**gg t**ggcaatgca ttcgatgcaa atc**t**gttttg cactt

Необходимо отметить, что нуклеотидные последовательности аллелей H1 и H2, обнаруженные у метацеркарий *O. Felineus,* паразитирующих в карповых рыбах Днепра и Березины, совпадают с таковыми, найденными ранее в районах Обь-Иртышского очага, что указывает на генетическую связь между двумя очагами описторхоза.

Таким образом, в ходе проведенных исследований были разработаны методы ДНК-диагностики с использованием спейсера 2 (ITS2) рибосомального кластера для идентификации кошачьей двуустки (*O. felineus*), вызывающей заболевание описторхоз у животных и человека. С помощью методов ДНК-диагностики и классических методов было установлено, что инвазированность моллюсков личинками *O. felineus* колебалась от 40 до 78 %, а у рыб семейства карповые личинки описторхид обнаружены в 23 % образцов. Комплексные исследования у дефинитивных хозяев показали, что очаг описторхоза по-прежнему сохраняется в Жлобинском районе, а основной источник заражения − рыба местного улова (р. Днепр). Данные анализа нуклеотидных последовательностей спейсера ITS2 *O. felineus* указывает на генетическую связь между Днепровским и Обь-Иртышским очагами описторхоза.

Работа проводилась в рамках тем ГПНИ 16-14 и ГПНИ 16-32, при выполнении Государственных программ «Биотехнологии» и «Природопользование и экология».

Литература

1. Ando, K. Nucleotide sequence of mitochondrial CO I and ribosomal ITS II genes of Opisthorchis viverrini in northeast Thailand / K. Ando, P. Sithithaworn, C. Nuchjungreed [et al.] // Southeast Asian J Trop Med Public Health. – 2001. – Vol. 32 (Suppl 2). – P. 17–22.

2. Müller, B. PCR diagnosis of infections with different species of Opisthorchiidae using a rapid clean-up procedure for stool samples and specific primers / B. Müller, J. Schmidt, H. Mehlhorn // Parasitol Res. – 2007. – V. 100. – P. 905–909.

3. Müller, B. Sensitive and species-specific detection of *Clonorchis sinensis* by PCR in infected snails and fishes / B. Müller, J. Schmidt, H. Mehlhorn // Parasitol Res. – 2007. – V. 100. – P. 911–914.

4. Катохин, А.В. Оценка генетических отличий *Opisthorchis felineus* от *Opisthorchis viverrini* и *Clonorchis sinensis* по ITS2- и CO1-последовательностям / А.В. Катохин, С.В. Шеховцов [и др.] // Доклады академии наук. – 2008. – Т. 421, № 4. – С. 549–552.

5. Мордвинов В.А. Определение полной нуклеотидной последовательности митохондриального генома возбудителя описторхоза, *Opisthorchis felineus* / В.А. Мордвинов, А.В. Марданов, Н.В. Равин, С.В. Шеховцов, С.А. Демаков, А.В. Катохин, Н.А. Колчанов, К.Г. Скрябин // Acta Naturae. – 2009. – № 1. – С. 99–104.

6. Брусенцов, И.И. ДНК-диагностика микст-инвазий *Opisthorchis felineus* и *Metorchis bilis* с помощью метода ПЦР / И.И. Брусенцов, А.В. Катохин, З.В. Сахаровская, А.Э. Сазонов, Л.М. Огородова, О.С. Федорова, Н.А. Колчанов, В.А. Мордвинов // Медицинская паразитология. – 2010. – № 2. – С. 10–13.

7. Гончаренко, Г.Г. ДНК-диагностика *Opisthorchis felines* по ITS2 последовательностям в промежуточных хозяевах – моллюсках-битиниях / Г.Г. Гончаренко, А.Н. Лысенко, А.В. Катохин // Вестник МГПУ им. И.П. Шамякина. – 2012. – № 1. – С. 30–36.

8. Brusentsov, I. Low Genetic Diversity in Wide-Spread Eurasian Liver Fluke *Opisthorchis felineus* Suggest Special Demographic History of Trematode Species / I. Brusentsov, A. Katokhin, S. Shechovtsov, S. Borovikov, G. Goncharenko, L. Lider, B. Romashov, A. Evtushenko, V. Mordvinov // PLoS ONE, 2013. – 8(4):e62453. doi:10.1371.

9. King, S. Trematodes of the family Opisorchiidae: a mininreview / S. King, T. Scholz // The Korean Journal of Parasitology. – 2001. – T. 201. – С. 209–221.

10. Савицкий, Б.П. Природные очаги болезней человека в национальных парках Беларуси / Б.П. Савицкий, Л.С. Цвирко, Н.П. Мишаева. – Минск : Бит «Хата», 2002. – С. 262–267.

11. Паразитология и инвазионные болезни животных : метод. указания / М.Ш. Акбаев [и др.]. – М. : МГАВМиБ им. К.И. Скрябина, 2002. – 61 с.

12. Беэр, С.А. Биология возбудителя описторхоза / С.А. Бэер. – М. : Тов-во науч. изданий КМК, 2005. – 336 с.

13. Юрлова, Н.И. Обская болезнь / Н.И. Юрлова, В.В. Глупов // Описторхоз через призму генома. – Новосибирск, 2008. – 32 с.

14. Пашук, В.П. К вопросу о гельминтофауне человека и сельскохозяйственных животных в БССР / В.П. Пашук, М.Н. Чуносов // Первая зоологич.конфер.Белорус.ССР : Материалы. – Мн., 1958. – С. 272–274.

15. Линник, В.Я. Гельминтозоонозы рыб в бассейне реки Днепра на территории Беларуси / В.Я. Линник // Весці АН БССР. Сер.с.-х.наук. – 1964. – № 2. – С. 120–122.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Институт цитологии и генетики Сибирского
отделения Российской академии наук

Поступила в редакцию 12.07.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 556.114.679:613.472:639.1.055.36(476.2)

Радиоактивное загрязнение ихтиофауны водоемов, расположенных на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника

Д.Н. Иванцов, А.В. Гулаков

Представлены данные об активности ^{137}Cs в организме наиболее распространенных видов пресноводной ихтиофауны, обитающей в водоемах, расположенных на территории с высоким уровнем радиоактивного загрязнения.
Ключевые слова: ихтиофауна, видовой состав, активность ^{137}Cs, органы и ткани.

The article presents data on the ^{137}Cs activity in the body of the most common species of freshwater fish fauna inhabiting in waters located in areas with high levels of radioactive contamination.
Keywords: fish fauna, species composition, ^{137}Cs activity, organs and tissues.

Введение. Радиоэкологические исследования выявили высокие уровни удельной активности ^{137}Cs во многих водоемах Республики Беларусь, расположенных даже на значительном расстоянии от места аварии. Возросший в результате аварии на Чернобыльской АЭС радиационный фон стал одним из дополнительных экологических факторов в водных экосистемах Европы, особенно на значительных территориях Украины, Беларуси и России. На водосборных территориях Днепра и Припяти вследствие Чернобыльской аварии сформировалась обширная зона радиоактивного загрязнения, что привело к поступлению радионуклидов во многие рыбохозяйственные водоемы [1].

Изучение воздействия ионизирующей радиации на животных, обитающих на территории с высоким уровнем радиоактивного загрязнения, а также поведения радионуклидов в водных объектах является очень важной задачей в области экологии и охраны окружающей среды.

Необходимость исследований в этом направлении очевидна, так как в результате катастрофы на Чернобыльской АЭС значительному загрязнению искусственными, биологически значимыми радионуклидами были подвергнуты многие внутренние водоемы Беларуси, Украины и России [2].

До настоящего времени на территории республики существуют водоемы с высокими уровнями активности ^{137}Cs в гидробионтах, которые являются одним из основных источников поступления радионуклида по пищевым цепям к человеку. Поэтому очень важно изучение содержания и перераспределения ^{137}Cs по пищевым цепям, а также закономерностей накопления этого радионуклида в зависимости от биологических показателей рыб.

Выявление видовых, возрастных и сезонных различий в содержании радионуклидов в организме пресноводных рыб представляет как научный, так и практический интерес. Кроме того, употребление в пищу пресноводных рыб из водоемов, подвергшихся загрязнению, может являться дополнительным источником поступления радионуклидов в организм человека и приводить к увеличению дозовых нагрузок на население, проживающее на радиоактивно загрязненной территории.

Основной целью работы, поэтому являлось проведение анализа активности радионуклидов ^{137}Cs и ^{90}Sr в наиболее распространенных видах пресноводных рыб, обитающих на территории с высоким уровнем радиоактивного загрязнения.

Материал и методика исследований. Исследования проводились в течение летнего периода 2016 г. на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника. Водные объекты, выбранные для проведения лова рыбы, характеризовались различным гидрологическим режимом и уровнем радиоактивного загрязнения. Для изучения ихтиофауны, были выбраны следующие три водоема: озера Гнездное (замкнутый водоем) и Семеница (полупроточный водоем), а также канал вблизи б.н.п. Оревичи (часть мелиоративной сети) (рисунок 1).

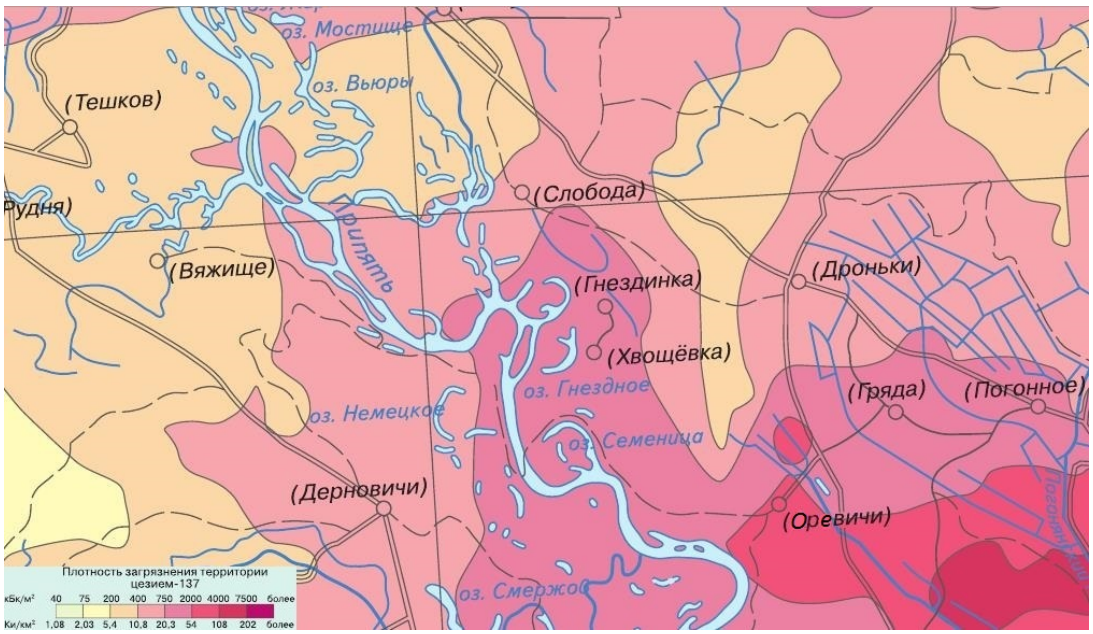


Рисунок 1 – Места отлова рыбы

Озеро Гнездное (51°38'8" СШ и 29°47'46" ВД) находится в 28 км на юго-восток от г. Наровля, возле д. Хвощевка и относится к бассейну р. Припять (расположено в ее пойме), является озером старичного типа. Местность холмистая, имеющая сложный рельеф. Берега песчаные, высокие, местами поросшие кустарником. Площадь зеркала около 0,12 км^2, длина около 1,6 км, наибольшая ширина около 0,07 км, длина береговой линии около 3,4 км.

Озеро Семеница (51°37'14" СШ и 29°47'53" ВД) находится в 34 км на юго-запад от г. Хойники, и в 1,4 км на юг от б.н.п. Хвощевка. Озеро старичного типа. Относится к бассейну р. Припять. Является полупроточным водоемом, постоянно соединено с р. Припять. Площадь зеркала около 0,21 км^2, длина около 2,3 км, наибольшая ширина около 0,17 км, длина береговой линии около 7,8 км.

Канал вблизи б.н.п. Оревичи, собственного географического названия не имеет, среди населения, до аварии проживавшего на прилегающей территории, носил название «канал Оревичи». Находится приблизительно в 40 км на юго-запад от г. Хойники и в 1,2 км от б.н.п. Оревичи. На востоке мелиоративный канал связан с Погонянским каналом.

Отлов рыб производился с мая по октябрь 2016 г. В качестве орудий лова были использованы сети трехстенные «Нептун» – длина 30 м, высота 1,8 м, размер ячеи 30 мм (2 шт.), 40 мм (2 шт.), 50 мм (2 шт.), 65 мм (2 шт.), 70 мм (2 шт.), бредень рыболовный маленький – длина 10 м, высота 1,5 м, мотня 2 м.

Определение содержания ^{137}Cs в пробах органов и тканей рыб проводили гамма-спектрометрическим методом по стандартным методикам [3] на проверенной и аттестованной аппаратуре. ^{90}Sr определяли радиохимическим методом [4] по методике ЦИНАО [5].

Результаты исследований и их обсуждение. За период исследований на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника нами было выловлено 130 экземпляров рыб, относящихся к следующим десяти видам различных экологических групп: бентофаги – карась серебристый (*Carassius auratus gibelio* Bloch), линь (*Tinca tinca* L.), плотва обыкновенная (*Rutilus rutilus* L.), лещ обыкновенный (*Abramis brama* L.), густера (*Blicca bjoerkna* L.) зоопланктонофаг – синец (*Abramis ballerus* L.), а также облигатные и факультативные ихтиофаги – сом обыкновенный (*Silurus glanis* L.), щука обыкновенная (*Esox lucius* L.), жерех обыкновенный (*Aspius aspius* L.), окунь обыкновенный (*Perca fluviatilis* L.).

Видовой состав отловленной рыбы представлен на рисунке 2.

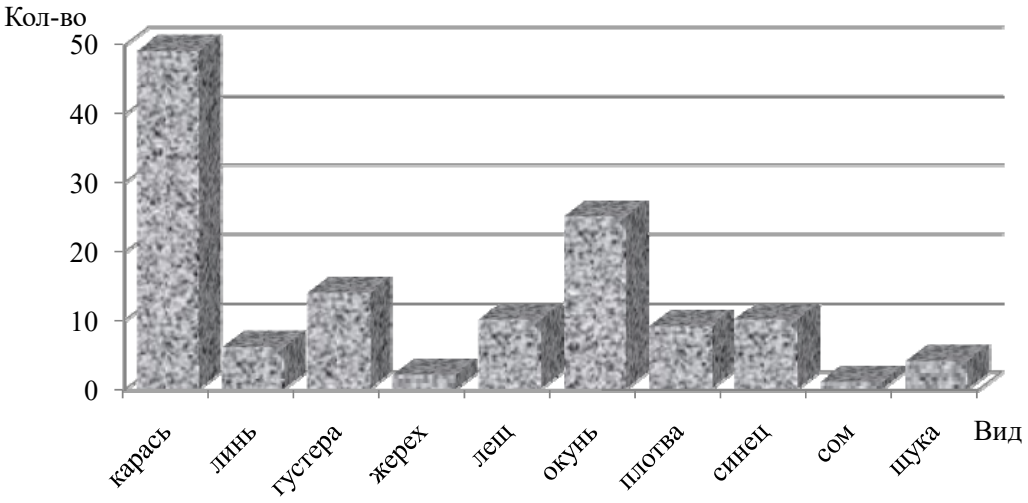


Рисунок 2 – Видовой состав отловленной рыбы за время исследований

Как видно из данных, представленных на рисунке 2, доминантным видом в уловах являлся карась серебристый в количестве 49 особей, а субдоминантным – окунь речной 25 экземпляров. Такие виды, как плотва, лещ, синец, густера, были встречены в количестве 9–14 штук. Менее часто в уловах были отмечены такие виды, как щука и линь, в количестве 4 и 6 особей соответственно. В единичных экземплярах в исследуемых водоемах были выловлены сом и жерех.

Наибольшее количество рыбы было выловлено в озере Семеница – 52 экземпляра следующих 7 видов: плотва обыкновенная (*Rutilus rutilus* L.), лещ обыкновенный (*Abramis brama* L.), густера (*Blicca bjoerkna* L.), синец (*Abramis ballerus* L.), сом обыкновенный (*Silurus glanis* L.), жерех обыкновенный (*Aspius aspius* L.), окунь обыкновенный (*Perca fluviatilis* L.). Видовой состав выловленной рыбы в озере Семеница показан на рисунке 3.

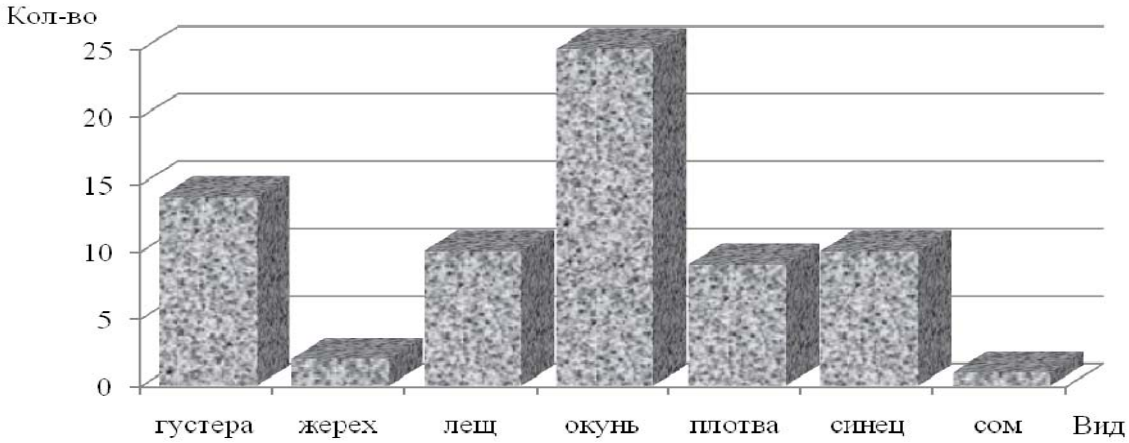


Рисунок 3 – Видовой состав отловленной рыбы на озере Семеница

Как видно из данных, приведенных на рисунке 3, наиболее часто встречаемыми видами в уловах на данном водоеме были густера и окунь – 14 и 17 экземпляров соответственно. Реже в уловах были отмечены такие виды как плотва 7 особей и лещ – 10 экземпляров. В единичных экземплярах были отмечены сом, жерех и синец.

В озере Гнездное было выловлено 28 особей рыб, относящихся к следующим 6 видам: линь (*Tinca tinca* L.), плотва обыкновенная (*Rutilus rutilus* L.), синец (*Abramis ballerus* L.), щука обыкновенная (*Esox lucius* L.), жерех обыкновенный (*Aspius aspius* L.), окунь обыкновенный (*Perca fluviatilis* L.). Видовой состав выловленной рыбы в озере Гнездное представлен на рисунке 4.

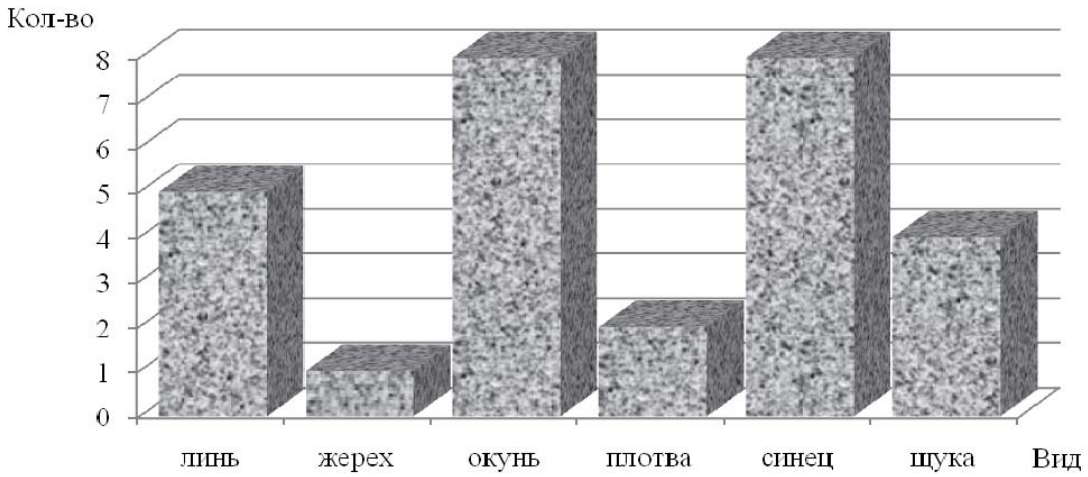


Рисунок 4 – Видовой состав отловленной рыбы на озере Гнездное

Как видно из данных, представленных на рисунке 4, доминантными видами в уловах являлись синец и окунь в количестве 8 экземпляров. Менее часто в уловах встречались щука и линь – 4–5 особей. Такие виды как жерех и плотва были отмечены в единичных экземплярах.

В канале Оревичский было отловлено 50 особей рыб двух видов: карась серебристый (*Carassius auratus gibelio* Bloch) и линь (*Tinca tinca* L.). Причем следует отметить, что линь в данном водоеме был встречен в единственном экземпляре.

Нами было также определена активность основных дозообразующих радионуклидов в организме выловленной рыбы. Результаты измерений удельной активности ^{137}Cs в мышечной ткани рыб представлены в кБк/кг сырого веса.

Особенности миграции радионуклидов по трофическим цепям ихтиофауны обуславливаются многими факторами: путем поступления радионуклида в организм, физико-химическими свойствами радионуклидов и формами их нахождения в водной среде, концентрацией в воде стабильных элементов-аналогов, типом питания различных видов рыб, их возрастом, массой особей, физиологическими особенностями накопления радионуклида в органах и тканях [6].

Существует зависимость между удельной активностью ^{137}Cs в рыбах и загрязнением ^{137}Cs прилегающих территорий. Чем выше загрязнение ^{137}Cs местности, на которой расположен водоем, тем выше уровни удельной активности ^{137}Cs у всех компонентов водоема, в том числе и у ихтиофауны. В небольших непроточных или слабопроточных водоемах эта закономерность может не проявляться.

Плотность загрязнения территории водосбора исследуемых водных объектов представлена в таблице 1.

Наибольшей плотностью загрязнения радионуклидами прилегающей территории характеризуется бывший мелиоративный канал вблизи б.н.п. Оревичи.

Таблица 1 – Средняя плотность радиоактивного загрязнения почвы территории водосбора

Водоем	Плотность радиоактивного загрязнения, кБк/м^2	
	^{137}Cs	^{90}Sr
Озеро Семеница	999,2 ± 184,2	68,8 ± 18,7
Озеро Гнездное	271,1 ± 54,2	44,4 ± 12,6
Мелиоративный канал вблизи б.н.п. Оревичи	1427,7 ± 285,5	131,9 ± 30,9

Средняя плотность загрязнения почвы для данного участка составляла по ^{137}Cs 1427,7 ± 285,5 кБк/м^2 и по ^{90}Sr 131,9 ± 30,9 кБк/м^2. В то время как средняя плотность радиоактивного загрязнения почвы территории водосбора озеро Семеница была по ^{137}Cs 999,2 ± 184,2 кБк/м^2 и по ^{90}Sr 68,8 ± 18,7 кБк/м^2. Значительно меньше было радиоактивное загрязнения почвы территории водосбора озера Гнездное – 271,1 ± 54,2 кБк/м^2 по ^{137}Cs и 44,4 ± 12,6 кБк/м^2 по ^{90}Sr.

В таблице 2 приведены результаты анализа содержания ^{137}Cs в мышечной ткани различных видов рыб, обитающих в водоемах, расположенных на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника.

Таблица 2 – Содержание ^{137}Cs в мышечной ткани различных видов рыб в водоемах, расположенных на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника, кБк/кг

Вид	Водоем					
	Озеро Семеница		Озеро Гнездное		Канал вблизи б.н.п. Оревичи	
Карась	–	–	–	–	2,99 ±0,14 1,53 – 5,75	(n = 46)
Линь	–	–	0,08 ± 0,01 0,07 – 0,10	(n = 5)	1,87	(n = 1)
Густера	0,03 ± 0,004 0,008 – 0,053	(n = 14)	–	–	–	–
Жерех	–	–	0,17	(n = 1)	–	–
Лещ	0,02 ± 0,002 0,01 – 0,04	(n = 10)	–	–	–	–
Окунь	0,08 ± 0,01 0,02 – 0,16	(n = 17)	0,43 ± 0,03 0,31 – 0,56	(n = 8)	–	–
Плотва	0,06 ± 0,007 0,05 – 0,09	(n = 5)	0,09 0,08 – 0,11	(n = 2)	–	–
Синец	0,03 0,02 – 0,04	(n = 2)	0,06 ± 0,02 0,02 – 0,11	(n = 5)	–	–
Сом	0,07	(n = 1)	–	–	–	–
Щука	–	–	0,26 ± 0,06 0,14 – 0,43	(n = 4)	–	–

Примечание: в числителе – среднее значение; в знаменателе – минимальное, максимальное значение; в скобках – объем выборки

Как видно из представленных данных в таблице 2, наиболее высокими уровнями накопления ^{137}Cs в мышцах отличались рыбы, обитающие в канале вблизи б.н.п. Оревичи. Так, средняя удельная активность ^{137}Cs в организме карася составляла 2,99 ± 0,14 кБк/кг при максимальном значении 5,75 кБк/кг. Единственный отловленный экземпляр линя в данном водоеме имел активность ^{137}Cs в мышечной ткани 1,87 кБк/кг.

Среди представителей хищных рыб, наиболее была загрязнена мышечная ткань рыб, отловленных в озере Гнездное. Так, активность ^{137}Cs в мышечной ткани окуня составляла 0,43 ± 0,03 кБк/кг и у щуки – 0,26 ± 0,06 кБк\кг, единственный выловленный экземпляр жереха имел активность 0,17 кБк\кг. В то время как организм «мирных» рыб данного водоема содержал ^{137}Cs в пределах от 0,06 ± 0,02 кБк\кг у синца до 0,08–0,09 кБк\кг у линя и плотвы.

Наименее была загрязнена рыба, обитающая в озере Семеница. Средняя активность ^{137}Cs в организме окуня находилась в пределах 0,08 ± 0,01 кБк\кг, а у сома – 0,07 кБк\кг. Представители отряда карповые (синец, лещ, густера) в озере накапливали ^{137}Cs от 0,02 кБк\кг до 0,03 кБк\кг, за исключением плотвы, у которой удельная активность ^{137}Cs составила 0,06 ± 0,007 кБк\кг.

^{90}Sr накапливался, в основном, в костной ткани исследуемых видов рыб, где его удельная активность достигала 1,92 кБк\кг, мышечная ткань накапливала данный радионуклид в пределах 0,12–0,14 кБк\кг.

Заключение. Таким образом, за время проведения исследований нами было выловлено 130 экземпляров рыб, относящихся к десяти видам различных экологических групп.

Доминантным видом в уловах являлся карась серебристый в количестве 49 особей, а субдоминантным – окунь речной 25 экземпляров. Такие виды, как плотва, лещ, синец, густера, были встречены в количестве 9–14 штук. Менее часто в уловах были отмечены такие виды как щука и линь, в количестве 4 и 6 особей соответственно. В единичных экземплярах в исследуемых водоемах были выловлены сом и жерех.

Наибольшее количество рыбы было выловлено в озере Семеница 52 экземпляра и в Оревичском канале – 50 особей, в то время как в озере Гнездное было отловлено 28 экземпляров.

Наименьшая удельная активность ^{137}Cs зарегистрирована у рыб, занимающих низший трофический уровень, у так называемых «мирных видов»: лещ, густера, плотва, карась, линь, синец – в отличие от хищных видов.

^{90}Sr накапливался в основном в костной ткани исследуемых видов рыб, где его удельная активность достигала 1,92 кБк\кг, мышечная ткань накапливала данный радионуклид в пределах 0,12–0,14 кБк\кг.

Литература

1. Соботович, Э.В. Естественная защищенность природных вод от загрязнения техногенными радионуклидами Чернобыльского выброса / Э.В. Соботович // I Международная рабочая группа по тяжелым авариям и их последствиям, 30 октября – 3 ноября 1989 г., Дагомыс, Сочи. – М. : Наука, 1990. – С. 144–152.

2. Кузьменко, М.І. Техногенні радіонукліди у прісноводних екосистемах / М.І. Кузьменко, Д.І. Гудков, С.І. Кірєєв – К. : Наукова думка, 2010. – 263 с.

3. Сборник нормативных, методических, организационно-распорядительных документов Республики Беларусь в области радиационного контроля и безопасности / Под ред. В.Е. Шевчука. – Минск, 1998. – 230 с.

4. СТБ 1059-98. Радиационный контроль. Подготовка проб для определения стронция-90 радиохимическими методами. – Введ. 01.07.98. – Минск : Госстандарт, 1998. – 22 с.

5. Методические указания по определению ^{90}Sr и ^{137}Cs в почвах и растениях / Под ред. Л.М. Державина // Центральный институт агрохимического обслуживания сельского хозяйства (ЦИНАО) – М. : ЦИНАО, 1985. – 64 с.

6. Рябов, И.Н. Радиоэкология рыб водоемов в зоне влияния аварии на Чернобыльской АЭС / И.Н. Рябов. – М. : Товарищество научных изданий КМК, 2004. – 215 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 29.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 582.632.1:602.7:577.18

Эффективность применения антибиотиков на этапе мультипликации при клонировании березы

И.И. Концевая, С.В. Жадько

На этапе мультипликации в культуре in vitro березы повислой и березы пушистой с использованием в качестве эксплантов однопочечных сегментов побегов оптимальным является применение аугментина в концентрации 200–400 мг/л. Добавление в питательную среду карбенициллина (500 мг/л) и/или цефотаксима (500 мг/л) позволяет поддерживать визуально чистую культуру тканей, без существенного негативного воздействия на морфометрические параметры микрорастений и их жизнеспособность.
Ключевые слова: антибиотики, регенерационная способность, культура in vitro, береза.

The use of augmentin in concentrations of 200–400 mg/l is optimal at the phase of multiplication in vitro culture of drooping and white birch using as explants one-bud segments of shoots. Addition of carbenicillin (500 mg/l) to the growth medium and / or cefotaxime (500 mg/l) allows to support visually clean tissue culture, without significant negative impacts on morphometric parameters of micro plants and their viability.
Keywords: antibiotics, regenerative capacity, culture in vitro, birch.

Введение. Широко распространённой лесообразующей породой, формирующей мелколиственные леса в Беларуси и по всем климатическим зонам России, кроме тундры, является береза (род *Betula* L.), представленная двумя наиболее распространенными видами берез: березой повислой и березой пушистой и их гибридами. В лесном фонде Беларуси и России на долю насаждений березы приходится соответственно 23,2 и 14,9 % [1], [2]. По этой причине значимость березы не вызывает сомнений для лесного хозяйства при воспроизводстве лесов.

Во многих странах мира для реализации государственных программ по генетическому улучшению лесных древесных пород разрабатываются методы, основанные на культивировании клеток, тканей и органов. Культура in vitro различных видов рода *Betula* L. вызывает у исследователей, селекционеров и практиков-лесоводов большой интерес и находит значительное практическое применение, поскольку позволяет размножать выдающиеся формы деревьев, отбирать ценные мутантные формы, сохранять гибридные генотипы. Без совершенствования данного метода также нельзя представить развитие перспективного направления улучшения растений – генетической трансформации.

Однако при микроклональном размножении следует учитывать проблему контаминации микроорганизмами пассируемого клонального материала, что прослеживается визуально. Инфицирование клеточных культур возникает по разным причинам: из внутренних тканей первичного экспланта либо является обычно атрибутом недостаточной стерилизации материала или неправильных приемов работы, либо вводится во время манипуляций в лаборатории [3, с. 4]. Многолетняя природа древесных растений усугубляет их состояние при получении стерильных культур [4, с. 10972]. Дальнейшее же культивирование таких тканей на богатых питательных средах стимулирует повышение титра микроорганизмов во внутренних межклеточных полостях, что, в итоге, приводит к проявлению видимой инфекции спустя n-число пассажей.

В практике микроклонального размножения антибиотики редко применяются для поверхностной стерилизации растительного материала, но необходимы, если инфицирование культуры связано с наличием микроорганизмов во внутренних полостях тканей и межклеточном пространстве. При добавлении антибиотиков в состав питательных сред важно знать их влияние на морфогенетический потенциал клеточного материала конкретного вида, сорта, клона растений. Это вызвано тем, что, по данным PhytoTechnology Laboratories (USA), чувствительность культуры тканей разных видов растений к одним и тем же антибиотикам может быть различной [5, с. 2]. Однако, если исследования по воздействию антибиотиков на клеточные культуры различных сельскохозяйственных растений довольно многочисленны и активно проводятся не одно десятилетие [3, с. 3], то в культуре древесных растений использование антибиотиков ограничивается обычно генно-инженерными технологиями.

Определение феномена взаимоотношений между культивируемым in vitro материалом того или иного вида растений и антибактериальным агентом является значимым для микроклонального размножения, особенно древесных насаждений, который требует при рассмотрении комплексного подхода, с использованием знаний и методов самых разных биологических дисциплин. Несомненно, актуальность данной проблемы возрастает в биотехнологических исследованиях в области растениеводства, в частности при получении трансгенных растений.

Цель исследования – изучение влияния некоторых добавленных в питательную среду антибиотиков на процесс регенерации узловых сегментов побегов различных клонов *Betula pendula* Roth. и *B. pubescens* Ehrh. на этапе мультипликации при клональном размножении.

Материал и методы исследования. В качестве объектов исследования использовали микрорастения клонов березы повислой: 31, 4б, березы пушистой: 1б, 4а.

Субкультивирование микрорастений обычно выполняли каждые 30 дней на свежую безгормональную среду. В асептических условиях нарезали однопочечные сегменты побегов, длиной 0,7–1,0 см, с листом или без листа. Затем экспланты в вертикальной ориентации помещали на агаризованную среду. Основу питательной среды составляла смесь неорганических солей, оптимизированная для древесных (WPM) [6, с. 426]. Витамины, микроэлементы добавляли по прописи Мурасиге и Скуга [7, с. 474]; pH среды перед стерилизацией доводили до 5,6–5,8. Автоклавировали среды при 1,1 атм в течение 20 мин. Тестировали следующие антибиотики: цефотаксим (цм) (РУП «Борисовский завод медицинских препаратов», Беларусь); карбенициллин (кн) (ЗАО «Брынцалов-А», Россия); гентамицин (гн) (гентамицина сульфат, РУП «Белмедпрепараты», Беларусь); аугментин (ау) («СмитКляйн Бичем Фармасьютикалз», Великобритания). При выборе концентраций антибиотиков исходили из информации, предлагаемой PhytoTechnology Laboratories, USA [5]. Антибиотики добавляли в стерильных условиях в охлажденную до 45°С агаризованную среду, после чего проводили ее разлив по стерильным культуральным сосудам, объемом 200 мл. В качестве контроля использовали модифицированную среду WPM, без добавления фитогормонов и других биологически активных веществ (WPM, б/г).

Материал культивировали в оптимальных условиях: при температуре 25 ± 1°С, с фотопериодом 16 часов и освещенностью 3 000 люкс. Число повторностей в каждом варианте составило 20–60. Оценку материала проводили спустя 30 дней. Чистоту растительного материала оценивали визуально по четырехбалльной шкале: «–» – отсутствие бактериальной инфекции, «+» – слабая вуаль в глубине питательной среды, «++» – сильная вуаль в глубине питательной среды, «+++» – сильная поверхностная инфекция. Учитывали процент эксплантов с признаками хлороза и некроза, способность их к побегообразованию. Определяли морфологические параметры сформировавшихся растений (высоту побегов, число листьев и корней, степень развития корней). Последний параметр оценивали по трехбалльной шкале: 1 – слабое развитие корневой системы (наличие 1–5 корней с длиной не более 1 см); 2 – среднее развитие корней (наличие более 3 корней с длиной свыше 1 см, с единичными боковыми и придаточными корнями); 3 – сильное развитие корневой системы (наличие более 3 корней с длиной свыше 3 см, с развитыми боковыми и придаточными корнями). Для каждого варианта рассчитывали коэффициент мультипликации для однопочечных сегментов побегов, используемых в качестве эксплантов.

Полученные данные обработаны статистически с использованием пакета прикладного программного обеспечения «Statsoft (USA) Statistica v.7.0». Для сравнения изучаемых показателей между опытными и контрольными группами использовали t-критерий Стьюдента. Нулевую гипотезу отклоняли при уровне статистической значимости $p < 0,05$ [8, с. 332].

Результаты исследования и их обсуждение. Проведенные исследования показали, что используемый материал березы повислой и пушистой характеризовался накоплением в своих тканях бактериальной инфекции. Об этом свидетельствует наличие роста бактерий в глубине питательной среды без органических добавок в контрольном варианте (таблица 1).

При культивировании микрорастений на средах, дополненных гентамицином в концентрациях 100 или 300 мг/л, выявлено подавление процесса регенерации. У клонов 4б березы повислой, клона 1б березы пушистой наблюдали хлороз, соответственно, в 100 %. Выжившие

экспланты характеризовались отсутствием роста побегов либо минимальным ростом, выявленным для клонов. Имеющиеся листья у первичного экспланта теряли зеленую окраску, частично обесцвечивались либо желтели, реже – опадали. Индукция корней отсутствовала у всех изученных клонов обоих видов берез. У клона 4б березы повислой отмечали некроз в 50 % при культивировании эксплантов на средах, дополненных гентамицином в количестве 300 мг/л.

Таблица 1 – Влияние антибиотиков на развитие микрорастений березы

Антибиотики, концентрация, мг/л	Инфицированность среды	Хлороз/ некроз, %	Средняя высота растений, ($x \pm S_x$), см	Корни	
				наличие, %	степень развития
береза повислая, клон 31					
WPM, б/г (контроль)	++	0/0	4,7 ± 0,20	100	3, 2
гентамицин, 100	-	100/0	1,1 ± 0,10**	0	0
гентамицин, 300	-	100/0	1,2 ± 0,08**	0	0
карбенициллин, 500	-	0/0	4,1 ± 0,33	100	3, 1
цефотаксим, 500	-	0/0	2,8 ± 0,29**	70,6	0, 3
цефотаксим, 500 + карбенициллин, 500	-	0/0	3,3 ± 0,31**	100	2, 3
аугментин, 200	-	0/0	4,0 ± 0,23	100	3, 2
аугментин, 300	-	0/0	4,1 ± 0,24	100	3, 2
аугментин, 400	-	0/0	4,1 ± 0,33	100	3, 2
береза повислая, клон 4б					
WPM, б/г (контроль)	+	0/0	3,7 ± 0,42	100	1, 2
гентамицин, 100	-	100/0	1,1 ± 0,07**	0	0
гентамицин, 300	-	100/50,0	1,0 ± 0,05**	0	0
карбенициллин, 500	-	0/0	2,4 ± 0,18*	100	3, 1
цефотаксим, 500	-	0/0	3,0 ± 0,19	100	3, 2
цефотаксим, 500 + карбенициллин, 500	-	0/0	2,3 ± 0,18*	100	1, 2
аугментин, 300	-	0/0	3,3 ± 0,17	100	3, 2
береза пушистая, клон 1б					
WPM, б/г (контроль)	+	0/0	4,8 ± 0,22	100	3, 2
гентамицин, 100	-	100/0	0,9 ± 0,06**	0	0
гентамицин, 300	-	100/0	1,0 ± 0,03**	0	0
карбенициллин, 500	-	0/0	2,8 ± 0,15**	100	3, 2
цефотаксим, 500	-	0/0	3,0 ± 0,11**	100	1, 2
цефотаксим, 500 + карбенициллин, 500	-	0/0	2,3 ± 0,12**	100	1, 2
береза пушистая, клон 4а					
WPM, б/г (контроль)	-	0/0	2,8 ± 0,22	100	3, 2
аугментин, 200	-	0/0	2,9 ± 0,18	100	3, 2
аугментин, 300	-	0/0	3,2 ± 0,23	100	3
аугментин, 400	-	0/0	2,8 ± 0,12	100	3

Примечание: уровень значимости при *$p < 0,05$; **$p < 0,01$

Таким образом, был установлен однозначный негативный эффект апробированных концентраций гентамицина на морфогенный статус узловых сегментов побегов березы повислой и пушистой.

При использовании в составе питательной среды аугментина в количестве 200–400 мг/л у тестируемых клонов отмечали нормальное развитие регенератов, по морфологическим параметрам соответствующим значениям контрольного варианта. Следует подчеркнуть, что аугментин стимулировал развитие сильной корневой системы.

При использовании цефотаксима, карбенициллина и их совместной комбинации наблюдали достаточно активный рост побегов в высоту, формирование зеленых листьев, стабильное корнеобразование. Чаще всего данные β-лактамные антибиотики, вызывая снижение числа корней на растении и уменьшение их длины, стимулировали формирование более мощных корней, чем в контроле. Однако следует подчеркнуть, что эффективность регенерации растений зависела и от его генотипа (таблица 1).

Установлено, что коэффициент мультипликации у тестируемых клонов березы повислой и пушистой на средах, дополненных гентамицином, был на уровне 0,7–1,1. При действии карбенициллина и цефотаксима коэффициент мультипликации при условии применения в качестве эксплантов однопочечных сегментов побегов оставался в большинстве вариантов опыта на уровне значения контрольного варианта и составлял 3–4. Применение аугментина в концентрациях 200–400 мг/л либо не оказывало влияние либо позитивно влияло на данный показатель по сравнению с контролем (рисунок 1).

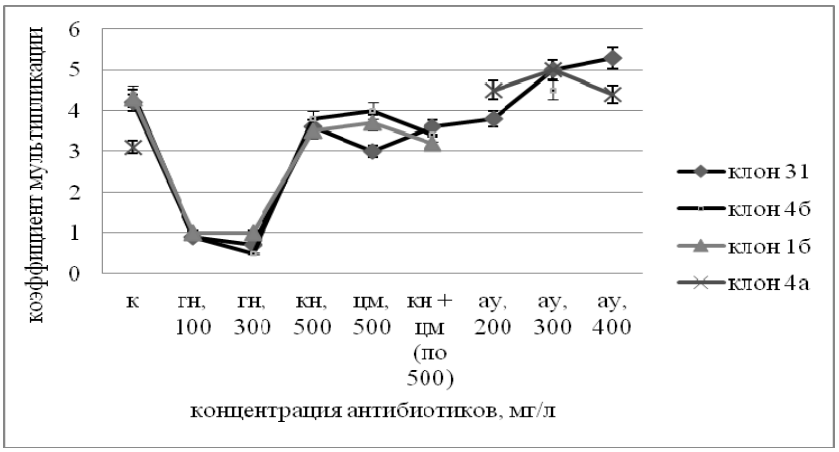


Рисунок 1 – Влияние антибиотиков на коэффициент мультипликации березы повислой (клон 31 и 4б) и пушистой (клон 1б и 4а)

Масса является интегральным показателем и у микрорастений определяет их общий морфогенный габитус. В текущем эксперименте средняя масса микрорастений в контрольном и опытных вариантах варьировала в зависимости от генотипа клона березы. В частности, тестируемые антибиотики существенно снижали массу регенерантов клона 1б березы пушистой. Для других клонов подобный негативный эффект отмечали только в вариантах с использованием гентамицина. Тестируемые β-лактамные антибиотики позитивно действовали на массу микрорастений по сравнению с контролем (рисунок 2).

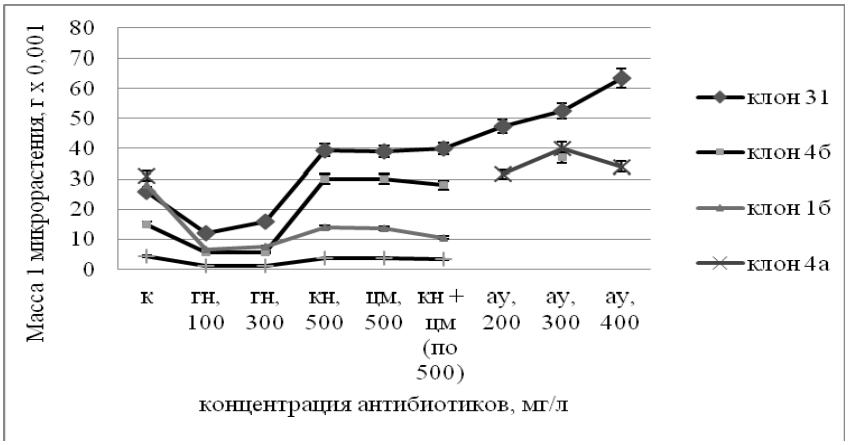


Рисунок 2 – Влияние антибиотиков на среднюю массу одного регенеранта березы повислой (клон 31 и 4б) и пушистой (клон 1б и 4а)

Апробированные антибиотики в зависимости от механизма действия на бактериальную клетку делятся на несколько групп. β-лактамные антибиотики (карбенициллин, цефотаксим, аугментин) относятся к фармакотерапевтической группе: пенициллин полусинтетический, их объединяет наличие в структуре β-лактамного кольца [9, с. 1204]. Механизм их действия связан с повреждением клеточной мембраны бактерий, находящихся в стадии размножения, и высвобождением аутолитических ферментов, что приводит к гибели клеток прокариот. Эти антибиотики эффективны в относительно низких дозах, имеют широкий спектр противомикробно-

го действия и низкую токсичность для эукариот. Следует подчеркнуть, что цефотаксим и аугментин, в отличие от карбенициллина, не инактивируются большинством β-лактамаз, продуцируемых грамотрицательными бактериями. По этой причине они оказывают бактерицидное действие на грамположительные и грамотрицательные микроорганизмы, резистентные к другим цефалоспоринам, пенициллинам, аминогликозидам и прочим противомикробным средствам.

Тестируемый аминогликозидный антибиотик связывается с 30S-субъединицей рибосом, что прекращает биосинтез белка. Гентамицин является бактериостатическим антибиотиком широкого спектра действия, токсичен для бактерий в концентрации 50 мг/л. Резистентность микроорганизмов к гентамицину развивается медленно.

Охарактеризованные выше антибиотики широко используются в опытах по генетической трансформации растений [9, с. 1203].

Исследования по влиянию антибиотиков на клеточные культуры различных сельскохозяйственных растений довольно многочисленны. В работе Дунаевой С.Е. и Оследкина Ю.С. представлен обзор по идентификации бактериальных микроорганизмов, колонизировавших ткани растений в культуре in vitro, их возможной роли и антибактериальной терапии [3, с. 3-15]. На многих сельскохозяйственных растениях установлено стимулирование роста клеток растений при ингибировании роста бактерий в результате добавления в состав питательной среды цефотаксима и карбенициллина [10, с. 38].

Также имеются сведения о влиянии антибиотиков на клеточном и молекулярном уровнях. В частности, в культуре тканей пшеницы бензилпенициллин активирует пролиферацию клеток, ускоряя клеточный цикл, что ведет к усилению мутагенеза за счет повреждения хромосом. В то время как цефотаксим ингибирует пролиферацию клеток пшеницы, удлиняя клеточный цикл в период метафазы и индуцируя мутации за счет повреждения хромосом и митотического аппарата [11, с. 90].

На разных клонах цитрусовых показано, что из четырех тестируемых β-лактамных антибиотиков (тиментин, цефотаксим, аугментин, меропенем) цефотаксим в концентрации 500 мг/л показал лучший ответ на регенерацию. Ни один из антибиотиков по отдельности полностью не подавлял бактериальную контаминацию растительного материала. Но цефотаксим был позитивен в своем влиянии на морфогенез in vitro. В данном исследовании сделан вывод, что на органогенез зрелых тканей цитрусовых влияют совокупно генотип, регуляторы роста, основная среда и β-лактамные антибиотики [12, с. 659].

При использовании антибиотиков на этапе микроразмножения лесных древесных растений было выявлено, что отдельный антибиотик не был эффективен против эндогенной бактериальной инфекции [13, с. 74]. Трудность применения антибиотиков для культуры растительных тканей заключается в том, что спектр бактерицидного действия каждого из них довольно узок, а среди облигатных паразитов растительных тканей встречаются микроорганизмы, весьма разнообразные по систематическому положению. Помимо этого, нельзя применять один вид антибиотиков на этапе мультипликации побегов длительное время, поскольку могут быть получены устойчивые штаммы бактерий [14, с. 5]. Комбинация нескольких антибиотиков намного эффективнее. При длительном наблюдении это имело место и для нашей коллекции клонов в вариантах с использованием цефотаксима или карбенициллина. Оба антибиотика принадлежат к одной группе β-лактамных антибиотиков, и, несомненно, спектр их действия на многие виды и штаммы бактерий пересекается. Использование комбинации нескольких антибиотиков, в том числе имеющих механизмы защиты против β-лактамаз, а также из разных фармакологических групп в составе питательной среды при работе с культурой тканей растений является намного эффективнее [14, с. 22]. Такой подход не только позволит расширить спектр действия антибиотиков на микроорганизмы, но и при соответствующем грамотном подборе комбинаций антибиотиков будет способствовать сохранению ростовых процессов растений в полном объеме. Тем не менее, сохраняется риск увеличения сомаклональной изменчивости в результате использования антибиотиков [4, с. 1072].

Заключение. На этапе мультипликации в культуре in vitro березы повислой и березы пушистой с использованием в качестве эксплантов однопочечных сегментов побегов опти-

мальным является применение аугментина в концентрации 200–400 мг/л. Добавление в питательную среду карбенициллина (500 мг/л) и/или цефотаксима (500 мг/л) позволяет поддерживать визуально чистую культуру тканей, без существенного негативного воздействия на морфометрические параметры микрорастений и их жизнеспособность.

Выявлено негативное воздействие присутствия в питательной среде гентамицина в концентрации 100 и 300 мг/л на культуру тканей березы повислой и березы пушистой. Тестированные концентрации гентамицина вызывают хлороз у всех эксплантов. Субкультивирование таких эксплантов на свежие безгормональные среды индуцирует их гибель либо, при сохранении жизнеспособности, существенно подавляет ростовые процессы у регенерантов.

При работе с культурой клеток и тканей березы повислой и березы пушистой для поддержания ее стерильности в течение длительного периода времени следует придерживаться концепции совместного использования нескольких видов антибиотиков, различающихся по механизму их воздействия на бактериальную клетку и с разным спектром действия на микроорганизмы, либо чередовать их применение. Не рекомендуется использовать антибиотики в каждом пассаже при рутинном размножении.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ (№ темы М16-33).

Литература

1. Лесной фонд. Лесное хозяйство // Министерство лесного хозяйства Республики Беларусь [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа : http://www.mlh.by/ru/forestry/resources.html. – Дата доступа : 19.03.2016.

2. Мягколиственные породы – Береза (*Betula*) // Все о лесном деле и деревообработке [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа : http://industrial-wood.ru/spravochnik-lesnichego/85-myagkolistvennye-porody-bereza-betula.html. – Дата доступа : 30.03.2016.

3. Дунаева, С.Е. Бактериальные микроорганизмы, ассоциированные с тканями растений в культуре in vitro: идентификация и возможная роль / С.Е. Дунаева, Ю.С. Оследкин // Сельскохозяйственная биология. – 2015. – Т. 5, № 1. – С. 3–15.

4. Gogoi, G. Standardization parameters for critical problems encountered in plant in vitro culture technique / G. Gogoi, P.K. Borua // International Journal of Current Research. – 2014. – Vol. 6. – Issue 12. – P. 10964–10973.

5. Antibiotics // PhytoTechnology Laboratories [Электронный ресурс]. – 2011. – Режим доступа : http://phytotechlab.com/index.php/biochemicals/antibiotics. – Дата доступа : 19.02.2016.

6. Lloyd, G. Commercially feasible micropropagation of mountain laured, *Kalmia latifolia* by use of shoot-tip culture / G. Lloyd, B. McCown // Proc. Intl. Plant Prop. Soc. – 1980. – № 30. – P. 421–427.

7. Murashige, T. A revised medium for rapid growth and bioassay with tobacco tissue cultures / T. Murashige, F. Skoog // Physiol.Plant. – 1962. – Vol. 15, № 13. – P. 473–497.

8. Лакин, Г.Ф. Биометрия / Г.Ф. Лакин – М. : Высш. шк., 1990. − 352 с.

9. Padilla, I.M.G. Aminoglycoside antibiotics: structure, functions and effects on in vitro plant culture and genetic transformation protocols / I.M.G. Padilla, L. Burgos // Plant Cell Rep. – 2010. – Vol. 29. – P. 1203–1213.

10. Pollock, K. The toxicity of antibiotics to plant cell cultures / K. Pollock [et al.] // Plant Cell Reports. – 1983. – Vol. 2. – P. 36–39.

11. Редикин, Ю.В. Цитогенотоксические эффекты бета-лактамных антибиотиков. Сообщение 1. Тест на индукцию повреждения митотических хромосом в клетках корневой меристемы пшеницы / Ю.В. Редикин [и др.] // Учен. Зап.биол.фак. ОмГПУ. – 1996. – № 5. – С. 77–92.

12. Peixoto de Oliveira, M.L. Growth regulators, culture media and antibiotics in the in vitro shoot regeneration from mature tissue of citrus cultivars / M.L. Peixoto de Oliveira [et al.] // Pesq. agropec. bras., Brasília. – 2010. – Vol. 45, № 7. – P. 654–660.

13. Mentzer, J. Effect of antibiotics on internal bacterial contamination of micropropagation hazelnut / J. Mentzer, P. Tanprasert // In Vitro Cell and Dev. Biol. Anim. – 1996. – Vol. 32, № 3, Pt. 2. – P. 74A.

14. Dodds, J.H. Experiments in plant tissue culture. Aseptic techniques / J.H. Dodds, L.W. Roberts // Cambridge : Cambridge Univ. Press. U.K., 1982. – 24 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 17.05.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК: 595.733.4:574.91

Sympetrum meridionale (Selys, 1841) (Odonata, Libellulidae) – новый вид стрекоз для фауны Беларуси

А.М. Островский

Sympetrum meridionale (Selys, 1841) (Odonata, Libellulidae) впервые обнаружен на территории Беларуси, как инвазивный элемент местной фауны стрекоз. Материал собран в 2016 г.
Ключевые слова: *Sympetrum meridionale*, Odonata, Libellulidae, фауна, Республика Беларусь.

Sympetrum meridionale (Selys, 1841) (Odonata, Libellulidae) was first discovered in the territory of Belarus, as an invasive element of the local fauna of dragonflies. The material was collected in 2016.
Keywords: *Sympetrum meridionale*, Odonata, Libellulidae, fauna, Republic of Belarus.

Введение. Сжатобрюхи, или стрекозы-каменушки (*Sympetrum* Newman, 1833) – почти повсеместно распространенный род стрекоз подсем. Sympetrinae. Существует значительное количество литературных источников [1]–[5] и др., благодаря которым систематика рода разработана достаточно подробно и обоснованно, и в его составе к настоящему времени насчитывается 60 видов и более 30 подвидов [6], [7]. Из них в фауне Беларуси до недавних пор отмечались 6 видов [8]. Однако уже в 2015 г. в юго-западной и центральной частях республики были зафиксированы первые случаи обнаружения *Sympetrum fonscolombii* (Selys, 1840) [9]. Этот вид примечателен тем, что в отдельные годы осуществляет инвазию в северные регионы за пределы как европейской, так и азиатской частей своего основного ареала [10].

В ходе энтомологических исследований на юго-востоке Беларуси летом 2016 года в пойме р. Сож была обнаружена популяция нового для фауны республики средиземноморско-переднеазиатского вида стрекоз сем. Libellulidae: *Sympetrum meridionale* (Selys, 1841) (рисунок 1).

Рисунок 1 – *Sympetrum meridionale* (Selys, 1841): самец (вверху) и самка (внизу)

Материал. г. Гомель, пойменный луг в р-не ж/д моста через р. Сож, сачком на сухих стеблях, 31.VII.2016 (1♂); г. Гомель, пониженный заболоченный участок в пойме р. Сож, густо заросший макрофитами, сачком на прибрежной траве и кустарниковой растительности, 03.VIII.2016 (4♂♂, 2♀♀); г. Гомель, левый берег р. Сож на участке от Новобелицкого автомобильного моста до гребного канала, сачком в воздухе и на прибрежной растительности, 11.VIII.2016 (1♂, 3♀♀). А.М. Островский leg. et det. Материал хранится в коллекции автора.

Диагностические признаки. Бока груди светлые, буроватые; черные линии вдоль швов очень тонкие, каплевидно утолщенные у основания крыльев. Ноги коричневые или желтые с черными полосками и отметинами. Брюшко светло-красное у самца и желтоватое у самки. Черная поперечная полоса между лбом и теменем короткая, никогда не спускается книзу вдоль внутреннего края глаз, затылок с темно-бурыми или черными полосками. Внутренняя ветвь генитальных крючочков самца сбоку немного длиннее, чем наружная ветвь, обе ветви длинные и мощные, наружная ветвь резко загнута у верхушки. Генитальная пластинка самки прилегающая, с закругленным задним краем, почти незаметная сбоку (рисунок 2).

Рисунок 2 – Комплекс диагностических признаков *Sympetrum meridionale* (Selys, 1841): слева вверху – грудь самца (вид сбоку); слева внизу – грудь самки (вид сбоку); справа вверху – конец брюшка самки (вид снизу); справа внизу – конец брюшка самца (вид сбоку)

Распространение и особенности биологии. *S. meridionale* – трансевразиатский вид стрекоз западного происхождения, характерный главным образом для пустынно-степной зоны

в пределах Субголарктической области [11], [12]. На восток распространен до середины р. Амур [13]. Изолированные места обитания вида отмечены в Западной Сибири [14] и на Алтае [15]. Особи вида встречаются в Южном Иране [16], Центральном Афганистане [17], Чеченской республике [18] и в Крыму. На Украине вид зарегистрирован в Западной Лесостепи, Прикарпатье, Карпатах и Закарпатской низменности, на юге Черниговской области, а также в Киевской, Полтавской, Одесской (дельта р. Дунай), Запорожской и Донецкой областях [19]. Населяет различные типы мелких стоячих водоемов с богатой растительностью или заболоченные, в том числе солоноватые и сезонно пересыхающие водоемы [20] (рисунок 3).

Рисунок 3 – Мелкие стоячие водоемы с богатой растительностью и заболоченные участки в пойме крупных рек – излюбленное местообитание *Sympetrum meridionale* (Selys, 1841)

Таксономические замечания. По мнению А.Н. Бартенева [13] и Б.Ф. Белышева [14], для вида характерна незначительная географическая изменчивость, не имеющая таксономической значимости. Ранее Г.Г. Якобсон и В.П. Бианки [21] на основании изучения экземпляров из Кашгарии, выделили подвид *S. m. dilatatum*, который по окраске светлее европейских особей. Однако А.Н. Бартенев [13] выделение данного подвида считает нецелесообразным.

Заключение. Таким образом, на территории Беларуси впервые отмечен новый вид стрекоз *Sympetrum meridionale*. На основании результатов наблюдений можно предположить, что *S. meridionale* является видом, натурализовавшимся на территории юго-востока страны, и его следует рассматривать как инвазивный элемент в местной фауне. В то же время требуются дополнительные исследования и мониторинг местной фауны, чтобы сделать окончательный вывод о характере конкуренции между *S. meridionale* и аборигенными видами стрекоз.

Литература

1. Charpentier, T. Libellulinae Europaeae Descriptae et Depictae / T. Charpentier. – Lipsiae, Voss, 1840. – 180 p.

2. Hagen, H.A. Odonaten-Fauna des Russischen Reichs / H.A. Hagen // Stett. Entom. Zeitg. – 1854. – P. 363–381.

3. Kirby, W.F. A synonimic Catalogie of Neuroptera Odonata, or Dragonflies.With an appendix of fossil species / W.F. Kirby. – L., 1890. – 202 p.

4. Бартенев, А.Н. Стрекозы Кавказских Минеральных вод / А.Н. Бартенев // Русск. энтом. обозр. – 1915. – Т. 15, № 4. – С. 604–612.

5. Белышев, Б.Ф. Определитель стрекоз по крыльям (роды Бореального фаунистического царства и сопредельных земель, виды фауны СССР) / Б.Ф. Белышев, А.Ю. Харитонов. – Новосибирск : Наука, 1977. – 398 с.

6. Haritonov, A.Yu. Some problems of taxonomy and zoogeography of the dragonflies of genus *Sympetrum* / A.Yu. Haritonov, O.N. Popova // Abstr. papers XIV International Symposium of Odonatology, Maribor, Slovenia, July 12–23, 1997. – Maribor, 1997. – P. 15.

7. Попова, О.Н. Стрекозы рода *Sympetrum*: дис. ... канд. биол. наук: 03.00.09/ О.Н. Попова. – Новосибирск, 1999. – 261 с.

8. Buczyński, P. Review of the Odonata of Belarus / P. Buczyński, K.-D.B. Dijkstra, R. Mauersberger, M.D. Moroz // Odonatologica. – 2006. – № 35 (1). – P. 3–13.

9. *Sympetrum fonscolombii* – новы для Беларусі від стракоз [Электронный ресурс] // Птушкі штодня. – BirdWatch.by 2009–2016. – Режим доступа : http://birdwatch.by/gal-lery/biot/sympetrum-fonscolombii-novy-dlya-belarusі-vid-strakoz. – Дата доступа : 15.08.2016.

10. Попова, О.Н. *Sympetrum fonscolombii* (Selys, 1840) (Odonata, Libellulidae) в северных частях ареала в Челябинской и Новосибирской областях России / О.Н. Попова, Е.Е. Еремина // Евразиатский энтомол. журнал. – 2016. – Т. 15, Вып. 1. – С. 45–59.

11. Павлюк, Р.С. Номенклатура стрекоз (Insecta, Odonata) СССР / Р.С. Павлюк, А.Ю. Харитонов // Полезные и вредные насекомые Сибири. – Новосибирск : Наука, 1982. – С. 12–42.

12. Асямова, С.М. Аннотированный список стрекоз Алтайского заповедника / С.М. Асямова // Биоразнообразие, проблемы экологии Горного Алтая и сопредельных регионов: настоящее, прошлое, будущее: Материалы II региональной научно-практической конференции. – Горно-Алтайск, 2006. – С. 3–7.

13. Бартенев, А.Н. Заметки о стрекозах Закавказья / А.Н. Бартенев // Изв. Кавказ. музея. – 1919. – Т. 12. – С. 196–199.

14. Белышев, Б.Ф. Стрекозы Сибири / Б.Ф. Белышев. – Новосибирск : Наука, 1973. – Т. 1 – 620 с.

15. Костерин, О.Э. К фауне стрекоз Горного Алтая / О.Э. Костерин // Проблемы экологии горных регионов : тез. докл. Всесоюз. науч.-практ конф. Секция одонатологии. 9–13 окт. – Душанбе, 1989. – С. 6–10.

16. Heidari, H. An annotated check-list of the Odonata of Iran / H. Heidari, H.J. Dumont // Zoology in Middle East. – 2002. – № 26. – P. 133–150.

17. Schmidt, Er. Ergebnisse der Deutschen Afganistan-Expedition 1956 der Landessammlungen fur Naturkunde Karlsruhe sowie der Expeditionen J. Klapperich, Bonn 1952-53 und Dr. K. Lindberg, Lund (Schweden) 1957-60 / Er. Schmidt // Beitr. naturk. Forsch. SW-Deutschl. – 1961. – Bd. 19. – № 3. – P. 399–435.

18. Амхаева, Л.Ш. Стрекозы (Insecta, Odonata) Чеченской республики (состав, распределение и эколого-биологические особенности фауны): дис. … канд. биол. наук: 03.02.14 / Л.Ш. Амхаева. – Владикавказ, 2015. – 159 с.

19. Горб, С.Н. Бабки (Odonata) України: фауністичний огляд / С.Н. Горб, Р.С. Павлюк, З.Д. Спуріс // Вестник зоологии. – 2000. – Отд. вып: № 15. – 155 с.

20. Скворцов, В.Э. Стрекозы Восточной Европы и Кавказа: Атлас-определитель / В.Э. Скворцов. – Москва : Товарищество научных изданий КМК, 2010. – 623 с.

21. Якобсон, Г.Г. Прямокрылые и ложносетчатокрылые Российской империи и сопредельных стран / Г.Г. Якобсон, В.П. Бианки. – СПб, 1905. – 836 с.

Гомельский государственный
медицинский университет

Поступила в редакцию 08.07.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 581.9:581.526.42:[556.51] (477)

Флоросозологическая характеристика лесной растительности бассейна нижней Сулы (Украина)

Н.А. Смоляр, Е.Ю. Смаглюк

По результатам обобщения литературных сведений, обработки гербарных коллекций и данных оригинальных исследований произведена флоросозологическая характеристика лесной растительности бассейна нижней Сулы (левобережного притока Днепра). Определена раритетная фракция видового состава лесной растительности исследуемого региона, которая составляет 59 видов, среди которых 6 – охраняются на международном, 9 – национальном и 44 – региональном уровнях; 14 – рекомендуются нами для региональной охраны в Полтавской и Черкасской областях. Из них 33 вида наводятся нами в созологическом списке региона впервые. Редкие виды обсуждаются в эколого-ценотическом, фитоценотическом и созологическом отношениях. Наводятся сведения о состоянии охраны лесной растительности в бассейне нижней Сулы и перспективных природно-заповедных объектах.
Ключевые слова: созофиты, лесная растительность, флоросозологическая характеристика, охрана, природозаповедание, бассейн нижней Сулы, Украина.

The florosozological characteristics of the forest vegetation of the lower Sula basin (left Dnieper tributary) were defined according to the results of reported data generalization, processing of herbarium collections and original research data. Rare fraction of the species composition of the forest vegetation in the investigated region that was composed of 59 species was identified, among them 6 species were protected at international scale, 9 at national and 44 at regional scale; 14 were recommended for regional protection in Poltava and Cherkasy regions. Among them 33 species were registered in the sozological list of the region for the first time. Rare species were discussed in the ecological-coenotic, phytocoenotic and sozological aspects. The information on the forest vegetation protection status in the basin of the lower Sula and promising natural conservation areas is presented in the article.
Keywords: sozophytes, forest vegetation, florosozological characteristics, protection, reservation measures, lower Sula basin, Ukraine.

Введение. Современный растительный покров бассейна нижней Сулы формируется под влиянием комплекса как природных, так и антропогенных факторов. Существенную роль в его формировании сыграли изменения и трансформация природных ландшафтов и комплексов, связанные с созданием в 60-х гг. XX столетия Кременчугского водохранилища на Днепре и обусловленные этим экологические процессы, в частности подтопление, колебания уровня воды на водохранилище и др. Активными в регионе являются также процессы синантропизации и адвентизации флоры, что связано с открытостью пойменных местностей, которые его репрезентируют на значительных площадях, для вселения адвентивных видов и хозяйственной деятельностью в целом.

В бассейне нижней Сулы сохранились пойменные природные и антропогенно-природные комплексы в долинах рек Сулы и ее притоков (водные, болотные, луговые, лесные), коренных берегов рек и балочных систем на водоразделах (степной, лугово-степной, луговой, опушечный, лесной), боровых терасс рек (хвойнолесной, внепойменных озер и болот, песчано-степной), на некоторых островах Кременчугского водохранилища. Лесная растительность в регионе исследований составляет менее 30 % его общей площади.

Важным показателем состояния сохранения лесных комплексов региона является наличие в составе флоры редких видов – созофитов – чутких индикаторов на качество окружающей среды, касательно и влияния природных экологических факторов, и антропогенных. Поэтому целью статьи является созологическая характеристика раритетной компоненты флоры лесной растительности бассейна нижней Сулы в отношении ее охраны.

Материалы и методы исследований. Исследование осуществлено в контексте созологической характеристики лесной растительности бассейна нижней Сулы, которая нами изучалась на протяжении 2014–2016 гг. общепринятыми в геоботанике и фитосозологии методами. Созологическому анализу подлежали литературные сведения, фонды Гербария Инсти-

тута ботаники НАН Украины (KW), кафедры ботаники Национального университета имени Тараса Шевченко, Национального ботанического сада имени Н.Н. Гришко, Полтавского (PW) и Черкасского краеведческих музеев, а также оригинальные материалы, полученные нами в ходе научных экспедиций. Ценотическая принадлежность видов указывается на подходах школы Ж. Браун-Бланке [1]. Названия видов наводятся согласно чеклисту С.Л. Мосякина и М.М. Федорончука [2].

Территория бассейна нижней Сулы находится в Приднепровской низменности в пределах Полтавской и меньшей мере Черкасской административных областей Украины. Она простирается от впадения р. Удай на северной окраине г. Лубны до устья р. Сула, которое сейчас затоплено водами Кременчугского водохранилища. Основными правобережными притоками этого отрезка Сулы являются Слепород и Оржица. Бассейн нижней Сулы находится в пределах Оболонско-Градижского физико-географического района [3].

Результаты исследований и их обсуждение. По результатах созологического анализа нами в растительном покрове лесных массивов бассейна нижней Сулы выявлено 59 редких видов растений, что составляет около 9 % от общего количества видов, которые встречаются в составе лесной растительности региона [4]. Все они включены в охранные списки разных рангов (6 – охраняются на международном, 9 – национальном и 44 – региональном уровнях), а еще 14 видов нами рекомендуются для региональной охраны. В их составе выделяется группа сильвантов (19), которые определяют специфику сообществ лесной растительности в составе их флористических ядер. Именно эти виды указываются нами в характеристиках лесов региона.

По ценотической принадлежности редкие виды флоры региона исследований распределились между разными типами лесов, сообщества которых репрезентируют леса (мезофильные кленово-липово-дубовые, грабово-дубовые, ксеромезофильные дубовые; сосновые на боровых террасах; пойменные ивовые, тополевые, ольховые, пушистоберезовые заболоченные), а также тополевые и ивовые колки посреди сельскохозяйственных угодий приемущественно в пойменной части долины Сулы.

Мезофильные кленово-липово-дубовые леса бассейна нижней Сулы являются зональными для лесостепной зоны Левобережной Украины и сохранились на водоразделах, склонах правых коренных берегов Сулы и ее основных притоков. Основной для кленово-липово-дубовых лесов является ассоциация Stellario holosteae-Aceretum platanoidis Bajrak 1996 em Onyshchenko et Sidenko 2002 – зональная, занимающая около 90 % от всей их площади в регионе. Ассоциация Melico-Quercetum Shevchyk et V. Solomakha 1996 em Goncharenko 2003 рапространена локально и занимает незначительные площади в пойме Сулы, поэтому эти сообщества требуют охраны. Сообщества представляют класс Querco-Fagetea Br.-Bl. et Vlieger in Vlieger 1937.

В созологическом отношении сообщества этих лесов являются местами сохранения видов, которые включены в Красную книгу Украины [5] (3 вида: *Epipactis helleborine* (L.) Crantz*, Listera ovata* (L.) R.Br.*, Neotia nidus-avis* (L.) Rich.) и в региональные списки [6], [7] (11 видів: *Cerasus avium* (L.) Moench*, Convallaria majalis* L.*, Corydalis cava* (L.) Schweigg. & Kőerte*, C. marschalliana* (Pall. et Willd.) Pers.*, Crataegus ucrainica* Pojark.*, Dentaria bulbifera* L.*, D. quinquefolia* M. Bieb.*, Lamium galeobdolon* (L.) L.*, Scilla bifolia* L.*, S. siberica* Haw.*, Vinca minor* L.). Таким образом, в сообществах кленово-липово-дубовых лесов региона исследований выявлено 14 созофитов. По насыщенности редкими видами растений кленово-липово-дубовые леса региона значительно уступают дубово-грабовым [8].

Дубово-грабовые леса в бассейне нижней Сулы, которые рассматриваются в союзе Carpinion betuli Issler 1931 em Mayer 1937 занимают меньшие площади, нежели кленово-липово-дубовые, что связано с нахождением сообществ вблизи юго-восточной границы ареала этих лесов. Наибольшие их массивы сохраняются в юго-восточной части региона вокруг г. Лубны, некоторые участки которых охраняются как ботанические памятники природы местного значения «Мгарская дача», «Морозовская дача», «Жовтневая дача» [9].

Основной для дубово-грабовых лесов бассейна нижней Сулы является ассоциация Asaro europaei-Carpinetum betuli Vorobyov et al. 2008, на которую приходится около 90 % от всей их площади. Ассоциации Carici michelii-Carpinetum betuli Vorobyov et al. 2008 и Tulipo biebersteinianae-Carpinetum betuli Vorobyov et al. 2008 занимают незначительные участки и

требуют охраны, поскольку являются биоцентрами редких видов растений – как занесенных в Красную книгу Украины (4 вида: *Allium ursinum* L., *Epipactis helleborine, Platanthera bifolia* (L.) Rich., *Tulipa quercetorum* Klokov. & Zoz), так и в региональные списки (15 видов: *Aeogonychon purpureo-caeruleum* (L.) Holub, *Campanula persicifolia* L., *Cerasus avium, Convallaria majalis, Corydalis cava, C. Intermedia* (L.) Merat, *C. marschalliana, Crataegus ucrainica, Dentaria bulbifera, D. quinquefolia, Lamium galeobdolon, Scilla bifolia, S. siberica, Vinca minor).*

Всего в грабово-дубовых лесах исследуемого региона отмечено 19 видов созофитов, что определяет наиболее высокий показатель флоросозологической уникальности в сравнении с другими типами лесов. Это прежде всего определяется наложением ареалов в бассейне нижней Сулы некоторых редких растений с центральноевропейским и восточноевропейским происхождением.

Распространение редких видов и сообществ обуславливает необходимость особенной охраны наиболее сохраненных участков таких лесов. Отметим, что леса союза Carpinion betuli в бассейне нижней Сулы имеют определяющее важное противоэрозионное значение и заслуживают особо бережного отношения в результате их хозяйственной эксплуатации, например, исключение сплошных рубок.

На территории региона нами выявлены и изучены ксеромезофильные дубравы союза Aceri tatarici-Quercion roboris Zoliomi et Jakucs ex Jakucs 1960, которые встречаются на правобережных склонах долины Сулы и ее главных притоков. Наиболее ценные их участки сохранились между Лубнами и с. Тишки. Видов растений, занесенных в Красную книгу Украины, в этих лесах нами не обнаружено, а из регионально редких в этих сообществах встречаются 8 видов (*Caragana frutex* (L.) K. Koch, *Cerasus fruticosa* (Pall.) Woronow., *Convallaria majalis, Corydalis cava, Lamium galeobdolon, Muscari neglectum* Guss.ex Ten., *Scilla bifolia, S. siberica*). В целом, леса союза бедные на созофиты. Как редкие сообщества экстремальных для лесов биотопов, они все же требуют охраны, учитывая процессы сциофитизации, которые сопровождаются обеднением их флоры за счет в первую очередь степных видов. С целью результативного сохранения и восстановления фиторазнообразия ассоциации необходимы активные мероприятия охраны, в том числе и восстановление контролируемого выпаса животных.

Сосновые леса в бассейне нижней Сулы представляют сообщества трех классов: Pulsatillo-Pinetea sylvestris Oberd. 1992 (природные лишайниковые, злаковые, зеленомошные сообщества (сосновые леса боровых терасс Лесостепи и северной части Степи, а также старые культуры, приближенные по флористическому составу и структуре к природным); Quercetea robori-petraeae Br.-Bl. et Tx.1943 (злаковые, ракитниковые и ландышевые субборы (в прошлом – дубово-сосновые леса, теперь преимущественно монокультуры *Pinus sylvestris* L.) на боровых террасах Лесостепи, с незначительным участием неморальных видов); Robinietea Jurko ex Hadac et Sofron 1980 (хвойные рудерализированные насаждения и сильно нарушенные нитрифицированные сосновые леса с доминированием нитрофильных видов в травянистом покрове, занимающие большую часть площадей, в прошлом занятых природными борами). В флоросозологическом отношении они значительно уступают тем, которые территориально находятся севернее, поскольку представляют собой разновозрастные насаждения *Pinus sylvestris* разной степени антропогенной трансформации.

Из регионально редких видов растений в них обнаружено 14 (*Cerasus fruticosa, Chimaphila umbellata* (L.) W.Barton, *Convallaria majalis, Equisetum hyemale* L., *Jurinea cyanoides* (L.) Rchb, *Linaria dulcis* Klokov, *Lycopodium clavatun* L., *Orthilia secunda* (L.) House, *Pyrola rotundifolia* L., *Secale sylvestre* Host, *Senecio borysthenicus* (DC) Andrz. ex Czern., *Tragopogon borysthenicus* Artemcz., *T. ucrainicus* Artemcz.). Отметим, что достаточно распространенные в сосновых насаждениях более северных районов Полтавщины и Черкащины *Pteridium aquilinum* (L.) Kuhn., *Pulsatilla patens* (L.) Mill., *P. pratensis* (L.) Mill., *Rubus saxatilis* L., *Calluna vulgaris* (L.) Hull., а также другие бореальные виды нами не обнаружены, как и редкие виды песчаной степи понтического происхождения, например, *Stipa borysthenica* Klokov ex Prokudin. Некоторые из этих видов, возможно, со временем будут обнаружены в борах региона, но не исключено, что они исчезли в результате сплошных вырубок и создания загущенных монокультур *Pinus sylvestris.*

Пойменные ольховники (*Alnus glutinosa* (L.) P. Gaertn.), ивовые (*Salix alba* L., изредка *S. fragilis* L.) и тополевые (*Populus nigra* L., *P. alba* L., *Populus* x *canescens* (Aiton) Smith) леса в бассейне нижней Сулы занимают значительные площади и характеризируются значительным уровнем ценотического разнообразия.

Ольховники представлены как мезогигрофильными вариантами, которые отнесены к союзу Alno-Ulmion Br.-Bl. et R.Tx. 1943 класса Querco-Fagetea Br.-Bl. et Vieger 1937, так и заболоченными, распространенными преимущественно в поймах малых рек, которые относятся к классу Alnetea glutinosae Br.-Bl. et R Tx. 1943 ex Westhoff et al. 1948.

Пойменные леса с доминированием видов семейства Salicaceae принадлежат к классу Populetea albae Br.-Bl.1962. Ивовые леса пойм Сулы и ее притоков, а также переувлажненных тальвегов балок и изредка колков принадлежат к классу Salicitea purpurea Morr.1958 союза Salicion albae Th. Muller et Gors 1958 и ассоциации Salicetum albae Issler 1926.

Тополевые леса низовий поймы Сулы, в том числе и на островах Сулинского залива, занимают меньшие площади по сравнению с ольховыми и ивовыми. Значительная их часть является искусственными насаждениями и принадлежат к союзу Calamagrostio epigei-Populion nigrae (Schevchyk et Solomakha 1996). Особенную значимость имеют сообщества колков низовий левого берега Сулы – Swida sanguinea-Populus x canescens. Только в одном локалитете обнаружено сообщество Carex hirta-Populus balsaminus.

Редких видов растений, занесенных в Красную книгу Украины в ольховых, ивовых и тополевых лесах бассейна нижней Сулы, нами не обнаружено. Из регионально редких видов в ольховых лесах встречается шесть видов (*Corydalis cava, Scilla bifolia, S. siberica, Lamium galeobdolon, Crysosplenium alternifolium* L.), в лесах из *Salix alba* – один вид (*Lactuca* quercina), в тополевых лесах – четыре вида (*Anchusa gmelini* Ledeb., *Convallaria majalis, Fragaria moschata* (Duschesne) Weston, *Pyrola rotundifolia*). Все они встречаются локально и небольшими локусами. В старом ивовом лесу на территории ботанического памятника природы «Мгарская дача» обнаружен очень редкий для Лесостепи вид *Urtica kioviensis,* созологический статус которого в регионе требует уточнения.

По насыщенности редкими видами ольховые, ивовые и тополевые леса бассейна нижней Сулы значительно уступают другим природным лесам. Несмотря на это, наименее трансформированы, наибольшие по площади старые ольховые, ивовые и тополевые леса каждой из ассоциаций требуют охраны, учитывая значительный уровень их нарушенности и адвентизации флоры. Высокое водоохранное значение большей части упомянутых лесов является безупречным аргументом для запрещения их сплошных рубок.

Нами изучены и описаны с региона исследований эвтрофные нитрифицированные варианты болотистых сообществ с доминированием *Betula pubescens* Ehrh, характеристике которых посвящена отдельная публикация авторов [10].

В бассейне нижней Сулы эти сообщества находятся на юго-восточной границе своего распространения. Хотя в растительном покрове Левобережной Лесостепи они занимают незначительные площади, которые были еще сокращены вырубанием и хозяйственной освоенностью пойм рек, все же исполняют важные экологические, водорегулирующие, стабилизирующие функции. В хорошо сохраненных пушистоберезовых сообществах (класс Molinio-Betuletea pubescens Pass. et Hofmann 1968) спорадически встречается лесная орхидея *Listera ovata* [11], занесенная в Красную книгу Украины, и регионально редкий бореальный вид *Potentilla palustris* (L) Scop.

Несмотря на низкий показатель флоросозологической уникальности, эвтрофные пушистоберезовые сообщества Лесостепи заслуживают охраны на государственном уровне.

Впервые для лесов бассейна нижней Сулы нами приводятся 33 вида редких растений, из которых пять занесено в Красную книгу Украины, 26 – в региональные списки Полтавской и Черкасской областей, два – в Приложения Бернской конвенции; 9 видов рекомендуются нами для региональной охраны вместе с *Ostericum palustre* (Besser) Besser и *Urtica kioviensis* Rogov.

Эталонные массивы лесной растительности в бассейне нижней Сулы охраняются на территориях ряда объектов природно-заповедного фонда (национального природного парка «Нижнесульский», заказников, заповедных урочищ, ботанических памятников природы) и

обеспечивают сохранение известных местонахождений редких видов растений. Поскольку наличие местонахождений созофитов является важным аргументом для охраны лесных массивов, нами по результатах созологических исследований предлагается создание двух природно-заповедных объектов (ботанического заказника в окрестностях села Александровка Лубенского района [9] и ботанического памятника природы в окрестностях города Лубны Полтавской области [1]), а также расширения национального природного парка «Нижнесульский» (Полтавская и Черкасская области) и гидрологического заказника «Белоусовский» в Драбовском районе Черкасской области [12].

Выводы. В целом лесные массивы бассейна нижней Сулы обеспечивают сохранение на индивидуальном и ценотическом уровне ряда редких видов растений межународных, национального и региональных созологических статусов. В современных условиях усиления антропогенного влияния на лесные комплексы весьма актуальными являются вопросы их охраны, прежде всего путем заповедания [13]. Поэтому создание новых природно-заповедных объектов в регионе исследований и расширение площадей существующих, обоснованных нами как важных центров типичного и редкого лесного фиторазнообразия, позволит сохранять экологически и созологически ценные биотопы, в том числе местонахождения созофитов, а также повысить показатель заповедности в регионе и усилить Сулинский экологический коридор региональных экосетей Полтавской и Черкасской областей новыми биоцентрами.

Литература

1. Соломаха, В.А. Синтаксономія рослинності України. Третє наближення / В.А. Соломаха. – К. : Фітосоціоцентр. – 296 с.

2. Mosyakin, S.L. Vascular plants of Ukraine: a nomenclatural checklist / S.L. Mosyakin, M.M. Fedoronchuk. – Kiev, 1999. – 345 p.

3. Физико-географическое районирование УССР / под ред. В.П. Попова, А.М. Маринича, А.И. Ланько. – Киев : Издательство КГУ, 1968. – 102 с.

4. Клестов, М.Л. Рослинний та тваринний світ пониззя річки Сули: монографія / М.Л. Клестов, Н.П. Гальченко, О.І. Прядко [та ін.]. – К. : Фітосоціоцентр, 2016. – 240 с.

5. Червона книга України. Рослинний світ / за ред. Я.П. Дідуха. – К. : Глобалконсалтинг, 2009. – 900 с.

6. Байрак, О.М. Атлас рідкісних і зникаючих рослин Полтавщини / О.М. Байрак, Н.О. Стецюк. – Полтава : Верстка, 2005. – 248 с.

7. Природно-заповідний фонд Черкаської області / Укл. Т.Ф. Коноваленко, О.С. Барило, І.М. Карастан. – Черкаси : Вертикаль, видавець ПП С.Г. Кандич, 2006. – 196 с.

8. Смаглюк, О.Ю. Флористична класифікація грабових лісів у басейні нижньої течії річки Сули / О.Ю. Смаглюк, В.А. Соломаха // Вісник Черкаського національного університету. Серія «Біологічні науки». – 2015. – № 19 (352). – С. 98–109.

9. Смоляр, Н.О. Природно-заповідний фонд Полтавщини : Реєстр-довідник / Н.О. Смоляр. – Полтава : ШвидкоДРУК, 2014. – 149 с.

10. Воробйов, Є.О. Синтаксономія евтрофних пухнастоберезових боліт у басейні нижньої Сули / Є.О. Воробйов, Н.О. Смоляр, О.Ю. Смаглюк, В.А. Соломаха // Вісник Черкаського університету. Серія «Біологічні науки». – 2016. – № 1. – С. 26–41.

11. Смоляр, Н.О. Знахідки орхідних на території нижньої Сули / Н.О. Смоляр, О.Ю. Смаглюк // Чорноморський ботанічний журнал. – 2016. – Т. 11, №4. – С. 535–543.

12. Смаглюк, О.Ю. Нове місцезнаходження *Epipactis helleborine* (L.) Crantz. в долині нижньої течії р. Сули / О.Ю. Смаглюк // Проблеми відтворення та біорізноманіття України : Материали всеукр. наук.-практ. конф., г. Полтава, 16 квітня 2015 р. – Полтава : Астрая, 2015. – С. 72–74.

13. Смоляр, Н.О. Нові місцезнаходження *Tulipa quercetorum* Klokov & Zoz (*Liliaceae*) в Середньому Придніпров'ї / Н.О. Смоляр, О.Ю. Смаглюк, В.А. Соломаха // Укр. бот. журн. – 2015. – 72(4). – С. 352–356.

Киевский национальный
университет им. Т. Шевченко

Поступила в редакцию 20.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

*УДК 630*160:630*81:582.475:630*187*

Элементный состав коры сосны (*Pinus sylvestris* L.) различных типов леса

О.М. Храмченкова, Р.И. Новиков

Представлены результаты определения Ca, K, Fe, Mg, Mn, Zn и Cu в коре обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.), произрастающей в свежих, влажных и мокрых лесах. Установлено долевое участие минеральных элементов в золе сосновой коры: Ca: 83,7–89,9 %; K: 4,2–5,0 %; Fe: 3,0–6,2 % ; Mg: 2,0–2,8 %; Mn: 1,0–2,4 %; Zn–до 0,3 %; Cu–до 0,05 %. Статистически значимые отличия концентраций элементов в коре сосны были установлены для K, Fe, Mg, Mn, Zn и Cu: их содержание достоверно выше для мшистых, орляковых и черничных типов леса, чем для кисличных, приручейно-травяных и долгомошных.
Ключевые слова: сосна, кора, зола, тип леса, концентрации элементов.

The values of Ca, K, Fe, Mg, Mn, Zn and Cu in bark of Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) are presented. Elements content in the ash pine bark was found to be: Ca: 83,7–89,9 %; K: 4,2–5,0 %; Fe: 3,0–6,2 %; Mg: 2,0–2,8 %; Mn: 1,0–2,4 %; Zn–0.3 %; Cu–0,05 %. Statistically significant differences were observed for K, Fe, Mg, Mn, Zn and Cu values. Their concentrations was higher in the in *Pleuroziosum, Pteridiosum* and *Myrtillosum* types of pine stands than in *Oxalidosum, Fontinale-herbosum* and *Polytrichosum* types.
Keywords: Scots pine, bark, ash, forest type, elements concentration.

Введение. Древесная кора представляет собой совокупность тканей, находящихся снаружи от камбия. Наружный слой коры (ритидом) состоит в основном из мертвых тканей, поэтому он физиологически не активен и служит для защиты внутренних тканей. У сосны обыкновенной объем коры по отношению к объему ствола в среднем составляет около 10–11 %. По мере роста дерева кора не выдерживает давления разрастающегося ствола и растрескивается, как правило, продольно. В результате на поверхности коры формируется определенный рисунок. Структура феллемы и глубина залегания повторных перидерм обусловливают толщину пластин коры. Толщина коры и структура ее слоев меняются с возрастом в зависимости от освещенности, влажности и трофности мест произрастания [1], [2].

Основными элементами, слагающими вещества наружного слоя коры сосны обыкновенной, являются углерод, кислород, водород, азот и фосфор, содержание которых составляет 98–99 % сухой массы. Среди зольных элементов встречаются Ca, Si, K, Na, Mg, Fe, реже и в меньшем количестве Cu, Mn, Al и др. Основными компонентами золы коры являются оксид кальция (30–33 %) и диоксид кремния (30–32 %). В золе находится также значительное количество оксида железа (11–12 %), алюминия (3–3,5 %), оксида магния (2,5–3 %) [3]–[7].

Элементный состав коры сосны является интегральным показателем условий роста деревьев и характеристикой местообитания эпифитных организмов – например, лишайников [8]–[10]. Для лесорастительных условий юго-востока Беларуси данных о содержании зольных веществ в коре сосны обыкновенной крайне мало, в силу чего оценка элементного состава коры сосны различных типов леса Гомельского региона представляется актуальной задачей.

Методы исследований. Пробные площади закладывали в сосновых лесах государственного лесохозяйственного учреждения «Гомельский лесхоз» в чистых и смешанных древостоях с участием сосны в породном составе не менее 85 %. Минимальный и максимальный диаметры выдела не отличались более, чем в 1,3 раза, площадь составляла не менее 1,5 га, полнота насаждений 0,6–0,9. Исследования охватывали гигрогенный ряд: свежие (сосняки мшистый и орляковый), влажные (сосняки черничный и кисличный) и сырые (сосняки приручейно-травяной и долгомошный) [11].

На каждой пробной площади выбирали 10 наиболее типичных деревьев, на высоте 1,3 м отбирали пробы верхнего слоя коры на глубину 0,5 см. Глубина отбора коры обеспечивает характеристику субстрата существования эпифитных лишайников, а также зоны влияния капельно-жидкой воды, прошедшей сквозь крону данного дерева и стекающей по стволу в виде раствора, содержащего дождевые выщелачивания из кроны и вышележащей коры данного дерева.

Пробы коры, высушивали до воздушно-сухого состояния, после чего брали навески для исследования. Навеску коры массой 1–3 г озоляли на протяжении 6 ч при температуре 550 °С. Полученную золу сосновой коры обрабатывали царской водкой при нагревании, упаривали до влажных солей, после чего методом атомно-абсорбционной спектрометрии определяли Ca, Mg, K, Fe, Cu, Mn и Zn. Полученные данные пересчитывали на 1 г золы и воздушно-сухой коры. Данные обрабатывали с использованием стандартного программного продукта Статистика 7.0.

Результаты исследований. Здесь и далее используются стандартные обозначения типов сосновых лесов: МШ – мшистый, ОР – орляковый, ЧЕР – черничный, КИС – кисличный, ПР-ТР – приручейно-травяной, ДМ – долгомошный.

Сосна обыкновенная является нетребовательной к условиям минерального питания породой, следствием чего является относительно невысокое содержание изучаемых элементов в ее коре (таблица 1).

Таблица 1 – Содержание элементов в коре сосны разных типов леса, мг/г

Элемент	Тип леса					
	МШ	ОР	ЧЕР	КИС	ПР-ТР	ДМ
Кальций	4,24 ± 0,14	4,37 ± 0,11	4,64 ± 0,19	4,22 ± 0,35	4,86 ± 0,47	4,67 ± 0,22
Калий	0,245± 0,008	0,256 ± 0,009	0,253 ± 0,007	0,211 ± 0,015	0,215 ± 0,017	0,208 ± 0,008
Железо	0,264 ± 0,012	0,341 ± 0,020	0,279 ± 0,011	0,126 ± 0,012	0,155 ± 0,017	0,175 ± 0,013
Магний	0,122 ± 0,004	0,147 ± 0,005	0,120 ± 0,004	0,092 ±0,005	0,101 ± 0,007	0,108 ± 0,005
Марганец	0,116 ± 0,007	0,115± 0,004	0,082 ± 0,006	0,061 ± 0,004	0,033 ± 0,003	0,052 ± 0,005
Цинк*	15,0 ± 0,52	16,6 ± 0,66	13,2 ± 0,47	9,4 ± 0,53	9,2 ± 0,56	11,3 ± 0,52
Медь*	2,5 ± 0,08	2,7 ± 0,01	2,6 ± 0,01	1,8 ± 0,01	1,7 ± 0,01	1,6 ± 0,01

* – в мкг/г коры

Известно также, что наибольшая плотность древесины хвойных достигается не в хороших, а в средних лесорастительных условиях. Элементный состав верхнего слоя сосновой коры представляет собой своеобразную «летопись» корневого питания и интенсивности физиологических процессов в стволе. Концентрации элементов в верхнем слое коры сосны, по нашим данным, образуют ряд убывания: Ca > K ≈ Fe > Mg > Mn > Zn > Cu.

По сумме концентраций Ca, Mg, K, Fe, Cu, Mn и Zn в коре сосны леса Гомельского Полесья образуют рад убывания: КИС > ПР-ТР > ДМ > ЧЕР > ОР ≈ МШ. Эдафический ареал сосны обыкновенной очень широк, однако колебания содержания зольных элементов и азота обычно согласуются с колебаниями водоснабжения,

При пересчете полученных данных на 1 г золы сосновой коры установлено, что до 83,7–89,9 % массы золы составляет кальций; 4,2–5,0 % – калий; 3,0–6,2 % – железо; 2,0–2,8 % – магний; 1,0–2,4 % – марганец: до 0,3 % – цинк; до 0,05 % – медь (рисунок 1).

Долевое участие кальция увеличивается на 6 % в ряду от мшистых до долгомошных сосняков, тогда как доля железа, магния и марганца возрастает в 2-4 раза в ряду от мокрых лесов до свежих. По-видимому, влажность условий произрастания сосны обыкновенной опосредованно влияет на элементный состав ее коры, воздействуя на корневое поглощение элементов и их перераспределение в стволе на протяжении онтогенеза [12].

Результаты статистического анализа полученных данных приведены на рисунке 1.

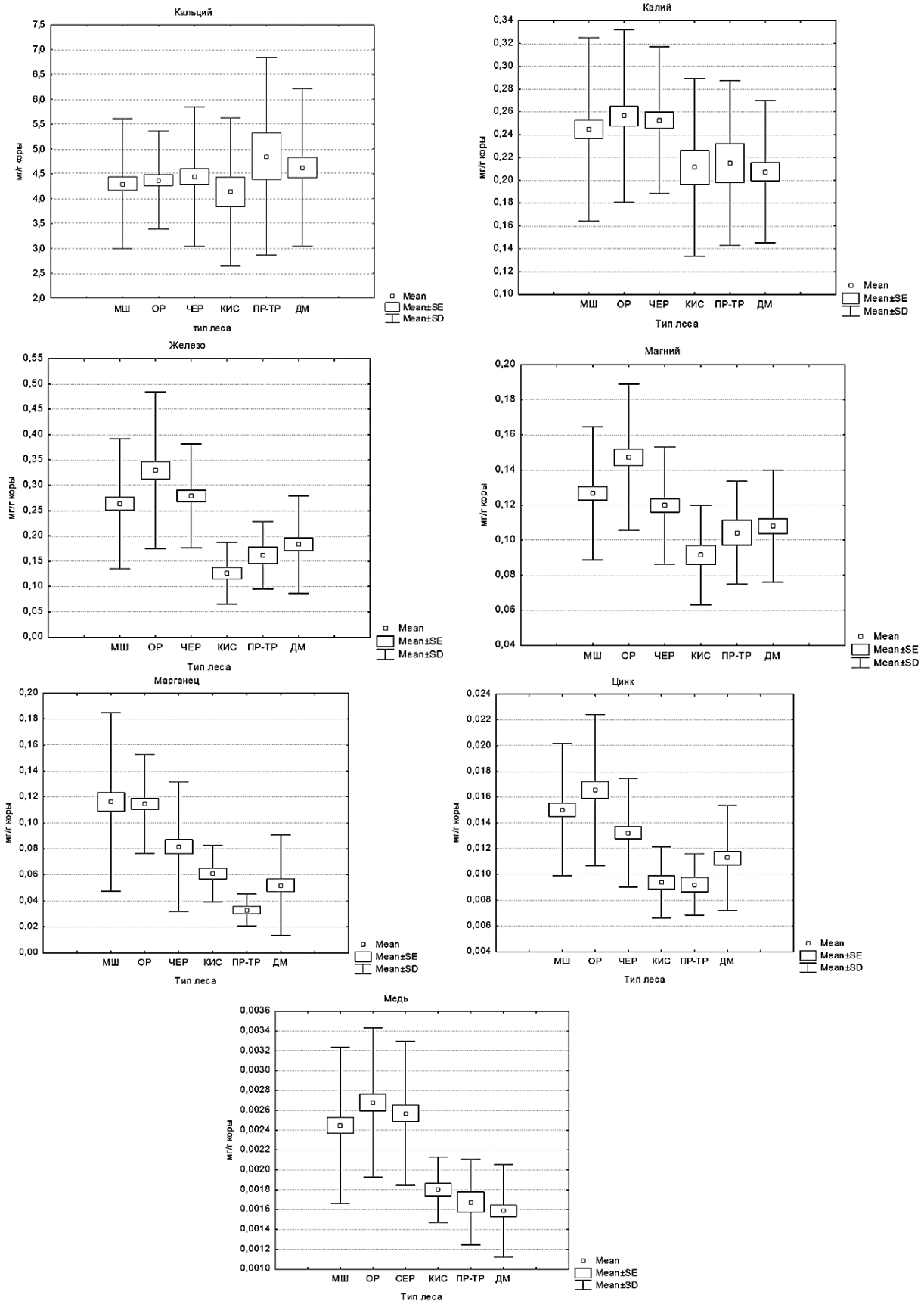


Рисунок 1 – Содержание Ca, K, Fe, Mg, Mn, Zn и Cu в коре сосны различных типов леса

Статистически значимые отличия концентраций элементов были отмечены для калия железа и магния – в коре сосны из кисличных, приручейно-травяных и долгомошных типов леса этот показатель был достоверно ниже, чем для мшистых, орляковых и черничных лесов.

Для концентраций кальция достоверных отличий не обнаружено. Содержание Mn, Zn и Cu в коре сосны достоверно выше для мшистых, орляковых и черничных типов леса, чем для кисличных, приручейно-травяных и долгомошных.

Заключение. Установлено долевое участие минеральных элементов в золе сосновой коры: Ca: 83,7–89,9 %; K: 4,2–5,0 %; Fe: 3,0–6,2 % ; Mg: 2,0–2,8 %; Mn: 1,0–2,4 %; Zn – до 0,3 %; Cu – до 0,05 %. По сумме концентраций Ca, K, Fe, Mg, Mn, Zn и Cu в коре сосны леса Гомельского Полесья образуют рад убывания: кисличные > приручейно-травяные > долгомошные > черничные > орляковые ≈ мшистые. Статистически значимые отличия для значений концентраций элементов в коре сосны были установлены для K, Fe, Mg, Mn, Zn и Cu: их содержание достоверно выше для мшистых, орляковых и черничных типов леса, чем для кисличных, приручейно-травяных и долгомошных.

Литература

1. Браунинг, Б.Л. Химия древесины / Б.Л. Браунинг. – М. : Лесная промышленность, 1967 – 415 с.

2. Житков, А.В. Утилизация древесной коры / А.В. Житков. – М. : Лесная промышленость, – 1985. – 136 с.

3. Уголев, Б.Н. Древесиноведение и лесное товароведение / Б.Н. Уголев. – М. : Академия, 2011. – 272 с.

4. Будкевич, Е.В. Древесина сосновых / Е.В. Будкевич. – М. : АН СССР, 1961 – 152 с.

5. Чавчавадзе, Е.С. Древесина сосновых / Е.С. Чавчавадзе. – Л. : Наука, 1979 – 101 с.

6. Экстрактивные вещества коры *Picea ajanensis* / Г.Ф. Черненко [и др.] // Химия природных соединений. – 1990. – № 5. – С. 645–649.

7. Корбукова, И.В. Особенности химического состава корки и луба *Pinus sylvestris* L.: дис. ... канд. хим. наук : 05.21.03 / И.В. Корбукова. – СПб, 1996. – 160 с

8. Gausla, Y. Fine-scale distribution of the epiphytic lichen *Usnea longissima* on two even-aged neighbouring *Picea abies* trees / Y. Gausla, M. Ohlson, J. Rostad // J. Veget. Sci. – 1998. – Vol. 9, № 1. – P. 95–102.

9. Pyatt, F.B. Lichen ecology of metal spoil tips: effects of metal ions on ascospore viability / F.B. Pyatt // The Bryologist. – 1976. – Vol. 79, № 2. – P. 172–179.

10. Türk, R. Wenn Bäume Bärte tragen / R. Türk // Natur und Land. – 1999. – Bd. 85, № 4–5. – S. 20–23.

11. Погребняк, П.С. Общее лесоводство / П.С. Погребняк. – М. : Колос, 1968. – 440 с.

12. Тихонов, А.С. Лесоведение / А.С. Тихонов. – Калуга : ГП «Облиздат», 2011. – 332 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.06.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

*УДК 630*160:630*81:582.475:630*815*

Элементный состав коры сосны (*Pinus sylvestris* L.) различных групп возрастов

О.М. Храмченкова, А.М. Савченко

Представлены результаты определения Ca, K, Fe, Mg, Mn, Zn и Cu в коре обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.) молодых, средневозрастных, приспевающих и спелых лесов юго-востока Беларуси. Установлено долевое участие минеральных элементов в золе сосновой коры: Ca: 81,8–87,9 %; K: 4,3–5,4 %; Fe: 4,3–6,0 %; Mg: 2,1–3,6 %; Mn: 1,1–2,8 %; Zn – до 0,4 %; Cu – до 0,06 %. Установлено, что с возрастом содержание кальция в коре сосны повышается; магния, марганца, железа и цинка – снижаются. Концентрация калия и меди обнаруживает тенденцию роста в средневозрастных лесах по сравнению с молодняками, приспевающими и спелыми лесами.
Ключевые слова: сосна, кора, зола, возраст леса, концентрации элементов.

The values of Ca, K, Fe, Mg, Mn, Zn and Cu in bark of Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) of different age groups are presented. Elements content in the ash pine bark was found to be: Ca: 81,8–87,9 %; K: 4,3–5,4 %; Fe: 4,3–6,0 %; Mg: 2,1–3,6 %; Mn: 1,1–2,8 %; Zn–0,4 %; Cu–0,06 %. It was found that with age, the calcium content of pine bark increased; magnesium, manganese, zinc and iron – reduced. The concentration of potassium and copper has a tendency of growth in the middle-aged forests in comparison with young, premature and mature forest.
Keywords: pine, bark, ash, forest age, elements concentration.

Введение. Корой у деревьев принято называть наружный мертвый слой тканей, появляющийся обычно на старых стволах и на старых сучьях. Кора защищает ствол дерева от солнечных ожогов, повреждений морозом, обгладывания животными и пр. С первых лет жизни ствол дерева покрывается наружным пробковым слоем, образуемым пробковым камбием. Через несколько десятков лет пробковый камбий замирает, и в живой коре возникает новый пробковый камбий и из него – новый, внутренний пробковый слой. Через несколько лет замирает и второй пробковый камбий. В глубине коры появляется третий пробковый камбий и пробковый слой и т. д. – по мере роста дерева толщина его коры увеличивается [1]–[4].

У сосны второй и последующие пробковые слои формируются в виде дужек, концы которых соединяются с наружным слоем пробки, а вогнутая часть захватывает отдельные дугообразные участки живой коры. Структура феллемы и глубина залегания повторных перидерм обусловливают толщину пластин коры. Образование новых глубинных коровых пробковых слоев связано с растрескиванием наружного слоя из-за роста дерева в толщину. По мнению других авторов, пробковый камбий формируется уже в мае в основании годичного прироста, т. е. через 10–15 дней после начала вегетационного периода для защиты побега от факторов внешней среды и, в первую очередь, от испарения. Наружные участки коры, изолированные пробковым слоем, лишаются влаги и питательных веществ, отмирают, высыхают, растрескиваются, в результате на поверхности коры формируется определенный рисунок. Этим объясняется трещинноватая фактура поверхности сосновой коры [1], [2].

Толщина коры у сосны в оптимальных условиях обитания в 1,5–2 раза больше, чем у болотной сосны, что объясняется более интенсивным образованием флоэмы и корки. Такая же закономерность наблюдается при иссушении почвы. На толщину коры сосны влияет световое довольствие насаждений – под пологом леса кора в 2–3 раза тоньше, чем при полном освещении [3], [4].

Классом возраста лесных насаждений является период времени, в течение которого древостой считается хозяйственно однородным. Продолжительность класса возраста для хвойных древостоев составляет 20 лет. Древостои I–II классов возраста называют молодыми или молодняками (II класс возраста еще называют жердняками), III–IV классов – средневозрастными, V–приспевающими, VI–VII – спелыми, VIII класса возраста и старше – перестой-

ными. Сосновые древостои I и II классов возраста (0–40 лет) называют молодняками (II класс возраста (21–40 лет) еще называют жердняками);, III–IV классов (41–80 лет) – средневозрастными; V (81–100 лет) – приспевающими; VI–VII (101–140 лет) – спелыми; VIII класса возраста и старше – перестойными [5], [6].

Элементный состав коры сосны является интегральным показателем условий роста деревьев и характеристикой местообитания эпифитных организмов – например, лишайников [7]–[9]. Для лесорастительных условий юго-востока Беларуси данных о содержании зольных веществ в коре сосны обыкновенной крайне мало, в силу чего оценка элементного состава коры сосны различных групп возрастов лесов Гомельского региона представляется актуальной задачей.

Методы исследований. Пробные площади закладывали в сосновых лесах государственного лесохозяйственного учреждения «Гомельский лесхоз» в чистых и смешанных древостоях с участием сосны в породном составе не менее 85 %. Минимальный и максимальный диаметры выдела не отличались более, чем в 1,3 раза, площадь составляла не менее 1,5 га, полнота насаждений 0,6–0,9. Исследования охватывали возрастной ряд: молодняки (21–40[1] лет); средневозрастные (41–80 лет); приспевающие (81–100 лет); спелые (101–140 лет) [5]–[6].

На каждой пробной площади выбирали 10 наиболее типичных деревьев, на высоте 1,3 м отбирали пробы верхнего слоя коры на глубину 0,5 см. Глубина отбора коры обеспечивает характеристику субстрата существования эпифитных лишайников, а также зоны влияния капельно-жидкой воды, прошедшей сквозь крону данного дерева и стекающей по стволу в виде раствора, содержащего дождевые выщелачивания из кроны и вышележащей коры данного дерева.

Пробы коры высушивали до воздушно-сухого состояния, после чего брали навески для исследования. Навеску коры массой 1–3 г озоляли на протяжении 6 ч при температуре 550 ^{o}C. Полученную золу сосновой коры обрабатывали царской водкой при нагревании, упаривали до влажных солей, после чего методом атомно-абсорбционной спектрометрии определяли Ca, Mg, K, Fe, Cu, Mn и Zn. Полученные данные пересчитывали на 1 г золы и воздушно-сухой коры. Данные обрабатывали с использованием стандартного программного продукта Статистика 7.0.

Результаты исследований. В таблице приведены результаты определения концентрации изучаемых элементов в коре сосны различных групп возрастов.

Таблица 1 – Содержание элементов в коре сосны различных групп возрастов, мг/г

Элемент	Группы возрастов			
	молодняки	средневозрастные	приспевающие	спелые
Кальций	3,58 ± 0,174	4,55 ± 0,095	4,21 ± 0,167	5,04 ± 0,235
Железо	0,262 ± 0,0232	0,279 ± 0,0121	0,235 ± 0,0117	0,209 ± 0,0146
Калий	0,225 ± 0,0092	0,257 ± 0,0563	0,225 ± 0,0752	0,219 ± 0,0099
Магний	0,148 ± 0,0073	0,134 ± 0,0292	0,092 ±0,0034	0,106 ± 0,0043
Марганец	0,114 ± 0,0115	0,107 ± 0,0441	0,064 ± 0,0040	0,061 ± 0,0047
Цинк*	15,9 ± 0,81	14,8 ± 0,38	11,9 ± 0,51	11,3 ± 0,61
Медь*	2,4 ± 0,09	2,5 ± 0,07	2,1 ± 0,07	1,9 ± 0,06

* – в мкг/г коры

Из представленных данных видно, что с возрастом в коре сосны содержание кальция возрастает, железа, магния, марганца и цинка – снижаются. Концентрация калия обнаруживает тенденцию роста в средневозрастных лесах по сравнению с молодняками, приспевающими и спелыми лесами (рисунок 1).

[1] Для характеристики молодняков мы проводили исследования в жердняках, так как в них уже произошло смыкание древостоя, установился лесной микроклимат, сформировалась лесная подстилка [5], [6].

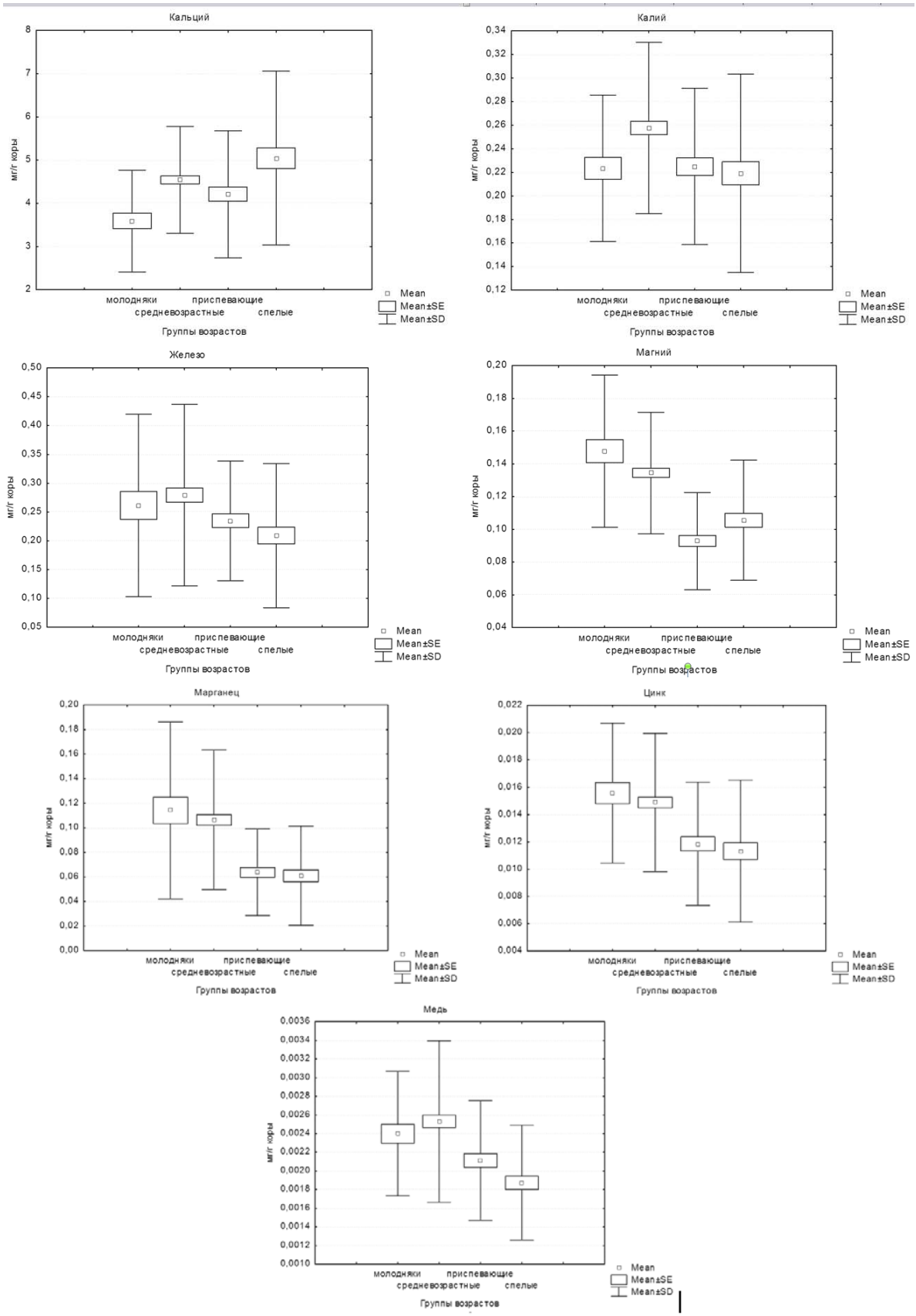


Рисунок 1 – Содержание Ca, K, Fe, Mg, Mn, Zn и Cu в коре сосны различных групп возрастов

Возможно, несколько повышенная концентрация калия в коре средневозрастных сосен является отражением многообразия регуляторных функций и многократной реутилизации этого элемента на протяжении 40-летнего периода роста дерева, когда сосна переходит к плодоношению, происходит естественное изреживание древостоев, в результате чего изме-

няются такие показатели существования древостоя, как световое довольствие, влажность, интенсивность минерального питания и др. [5], [6]. Аналогичная тенденция отмечена для концентрации меди. При этом содержание марганца и цинка в коре неуклонно снижается в ряду от молодняков к спелым лесам.

При пересчете полученных данных на 1 г золы сосновой коры установлено, что 81,8–87,9 % массы золы составляет кальций; 4,3–5,4 % – калий; 4,3–6,0 % – железо; 2,1–3,6 % – магний; 1,1–2,8 % – марганец: до 0,4 % – цинк; до 0,06 % – медь.

Долевое участие кальция в золе сосновой коры увеличивается на 6 % от молодняков до спелых лесов; вклад остальных элементов – снижается. Снижение долевого участия в золе коры отмечено как для хорошо реутилизируемых элементов (K, Mg), так слабо реутилизируемых Fe, Mn, Zn, Cu.

Химический состав древесной коры является отражением многообразия физиологических процессов в зонах роста дерева. Известно, что наибольшая доля кальция, содержащегося в растениях, связывается в клеточных оболочках. Эти связи очень прочны, редко разрываются, и кальций практически не извлекается. Весь калий и до 70 % всего магния свободно перемещаются по растению с ксилемным и флоэмным потоками, многократно совершая «круговорот» за один вегетационный период, выполняя регуляторно-активаторные функции. Железо, медь, цинк и в значительной степени марганец являются компонентами конкретных ферментных систем, из которых они не могут быть извлечены для флоэмного транспорта без потери жизнедеятельности тканей. По-видимому, флоэмное происхождение древесной коры, учитывая многообразие процессов, протекающих в названной ткани, обусловливает элементный состав наружных покровов древесных растений.

Литература

1. Адамович, Э.И. О причинах образования корки на стволах деревьев / Э.И. Адамович // Ботанический журнал. – 1961. – Т. 46, № 9. – С. 1271–1275.

2. Еремин, В.М. Анатомия коры видов *Pinus* (*Pinaceae*) Советского Союза / В.М. Еремин // Ботанический журнал. – 1978. – Т. 63, № 5. – С. 649–663.

3. Еремин, В.М. Влияние избыточного увлажнения на анатомическую структуру коры сосны обыкновенной / В.М. Еремин // ИВУЗ: Лесной журнал. – 1975. – № 2. – С. 7–11.

4. Еремин, В.М. Особенности анатомического строения коры некоторых сосновых в связи с условиями произрастания / В.М. Еремин // ИВУЗ: Лесной журнал. – 1982. – № 3. – С. 14–18.

5. Погребняк, П.С. Общее лесоводство / П.С. Погребняк. – М. : Колос, 1968. – 440 с.

6. Тихонов, А.С. Лесоведение / А.С. Тихонов. – Калуга : ГП «Облиздат», 2011. – 332 с.

7. Gausla, Y. Fine-scale distribution of the epiphytic lichen *Usnea longissima* on two even-aged neighbouring *Picea abies* trees / Y. Gausla, M. Ohlson, J. Rostad // J. Veget. Sci. – 1998. – Vol. 9, № 1. – P. 95–102.

8. Pyatt, F.B. Lichen ecology of metal spoil tips: effects of metal ions on ascospore viability / F.B. Pyatt // The Bryologist. – 1976. – Vol. 79, № 2. – P. 172–179.

9. Türk, R. Wenn Bäume Bärte tragen / R. Türk // Natur und Land. – 1999. – Bd. 85, № 4–5. – S. 20–23.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.06.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 616-008.8

Тенденции в изучении свойств и функций синовиальной жидкости сустава

Е.А. Цветкова, Ж.В. Кадолич, Т.В. Арастович

Представлен краткий обзор свойств и функций СЖ, результаты ее термоактивационного анализа, а также влияние электромагнитного поля на смазочную способность СЖ, не имеющей иммунной патологии. Эти сведения дополняют представления о биологической жидкости и могут служить базой для диагностики и лечения суставных заболеваний.
Ключевые слова: синовиальная жидкость, сустав, термоэлектрет, сыворотка крови, гиалуроновая кислота.

The short review the properties and functions of the synovial fluid, the results of its thermoelectret analysis, and the influence of an electromagnetic field on its grease properties of the synovial fluid without the immune pathology are presented. These data complement the idea of a biological fluid and may serve as a basis for the diagnosis and treatment of joint diseases.
Keywords: synovial fluid, joint, thermoelectret, blood serum, gialuronic acid.

Сустав – естественный узел трения, обеспечивающий двигательную активность человека в течение всей его жизни. Здоровые суставы, загерметизированные в соединительнотканной капсуле, демонстрируют рекордно низкое трение и компенсацию износа подвижно контактирующих слоев гиалинового (стекловидного) хряща. Процессы, сопровождающие трение хрящей в суставах, являются предметом исследования биотрибологии. Именно в биотрибологии обнаружены: эффект аномально низкого трения хрящей, разделенных слоем синовиальной жидкости (СЖ), находящимся в жидкокристаллическом состоянии [1]; квазиэлектретное состояние смазочного слоя СЖ [2], [3]; влияние биофизического поля организма на смазку в суставах [4] и др.

Состояние синовиальной среды суставов в значительной мере определяет характер течения и исход таких заболеваний суставов, как артриты и артрозы различной этиологии, коллагенозы и многие другие. Правильная оценка биологических возможностей синовиальной среды с учетом специфики сустава как узла трения важна для принятия решений при терапевтическом лечении и восстановительной хирургии суставов [4]. Исследование СЖ имеет большую диагностическую ценность, т. к. позволяет дифференцировать дистрофические и воспалительные заболевания суставов, выделять в ряде случаев их нозологические формы и следить за динамикой процесса.

Известно [4], [5], что в состав СЖ входят три основных компонента: транссудат крови, состоящий из воды, электролитов и протеинов; продукты секреции синовиальных клеток покровного слоя оболочки сустава – гиалуронат и протеолитические ферменты; продукты изнашивания, смены клеток и основного вещества синовиальной оболочки (СО) – в основном протеогликаны и гликопротеиды, постоянно поступающие в полость оболочки в процессе нормальной жизнедеятельности суставов. СЖ в силу своего происхождения из плазмы крови имеет сходный с ней состав, но наряду с водой, липидами, протеином, мочевиной и другими биологическими жидкостями содержит, во-первых, гиалуроновую кислоту (ГУК), обеспечивающую ее псевдоупругие свойства, и, во-вторых, смесь эфиров холестерина, обладающих свойствами термотропных жидкокристаллических соединений (ЖК) [1].

Основными функциями СЖ являются: метаболическая, локомоторная, трофическая и барьерная [1], [4]–[6]. СЖ, во-первых, осуществляет смазку подвижного сопряжения хрящей, а ее смазочный слой демпфирует ударные нагрузки на сустав. Во-вторых, она выполняет функцию транспортной среды, участвуя в интенсивных процессах массообмена между содержимым сустава и сосудистыми руслами организма. В-третьих, синовия совершает трофическую функцию, обеспечивая клеточное питание и регулируя жизнедеятельность всех тканей сустава, прежде всего, хрящей. В-четвертых, ферменты, клетки и иммунокомпетентные агенты СЖ защищают синовиальную среду от чужеродных клеток и токсинов, проникающих в сустав.

Структурные изменения СЖ на любом из этих уровней, происходящие при нарушении обмена веществ в организме, приводят к недостаточному выполнению синовией этих функций и к заболеваниям суставов.

Эти функции реализуются под контролем естественного ЭМП организма.

Так как основу синовии составляет диализат крови, фильтрующийся через стенки кровеносных капилляров, которые расположены в СО − слое клеток, выстилающем изнутри суставную полость, фильтрация происходит под избыточным давлением, которое создается в кровеносном русле вследствие работы сердца и мышечных сокращений. Можно представить, что ЭМП сустава активно участвует в фильтрации, во-первых, как фактор, влияющий на гидростатическое давление в тканевой жидкости СО, во-вторых, регулируя осмотическое давление плазмы крови в капилляре и жидкости в клетках СО [7]. В третьих, ЭМП клеток СО, направленное по оси капилляра, может создавать дополнительное гидростатическое давление в капилляре, как это показано на схеме рисунка 1.

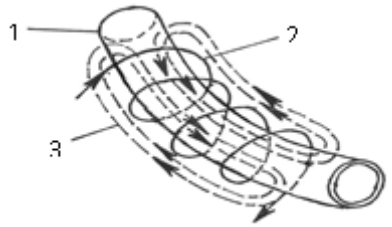


Рисунок 1 − Схема регулирования гидростатического давления в кровеносном капилляре:
1 − капилляр, 2 − направление кольцевых токов в ткани СО, 3 − силовые линии ЭМП, создаваемого СО

При поражении суставов изменяются физические свойства, биохимический и клеточный состав СЖ. При ее анализе определяют цвет, прозрачность, вязкость, содержание белка, клеток и их морфологию, наличие микрофлоры (бактериоскопически и посевом), кристаллы солей и т.п. Основные показатели свойств и состава СЖ представлены в таблице 1 [3], [8], а изменения СЖ при суставных заболеваниях – в таблице 2.

Характерной особенностью СЖ является наличие муцина, придающего ей вязкость. Главный компонент муцина – ГУК (рисунок 2). При посттравматическом воспалительном процессе концентрация ГУК в СЖ понижена [2], особенно в первые дни после травмы или операции на суставе. По мере снижения остроты воспалительного процесса и уменьшения синовита концентрация ГУК в СЖ повышается, однако даже при выписке больных из стационара при клинически удовлетворительных показателях она не достигает нормальных величин. Снижение концентрации ГУК в СЖ объясняют разбавлением ее экссудатом, а в последующем – угнетением биосинтетической активности клеток, вырабатывающих ГУК.

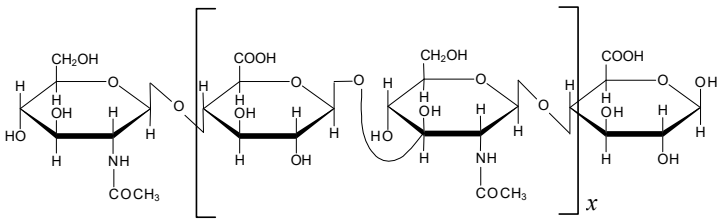


Рисунок 2 – Формула гиалуроновой кислоты

При заболеваниях суставов реологические параметры СЖ изменяются: она становится менее вязкой за счет деполимеризации ГУК, более ньютоновской, ее эластические и тиксотропные характеристики значительно снижаются. СЖ с нарушенными реологическими свойствами не способна удовлетворительно выполнять функции смазочной среды, амортизатора ударных нагрузок и протектора хряща в суставах [9].

Таблица 1 – Состав и свойства синовиальной жидкости

Показатели свойств и состава	Значения показателей
Внешний вид	Светло-желтая, прозрачная жидкость
Количество СЖ, $см^3$	1,0–2,0
Вязкость, Па·с	0,57
Коэффициент трения	0,002–0,01
Осмотическое давление, мм водн.ст.	120–140
pH	7,4–8,2
Общий белок, г/л	4,5–31,5
В том числе, % от общего количества	
альбумины, %	63
глобулины, %	37
из них: α_1, %	7
α_2, %	7
β, %	9
γ, %	14
Липиды, г/л	0,9–11,3
Глюкоза, г/л	0,66
Мочевина, г/л	0,2–0,4
Мочевая кислота, г/л	0,015
Гиалуроновая кислота, г/л	2,45–3,79
Тест муцинового сгустка	Положительный
Ферменты	До 30 наименований
Клеточность, в п.зр.	13–180
Моноциты, %	1,8–3,2
Лимфоциты, %	37,4–42,6
Плазмоциты, %	8,9–12,5
Синовиальные клетки, %	34,2–37,8

Таблица 2 – Изменения синовиальной жидкости при суставных заболеваниях

Нозологическая форма	Цвет	Прозрачность	Вязкость	Муциновый сгусток	Число лейкоцитов, 10^9 л	Нейтрофилы, %	Клетки
Норма	Соломенно-желтый	Прозрачная	Высокая	Плотный	0,2	10–15	-
Травматический остеоартроз	Желтый кровянистый	Прозрачная	Высокая	Плотный	1–2	10–15	-
Вторичный синовит	Янтарный	Мутная	Низкая	Рыхлый	1	25–50	-
Ревматоидный артрит	Желтый или зеленый	Мутная	Низкая	Рыхлый	5–25	75	Рагоцит
Ревматизм	Желтый	Мутная	Низкая	Плотный	1–10	50	-
Болезнь Бехтерева	Желтый	Мутная	Низкая	Плотный	1–5	50	Рагоцит
Псориатический артрит	Желтый или зеленый	Мутная	Низкая	Плотный	1–20	80	-
Системная красная волчанка	Желтый	Мутная	Высокая	Плотный	1–10	50	ЛЕ – кл.
Подагрический артрит	Желтый	Мутная	Низкая	Рыхлый	10–25	65	-
Хондрокальциноз	Желтый	Мутная	Низкая	Плотный	1–5	25–30	-
Септический артрит	Кровянистый.	Мутная	Низкая	Рыхлый	80	75–90	-

В нормально функционирующем суставе хрящевые поверхности практически не соприкасаются друг с другом, а процессы трения совершаются в пределах смазочной прослойки СЖ [1], [4], [5]. СЖ обеспечивает уменьшение коэффициента трения в суставе примерно в 20 раз, по сравнению с трением без смазки. Величина нагрузки на суставные поверхности

зависит от вида деятельности человека и ее интенсивности. Например, силы действующие на коленный сустав, при массе тела 90 кг достигают при ходьбе 7000 Н, при беге – 20000 Н. При запредельных нагрузках и заболеваниях суставов смазочная пленка СЖ не выдерживает локальных нагрузок и разрывается. В искусственном суставе несущая способность пленки СЖ, смачивающей поверхности металлических деталей эндопротеза утрачивается уже при нагрузках 100 Н.

В здоровом тазобедренном суставе толщина пленки составляет в среднем 1,5–2 мкм, в артрозном – уменьшается до 0,5–1,0 мкм, а в металлополимерном тотальном эндопротезе тазобедренного сустава (ТЭТС) – до 0,2–0,5 мкм. В ТЭТС с парой трения керамика-керамика и металл-металл расчетное значение h, определенное методом конечных элементов, еще меньше.

При замещении пораженного сустава эндопротезом практически одномоментно ликвидируется весь паталогический очаг, но в биофизическом поле организма образуется так называемая «немая зона» [10], [11]. Наличие большого искусственного образования – эндопротеза – не может остаться «незамеченным» для организма, поскольку его появление обусловливает нарушение не только целостности сустава, но и биологически целесообразного действия естественных электрических полей. Очевидно, что СЖ, нормально функционирующая в биофизическом поле здорового сустава, должна иметь особые электрофизические свойства. Методом термостимулированной деполяризации исследовали пробы СЖ. Установлено, что при нагревании электрически нейтральной синовии регистрируется спектр термостимулированных токов (ТСТ) (рисунок 3). Полученный спектр интерпретирован в работе [3] следующим образом. Пик положительных токов при 28–31°С на спектрах ТСТ натуральной СЖ (кривая 1), по-видимому, соответствует тепловому разрушению дипольной упорядоченной структуры мезофазы ЖК компонентов СЖ. В этом же диапазоне температур происходит разрушение гидратных оболочек биополимеров, что также вносит свой вклад в электретный эффект [12].

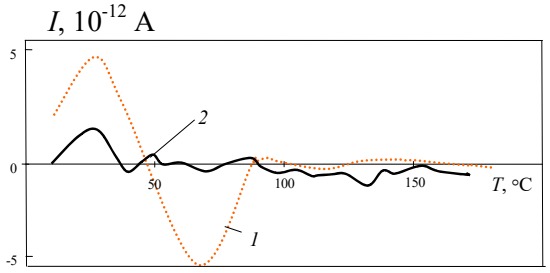


Рисунок 3 – Спектры ТСТ СЖ: *1* – исходной; *2* – после трения в паре СВМПЭ – сплав CoCrMo в течение 2 ч (P = 2 МПа, v = 0.1 м/с)

Пик отрицательных токов при 65°С сравним по интенсивности с низкотемпературным пиком и иллюстрирует процессы, обусловленные, вероятно, разрывом координационных связей в сложной пространственной структуре белково-полисахаридного комплекса СЖ. Трение обусловливает деструкцию тех и других структур, о чем свидетельствует уменьшение обоих пиков ТСТ при анализе пробы СЖ, взятой из зоны трения модели искусственного сустава после 2 ч работы (рисунок 3, кривая 2). Видно, что в наибольшей степени разрушены высокомолекулярные соединения, в то время как специфическая послойная структура ЖК компонентов синовии в определенной мере сохранилась, хотя и претерпела, вероятнее всего, трибохимические трансформации. Эти заключения базируются на результатах исследования фазовых переходов СЖ [1]. На их основе составлена схема температурных переходов в СЖ [2], [3] которая согласуется со спектрами ТСТ (рисунок 4).

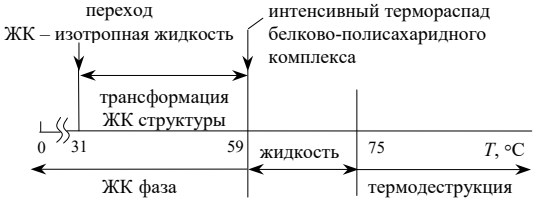


Рисунок 4 – Схема температурных переходов в СЖ

В работах [13]–[16] показано, что термоэлектретный заряд, сформированный на полимерных деталях, длительно сохраняется при трении (рисунок 5). Экспериментально установлено, что спектры ТСТ короно- и термоэлектретов на основе СВМПЭ принципиально совпадают, отличаясь лишь величиной пиков и их стабильностью. Пики на спектрах ТСТ полимерных образцов соответствуют релаксационным переходам в СВМПЭ.

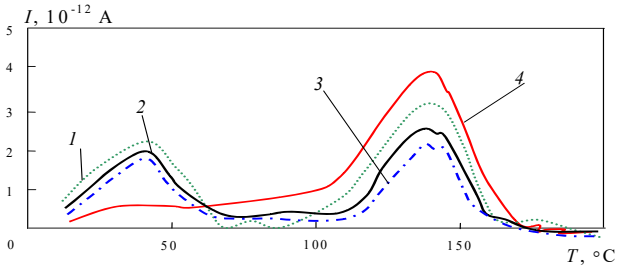


Рисунок 5 – Спектры ТСТ термоэлектретов на основе СВМПЭ, подвергнутых трению (P = 2 МПа, v = 0.1 м/с): *1* – исходный; *2*, *3* – после трения без смазки в течение 0,5 и 1,5 ч соответственно; *4* – после трения в СЖ в течение 2 ч

Для объяснения полученных результатов в работах [17], [22] предложена следующая гипотеза. По-видимому, структура холестерических ЖК и координационных белково-полисахаридных комплексных соединений, входящих в состав СЖ, изменяется при трении. Спонтанная упорядоченность ЖК нарушается под действием сдвиговых напряжений и теплоты трения, приводя к появлению не связанных в слои полярных молекул. Координационные соединения диссоциируют с образованием противоионов. Эти фрагменты адсорбируются на поверхности трения, нейтрализуя поверхностный заряд механоэлектрета. Под действием поля термоэлектрета диффузия фрагментов трибодеструкции СЖ в смазочном слое упорядочивается и ускоряется, а адсорбция приобретает черты хемосорбции.

Наличие единичного пика при 135–137°С на спектре электретного образца СВМПЭ после трения в СЖ (рисунок 5) свидетельствует о том, что адсорбция фрагментов СЖ происходит на элементах кристаллической структуры СВМПЭ. Усиление интенсивности этого пика после трения полимерного образца в СЖ служит доказательством того, что при термрстимулированной деполяризации образца к носителям заряда, высвобождающимся при релаксации заряда термоэлектрета, добавляются десорбированные с поверхности трения заряженные фрагменты СЖ. Это согласуется с эффектом усиления адсорбции молекул СЖ на поверхности суставных хрящей при их динамическом контактировании, обнаруженном в работе [17].

Таким образом, электростатический механизм формирования адсорбционного слоя обусловливает ускоренное залечивание дефектов смазочного слоя в подвижном сопряжении.

Движение носителей электрических зарядов в живой ткани инициирует возникновение магнитного поля. В работах [18], [19] его моделировали, накладывая на смазочную прослойку СЖ в подвижном сопряжении СВМПЭ-металл поле соленоида, встроенного в опору маятникового трибометра. Обнаружено, что коэффициент трения не изменяется при смазывании опорного узла физиологическим раствором, но заметно снижается в присутствии СЖ или смазочной жидкости, содержащей ЖК. Увеличение постоянного тока в обмотке соленоида ускоряет установление стабильного значения коэффициента трения *(f)*. Это можно объяснить происходящей в магнитном поле перестройкой жидкокристаллической составляющей СЖ в оптимальное трибологическое состояние. Структура смазочной прослойки обладает определенной инертностью, и для ее перестройки требуется определенный период времени, зависящий от величины магнитного поля и магнитной восприимчивости СЖ. По-видимому, физические причины заболеваний, связанные с недостаточной смазкой суставов, обусловлены изменениями магниточувствительной структуры СЖ, которая зависит от наличия суставной патологии, возрастных и индивидуальных особенностей человека.

Приведенные результаты свидетельствуют, во-первых, что трибометрия СЖ является высокоинформативным средством оценки функциональной недостаточности синовиальной

среды суставов, во-вторых, подтверждают представления о том, что влияние электромагнитного поля на смазочную способность СЖ, не имеющей иммунной патологии, является фактором, нормализующим синовиальную среду суставов.

В настоящее время одним из самых эффективных методов лечения в ортопедии является инъекция ЛС в полость сустава [20]. Выбор вводимого препарата зависит от цели лечения. Вводимые в полость сустава ЛС оказывают целенаправленное лечебное действие на синовиальную среду и, смешиваясь с СЖ, качественно изменяют ее биохимические свойства. На рисунке 6 показано, что несмотря на принадлежность к единой фармакологической группе каждый из исследованных ЛС имеет индивидуальные трибологические свойства и предложенная диаграмма удобна для первичной оценки смазочной способности ЛС в патологически измененном суставе.

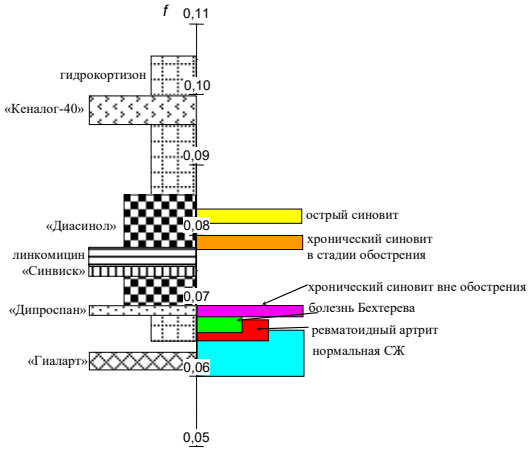


Рисунок 6 – Диаграмма для определения базисных ЛС при лечении суставов путем инъекции

Такой тест позволяет оценить возможности структурного восстановления патологически измененной СЖ при магнитотерапевтическом воздействии. Исчерпание биомеханических ресурсов синовии, признаками которого являются увеличение коэффициента трения и нечувствительность к электромагнитному воздействию, служит показанием к заместительной локальной терапии сустава с применением заменителей СЖ, содержащих ГУК. Представители этой группы медикаментов – «Гиалган» («Hyalgan», фирма «Fidia», Италия), «Синвиск» («Synvisc», фирма «Biomatrix», США), «Ортовиск» («Ortovisk», фирма «Anika Therapeutics, Inc.» США) и др. – преимущественно восполняют вязкость жидкой прослойки в суставе и не всегда эффективны при лечении артрозов [20].

В связи с этим в ортопедии возникла проблема создания высоко эффективных ЛС с минимальным числом побочных действий – так называемых суперлекарств. Они должны быть абсолютно совместимыми с организмом, активно влиять на биофизические механизмы снижения трения в суставах и изнашивания хряща, т. е. регулировать систему «умного» сустава, компенсируя недостаточность или отказ его слабых звеньев.

Идеология создания суперлекарств для инъекций в суставы предполагает, прежде всего, придание им высокой смазочной способности. Они должны реализовать в патологически измененных суставах смазку, обусловливающую трение на уровне здоровых суставов с коэффициентом трения $f = 0{,}002–0{,}005$ при нагрузке $p \sim 3$ кПа. Эта идея создания лекарств, для суставов реализуется в виде препаратов для инъекций на основе сыворотки крови. Такое направление связанно с модифицированием донорской сыворотки антигенами и антителами, свойственными организму пациента. Очевидно, что идеальным заменителем СЖ в суставе является СЖ, взятая из другого сустава. Это предполагает целесообразность использования для хондропротекции донорской СЖ человека и необходимость создания банков для ее хранения. В связи с этим, очевидно, что ближайшие задачи таких экспериментов состоят в определении биологической совместимости донорской СЖ с тканями и биологическими жидкостями пациента, т. е. разработки методов определения в донорской СЖ антител к антигенам эритроцитов пациента.

Заключение. В работе представлен краткий обзор свойств и функций СЖ, результаты ее термоактивационного анализа, а также влияние электромагнитного поля на смазочную способность СЖ, не имеющей иммунной патологии. Эти сведения дополняют представления о биологической жидкости и могут служить базой для диагностики и лечения суставных заболеваний.

Литература

1. Жидкие кристаллы в технике и медицине / С.Ф. Ермаков [и др.]. – Минск : «Асар»; М. : ЧеРо, 2002. – 412 с.
2. Tsvetkova, E.A. Physical Properties of Synovial Fluids as a joint Lubricating Medium / E.A. Tsvetkova // Biophysics. – 2005. – Vol.50, №2. – Pp. 320–325.
3. Кадолич, Ж.В. Физическое модифицирование сопряжений полимер-металл для повышения их износостойкости на основе моделирования биофизических свойств естественных суставов: автореф. дис. … канд. техн. Наук : 01.04.07 / Ж.В. Кадолич ; Гос.науч. учреждение ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси. – Гомель, 2002. – 19 с.
4. Павлова, В.Н. Синовиальная среда сустава / В.Н. Павлова. – М. : Медицина, 1980. – 296 с.
5. Хрящ / В.Н. Павлова [и др.]; под общ. ред. Е.Л. Андрианова. – М. : Медицина, 1988. – 320 с.
6. Синельников, Р.Д. Учение о костях, соединении костей и мышцах / Р.Д. Синельников, Я.Р. Синельников // Атлас анатомии человека. – М. : Медицина, 1989. – Т.1. – 343 с.
7. Антонов, В.Ф. Биофизика: учеб. для ВУЗов / В.Ф. Антонов; под ред. В.Ф. Антонова. – 2-е изд. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 288 с.
8. Герасимов, А.М. Биохимическая диагностика в травматологии и ортопедии / А.М. Герасимов, Л.Н. Фурцева. – М. : Медицина, 1986. – 234с.
9. Василенкайтис, В.В. Искусственная синовиальная жидкость для суставов / В.В. Василенкайтис // Ортопедия. Травматология. Протезирование. – 1989. – № 10. – С. 11–15.
10. Барабаш, И.В. Изменение биоэлектрической активности головного мозга при тотальном эндопротезировании тазобедренного сустава / И.В. Барабаш, А.И. Барабаш, Н.И. Арсеньева // Вестник травматологии и ортопедии им. Н.Н. Приорова. – 2000. – № 1. – С. 36–41.
11. Ремизов, А.Н. Медицинская и биологическая физика: Учебник для вузов / А.Н. Ремизов, А.Г. Максина, А.Я. Потапенко. – 4-е изд. – М. : Дрофа, 2003. – 560 с.
12. Electrets: Vol. 1 / ed. by G.M. Sessler. – 3rd ed. – Morgan Hill: Laplacian Press, 1999. – 453 p.
13. Цветкова, Е.А. Структурные изменения в поверхностном слое трения полимерного вкладыша чашки эндопротеза / Е.А. Цветкова [и др.] // Механика композитных материалов. – 2000. – Т. 36, № 5. – С. 607–620.
14. Цветкова, Е.А. Моделирование биофизических свойств живых тканей в полимерных материалах медицинского назначения / Е.А. Цветкова // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2015. – № 3. – С. 60–70
15. Pinchuk, L. Magnetic field influence on friction of metal-polymer pairs in liquid / L. Pinchuk, Z. Kadolich, E. Tsvetkova // Proceedings 7th Int. Conf. on Tribology, Budapest, 4–5 september 2000 / Budapest Univer. of Technol. and Econom.; eds. M. Kozma [et al.]. – Budapest, 2000 – P. 383–385.
16. Pinchuk, L.S. Tribology and Biophysics of Artificial Joints / L.S. Pinchuk, V.I. Nikolaev, E.A. Tsvetkova, V.A. Goldade. – Kidlington, Oxford Joints : Elsevier Ltd., 2006. – 350 p.
17. Ермаков, С.Ф. Трибофизика жидкокристаллических матероиалов в металло – и биополимерных сопряжениях: автореф. дис. … д-ра. техн. Наук : 01.04.07 / С.Ф. Ермаков ; Гос. научн. учреждение ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси. – Гомель, 2001. – 42 с.
18. Пинчук, Л.С. Влияние электромагнитных полей на трение в эндопротезах суставов / Л.С. Пинчук, Е.А. Цветкова, Ж.В. Кадолич // Трение и износ. – 2001. – № 5 (22). – С. 550–554.
19. Способ оценки смазочной способности синовиальной жидкости: пат. 9059 Респ. Беларусь, МПК7 G01N 11/00 / Л.С. Пинчук, Ю.М. Чернякова, Ж.В. Кадолич, В.И. Николаев, Е.А. Цветкова, С.Ф. Ермаков, Е.Д. Белоенко ; заявитель ГНУ ИММС НАН Беларуси им. В.А. Белого. – № а 20040389; заявл. 29.04.04 ; опубл. 12.12.06 // Афіцыіны бюл. / Нац. Цэнтр інтелектуал. уласнасці. – 2007. – № 2. – С. 138.
20. Пинчук, Л.С. Трибофизика синовиальной жидкости / Л.С. Пинчук, Ю.М. Чернякова, С.Ф. Ермаков. – Минск : Берарус навука, 2010. – 382 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 23.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

ИНФОРМАТИКА

УДК 539.4:621.6

К вопросу о методике расчета напряженно-деформированного состояния слоистой трубы

В.В. МОЖАРОВСКИЙ, Д.С. КУЗЬМЕНКОВ

Рассматривается задача определения напряжений и перемещений в неоднородной слоистой цилиндрической трубе. В статье рассматривается расчет напряжений в трубе с податливой оболочкой и полиуретановой теплоизоляцией, описывается разработанный алгоритм решения задачи, приводится пример расчёта.
Ключевые слова: напряжения и перемещения в неоднородной слоистой цилиндрической трубе, метод конечных элементов, труба с податливой оболочкой и полиуретановой теплоизоляцией.

The problem of determination of stresses and displacements in the inhomogeneous layered cylindrical pipe is considered. In article the calculation of stresses in the pipe with a supple casing and polyurethane insulation is considered, the algorithm developed for solving the problem is described, an example of the calculation is provided.
Keywords: stresses and displacements in the inhomogeneous layered cylindrical pipe, tube shell and a pliable polyurethane insulation.

Введение. В проблеме исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндрических тел и расчета слоистых конструкций из новых армированных полимеров можно выделить несколько важных аспектов:

– оценка влияния внешних воздействий (силовых, механических, воздействия температурных полей и т. д.) при производстве и эксплуатации трубопроводных систем слоистой структуры;

– использование в современных конструкциях новых композитов и армированных полимеров с учетом физико-механических характеристик материала, эксплуатационных условий функционирования исследуемых объектов;

– разработка современных систем оценки и диагностирования, прогнозирования состояния систем трубопроводов на базе новых компьютерных технологий.

Проведем краткий анализ современных исследований в области расчета цилиндрических труб слоистой структуры. Детальная разработка схем и расчетов для композитов слоистых систем на основании теории анизотропной упругости дана в [1]–[3] и на основании теории слоистых систем – например, в [4], [5]. Пагано в [5] представил общее решение для анизотропного цилиндра в виде рядов Фурье. Расчет оболочки, нагруженной внутренним давлением и образованной намоткой полимерных пленок, рассматривается в [6]. Расчеты выполнены с использованием пакета MathCad. Группой авторов в [7]–[9] проводился анализ расчета упругих напряжений в слоистых трубах. Результаты расчетно-экспериментального исследования гидроупругого процесса в образце полиамидного трубопровода, заполненного жидкостью, представлены в работах [10], [11]. Упругая задача решается методом конечных элементов. Напряженно-деформированное состояние определяется суперпозицией быстрых стержневых и медленных оболочечных форм движения. Получено удовлетворительное соответствие расчетных и опытных данных. Моделирование термомеханических воздействий на системы стальных трубопроводов рассматривалось в работе [12]. Проверка полученных результатов производилась с использованием коммерческих программ, реализующих МКЭ. Конечно-элементная программа ABAQUS использовалась в работах [8], [13]. В [8] представлены алгоритм и исследования распределения напряжений в трубах из слоистого композиционного материала, поведение волокнистого композиционного материала определялось на основе новых информационных технологий. В расчетных примерах рассматривались цилиндры, сосуды и резервуары цилиндрической формы [14]. В настоящее время актуально решение оп-

ределенного класса контактных задач о контакте слоистой трубы с упругим основанием. При этом требуется сделать постановку задачи и построить математическую модель, разработать численные методы расчета напряженно деформированного состояния слоистой конструкции.

Для численного решения этой задачи рассмотрим существующие модели расчета.

Для разработки математических моделей используем математическую теорию упругости анизотропной среды, применяя концепцию макромеханики. При этом нужно, при определении параметров трибоконтакта, использовать характеристики материалов – объемное содержание волокна в матрице, модули упругости, коэффициент Пуассона и пределы прочности в разных направлениях.

Для определения характеристик в телах сопряжения из волокнистых композиционных материалов применяется теория как изотропного и трансверсально-изотропного, так и ортотропного тела. Теорию трансверсально-изотропного тела в случае плоской деформации можно применить, например, для расчета слоистого композита с армирующими волокнами, расположенными хаотически в плоскости *xy*, для которой имеет место изотропия. В данном случае различие упругих свойств проявляется при переходе от слоя к слою, т. е. можно сказать, что упругие свойства меняются в направлении наслаивания. Упругие свойства такого композита характеризуют четыре независимые постоянные, а через них достаточно просто могут быть вычислены остальные постоянные. Для приближенного анализа теории контакта, например слоистой трубы и упргого основания, используется теория, представленная в работах [15], [16] применительно к анизотропным материалам, базирующаяся на статическом решении контактной задачи взаимодействия упругого индентора с ортотропным слоистым основанием.

Расчет напряжений в трубе с податливой оболочкой и полиуретановой теплоизоляцией. На современном этапе развития техники все чаще в системе теплоснабжения (рисунок 1) стали появляться трехслойные полимерные и композитные трубы, которые необходимо расчитывать на НДС с учетом силовых, температурных, реономных и других факторов. В связи с этим, рассмотрим задачу о бесконечно длинном упругом цилиндре, заключенном в податливую оболочку **с полиуретановой теплоизоляцией**, нагруженном внутренним давлением (здесь и далее температурные факторы не учитываем, постараемся их учесть в следующих статьях), модель для расчета представлена на рисунке 2. Аналогично [17] строим решение для трехслойной трубы.

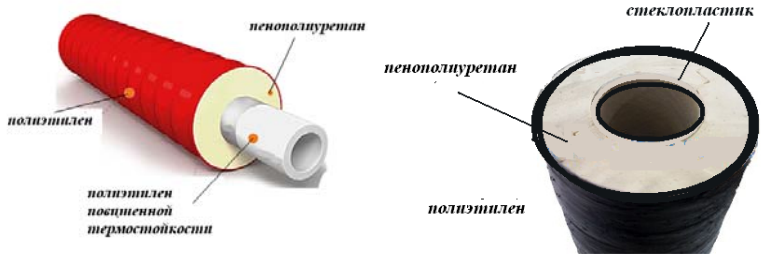


Рисунок 1 – Пример слоистых труб из полимеров для теплоснабжения (фото с сайта www.zpt.by)

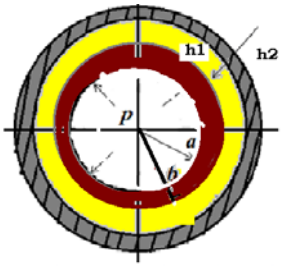


Рисунок 2 – Модель для расчета цилиндра в податливой оболочке под действием внутреннего давления

Примем, что поведение оболочки и наполнителя описывается уравнениями теории упругости и $\varepsilon_z^* = \varepsilon_z = 0$. Для рассматриваемой задачи имеем уравнение равновесия в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

геометрические зависимости для перемещений и деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \ \varepsilon_z = 0,$$

и физические зависимости

$$\sigma_r = 2G_1\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta),$$
$$\sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta).$$

Коэффициент λ для случая плоского напряженного состояния (ПНС) имеет вид $\lambda = 2G\nu/(1-\nu)$, а для плоского деформированного состояния (ПДС) $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$. В дальнейшем будем иметь в виду, что модуль сдвига G_1, коэффициент Ламе λ_1 и коэффициент Пуассона ν относятся к материалу цилиндра, а G_2 и λ_2 – к материалу наполнителя и коэффициент Ламе λ_1 и коэффициент Пуассона ν относятся к материалу цилиндра, а G_3 и λ_3 – к материалу оболочки, модуль сдвига и модуль Юнга для изотропных материалов связаны зависимостью $G = E/(2(1+\nu))$. На основании вышеприведенных уравнений, получим уравнение равновесия в перемещениях

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0.$$

Из решения этого уравнения найдем перемещение, а затем и напряжения. Таким образом, имеем:

$$u_r^i = A_i r + B_i \frac{1}{r}, \ \sigma_r^i = 2G_i\left[(1+2\lambda_i)A_i - B_i\frac{1}{r^2}\right], \sigma_\theta^i = 2G_i\left[(1+2\lambda_i)A_i + B_i\frac{1}{r^2}\right], \quad (1)$$

соответственно для трубы, наполнителя, оболочки принимаем $i = 1,2,3$. Постоянные A_i, B_i определяются из граничных условий:

$$u^1_{r/r=b} = u^2_{r/r=b}, \quad u^2_{r/r=b+h1} = u^3_{r/r=b+h1},$$
$$\sigma^2_{r/r=b+h1} = \sigma^3_{r/r=b+h1}, \quad \sigma^1_{r/r=a} = -p, \quad (2)$$
$$\sigma^3_{r/r=b+h2} = 0, \quad \sigma^1_{r/r=b} = \sigma^2_{r/r=b}.$$

Из граничных условий (2) составляем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 6×6 для нахождения неизвестных коэффициентов $A_i, B_i, i = \overline{1,3}$. Матричным методом решаем полученную СЛАУ. Определенные коэффициенты поставляем в уравнения (1) для нахождения напряжений и перемещений в трубе.

Программная реализация. Был разработан алгоритм и создана программа, реализующая расчет напряжений и перемещений для трубы в податливой оболочке с полиуретановой теплоизоляцией. На рисунке 3 изображено окно ввода исходных данных (материал 1 – полиэтилен повышенной термостойкости, материал 2 – пенополиуретан, материал 3 – полиэтилен).

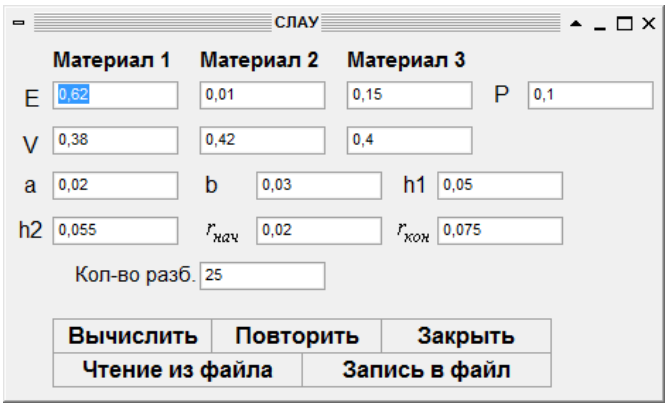


Рисунок 3 – Главное окно программы

После нажатия клавиши «Вычислить» программа, по заранее определенному алгоритму, строит матрицу и вектор свободных членов системы линейных алгебраических уравнений, решает ее, по формулам (1) определяет напряжения и перемещения и выводит результаты в виде таблицы (рисунок 4), по нажатию на клавиши «график» будут построены графики зависимости σ_r^i, σ_θ^i, u_r^i от r (рисунки 4,5). Для граничных значений r (на границе двух слоев) выводятся искомые характеристики для двух материалов.

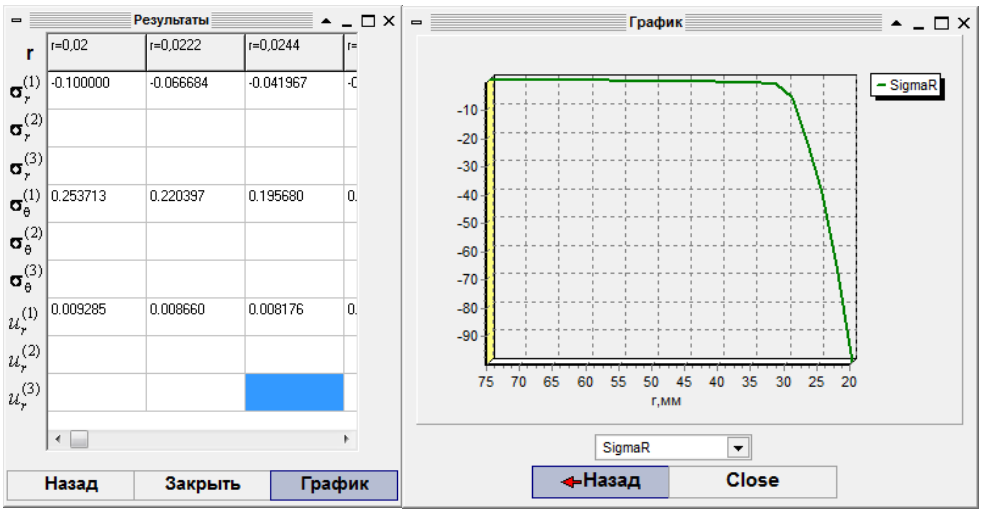


Рисунок 4 – Результаты расчетов, график зависимости σ_r^i от r

Из результатов расчетов, представленных на рисунках 4, 5 можно сделать следующие выводы:

1) Напряжение σ_r^i практически линейно изменяется по толщине, затем незначительно изменяется по всей толщине двух последних слоёв изоляции;

2) Основные напряжения σ_θ^i сконцентрированы в нижнем слое трубы;

3) Начиная с середины изоляции, перемещения u_r^i резко затухают.

Для полной картины исследования напряженно-деформируемого состояния конструкции трубы необходимо рассчитать $\tau_{\max}$ и эквивалентные напряжения.

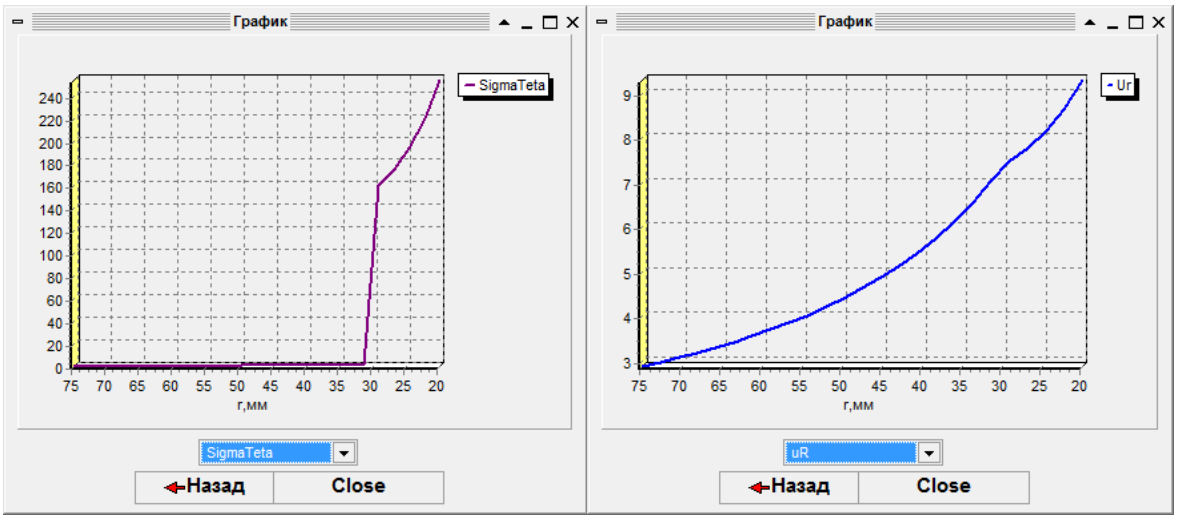


Рисунок 5 – Графики зависимости σ_θ^i и u_r^i от r

Заключение. В статье рассмотрена реализация методики расчета напряженно-деформированного состояния неоднородной слоистой цилиндрической трубы. Описывается алгоритм решения поставленной задачи. Реализация алгоритма расчета осуществлялась на задаче определения напряжений в трубе с податливой оболочкой и полиуретановой теплоизоляцией,

описывается разработанный алгоритм решения задачи, приводится пример расчёта. Предлагаемый подход дает возможность оптимального выбора материала для трубы и геометрических характеристик, учитывая условия эксплуатации. Разработанную методику можно легко обобщить на другие задачи расчета напряженно-деформированного состояния слоистых труб.

Литература

1. Hyer, M.W. Hydrostatic Response of Thick Laminated Composite Cylinders / M.W. Hyer // Jrl.Reinforced Plastics and Composites. – 1988. – Vol. 7. – P. 321–330.

2. Победря, Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.

3. Можаровский, В.В. Напряженно-деформированное состояние слоистых цилиндрических труб / В.В. Можаровский, С.А. Марьин, Н.А. Марьина // ВЕСТНИК ХНТУ. – 2008. – № 2. – С. 31.

4. Pagano, N.J. Geometric Design of Composite Cylindrical Characterization Specimens / N.J. Pagano // Journal of Composite Materials. – 1970. – Vol. 4. – P. 360–378.

5. Андреев, В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел / В.И. Андреев. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2002. – 288 с.

6. Shim, D.-J. Failure strength assessment of pipes with local wall thinning under combined loading based on finite element analyses / D.-J. Shim, J.-B. Choi, Y.-J. Kim // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 2004. – Vol. 126, Issue 2. – P. 179–183.

7. Bhaskar, K. Three-dimensional analysis of a cross-ply cylindrical shell subjected to a localized circumferential shear force / K. Bhaskar, N. Ganapathysaran // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2002. – Vol. 79, Issue 7. – P. 519–524.

8. Можаровский, В.В. Реалізація розрахунку напружень багатошарових труб / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков. // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фізико-математичніх наук. – 2015. – № 5. – С. 173–178.

9. Можаровский, В.В. Влияние дефекта (трещины) на напряженно-деформированное состояние цилиндрической трубы из композита / В.В. Можаровский, С.А. Марьин // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2015. – № 2. – С. 19–25.

10. Kim, Y.-J. Reference stress based approach to predict failure strength of pipes with local wall thinning under single loading / Y.-J. Kim, D.-J. Shim, H. Lim // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 2004. – Vol. 126, Issue 2. – P. 194–201.

11. Mohareb, M. Plastic interaction relations for pipe sections / M. Mohareb // J. Eng. Mech. ASCE. – 2002. – Vol. 128, Issue 1. – P. 112–120.

12. Mohareb, M. Plastic resistance of pipe sections – an upper bound solution / M. Mohareb // J. Struct. Eng. ASCE. – 2003. – Vol. 129, Iss 1. – P. 41–48.

13. Можаровский, В.В. Создание и работа программного комплекса контроля и диагностики сосудов и трубопроводов / В.В. Можаровский, С.А. Марьин, Н.А. Марьина // Информационно-компьютерные технологии 2010: материалы V Международной научной конференции, Житомир 20–22 мая 2010 г. / Изд-во Житомирского гос. ун-та. – Житомир, 2010. – С. 5–7.

14. Gao, X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory / X.-L. Gao // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40, Issue 23. – P. 6445–6455.

15. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 416 с.

16. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 280 с.

17. Кузнецов, Г.Б. Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических тел / Г.Б. Кузнецов. – М. : Изд-во Наука, 1979. – 112 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 17.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 681.32.001

Методологические аспекты автоматизации поддержки принятия стратегических решений

Н.Б. Осипенко[1], А.Н. Осипенко[2]

Описывается ряд вопросов, связанных с подключением априорной информации о структуре сознания человека в задаче автоматизации поддержки принятия им судьбоносного решения, в частности, предлагается метод проекций разнообразных диагностических данных о человеке в базовую фрактальную семантическую структуру с последующей прогнозной интерпретацией её элементов. На выходе такой инструмент позволит получать новые знания об индивидуальных особенностях человека: генетическом потенциале, подсознательных установках и дисбалансе в духовной, психической, социально-поведенческой и физиологической сферах. На практике человек может верифицировать эти знания и использовать как в плане расширения или сужения спектра возможных решений, так и в плане укрепления веры в принимаемое решение.
Ключевые слова: индивидуальный подход, таргетирование, фрактальная семантическая структура, темы человеческой деятельности, Big Data, машинное обучение, автоматизация профориентации.

The article describes a number of issues related to connecting a priori information about the structure of human consciousness in the problem of automated support for making crucial decisions, in particular, the method of projections of various diagnostic data about the person in the basic fractal semantic structure with the subsequent forward-looking interpretation of its elements. The output of such a tool will allow gaining new knowledge about the individual characteristics of a person: genetic potential, subconscious attitudes and imbalance in the spiritual, mental, socio-behavioural and physiological spheres. In practice, a person can verify this knowledge and use it as in terms of expanding or narrowing the range of potential solutions and to strengthen faith in the decision.
Keywords: individual approach, targeting, fractal semantic structure, topics, human activities, Big Data, machine learning, automation guidance.

Введение. Наметившийся в последние годы прорыв в качестве компьютерного распознавания текстов, речи и изображений вновь возбудил в обществе интерес к проблематике создания искусственного интеллекта и освобождения большой доли людей от рутинной и нетворческой интеллектуальной работы. Мир идет к тому, что все больше межчеловеческих отношений будет посвящено не столько производству предметов, сколько самим межчеловеческим отношениям и раскрытию в них всего спектра талантов в области искусства, игры, воспитания, наставничества, целительства, изобретательства и т.д. В связи с перспективой подобных перемен перед человечеством встает насущная потребность переориентации большинства людей с преимущественно материально-экстенсивного мировосприятия на преимущественно гуманитарно-интенсивное. Иначе от безделья «мир сойдет с ума»: когда надоедят примитивные развлекательные передачи, мыльные оперы, фильмы-боевики или ужастики, компьютерные игры или футбол, то постепенно из виртуального мира потянет в реальный. А так как на внутреннем плане ничего созидательного наработано не было, то на внешнем плане все это может вылиться в серьезные деструктивные последствия, начало которых мы уже сейчас наблюдаем в ситуации с тысячами европейских «искателей приключений» в «горячих точках».

Одной из важнейших составляющих процесса решения проблемы переориентации сознания людей является повсеместное распространение принципа индивидуального подхода (и не только к человеку, но и к любому социальному субъекту). Нельзя сказать, что этот процесс сейчас не идет. Число бизнес-консультантов, коучеров, тьютеров, психотерапевтов, целителей, персональных врачей, учителей и воспитателей растет с каждым годом, особенно в развитых странах. Тем не менее, современные компьютерные технологии позволяют, с одной стороны, нарастить глубину и точность индивидуальной диагностики, а с другой, – резко

увеличить объемы выборки претендентов на взаимодействие по той или иной теме (услуге). Более адресный контакт и совместная работа с теми, кто подходит человеку по характеру, темпераменту и интересам позволит ему выходить на созидательную самореализацию со всеми её позитивными последствиями.

Настоящая статья посвящена нескольким философским и методологическим аспектам разработки такого инструментария применительно к задаче выбора профессии.

Основные положения. Одна из характерных особенностей последнего десятилетия – резкий рост внимания к таким направлениям, как Big Data, нейронные сети, машинный интеллект, нейролингвистика, нейрогенетика и исследование работы мозга в целом [1]. В связи с накоплением, благодаря Интернету и современному диагностическому инструментарию огромного объема данных о людях (паспортные данные, медицинские, антропометрические, психологические, а также поведенческие данные о работе в сетях, о передвижениях, о покупках и т. д.), возникла настоятельная потребность в их систематизации и практическом использовании, а также в философском осмыслении возникших при этом проблем. Пока основная область применений – это таргетирование в маркетинге и обеспечение индивидуального подхода к клиенту в медицине, образовании, психологии, коучинге и профориентации. Наиболее подходящими для использования в жизни человека соответствующих интеллектуальных программ-советчиков представляются такие точки бифуркации в его судьбе, как стратегический выбор: школы и учителей, любимых занятий и профессии, спутника жизни, команды сотрудников и технологии исцеления в случае болезни. Далее будем называть все эти точки выбора судьбоносными решениями.

Долгое время считалось, что судьбоносные решения – это сугубо семейно-личное дело, не допускающее вмешательства извне. Даже помощь психологов, астрологов или экстрасенсов большинством воспринималось как чудачество. Тем не менее, человеку, пытающемуся не просто плыть по течению, а самостоятельно выстраивать свою судьбу, исходя из собственных глубинных предпочтений, хочется учесть как можно больше информации о накопленном человеческом опыте, соотносящимся с его индивидуальностью.

На рынке подобных диагностических услуг, в частности в профориентации, в настоящее время имеется большое количество инструментов выбора подходящей человеку профессии. Тем не менее, многие молодые люди долгое время, порой получив одно или два образования, не могут определиться, на чем им остановиться в выборе работы и в целом в направлении своих интересов. Одна из причин низкой эффективности традиционных подходов кроется в том, что используемые специалистами психологические тесты в основном ориентированы на текущее психофизиологическое состояние респондента и не затрагивают глубинных генетических установок, лежащих в основании миссии человека и отвечающих за то, какие качества индивидуума будут «открываться» или «закрываться» по судьбе.

К сожалению, абсолютно достоверных данных о генетическом потенциале человека наука пока дать не может. Приходится пользоваться косвенной информацией. Например, существует гипотеза, что дата рождения каким-то образом отражает генетический потенциал человека. Многие практикующие психологи с успехом используют алгоритм квадрата Пифагора по выявлению потенциально наиболее характерных личностных качеств для диагностики характера человека и его склонностей [2]. Несмотря на имеющийся в научных кругах скепсис по поводу связи паспортных данных, в частности даты рождения, с некоторыми потенциальными предрасположенностями человека, авторы проверили прогностические возможности этой гипотезы на конкретном статистическом материале [3] и получили хорошо интерпретируемые результаты, позволяющие выдвигать правдоподобные гипотезы о причинах ранней смертности населения в Беларуси.

Наряду с паспортными данными, генетику человека отражают разные антропометрические данные (рост, вес, костно-мышечная конституция, цвет волос, группа крови, черты лица, радужка глаза, родинки на теле, линии на ладонях и т. п.). Не весь генетический потенциал в детстве раскрывается. А если и раскрывается, то не всегда с позитивной стороны. Поэтому нужны еще дополнительные психологические тесты, выявляющие подсознательные

предпочтения человека: это могут быть предпочтения цветов, звуков, запахов, вкусов, различных форм, картинок, аудио- и видео-произведений. Сомневающиеся по поводу такой диагностики, могут сказать, что ее результаты часто бывают неоднозначными и зависят от настроения респондента в момент тестирования. Это все верно, однако в этой ситуации спасает эффект фрактальности проекций. Он состоит в том, что одна и та же внутренняя структура (например, структура внутренних органов человека) отражается определенным образом во всех элементах полной внешней формы (на ладонях, ступнях, туловище, языке, радужке глаза и т. п.). Такое дублирование позволяет реализовать известную идею академика В.М. Глушкова – синтез надежной системы из ненадежных элементов.

Эффектом фрактального дублирования внутренней структуры в элементах внешней формы объясняется столь поразительный успех технологии глубокого обучения в задаче распознавания изображений (знаменитый эксперимент ImageNet [4]). Это уже не просто поверхностное сканирование пикселей и их линейная свертка для поиска ближайшего эталона, а многоуровневое построение все более глубоких производных отношений сначала на пикселях, затем на локально-связанных группах пикселей, потом на классах таких групп и т.д. Схожую технологию построения образа данных авторы настоящей статьи использовали еще в работе [5]. В ней реализован эволюционный алгоритм поэтапного размножения и отсева альтернативных форм образа данных с сопутствующим возрастанием глубины иерархических связей на его элементах, а также с добавлением на каждом уровне нового генератора разнообразия формы и соответствующего критерия отсева. В [5] все этапы наращивания сложности формы покрытия данных были предусмотрены заранее, в современных же алгоритмах производится глубокое самообучение с элементами рекурсии.

Так, например, проект на базе API Microsoft Project Oxford достиг глубины в 152 слоя математических операций [4]. Надо сказать, что человеческий мозг при восприятии образов довольствуется семью уровнями, подключая с ростом уровня все более обобщенные смыслы генетико-лингвистических структур. То есть каждое восприятие у человека – это специально сыгранная пьеса семиуровнего оркестра под руководством дирижера, интегрирующего все смыслы нижележащих уровней. По сравнению с человеком современное компьютерное распознавание еще не готово к серьезной работе со смыслом: аналоги нейросинтаксических структур явно доминируют над примитивными аналогами нейросемантических структур. Исторически это обусловлено мировоззренческой проблемой теоретико-множественного подхода [6], в частности, отказом от не придания статуса реальности связям, отношениям и смыслам в противовес «первичности» конкретных элементов системы. Обыденное сознание видимые объекты и явления всегда считало более значимыми. Срабатывал принцип – если искать что-то, то лучше под фонарем. По этой причине в науке возобладал прагматический принцип бритвы Оккама – не порождай лишних сущностей (а по сути – лишних смыслов) и работай с тем, что можешь физически измерить. Авторы опираются на другую мировоззренческую парадигму: смыслы и отношения логически первичнее конкретных объектов – элементы системы эволюционно выращиваются на генетических каркасах будущих связей в процессе ее взаимодействия с другими системами. Исходя из этого, основная идея авторов в области автоматизации прогнозов – отказаться от практически не интерпретируемого функционального черного ящика (пусть и суперсложного, как в случае с математическими алгоритмами глубокого обучения [4]) между исходными данными и выходными типами (классами, уровнями и т.п.), а построить априорную структуру из символических составляющих абстрактного живого существа, наделенных своими обобщенными смыслами (семантикой). По сути, в основание подхода положен базовый теоретический фрактал со своей аксиоматикой (в смысле отличия теории от модели по Шрейдеру [6]). Через него идет соотнесение всех фракталов (больших и маленьких со всех уровней) друг с другом. Что значит здесь соотнесенность? Особенность структур сознания состоит в том, что в них все связано со всем [7]. И обеспечивается это, прежде всего, единством структуры фракталов, а разнообразие проявленных элементов системы держится на перераспределении значимости-внимания-энергии в определяющих эти элементы фракталах с разной специализацией в пользу тех или иных их составляющих – точно также, как живой организм

зарождается из одной клетки, а потом делится на множество клеток с разной специализацией (при этом стволовые клетки выполняют роль камертонов или посредников в инициации восстановления эталонных процессов организма).

Возможности использования априорных знаний в задаче автоматизации поддержки выбора профессии. Применительно к задаче прогноза профессий в роли априорных знаний используется систематизация тем деятельности человека (ТД) и сфер деятельности (СД), а также распределение тем деятельностей по профессиям [3].

В качестве упомянутого выше базового теоретического фрактала используется структура ТД в виде таблицы размерности 7*5 (7 уровней и 5 ипостасей) с описанием качеств человека по 35-ти видам рабочих деятельностей (см. таблицу 1) и одной управляющей (36-я тема), а также систематизация сфер человеческой деятельности в виде 18 классов: аграрно-экологическая, проектирование полезных форм, психолого-терапевтическая, духовно-религиозная, информационная сфера услуг, естественнонаучная, культуры и искусств, медико-оздоровительная, общественно-научная, педагогическая, игровая и бытовая сферы услуг, техническое творчество, экономическая, государственно-правовая, материальное производство, идеологическая, философская [3].

Таблица 1 – Смысл тем деятельности

	1	2	3	4	5
7	охранение	рождение и развитие	волеизъявление	обеспечение надежности в отношениях	постижение богатства красоты
6	мотивация	творение	преобразование в труде	настроенность на благодать мира и природы	интеграция деятельностей
5	обдумывание	обучение	намерения самоактуализации	совет	постижение жизни силой интеллекта
4	информирование по новой ситуации	освоение перспектив внешней деятельности	поддержка себя и людей	выражение признательности	создание впечатления от общения
3	самоосознание	порождение речи	заинтересованность жизнью	логичное мышление	отражение жизни в памяти
2	формирование мировосприятия в системе родного языка	обеспечение настроения гармоничного развития	интуитивное влечение друг к другу	принятие себя и близких	удовлетворение потребности в непосредственном общении
1	излучение просветляющей кротости	эволюционное изменение жизнедеятельности	проявление состояния бодрости	циркуляция взаимодействий	синтез всех составляющих жизнедеятельности

Ниже на рисунке 1 приведена схема выбора профессий, тем и сфер деятельности. Здесь в качестве рабочих структур для синтеза всевозможных тестов и диагностических данных о человеке используются, кроме таблиц ТД и СД, вектора из 5 ипостасей и 7 уровней.

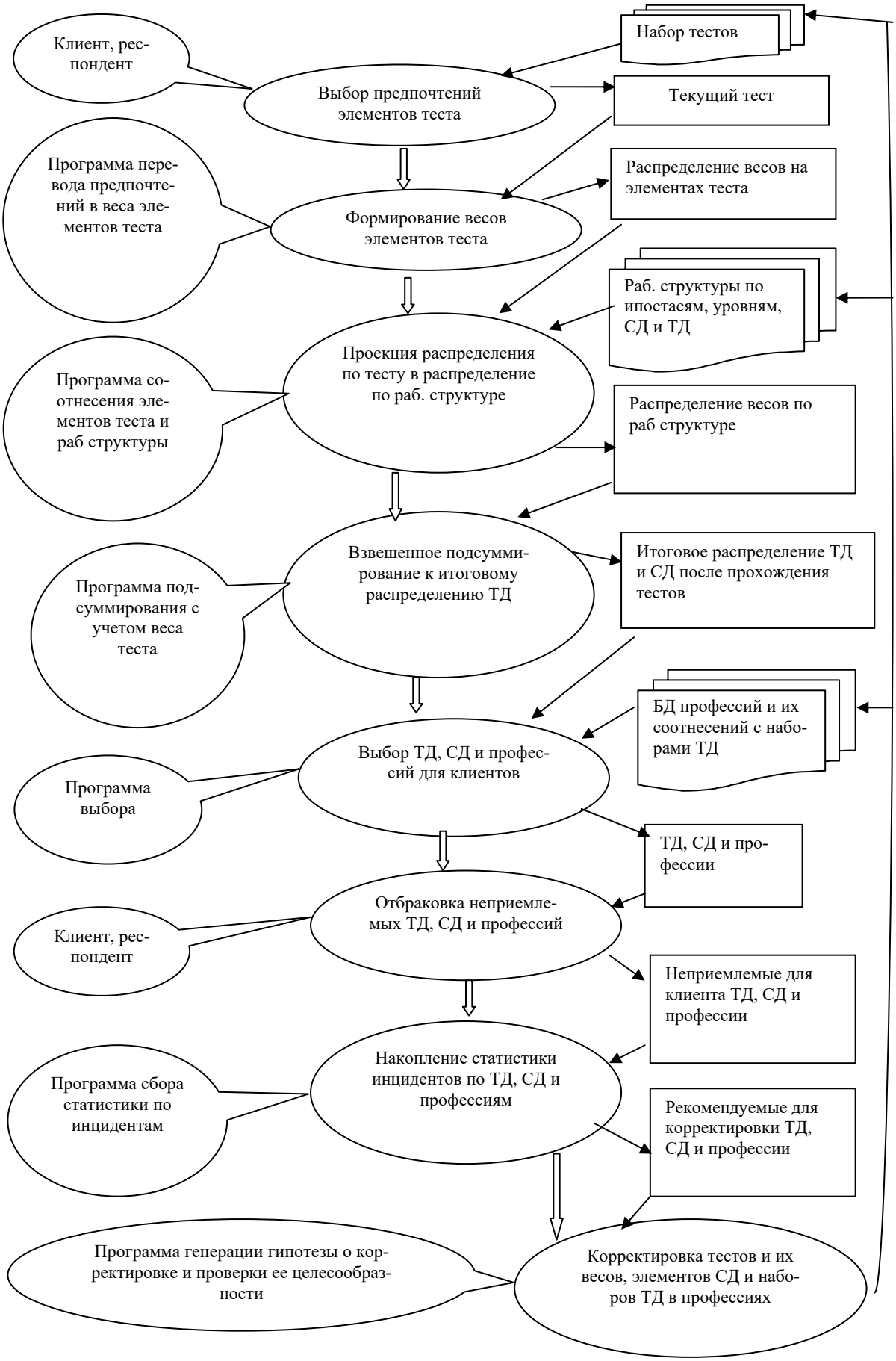


Рисунок 1 – Схема выбора профессий, тем и сфер деятельности

Представленная на этом рисунке схема выбора профессий, может быть обобщена по нескольким направлениям: 1) любые диагностические данные, в частности дату рождения, можно считать тестом со своей структурой; 2) количество рабочих структур базового фрактала может быть расширено за счет троичных, четверичных, шестеричных, девятеричных и 12-ричных проекций ТД; 3) базовый фрактал может быть развернут, так как сама структура ТД является частью более общей архитектуры в виде матрицы размерности 12*12 под управлением матрицы размерности 3*12 [8] (для работы с развернутым фракталом необходимо привлечение очень разнообразных данных о человеке); 4) в перспективе можно создать саморазвивающуюся интеллектуальную среду-советчика для всех видов судьбоносных решений.

Заключение. Информационно-технологический прогресс, связанный с развитием глобальной сети Интернет, поставил перед человечеством серьезные вызовы и зародил потребность в смене лидирующей мировоззренческой парадигмы (с материально-экстенсивной, ведущей к эгоистично-потребительскому стилю жизни) на гуманитарно-интенсивную (ведущую к альтруистично-созидательному стилю). Одним из важнейших ресурсов на этом пути становится повсеместное распространение принципа индивидуального подхода. В качестве полезного инструмента предлагается широкая сеть специализированных интернет-площадок для судьбоносных встреч нужных друг другу людей и/или социальных субъектов. С целью повышения перспективности таких встреч авторы предложили использовать метод проекций разнообразных диагностических данных о человеке в базовую фрактальную семантическую структуру с последующей прогнозной интерпретацией её элементов.

Литература

1. Big data // Последние новости [Электронный ресурс]. – 2016. – Режим доступа : http://ai-news.ru/big_data.html. – Дата доступа : 20.05.2016.

2. Александров, А.Ф. Даты и судьбы: Большая книга нумерологии / А.Ф. Александров. – М. : Рипол Классик, – 1088 с.

3. Осипенко, А.Н. Метод генерации гипотез для выявления факторов ранней смертности населения / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко // Материалы юбилейной научно-практической конференции, посвященной 85-летию ГГУ им.Ф.Скорины, Гомель, 17 июня 2015г. – Гомель, 2015. Ч. 4. – С. 145–149.

4. Распознавание образов и новое поколение нейронных сетей Microsoft // Опубликовано 09.03.2016 Пресс-Центр [Электронный ресурс]. – 2016. – Режим доступа : https://news.microsoft.com/ru-ru/microsoft-deep-residual-network/#sm.0000tc382zh3rdvlwu61rua5uvrk4. – Дата доступа : 20.05.2016.

5. Осипенко, А.Н. О формировании эмпирического образа данных / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко. – М. : НТИ. – 1990. – Сер. 2. – С. 30–35.

6. Шрейдер, Ю.А. Системы и модели / Ю.А. Шрейдер, А.А. Шаров. – М. : Радио и связь, 1982. – 152 с.

7. Черниговская, Т.В. Чеширская улыбка кота Шрёдингера: язык и сознание / Т.В. Черниговская. – М. : Языки славянской культуры, 2013. – 448 с.

8. Осипенко, А.Н. Человек в поисках человека [Электронный ресурс] / А.Н. Осипенко. – 2016. – Режим доступа : https://vk.com/doc146207906_437536871. – Дата доступа : 20.05.2016.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Гомельский государственный технический
университет им. П.О. Сухого

Поступила в редакцию 13.09.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

Эконометрическая оценка денежного предложения и инфляции в Республике Беларусь

О.С. БАШЛАКОВА, Л.Н. МАРЧЕНКО

Представлены результаты эконометрического моделирования монетарного фактора инфляции. Построена модель с распределенными лагами зависимости индекса потребительской инфляции от индекса широкой денежной массы. Предложены модели «инфляции спроса» и «инфляции предложения». Оценены модели инфляции и широкой денежной массы для долгосрочного и краткосрочного эффектов.
Ключевые слова: широкая денежная масса, инфляция спроса и предложения, коинтеграция.

The results of econometric modeling of monetary inflation factor are presented. A model with distributed lags depending on the index of consumer inflation from the index of broad money supply is built. The models «demand inflation» and «proposals inflation» are given. A model of error correction using S. Johansen procedure is designed.
Keywords: broad money supply, inflation of supply and demand, cointegration.

Введение. В современных условиях задача достижения стабильно низкого уровня инфляции является актуальной для многих государств, в том числе и для Республики Беларусь. Эффективное проведение Национальным банком денежно-кредитной политики в области регулирования инфляционных процессов предполагает комплексный анализ детерминант инфляции, а также ее достоверное прогнозирование на кратко- и среднесрочную перспективу. В связи с этим, весьма актуальным является проведение статистических исследований динамики уровня цен во взаимосвязи с другими макроэкономическими показателями, среди которых особое место занимают денежные агрегаты. Моделированию инфляционных процессов в экономике посвящено достаточное количество работ отечественных и зарубежных экономистов [1]–[4], среди которых особое место занимают статистические исследования. Тем не менее, монетарным факторам, и особенно их валютной составляющей, в для малых открытых экономик, к которым относится Республика Беларусь, уделено недостаточное внимание.

Основная часть. Инфляционный процесс в Республике Беларусь имеет достаточно сложную природу. Монетарный фактор, связанный с непропорциональным ростом широкой денежной массы, выступает главной причиной формирования инфляционных процессов, однако не объясняет поведение инфляции. Принимаемые Национальным банком Республики Беларусь меры по сдерживанию темпов укрепления национальной валюты посредством валютных интервенций предполагали изменение валютных резервов вследствие регулирования денежного предложения, что являлось при этом источником монетарных инфляционных рисков. На рисунке 1 приведена динамика индекса потребительских цен (P_t, %) и темпов денежного агрегата М3 ($M3_t$, %), представляющего собой широкую денежную массу Республики Беларусь за период с 2003 по 2015 гг. [5]. Данные показатели в отдельные периоды времени характеризуются как сонаправленной, так и разнонаправленной динамикой. Период 2003–2008 гг. развития экономики Республики Беларусь можно назвать как межкризисный, для него присуща стабилизация инфляции, то есть ее периодическое увеличение и уменьшение. Всплеск инфляции наблюдался в мае и сентябре 2011 г. Начиная с декабря 2011 г., инфляционный процесс опять стабилизировался. В настоящее время понятно действие основных фундаментальных факторов инфляции в Республике Беларусь на качественном уровне, однако решающим показателем инфляции остается монетарный фактор.

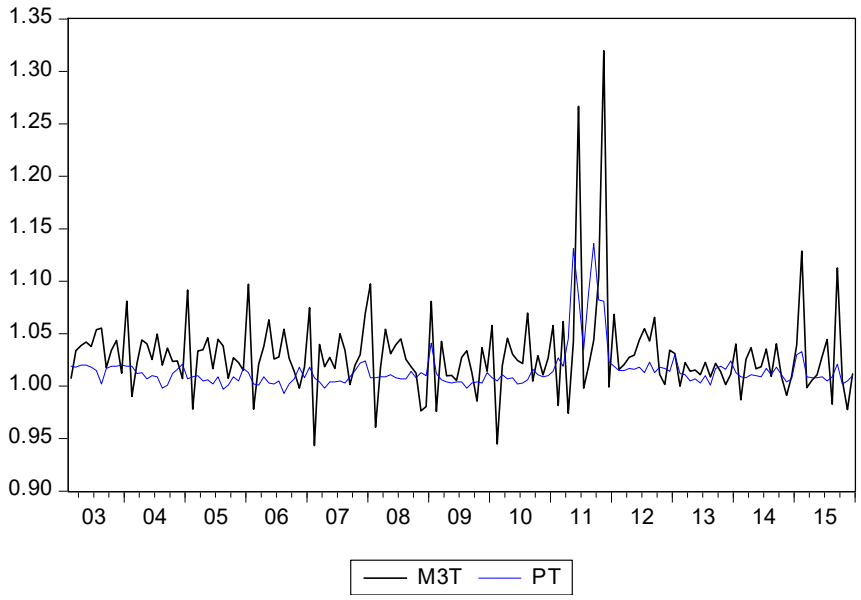


Рисунок 1 – Индекс потребительских цен (P_t, %) и темп денежного агрегата М3 ($M3_t$, %)

Взаимное влияния процессов при условии сдвига временных рядов $\{P_t\}$, $\{M3_t\}$ относительно друг друга на некоторый временной промежуток определялось с помощью кросскорреляционной функции. Значимыми коэффициентами кросскорреляции между P_t и $M3_t$ коэффициенты на лагах $k = 0, 1, 2, 3$ ($r_0 = 0{,}395$, $r_{-1} = 0{,}468$, $r_{-2} = 0{,}347$, $r_{-3} = 0{,}169$), следовательно, на отклик индекса потребительских цен на темп широкой денежной массы происходит с указанными лагами.

Оцененная модель с распределенными лагами Алмон имеет вид

$$p_t = 0{,}605 + 0{,}138\, m3_t + 0{,}112 m3_{t-1} + 0{,}086\, m3_{t-2} + 0{,}060\, m3_{t-3},\ R^2 = 0{,}432,$$
$$(7{,}783)\quad (4{,}532)\qquad (5{,}494)\qquad (4{,}190)\qquad (1{,}195)$$

где числа в скобках под коэффициентами обозначают соответствующие *t*-значения.

Так как краткосрочный мультипликатор равен 0,138, то увеличение темпа денежного агрегата М3 на 1 % ведет в среднем к росту индекса потребительских цен на 0,138 %. Долгосрочный мультипликатор составит 0,397, поэтому увеличение индекса широкой денежной массы в текущий момент времени на 1 % в долгосрочной перспективе (через три месяца) приведет к росту индекса потребительских цен на 0,397 %. При этом средний лаг равен 1,172 (чуть более месяца), что говорит об относительно быстром реагировании индекса потребительских цен на изменение темпа широкой денежной массы.

Для анализа денежного предложения и инфляции использовались официальные помесячные данные с января 2003 по декабрь 2015 [4]. Макроэкономические показатели, приводимые в отчетности с нарастающим итогом, преобразовывались в темпы прироста, затем для сглаживания временных рядов использовалось логарифмическое преобразование.

В качестве показателей, влияющих на инфляцию спроса, выделим следующие: $\ln_M3_t$ логарифм темпа прироста денежного агрегата М3, $\ln_E_t$ – логарифм темпа прироста номинального эффективного курса белорусского рубля, который характеризует импортируемую инфляцию, ln_vt – логарифм индекса промышленного производства как основного макроэкономического показтеля, $\ln_P_t$ – логарифм индекса потребительских цен. Проверка на стационарность осуществлялась по расширенному критерию Дики-Фуллера. Результаты тестов на стационарность показывают, что все переменные являются стационарными на 10 %, 5 %, 1 % уровне значимости, за исключением, $\ln_P_t$, которая I(1). Оцененная модель спроса на деньги имеет вид

$$\Delta\ln_M3_t = 0{,}027 - 1{,}317\, \ln_M3_{t-1} + 0{,}145\, \ln_Y_{t-1} + 0{,}529 \ln_E_{t-1} + 0{,}529 \Delta\ln_E_{t-1},$$
$$(8.561)\ (-18{,}805)\qquad (3{,}609)\qquad (8{,}460)\qquad (2{,}023)$$

$$R^2 = 0{,}73,\ F = 102.$$

На основании оценок уравнения можно вычислить показатель величины монетарного разрыва в экономике Республики Беларусь, представляющий собой основной фундаментальный фактор «инфляции спроса» (рисунок 2).

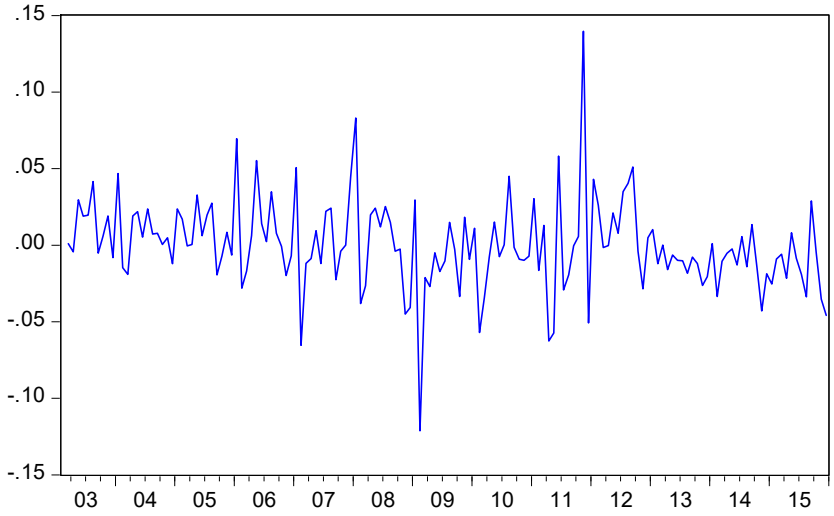


Рисунок 2 – Статистическая оценка монетарного разрыва спроса на деньги

На протяжении периода с 2003 по 2015 периода монетарный разрыв, согласно полученным статистическим оценкам, находился как в положительной, так и в отрицательной области. Это означает, что в первом случае монетарный фактор оказывал повышательное, а во втором случае – сдерживающее воздействие на цены.

Результаты теста по Гренжеру на 5 % уровне значимости предполагают, что на индекс потребительских цен $\ln_P_t$ оказывают влияние средние издержки на оплату труда $\ln_U_t$, номинальный эффективный обменный курс $\ln_E_t$ (импортируемая инфляция), розничный товарооборот $\ln_R_t$ (переменные U_t, $\ln_R_t$ также рассматриваются в темпах прироста) Средние издержки U_t определялись как (средняя номинальная заработная плата) (1 – уровень безработных)/(объем промышленного производства). Будем считать, что показатели $\ln_E_t$, $\ln_U_t$, $\ln_R_t$ в целом отражают динамику фактора предложений как компоненты предельных издержек производителей. Тест Йохансена на наличие коинтеграционного соотношения указывает на долгосрочную зависимость на уровне значимости 5 %. «Фактор спроса» инфляции есть отклонение фактической инфляции от «фактора предложения» в виде коинтеграционного соотношения

$$\ln_P_t^* = \ln_P_t + 0{,}234\ln_E_t - 0{,}578\ln_R_t - 0{,}034\ln_U_t.$$

Тогда оценка модели потребительской инфляции с учетом долгосрочного коинтеграционного соотношения запишется в виде

$$\Delta\ln_P_t^* = \underset{(2{,}67)}{0{,}004} + \underset{(2{,}168)}{0{,}003}\ln_P^*_{t-1} + \underset{(12{,}62)}{0{,}753}\,\Delta\ln_P_{t-1} + \underset{(2.87)}{0{,}0427}x_t,\ R^2 = 0{,}54,$$

где x_t – величина монетарного разрыва.

Прирост уровня потребительской инфляции $\Delta\ln_P^*_{t-1}$ можно рассматривать как показатель инфляционных ожиданий в экономике, которые в предполагаемой модели имеют инерционный характер.

Оцененные коинтеграционные соотношения VAR модели между $\ln_M3_t$, $\ln_E_t$ и $\ln_P_t$ имеют вид

$$\ln_M3_t = \underset{(6{,}001)}{0{,}0252} - \underset{(-4{,}79)}{0{,}386}\ln_m3_{t-1} - \underset{(5{,}512)}{0{,}393}\ln_E_{t-1} + \underset{(3{,}261)}{0{,}816}\ln_P_{t-2},$$

$$\ln_P_t = \underset{(2{,}676)}{0{,}004} - \underset{(8{,}036)}{0{,}778}\ln_P_{t-1} - \underset{(-3{,}855)}{0{,}123}\ln_M3_{t-1} - \underset{(-2{,}075)}{0{,}064}\ln_E_{t-2},$$

$$\ln_E_t = \underset{(2{,}169)}{0{,}0122} + \underset{(2{,}383)}{0{,}779}\ln_P_{t-1} - \underset{(-2{,}476)}{0{,}874}\ln_P_{t-2} - \underset{(-4{,}483)}{0{,}486}\ln_M3_{t-1} - \underset{(-2{,}637)}{0{,}286}\ln_\mathrm{M3}_{t-2}.$$

Объясняющая способность модели, составляет 45,64 %, значит, укрепление/обесценивание рубля по отношению к иностранным валютам на 1 % ведет к снижению/увеличению денежной массы на 0,393 %. Оцененный долгосрочный эффект переноса инфляции на широкую денежную массу составляет 0,816 %.

Краткосрочные эффекты процесса «инфляция – широкая денежная масса» можно оценить через коэффициенты модели коррекции ошибок, характеризующие процентное отклонение исследуемой зависимой переменной от долгосрочного значения, которое корректируется каждым периодом (месяцем). Модель коррекции ошибок есть

$$\Delta \ln_M3_t = 1{,}116 - 0{,}323 \ln_P_{t-1},$$
$$(7.955)\ \ (-2{,}143)$$

$$\Delta \ln_P_t = 0{,}164 - 0{,}375 \Delta \ln_P_{t-1} - 0{,}372 \Delta \ln_P_{t-2} + 0{,}052\ \Delta \ln_M3_{t-1}.$$
$$(3{,}252)\ \ (-3.695) \qquad (-3.958) \qquad (2{,}95)$$

Долгосрочное коинтеграционное уравнение примет вид

$$Z_t = \ln_P_t - 1{,}379 \ln_\mathrm{M3}_t.$$
$$(-11{,}613)$$

Следовательно, действуют долгосрочные механизмы корректировок факторов «спроса» и «предложения» инфляции, причем указанные механизмы разнонаправлены.

Таким образом, выявлена долгосрочная и краткосрочная зависимость между фактором «спроса» (фактически индексом потребительских цен) на фактор «предложения» (фактически денежный агрегат М3).

Заключение. В результате проведенных исследований построена модель с распределенными лагами зависимости индекса потребительской инфляции от индекса широкой денежной массы. Показано, что эффект роста индекса денежного агрегата М3 проявляется более чем через полтора месяца. Предложены эконометрические модели «инфляции спроса» и «инфляции предложения». Построена модель инфляции и широкой денежной массы для долгосрочного равновесия. Оценена модель коррекции ошибок для учета краткосрочных эффектов.

Литература

1. Абакумова Ю.Г. Анализ функционирования канала банковского кредитования трансмиссионного механизма денежно-кредитного регулирования / Ю.Г. Абакумова, С.Ю. Бокова // Экономика и управление. – 2012. – № 2. – С. 55–61.

2. Зарецкий, А. Краткосрочное прогнозирование инфляции в Беларуси / А. Зарецкий. – Рабочий материал исследовательского центра ИПМ. – 2013. – 23 с.

3. Пелипась, И. Деньги как опережающий индикатор инфляции в Беларуси и их роль в монетарной политике / И. Пелипась, Р. Кирхнер // Аналитические записки [РР/05/2015]. – Центр ИПМ, 2015. – 28 с.

4. Поршаков, А.С. Статистический анализ монетарного фактора инфляции в России: автореф. дис. … канд. экон. наук : 08.00.12 / А.С. Поршаков. – М., 2011. – 23 с.

5. Официальный сайт Национального банка Республики Беларусь. – 2016. – Режим доступа : http://nbrb.by/publications/bulletin/. – Дата доступа : 10.11.2016.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 17.11.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 512.542

О *p*-сверхразрешимости конечных групп с заданными *s*-добавлениями к ее подгруппам

Н.С. Косенок

Подгруппа H группы G называется s-добавляемой в G, если существует подгруппа K из G такая, что $G = HK$ и $K/K \cap H_G$. В данной статье нами найден новый критерий p-сверхразрешимости группы в зависимости от условия s-добавляемости некоторых ее подгрупп.
Ключевые слова: сверхразрешимые группы, s-добавляемость подгрупп.

A subgroup H of G is called s-supplemented in G if there exists a subgroup K of G such that $G = HK$ and $K/K \cap H_G$. A new criterion for p-supersolvability of a group depending on the conditions of s-supplemented of some of its subgroups was found.
Keywords: supersolvability groups, s-supplemented subgroup.

1. Введение. Наряду с изучением максимальных подгрупп основной группы во многих исследованиях с успехом реализовалась идея изучения группы с заданными максимальными подгруппами тех или иных собственных подгрупп. Один из интересных подходов в этом направлении связан с изучением максимальных подгрупп силовских подгрупп. Начало этому направлению в теории групп было положено в работе Б. Хупперта [1], где была доказана сверхразрешимость конечной разрешимой группы G при условии, что все максимальные подгруппы силовских подгрупп из G перестановочны со всеми членами некоторой фиксированной силовской базы группы G. Несколько позднее Сринивазан установил сверхразрешимость произвольной конечной группы, у которой все такие подгруппы нормальны [2]. В работе [3] Ванг доказал, развивая последний результат, что заключение в теореме Сринивазана не меняется, если в ней условие нормальности заменить на более слабое условие c-нормальности (напомним, что подгруппа H группы G c-нормальна в G [3], если G имеет такую нормальную подгруппу T, что $G=HT$ и $T\cap H\subseteq H_G=\bigcap_{x\in G} H^x$. В работе [4] была доказана сверхразрешимость конечной группы G при условии, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G дополняемы в G. В работе [5] было доказано, что конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая неинвариантная в G максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из G обладает сверхразрешимым добавлением в G.

Данная статья посвящена дальнейшему развитию этих результатов.

2. Предварительные сведения. В книге Л.А.Шеметкова [6] символом $\tilde{F}(G)$ обозначена подгруппа, которая определяется следующим образом:

1) $\Phi(G) \subseteq \tilde{F}(G)$;

2) $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$ – цоколь группы $G/\Phi(G)$, т. е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.

В работе [5] было доказано, что группа G сверхразрешима, если любая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $\tilde{F}(G)$ обладает сверхразрешимым добавлением. В данной работе мы расширяем этот результат до класса p-сверхразрешимых групп.

Лемма 1. *Пусть N и L – нормальные подгруппы группы G такие, что P/L является силовской p-подгруппой в NL/L, и M/L – максимальная подгруппа в P/L. Если P_p – силовская p-подгруппа в $P\cap N$, то P_p – силовская p-подгруппа в N такая, что $D=M\cap N\cap P_p$ является максимальной подгруппой P_p и $M=LD$.*

Доказательство. Так как $P\leq NL$ и $L\leq P$, то $P=P\cap NL=L(P\cap N)$. Из этого следует, что

$$P/L=L(P\cap N)/L\simeq(P\cap N)/(L\cap N\cap P)=(P\cap N)/(L\cap N)\leq N/(L\cap N).$$

Ясно, что

$$|NL/L|=|N/L\cap N|,\ |P/L|=|(P\cap N)/(L\cap N)|,$$

и так как P/L – силовская p-подгруппа NL/L, мы видим что $|N/(L\cap N) : (P\cap N)/(L\cap N)|$ не делится на p. Это показывает, что $(P\cap N)/(L\cap N)$ – силовская p-подгруппа в $N/(L\cap N)$. Аналогично, ввиду того, что $M/L=(M\cap N)L/L\simeq(M\cap N)/(L\cap N)$,мы имеем

$$|NL/L:M/L|=|N/(L\cap N):(M\cap N)/(L\cap N)|.$$

Но $(M\cap N)/(L\cap N)\leq(P\cap N)/(L\cap N)$, это показывает, что $(M\cap N)/(L\cap N)$ – максимальная подгруппа в $(P\cap N)/(L\cap N)$. Пусть P_p–силовская p-подгруппа в $P\cap N$. Тогда

$$P_p(L\cap N)/(L\cap N)=(P\cap N)/(L\cap N).$$

Так как p не делит $|N/(L\cap N):(P\cap N)/((L\cap N)|$, то P_p – силовская p-подгруппа группы N. Поскольку

$$M\cap N=M\cap N\cap P_p(L\cap N)=(L\cap N)(M\cap N\cap P_p),$$

мы имеем

$$p=|(P\cap N)/(L\cap N):(M\cap N)/(L\cap N)|=|(P\cap N):(M\cap N)|=|P_p(L\cap N):(L\cap N)(M\cap N\cap P_p)|=$$

$$=\frac{|P_p(L\cap N)|}{|(L\cap N)(M\cap N\cap P_p)|}=\frac{|P_p||L\cap N||L\cap N\cap M\cap N\cap P_p|}{|L\cap N||M\cap N\cap P_p||P_p\cap L\cap N|}=\frac{|P_p|}{|M\cap N\cap P_p|}$$

Это показывает, что $D=M\cap N\cap P_p$ – максимальная подгруппа в P_p. Из выше сказанного мы также видим, что $M\cap N=(L\cap N)D$, и поэтому $M=M\cap LN=L(M\cap L)=L(L\cap N)D=LD$.

Лемма доказана.

Лемма 2 [6]. Пусть N – нормальная подгруппа группы G такая, что факторгруппа $N/N\cap\Phi(G)$ нильпотентна. Тогда N также нильпотентна.

Лемма 3 [7]. Пусть $N\leq \mathrm{Soc}(G)$, где $N\trianglelefteq G$. Тогда существует нормальная подгруппа T в G такая, что $(G)=N\times T$.

Лемма 4 [8]. Пусть H/K – главный фактор группы G. Тогда $\mathrm{F}(G)\subseteq \mathrm{C}_G(H/K)$.

Лемма 5 [8]. Пусть G – разрешимая группа. Тогда $\mathrm{C}_G(\mathrm{F}(G))\subseteq \mathrm{F}(G)$.

3. Основной результат. Назовем подгруппу H группы G s-добавляемой в G, если существует подгруппа K из G такая, что $G=HK$ и $K/K\cap H_G$.

Теорема 1. *Пусть G – разрешимая группа, которая содержит неединичную нормальную подгруппу N с сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из* $\mathrm{F}(N)$, *не являющаяся нормальной в G, имеет p-сверхразрешимое s-добавление в G, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что эта теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

Сначала покажем, что условие теоремы выполняется для факторгруппы G/Φ, где $\Phi=\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини в G. Рассмотрим $T/\Phi=\mathrm{F}(N\Phi/\Phi)$ Тогда

$$T=T\cap N\Phi=\Phi(T\cap N).$$

Так как T/Φ – нильпотентная нормальная подгруппа в G/Φ, то по лемме 2, T – нильпотентная нормальная подгруппа в G. Следовательно, $T\cap N\leq \mathrm{F}(N)$. С другой стороны, поскольку

$$\mathrm{F}(N)/\mathrm{F}(N)\cap\Phi \simeq \mathrm{F}(N)\Phi/\Phi\leq \mathrm{F}(N\Phi/\Phi),$$

мы имеем $\mathrm{F}(N)\subseteq T$. Следовательно, $T\cap N = \mathrm{F}(N)$. И таким образом,

$$\mathrm{F}(N\Phi/\Phi) = T/\Phi = (T\cap N)\Phi/\Phi = \mathrm{F}(N)\Phi/\Phi.$$

Теперь пусть P/Φ – силовская p-подгруппа группы T/Φ, и пусть M/Φ – максимальная подгруппа в P/Φ и P_p – силовская p-подгруппа в $P\cap\mathrm{F}(N)$. Тогда по лемме 1, P_p – силовская p-подгруппа в $\mathrm{F}(N)$, и $L=M\cap\mathrm{F}(N)\cap P_p$ – максимальная подгруппа в P_p. По условию подгруппа L либо нормальна в G, либо L имеет p-сверхразрешимое s-добавление T в G. По лемме 1, мы имеем, что $M = \Phi L$. Если L – нормальная подгруппа в G, то $L\Phi$ нормальна в G, и $M/\Phi = \Phi/\Phi$ нормальна в G/Φ. Если L имеет p-сверхразрешимое s-добавление T в G, то очевидно подгруппа $T\Phi/\Phi$ является p-сверхразрешимым s-добавлением к $L\Phi/\Phi$ в G/Φ. Таким образом, группа G/Φ имеет нормальную подгруппу $N\Phi/\Phi$ такую что каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $\mathrm{F}(N\Phi/\Phi) = \mathrm{F}(N)\Phi/\Phi$ либо имеет p-сверхразрешимое s-добавление в G/Φ, либо она нормальна в G/Φ. Поскольку

$$(G/\Phi)/(N\Phi/\Phi) \simeq G/N\Phi \simeq (G/N)/(N\Phi/N)$$

– сверхразрешимая группа, мы видим, что условие теоремы все еще выполняется для G/Φ.

Если $\Phi\neq 1$, то $|G/\Phi| < |G|$ и поэтому G/Φ p-сверхразрешима, по выбору группы G. Следовательно, G p-сверхразрешима . Это противоречит нашему предположению о G. Следовательно, $\Phi(G) = 1$, и по лемме 3, $\mathrm{F}(G) = R_1\times R_2\times\ldots\times R_t$, где R_1, R_2, …, R_t – минимальные нормальные подгруппы группы G. Пусть M_i – максимальная подгруппа R_i, $i=1, 2, \ldots, t$. Предположим, что для некоторого индекса i, мы имеем $|M_i| \neq 1$. Также мы допустим, что $R_i \not\subseteq N$. Тогда NR_i/N – главный фактор сверхразрешимой группы G/N, и поэтому $|NR_i/N|$ – простое число. Но $R_i \simeq NR_i/N$, и поэтому мы видим, что $M_i = 1$. Это противоречие показывает, что $R_i \leq N$. Пусть теперь R_i– q-группа и R – силовская q-подгруппа в $\mathrm{F}(N)$. Так как $N \trianglelefteq G$ и $\mathrm{F}(G)$ char N, мы видим, что $\mathrm{F}(N)$ нормальна в G. Следовательно, $R \trianglelefteq G$, поскольку R char $\mathrm{F}(N)$. Применяя лемму 3, мы видим, что $R= R_i\times D$ для некоторой нормальной подгруппы D из G. Пусть $M=M_iD$. Так как $|R:M|=|R_i:M_i|=q$, то M – максимальная подгруппа в R. Если $M \trianglelefteq G$, то

$$M\cap Ri=MiD\cap Ri=Mi(Ri\cap D) = Mi \trianglelefteq G,$$

и $|M_i| = 1$. Это противоречие показывает, что M ненормальна в G и, следовательно, M имеет p-сверхразрешимое s-добавление T в G.

Теперь докажем, что $M_G=D$. Действительно, $D \leq M_G$, и $M_G = M_G\cap M_iD=D(M_i\cap M_G)$. Предположим, что $M_i\cap M_G \neq 1$. Тогда $M_G\cap R_i \neq 1$, следовательно, $R_i \leq M_G$, ввиду минимальности R_i. Таким образом,

$$R_i = R_i \cap M_iD = M_i(R_i\cap D) = M_i,$$

противоречие. Таким образом, $M_G=D$ и $T/T\cap M_G=T/T\cap D$ –p-сверхразрешимая группа. Но $T\cap D \leq T\cap R$, и поэтому $T/T\cap R\simeq TR/R=TM/R=G/R$ – p-сверхразрешимая группа. Если $q\neq p$, то R – p'-группа, и G – p-сверхразрешима. Это противоречит выбору группы G. Следовательно, R –

силовская p-подгруппа F(N). Без потери общности, мы можем предположить что i=1 и что $R=R_1\times R_2\times\ldots\times R_n$, где $D=R_2\times\ldots\times R_n$.

Теперь докажем, что n ≥ 3. Действительно предположим, что $R=R_1\times R_2$. Если $R_1\leq T$, то $TM=TR_2$, и $G/R_2=TR_2/R_2\simeq T/T\cap R_2$ – p-сверхразрешимая группа. Это означает, что $R_1\simeq R_1R_2/R_2$ – группа простого порядка, что противоречит нашему выбору подгруппы R_1. Следовательно, $R_1\not\leq T$. Если $R_2\leq T$, то $TM=TM_1=G$ и, следовательно, $|G:T|\leq|M_1|<|R_1|$. Но $R_1T=G$ и $|G:T|=|R_1|$. Это противоречие показывает что $R_2\not\leq T$. С другой стороны, если $R_1R_2\cap T=1$, то $G=TM_1R_2=TR_1R_2$ и мы имеем $|G:T|=|R_1||R_2|$. Но из того, что $TM_1R_2=G$ мы получаем, что $|G:T|\not\leq|M_1||R_2|<|R_1||R_2|$, противоречие. Следовательно, $\Delta=R_1R_2\cap T\neq 1$. Поскольку R_1R_2 – абелева группа, то $\Delta=R_1R_2\cap T$ – нормальная подгруппа в G. Пусть R_j – минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в Δ. Поскольку $R_1\not\leq T$, $R_2\not\leq T$ и $R_j\leq T$, мы видим, что $R_j\neq R_1$, и $R_j\neq R_2$. Следовательно, $P=R_1R_2=R_jR_2$, и $P/R_2\simeq R_1\simeq R_j$. Аналогично мы можем доказать, что $R_1\simeq R_2$. Мы также заметим, что

$$\Delta=\Delta\cap R_1R_2=\Delta\cap R_1R_j=R_j(\Delta\cap R_1)=R_j.$$

Следовательно,

$$|G|=\frac{|T||R_1R_2|}{|T\cap R_1R_2|}=\frac{|T||R_1||R_2|}{|R_j|}=|T||R_1|$$

и $|G:T|=|R_1|$. Пусть $E=R_1T$. Предположим, что $E\neq G$. Тогда $|G:T|=|E:T||G:E|>|R_1|$, противоречие. Следовательно, $E=G=R_1T$. Пусть $L=R_2\cap T$. Тогда $L\trianglelefteq T$ и $L\trianglelefteq R_1R_2$. Но $G=TMR_2$ и $L\trianglelefteq G$. Учитывая, что $R_2\not\leq T$, мы имеем, что $L\neq R_2$. Следовательно, $L=1$, и $G/R_1\simeq T/R_1\cap T\simeq T$ – p-сверхразрешимая группа. Но R_2R_1/R_1 – минимальная нормальная p-подгруппа в G/R_1 и $|R_2|=|R_1|=p$. Это противоречие показывает, что n ≥ 3 .

Рассуждая как выше, видим, что $R_1\not\leq T$ и $T/T\cap R_2\ldots R_n$ – p-сверхразрешимая группа. Предположим, что $\Delta\not\leq T$ для каждой минимальной нормальной подгруппы Δ из G, содержащейся в $R_2\ldots R_n$. Тогда, очевидно, $T\cap R_2\ldots R_n=1$ и, следовательно, $|G:TR_2\ldots R_n|\leq|M_1|$. Ясно, что $TR_2\ldots R_n\neq G$. Но так как $R_1TR_2\ldots R_n=G$, мы имеем $|G:TR_2\ldots T_n|=|R_1|$, противоречие. Следовательно, найдется такая минимальная нормальная подгруппа Δ_1 в G, что $\Delta_1\leq T\cap R_2\ldots R_n$. Заметим, что поскольку

$$\bigcap_{i=1}^{n}R_2\ldots R_{i-1}R_{i+1}=1,$$

то найдется индекс j такой, что

$$R_2\ldots R_{j-1}R_jR_{j+1}\ldots R_n=R_2\ldots R_{j-1}\Delta_1R_{j+1}\ldots R_n.$$

Таким образом мы можем предполагать, без потери общности, что найдется индекс 2≤i<n такой, что $R_2,\ldots,R_{i-1}\leq T$ и что для каждой минимальной нормальной подгруппы Δ_2 из G содержащейся в $R_i\ldots R_n$, имеет место $\Delta_2\not\leq T$. Это, в частности означает, что $T\cap R_i\ldots R_n=1$. Теперь пусть $\Delta_3=R_1R_i\ldots R_n\cap T$. Предположим, что $\Delta_3=1$. Тогда

$$G=TR_1\ldots R_n=TR_1R_i\ldots R_n,$$

что влечет

$$|G:T|=|R_1||R_i|\ldots|R_n|.$$

С другой стороны,

$$G=TM_1R_2\ldots R_n=TM_1R_i\ldots R_n,$$

что влечет

$$|G:T|\leq|M_1||R_i|\ldots|R_n|,$$

противоречие. Следовательно, $\Delta_3\neq 1$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в Δ_3. Поскольку $L\leq T$, то $L\not\leq R_i\ldots R_n$. Но $L\leq R_1R_i\ldots R_n$ и поэтому $LR_i\ldots R_n=R_1R_i\ldots R_n$, что влечет

$$G=TR_1R_2\ldots R_n=R_2\ldots R_iTR_1R_i\ldots R_n=R_2\ldots R_iTLR_i\ldots R_n=R_2\ldots R_iTR_i\ldots R_n=TR_i\ldots R_n.$$

Следовательно, $G/R_i\ldots R_n\simeq T/(T\cap R_i\ldots R_n)$ – p-сверхразрешимая группа. Это означает, что $R_1\simeq R_1R_i\ldots R_n/R_i\ldots R_n$ – группа простого порядка, противоречие.

Таким образом, мы видим, что для каждого i=1, 2,…t группа R_i имеет простой порядок. Теперь не трудно показать, что $G/C_G(R_i)$ – абелева группа. Пусть

$$C=\bigcap_{i=1}^{t}C_G(R_i).$$

Тогда ясно, что $C=C_G(F(G))$. По лемме 4 $F(G)\leq C$. Но из леммы 5, мы имеем, что $C\leq F(G)$ и, следовательно, $C=F(G)$ и $G/F(G)$ – абелева группа. Это показывает, что каждая максимальная подгруппа M из G, содержащая $F(G)$, является нормальной в G и, следовательно, $|G:M|$ – простое число. С другой стороны, если M – максимальная подгруппа в G такая, что $F(G)\not\subseteq M$, тогда $G=R_iM$ для некоторого $i\in\{1,2,\ldots,t\}$, и $|G:M|=|R_i|$ является простым числом (так как R_i – абелева минимальная нормальная подгруппа в G). Таким образом, группа G – сверхразрешима. Это противоречие заканчивает доказательство теоремы.

Литература

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. –Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967. – 793 p.

2. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1990. – V. 35. – P. 210–214.

3. Wang, Y. c-Normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – № 180. – P. 954–965.

4. Wang, Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented / Y. Wang // J. Algebra. – 2000. – № 224. – P. 467–478.

5. Веньбинь, Го. G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп / Го Веньбинь, К.П. Шам, А.Н. Скиба // Сиб. мат. журнал. – 2004. – № 3. – С. 527–539.

6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

7. Шеметков, Л.А.Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.

8. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.

Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации

Поступила в редакцию 02.11.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 514.765.1

Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли

Н.П. Можей

Представлена локальная классификация трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность, рассмотрен случай разрешимой группы Ли преобразований. Описаны все инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда связность нормальна.
Ключевые слова: нормальная связность, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

Local classification of three-dimensional reductive homogeneous spaces which admit a normal connection is presented. The case when Lie group of transformations is solvable is considered. All invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections are described. The holonomy algebras of homogeneous spaces are studied and it is found when the connection is normal.
Keywords: normal connection, reductive space, transformation group, holonomy algebra.

Введение. В дифференциальной геометрии и ее приложениях изучаются редуктивные пространства, обобщающие римановы глобально симметрические пространства. Среди редуктивных однородных пространств широкий класс образуют пространства с разрешимой группой преобразований, которые и рассматриваются в работе. Исследование таких пространств существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых групп, не разработана структурированная теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах независимо изучались П.К. Рашевским, М. Куритой, Э.Б. Винбергом, а также Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многообразия (см. [2]). Многообразия с плоской нормальной связностью исследовали Д.И. Перепелкин, Ф. Фабрициус-Бьерре, итоги этих исследований подведены в работе Б. Чена [3].

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, (M, $\overline{G}$) – однородное пространство, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\overline{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\overline{G}$, G), где $G \subset \overline{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\overline{G} / G$ (см., например, [4]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\overline{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, т. е. достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\overline{G}$ на многообразии M. Пусть $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\overline{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\overline{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x)+\mathfrak{g}$ для всех $s \in G, x \in \overline{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$:

$$x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y]+\mathfrak{g} \text{ для всех } x \in \mathfrak{g}, y \in \overline{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$, $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\overline{G}$ эффективна на $\overline{G}/G$ [1].

Пусть $M = \overline{G}/G$ – однородное пространство, на котором связная группа $\overline{G}$ действует транзитивно и эффективно. Пространство $\overline{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно (например, [5]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \overline{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если $\overline{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G точное.

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda\big|_{\mathfrak{m}} = 0$, называется *канонической связностью* (относительно разложения $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Для канонической связности каждая геодезическая, исходящая из o, имеет вид $f_t(o)$, где $f_t = \exp(tx)$, $x \in \mathfrak{m}$. Каждое редуктивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$, $x, y \in \mathfrak{m}$. Такая связность называется *естественной связностью без кручения* (относительно разложения $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью первого рода*.

Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \text{ для всех } x, y \in \overline{\mathfrak{g}}.$$

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \overline{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \overline{\mathfrak{g}}\}$. Первоначально $\mathfrak{a}$ была введена в римановом случае Б. Костантом и использовалась А. Лихнеровичем и Г. Ваном в более общей ситуации. Если $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, то $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Будем говорить, что связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

Классификация редуктивных однородных пространств. Будем описывать пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\overline{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \overline{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [6], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема. Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\overline{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ разрешимы, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

2.9.1.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

2.20.18, $\alpha = 0$.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	$-u_1$	$-u_2$	0

2.21.1.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

2.9.2 совпадает с 2.9.1, за исключением $[u_1, u_3] = u_2$,

2.9.4, $\mu = 0, -1$.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	0	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	0	u_3	0

2.9.5, 2.9.6.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$\pm e_2$
u_2	0	0	0	0	αu_2
u_3	0	$-u_1 \mp e_2$		$-\alpha u_2$	0

$\alpha \geq 0$,

2.9.7.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-u_2$	0

2.17.2, 2.17.3.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	$\pm e_1$
u_2	0	0	0	0	αe_2
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$\mp e_1$	$-\alpha e_2$	0

Пара	*Совпадает с 2.17.2, за исключением*
2.17.4	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 - e_2, [u_2,u_3] = e_1 + \alpha e_2, \alpha \geqslant 0$
2.17.6, 2.17.7	$[u_1, u_3] = \pm e_1, [u_2, u_3] = e_1 + e_2$
2.17.8	$[u_1, u_3] = \delta e_1 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_2 + \alpha u_2, -1 < \alpha < 1$
2.17.9	$[u_1, u_3] = \delta e_1 + e_2 + u_1, [u_2, u_3] = \gamma e_1 + \beta e_2 + \alpha u_1, -1 < \alpha < 1$
2.17.10	$[u_1, u_3] = \delta e_1 + u_1, [u_2, u_3] = e_1 + \beta e_2 + \alpha u_2, -1 < \alpha < 1$
2.17.13, 2.17.14	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 - e_2, [u_2, u_3] = \alpha e_2 + u_1$
2.17.15	$[u_1, u_3] = \alpha e_1, [u_2, u_3] = e_1 + \alpha e_2 + u_1$
2.17.17	$[u_1, u_3] = e_2, [u_2, u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1$
2.17.18	$[u_1, u_3] = \gamma e_2 + u_1, [u_2, u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1 + u_2$
2.17.19	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_2 + u_1 + u_2$
2.17.20	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_1 + \alpha e_2 + u_1 + u_2$
2.17.21	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2, u_3] = e_1 + \alpha e_2 + u_2$
2.17.22	$[u_1, u_3] = \alpha e_1 - \beta e_2 + u_1, [u_2, u_3] = \beta e_1 + \alpha e_2 + u_2, \beta > 0$
2.17.23	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2,u_3] = \beta e_2 + u_2, \lvert\alpha\rvert \leqslant \lvert\beta\rvert$
2.17.24	$[u_1,u_3] = \delta e_1 + \gamma e_2 + \alpha u_1 - u_2, [u_2,u_3] = \beta e_1 + \delta e_2 + u_1 + \alpha u_2, \lvert\beta\rvert \lessgtr \lvert\gamma\rvert$
2.17.25	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 + u_1, [u_2,u_3] = \beta e_2 - u_2, \lvert\alpha\rvert \trianglelefteq \lvert\beta\rvert$
2.17.26	$[u_1,u_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + u_1, [u_2,u_3] = e_1 + \gamma e_2 - u_2, -1 \leqslant \beta \leqslant 1$

Для получения этого результата из пар, указанных в [7], находим редуктивные, т. е. для которых существует разложение $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. В теореме выписаны именно такие пары, причем с каноническим разложением.

Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, находим канонические связности, а также естественные связности без кручения. Рассмотрим, например, пару 2.9.1 при $\lambda = 0$, $\mu = -1$. Тогда аффинная связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кручения – $\left(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0\right), \left(0, 2p_{2,3}, 0\right), \left(0, 0, q_{1,1} - p_{1,2}\right)$, связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $q_{2,2} = -2q_{1,1}$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

У пары 2.9.2 ($\mu = -1$) связность совпадает с выписанной для 2.9.1, тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} - q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} - q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} - q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения – $\left(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0\right), \left(0, 2p_{2,3} - 1, 0\right), \left(0, 0, q_{1,1} - p_{1,2}\right)$. Связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} \neq 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, либо при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} = 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 2.9.4 при $\mu = -1$ связность совпадает с 2.9.1. Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} - p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} - p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} + p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения – $\left(p_{1,2} - q_{1,1} - 1, 0, 0\right), \left(0, 2p_{2,3}, 0\right), \left(0, 0, q_{1,1} - p_{1,2} + 1\right)$. Связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} = 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

2.21.1. При $\lambda = 0$ аффинная связность и тензор кривизны соответственно:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{\,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{\,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^{\,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения – $\left(2p_{1,2},0,0\right),\left(0,2p_{1,2},0\right),\left(0,0,2p_{1,2}\right)$, связность нормальна при $p_{1,2}\neq 0$, тогда алгебра голономии

$$\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пару 2.17.2. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

связность нормальна при $a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$, алгебра голономии

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У перечисленных ниже пар связность такая же, как в случае 2.17.2.

Пара	Аффинная связность нормальна при
2.17.3.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.4.	$p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.6.	$p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.7.	$p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.8.	$b\neq 0$, $\delta\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.9.	$b\delta\neq\gamma$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.10.	$b\delta\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.13.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.14.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.15.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$,
2.17.17.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.18.	$a\delta\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.19.	$ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.20.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.21.	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.22.	$a^2+b^2\neq 0$ (всегда, т. к. $b>0$), $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.23.	$ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.24.	$\delta^2\neq bc$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.25.	$ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.26.	$b\neq ac$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$

Аналогично, у указанных пар алгебра голономии совпадает с выписанной в случае 2.17.2. Аффинные связности на остальных пространствах имеют вид:

Пара	Аффинная связность
2.20.18 при α=0.	$\begin{pmatrix}0 & p_{12} & p_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12} & q_{13}\\ 0 & q_{11}+p_{12} & p_{13}\\ 0 & 0 & q_{11}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ 0 & r_{11} & 0\\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13}\end{pmatrix}$
2.9.5, 2.9.6, 2.9.7	$\begin{pmatrix}0 & p_{12} & p_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}q_{11} & 0 & 0\\ 0 & q_{22} & q_{23}\\ 0 & 0 & q_{11}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}r_{11} & 0 & 0\\ 0 & r_{22} & r_{23}\\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13}\end{pmatrix}$

Тензоры кривизны и кручения на этих редуктивных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
2.20.18 при $a = 0$.	$\begin{pmatrix}0 & p_{12}^2 & p_{12}p_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & p_{12}p_{13}-p_{12} & p_{13}^2-p_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-q_{11} & q_{13}p_{12}-r_{12}p_{12}-q_{12} & q_{13}p_{13}-r_{12}p_{13}-q_{13}\\ 0 & p_{12}p_{13}-q_{11}-p_{12} & p_{13}^2-p_{13}\\ 0 & -p_{12}^2 & -p_{12}p_{13}-q_{11}\end{pmatrix}$,
2.9.5.	$\begin{pmatrix}0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2-1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-aq_{11} & 0 & 0\\ 0 & p_{12}q_{23}-aq_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-aq_{23}\\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-aq_{11}\end{pmatrix}$,
2.9.6	$\begin{pmatrix}0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2+1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-aq_{11} & 0 & 0\\ 0 & p_{12}q_{23}-aq_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-aq_{23}\\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-aq_{11}\end{pmatrix}$,
2.9.7	$\begin{pmatrix}0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-q_{11} & 0 & 0\\ 0 & p_{12}q_{23}-q_{22} & q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-q_{23}\\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-q_{11}\end{pmatrix}$,
Пара	Тензор кручения
2.20.18 при α = 0.	$(p_{12}-q_{11},0,0)$, $(p_{13}-r_{11}-1,0,0)$, $(q_{13}-r_{12},p_{13}-r_{11}-1,q_{11}-p_{12})$
2.9.5, 2.9.6.	$(p_{12}-q_{11},0,0)$, $(p_{13}-r_{11},0,0)$, $(0,q_{23}-r_{22}-a,q_{11}-p_{12})$
2.9.7.	$(p_{12}-q_{11},0,0)$, $(p_{13}-r_{11},0,0)$, $(0,q_{23}-r_{22}-1,q_{11}-p_{12})$

Связность является канонической, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая, а также, когда связность является естественной связностью без кручения:

	Связность имеет те же геодезические, что и каноническая	Естественная связность без кручения
2.9.1	$q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$	$p_{12} = 0$, $p_{23} = 0$, $q_{11} = 0$, $q_{22} = 0$
2.9.2	$q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$	$p_{12} = 0$, $p_{23} = 1/2$, $q_{11} = 0$, $q_{22} = 0$
2.9.4 при μ = 0	$q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$, $r_{22} = -q_{23}$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{23} = 0$	$p_{12} = 1/2$, $q_{11} = -1/2$, $p_{13} = r_{23} = q_{22} = q_{23} = r_{11} = r_{22} = 0$
2.9.4 при μ = -1	$q_{11} = -p_{12}$, $q_{22} = 0$	$p_{12} = 1/2$, $p_{23} = 0$, $q_{11} = -1/2$, $q_{22} = 0$
2.9.5–2.9.6	$q_{11} = -p_{12}$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}$, $q_{22} = r_{23} = 0$	$p_{12} = p_{13} = q_{11} = q_{22} = 0$, $q_{23} = a/2$, $r_{11} = 0$, $r_{22} = -a/2$, $r_{23} = 0$
2.9.7	$q_{11} = -p_{12}$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}$, $q_{22} = r_{23} = 0$	$p_{12} = p_{13} = q_{11} = q_{22} = 0$, $q_{23} = 1/2$, $r_{11} = 0$, $r_{22} = -1/2$, $r_{23} = 0$
2.17.2–2.17.4	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$

Окончание таблицы

2.17.6, 2.17.7	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.8, 2.17.10	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = q_{13} = 0, q_{23} = a/2, r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.9	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = 0, q_{13} = a/2, q_{23} = 0, r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.13–2.17.15	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = 0$, $q_{13} = 1/2$, $q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.17	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = p_{23} = 0$, $q_{13} = 1/2$, $q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.18–2.17.20	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2$, $p_{23} = 0$, $q_{13} = 1/2$, $q_{23} = 1/2$, $r_{11} = -1/2$, $r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.21–2.17.23	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2, p_{23} = q_{13} = 0, q_{23} = 1/2, r_{11} = -1/2, r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.24	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = a/2$, $p_{23} = -1/2$, $q_{13} = 1/2$, $q_{23} = a/2$, $r_{11} = -a/2$, $r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.25–2.17.26	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$	$p_{13} = 1/2$, $p_{23} = q_{13} = 0$, $q_{23} = -1/2$, $r_{11} = -1/2$, $r_{13} = r_{23} = 0$
2.20.18 при $\alpha = 0$	$q_{11} = -p_{12}$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{12} = -q_{13}$, $q_{12} = r_{13} = 0$	$p_{12} = 0, p_{13} = 1/2, q_{11} = q_{12} = q_{13} = 0, r_{11} = -1/2, r_{12} = r_{13} = 0$
2.21.1	p_{12} – любое	$p_{12} = 0$

Заключение. Таким образом, найдены трехмерные редуктивные однородные пространства с разрешимой группой преобразований, инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут иметь приложения в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

Литература

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т.

2. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Моск. ун-т, 1960. – 307 с.

3. Chen, B.Y. Geometry of submanifoids / B.Y. Chen // Pure and Appl. Math. – 1973. – Vol. 10, № 22. – 308 p.

4. Онищик, А.Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.

5. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.

6. Можей, Н.П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н.П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

7. Mozhey, N.P. Normal connections on three-dimensional manifolds with solvable transformation group / N.P. Mozhey // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2016. – Vol. 37, № 2. – P. 160–177.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 05.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 519.21

О свойствах одномерной квадратичной модели временной структуры доходности

Д.А. Павлив

Представлены результаты аналитического исследования одномерной квадратичной модели временной структуры доходности. Найдено аналитическое представление кривой доходности и форвардной кривой модели. Исследован частный случай одномерной модели, когда стационарное среднее процесса состояния рынка равно нулю в риск-нейтральной мере. Проведен анализ зависимости формы форвардной кривой от начального значения мгновенной процентной ставки, в результате которого сформулированы и доказаны три утверждения. Установлена линейная зависимость между значениями наклона форвардной кривой и волатильностью кривой доходности.
Ключевые слова: форвардная кривая, кривая доходности, волатильность, уравнение Риккати.

The paper presents the result of an analytical study of one-dimensional quadratic model of the term structure of yields. An analytical representation of the yield curve and the forward rate was found. A special case of one-dimensional model was investigated, when the steady state average of the market process is zero for the risk-neutral measure. The dependency analysis between the shape of the forward rate and initial value of the interest rate process was made, in the result of which three assertions were formulated and proved. A linear relationship between the slope of the forward curve and volatility of the yield curve was established.
Keywords: forward rate, yield curve, volatility, Riccati equation.

Введение. На текущий момент существует множество различных математических моделей, описывающих поведение процентных ставок. Наиболее популярными и изученными из них являются так называемые аффинные модели временной структуры доходности. Несмотря на свою популярность, данные модели оказываются неспособными описать поведение процентных ставок в реальном мире с необходимой точностью. Многие авторы, например, [1] или [2], предполагают, что более точные результаты можно получить, используя модели неаффинного класса. Одной из таких моделей является квадратичная модель, изучение свойств которой может представлять как теоретический, так и практический интерес.

Определение модели. Пусть состояние финансового рынка описывается неким одномерным процессом X, чье поведение определяется диффузионным уравнением [1]:

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(X)\mathrm{d}t + \sigma(X)\mathrm{d}W(t), \quad t > t_0,\ X(t_0) = x_0,$$

с функцией дрейфа $\mu(X)$ и волатильностью $\sigma(X)$, $W(t)$ – винеровский процесс. Предполагается, что краткосрочная ставка доходности $r(t)$ связана с состоянием финансового рынка $X(t)$ соотношением

$$r(X) = r_{\min} + \varphi X^2, \quad r_{\min} \in \mathrm{R}^1, \varphi \in \mathrm{R}^1. \tag{1}$$

Так как по экономическому смыслу процентная ставка должна быть положительной, справедливо ограничение $\varphi > 0$. В этом случае ветви параболы уравнения для $r(X)$ направлены вверх, что, в совокупности с ограничениями на коэффициент r_{min}, нижней границы возможных значений мгновенной процентной ставки, может гарантировать неотрицательность значений мгновенной процентной ставки. При этом следует отметить, что сам процесс $X(t)$ является ненаблюдаемым и, на текущий момент, ни в одной из известных работ авторы не предложили экономического обоснования данной величины. В то же время значения процесса процентной ставки $r(X)$ являются наблюдаемыми величинами.

Рассмотрим квадратичную модель для класса диффузионных процессов с линейной функцией дрейфа $\mu(X) = k(\theta - X)$ и постоянной волатильности $\sigma(X) = s$, [1]:

$$\mathrm{d}X(t) = k(\theta - X)\mathrm{d}t + s\mathrm{d}W(t), \quad t > t_0,\ X(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Отметим, что для того, чтобы процесс $X(t)$ был стационарным, коэффициент k должен быть положительными.

Как правило, временную структуру доходности находят с помощью так называемого уравнения временной структуры для цен бескупонных облигаций [3], $P(r(X), t; T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial X}k(\theta-X)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}s^2-r(X)P(r(X),t;T)=\frac{\partial P}{\partial X}s\lambda(X),\ P(r(X),T,T)=1, \qquad (3)$$

где T обозначает дату погашения облигации, а $\lambda(X)$ – рыночная стоимость за риск, которая задается линейным соотношением $\lambda(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X$ [2]. Такой выбор является необходимым условием представления решения уравнения (3) в следующем виде [1]:

$$P(r(X),t;t+\tau)=\exp\left(-X^2A(\tau)-XB(\tau)-C(\tau)\right), \qquad (4)$$

где для удобства введено обозначение $\tau = T - t$, определяющее срок до погашения облигации, а функции $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$ являются решением системы дифференциальных уравнений, получаемой подстановкой решения (4) в уравнение (3):

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-2A^2(\tau)s^2-2A(\tau)\kappa+\varphi, & A(0)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\left(2A(\tau)s^2+\kappa\right)B(\tau)+2A(\tau)q, & B(0)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=r_{\min}+A(\tau)s^2-\dfrac{1}{2}B^2(\tau)s^2+B(\tau)q, & C(0)=0\end{cases}, \qquad (5)$$

где $\kappa = k + s\lambda_1$, а $q = k\theta - s\lambda_0$. Далее будем рассматривать случай, когда $\kappa > 0$.

Исследование модели. В системе (5) первое уравнение является уравнением Риккати, второе – линейным неоднородным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, а третье – решается простым интегрированием правой части. Рассмотрим первое уравнение системы (5). Поскольку его коэффициенты являются константами, используя метод разделения переменных, можно показать, что с учетом начального условия $A(0) = 0$ решение будет выглядеть следующим образом

$$A(\tau)=\frac{\varphi}{\kappa+v\operatorname{cth}(\tau v)}, \qquad (6)$$

где для простоты введено обозначение $v = (\kappa^2 + 2s^2\varphi)^{1/2} > \kappa > 0$. С учетом введенных выше логических ограничений на параметры модели, из вида (6) следует, что функция $A(\tau)$ является монотонно возрастающей от 0 для $\tau = 0$ и до $\varphi/(\kappa + v)$ при $\tau \to \infty$. Используя (5), можно также заметить, что

$$\frac{\partial A(\tau)}{\partial\tau}=\frac{\varphi v^2\left(\operatorname{cth}^2(\tau v)-1\right)}{\left(\kappa+v\operatorname{cth}(\tau v)\right)^2}. \qquad (7)$$

При этом анализируя знак второй производной функции $A(\tau)$

$$\frac{\partial^2 A(\tau)}{\partial\tau^2}=-\frac{2\varphi v^3\left(v+\kappa\operatorname{cth}(\tau v)\right)}{\operatorname{sh}^2(\tau v)\left(\kappa+v\operatorname{cth}(\tau v)\right)^3},$$

можно сделать вывод, что функция $A(\tau)$ является вогнутой, а ее первая производная (7) – монотонно убывающей для $\tau \geq 0$.

Решение второго уравнения системы (5), которое, как было отмечено выше, является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, с учетом начального условия $B(0) = 0$ принимает вид

$$B(\tau)=\frac{2q\varphi\left(\operatorname{ch}(\tau v)-1\right)}{v\left(\kappa\operatorname{sh}(\tau v)+v\operatorname{ch}(\tau v)\right)}. \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) во второе уравнение системы (5), получаем выражение для производной

$$\frac{\partial B(\tau)}{\partial\tau}=\frac{2q\varphi\left(v\operatorname{sh}(\tau v)+\kappa\operatorname{ch}(\tau v)-\kappa\right)}{\left(\kappa\operatorname{sh}(\tau v)+v\operatorname{ch}(\tau v)\right)^2}. \qquad (9)$$

Из вида (8) и (9) можно сказать, что при условии $q > 0$ ($q < 0$), функция $B(\tau)$ будет возрастающей (убывающей) от 0 для $\tau = 0$ до $-2q\varphi/(v(\kappa + v))$ для $\tau \to \infty$.

Наконец, подставляя полученные выражения для $A(\tau)$ и $B(\tau)$ в третье уравнение системы и интегрируя его, находим

$$C(\tau)=\tau\left(r_{\min}-\frac{\kappa}{2}+\frac{q^2\varphi}{v^2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{v\,\mathrm{ch}(\tau v)+\kappa\,\mathrm{sh}(\tau v)}{v}\right)+$$
$$+q^2\varphi\left(2q-s^2\right)\frac{\left(\kappa^2-2s^2\varphi\right)\mathrm{sh}(2\tau v)-4\kappa\left(2v\,\mathrm{sh}^4\left(\frac{\tau v}{2}\right)+\kappa\,\mathrm{sh}(\tau v)\right)}{v^5\left(1+2\frac{s^2\varphi}{v^2}\mathrm{sh}^2(\tau v)\right)}. \qquad (10)$$

При этом производная $C(\tau)$ находится путем подстановки значений $A(\tau)$ и $B(\tau)$ в третье уравнение системы (5):

$$\frac{\partial C(\tau)}{\partial\tau}=r_{\min}+\frac{\varphi s^2}{\kappa+v\,\mathrm{cth}(\tau v)}+\frac{2q^2\varphi\left(\mathrm{ch}(\tau v)-1\right)}{v\left(v\,\mathrm{ch}(\tau v)+\kappa\,\mathrm{sh}(\tau v)\right)}\left(1-\frac{s^2\varphi\left(\mathrm{ch}(\tau v)-1\right)}{v\left(v\,\mathrm{ch}(\tau v)+\kappa\,\mathrm{sh}(\tau v)\right)}\right). \qquad (11)$$

Теперь, когда значение всех функций (6), (8), (10) и их первых производных (7), (9), (11) найдено в явном виде, мы можем записать выражения в замкнутой форме для кривой доходности и форвардной кривой соответственно:

$$y(\tau,X)=-\frac{\ln P(X,t,t+\tau)}{\tau}=\frac{A(\tau)X^2+B(\tau)X+C(\tau)}{\tau}, \qquad (12)$$

$$f(\tau,X)=-\frac{\partial\ln P(x,t,t+\tau)}{\partial\tau}=\frac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau}X^2+\frac{\mathrm{d}B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}X+\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}. \qquad (13)$$

Из соотношения

$$f(\tau,X)=y(\tau,X)+\tau\frac{\partial y(\tau,X)}{\partial\tau},$$

связывающего форвардную кривую с кривой доходности и ее производной, видно, что график форвардной кривой будет всегда выше (ниже) графика кривой доходности, когда последняя возрастает (убывает), а пересекаться они будут в точках, подозрительных на экстремум для кривой доходности. Наклон форвардной кривой связан с наклоном кривой доходности следующим соотношением

$$\frac{\partial f(\tau,X)}{\partial\tau}=2\frac{\partial y(\tau,X)}{\partial\tau}+\tau\frac{\partial^2 y(\tau,X)}{\partial\tau^2},$$

при этом, если кривая доходности является возрастающей и выпуклой (убывающей и вогнутой), то соответствующая ей форвардная кривая обязательно будет возрастающей (убывающей), причем абсолютное значение наклона форвардной кривой будет не менее чем в два раза больше наклона кривой доходности. Отметим, что данные наблюдения будут справедливыми для всех моделей временной структуры доходности процентных ставок.

Вычисление предельных равенств для функций $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$ дает

$$\lim_{\tau\to0}\frac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to0}\frac{A(\tau)}{\tau}=\varphi,\quad\lim_{\tau\to0}\frac{\mathrm{d}B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to0}\frac{B(\tau)}{\tau}=0,\quad\lim_{\tau\to0}\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to0}\frac{C(\tau)}{\tau}=r_{\min}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{A(\tau)}{\tau}=0,\quad\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathrm{d}B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{B(\tau)}{\tau}=0$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{C(\tau)}{\tau}=r_{\min}+\frac{\varphi s^2}{\kappa+v}\left(1-\frac{2q^2\varphi}{v^2(\kappa+v)}\right),\quad\lim_{\tau\to\infty}A(\tau)=\frac{\varphi}{\kappa+v},\quad\lim_{\tau\to\infty}B(\tau)=\frac{2q\varphi}{v(\kappa+v)}$$

При этом предельные значения кривой доходности и форвардной кривой совпадают, а при $\tau\to\infty$ также и не зависят от начального значения $X(t)$:

$$\lim_{\tau\to0}y(\tau,X)=\lim_{\tau\to0}f(\tau,X)=r=r_{\min}+\varphi X^2,$$

$$\lim_{\tau\to\infty}y(\tau,X)=y(\infty)=\lim_{\tau\to\infty}f(\tau,X)=f(\infty)=r_{\min}+\frac{\varphi s^2}{\kappa+v}\left(1-\frac{2q^2\varphi}{v^2(\kappa+v)}\right)$$

К сожалению, выражения (12) и (13) являются слишком громоздкими для проведения аналитического анализа в общем виде. Однако при известных значениях параметров модели, проделать такой анализ не составит труда. Рассмотрим более простой частный случай одномерной модели, когда параметр $q = 0$. Этот случай соответствует тому, что процесс $X(t)$ имеет нулевое стационарное среднее в риск-нейтральной мере. Многие авторы допускают аналогичное ограничение для объективной меры [1], [2]. В этом случае функция $B(\tau)$ становится тождественно равной нулю. Вследствие чего, кривая доходности и форвардная кривая в действительности будут зависеть не от значения процесса $X(t)$, а от его квадрата $X^2(t)$, что, учитывая вид (1), позволяет рассматривать эти кривые как функции мгновенной краткосрочной процентной ставки, $r(X)$:

$$y(\tau,r) = r_{\min} - \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{r-r_{\min}}{\kappa + v\,\mathrm{cth}(\tau v)} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{v\,\mathrm{ch}(\tau v) + \kappa\,\mathrm{sh}(\tau v)}{v}\right)\right), \tag{14}$$

$$f(\tau,r) = r_{\min} + \frac{s^2\varphi\,\mathrm{sh}(\tau v)}{v\,\mathrm{ch}(\tau v) + \kappa\,\mathrm{sh}(\tau v)} + \frac{(r-r_{\min})v^2\left(\mathrm{cth}^2(\tau v) - 1\right)}{\left(\kappa + v\,\mathrm{cth}(\tau v)\right)^2}. \tag{15}$$

При малых сроках до погашения производные кривых принимают следующий вид:

$$\left.\frac{\partial y(\tau,r)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f(\tau,r)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{2}\left(s^2\varphi - 2\kappa(r-r_{\min})\right),$$

откуда видно, что скорость изменения кривой доходности в два раза ниже скорости изменения форвардной кривой, а также что эта скорость и ее направление зависит от мгновенной процентной ставки, r.

В литературе часто отмечается, что кривая доходности и форвардная кривая могут относится к одному из четырех известных типов (например, [4]) – кривым «нормального» типа, т. е. монотонно возрастающим до некоторого конечного предельного значения, «перевернутого» типа – монотонно убывающим до некоторого конечного предельного значения, кривым, имеющим максимумы либо минимумы («humped shaped» кривые), а также плоским кривым доходности («flat yield curve»). Попробуем выяснить при каких значениях процентной ставки, r, форвардная кривая принимает тот или иной тип.

Утверждение 1. Достаточным условием монотонного возрастания форвардной кривой (15) для $\tau \geq 0$, является выполнение следующего условия

$$r < r_{\min} + \frac{s^2\varphi\kappa}{2v^2}.$$

Доказательство: найдем производную форвардной кривой (15) по τ

$$\frac{\partial f(\tau,r)}{\partial\tau} = \frac{v^2\varphi\left(\kappa s^2 - 2v^2\dfrac{r-r_{\min}}{\varphi} + v\left(s^2 - 2\kappa\dfrac{r-r_{\min}}{\varphi}\right)\mathrm{cth}(\tau v)\right)}{\mathrm{sh}^2(\tau v)\left(\kappa + v\,\mathrm{cth}(\tau v)\right)^3} \tag{16}$$

Для того, чтобы форвардная кривая была монотонно возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была больше нуля, что эквивалентно

$$\kappa s^2 - 2v^2\frac{r-r_{\min}}{\varphi} + v\left(s^2 - 2\kappa\frac{r-r_{\min}}{\varphi}\right)\mathrm{cth}(\tau v) > 0.$$

Перегруппировав слагаемые, получаем

$$\frac{r-r_{\min}}{\varphi} < \frac{s^2\left(\kappa + v\,\mathrm{cth}(\tau v)\right)}{2v\left(v + \kappa\,\mathrm{cth}(\tau v)\right)} < \frac{s^2\left(\kappa + \kappa\,\mathrm{cth}(\tau v)\right)}{2v\left(v + v\,\mathrm{cth}(\tau v)\right)} = \frac{s^2\kappa}{2v^2},$$

где второе неравенство справедливо благодаря тому, что $v > \kappa$ и $\tau \geq 0$. Отсюда и следует требуемый результат.

Утверждение 2. Достаточным условием монотонного убывания форвардной кривой (15) для $\tau \geq 0$, является выполнение следующего условия

$$r > r_{\min} + \frac{s^2\varphi}{2\kappa}.$$

Доказательство: полностью повторяет доказательство утверждения 1.

Утверждение 3. Достаточным условием существования максимума (минимума) форвардной кривой (15) для $\tau \geq 0$, является выполнение следующего условия

$$r_{\min} + \frac{s^2\varphi}{2v} < r < r_{\min} + \frac{s^2\varphi}{2\kappa}.$$

Доказательство: Выясним, при каких условиях на r производная форвадной кривой, (16), обращается в ноль для некоторого $\tau \geq 0$. Это эквивалентно тому, что

$$\operatorname{cth}(\tau v) = \frac{2v^2\,\dfrac{r - r_{\min}}{\varphi} - \kappa s^2}{v\left(s^2 - 2\kappa\dfrac{r - r_{\min}}{\varphi}\right)}.$$

Откуда,

$$\tau = \frac{1}{v}\operatorname{arcth}\left(\frac{2v^2\,\dfrac{r - r_{\min}}{\varphi} - \kappa s^2}{v\left(s^2 - 2\kappa\dfrac{r - r_{\min}}{\varphi}\right)}\right).$$

Нас интересует решение, попадающее в область определения $\tau \geq 0$. Поэтому выясним, при каких условиях существует гиперболический арккотангенс, больший нуля.

По определению, $\operatorname{arcth}(x) = \ln((x + 1)/(x - 1))/2$, таким образом, существование гиперболического арккотангенса большего нуля равносильно существованию соответствующего логарифма, большего нуля, что, в свою очередь, равносильно выполнению условия $(x + 1)/(x - 1)) > 1$. Таким образом, необходимо проверить для каких r выполняется неравенство

$$\left((v - \kappa)\left(2v\frac{r - r_{\min}}{\varphi} + s^2\right)\right) \Big/ \left((v + \kappa)\left(2v\frac{r - r_{\min}}{\varphi} - s^2\right)\right) > 1,$$

откуда и следует справедливость утверждения.

В силу более сложного вида (14), провести аналогичный анализ для кривой доходности в общем виде не удается.

В [5] авторы предлагают использовать наклон форвардной кривой для предсказания значения волатильности кривой доходности. Позднее, анализ продолжен для аффинных моделей в [4], где показано, что корреляция между дисперсией кривой доходности и производной форвардной кривой всегда равна минус единице. Проведем аналогичный анализ для квадратичной модели и выясним как связаны волатильность доходности и наклон форвардной кривой между собой. Зафиксируем в (12) срок до погашения, τ, и рассмотрим $y(\tau, X)$ как функциональное преобразование диффузионного процесса $X(t)$. В таком случае, используя формулу Ито для данного преобразования с учетом (2), можно заметить, что волатильность доходности до погашения равна

$$\sigma_y(\tau) = \frac{2s}{\tau}\left(2A(\tau)X + B(\tau)\right).$$

Откуда, математическое ожидание и дисперсия квадрата волатильности равны соответственно

$$\mathrm{E}\left\{\sigma_y^2(\tau)\right\} = \frac{8s^2\varphi^2\left(s^2 + 2\theta^2 k\right)}{\tau^2 k\left(\kappa + v\operatorname{cth}(v\tau)\right)^2}, \quad \mathrm{Var}\left\{\sigma_y^2(\tau)\right\} = \frac{128s^6\varphi^4\left(s^2 + 4\theta^2 k\right)}{\tau^4 k^2\left(\kappa + v\operatorname{cth}(v\tau)\right)^4}.$$

Используя выражение (16), можно найти аналогичные вероятностные характеристики для производной форвардной кривой

$$\mathrm{E}\left\{\frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau}\right\} = -\frac{v^2\varphi\left(2v^2\theta^2 k + s^2\left(v^2 - k\kappa\right) + v\left(s^2\left(\kappa - k\right) + 2\theta^2 k\kappa\right)\operatorname{cth}(v\tau)\right)}{k\left(\kappa + v\operatorname{cth}(v\tau)\right)^3\operatorname{sh}^2(v\tau)},$$

$$\mathrm{Var}\left\{\frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau}\right\} = \frac{2s^2v^6\varphi^2\left(s^2 + 4\theta^2 k\right)\left(v + \kappa\operatorname{cth}(v\tau)\right)^2}{k^2\left(\kappa + v\operatorname{cth}(v\tau)\right)^6\operatorname{sh}^4(v\tau)}.$$

Из полученных соотношений видно, что при сделанных предположениях относительно параметров модели математическое ожидание производной форвардной кривой по сроку до погашения является отрицательным. Отсюда следует, что для всех сроков погашения τ корреляция рассматриваемых функций равна минус единице при любых экономически обоснованных значениях параметров. Это означает, что рассматриваемые характеристики связаны между собой линейным соотношением.

Заключение. Одним из преимуществ аффинных моделей является возможность выражения основных функций временной доходности в аналитическом виде. Однако простота таких моделей не позволяет точно описывать поведение объектов реального мира. В данной работе рассмотрена более сложная, неаффинная одномерная квадратичная модель временной доходности процентных ставок, для которой найдены выражения для кривой доходности и форвардной кривой в аналитическом виде. Также исследована зависимость формы форвардной кривой для частного случая модели от начального значения процентной ставки. Одновременно с этим, показано, что наклон форвардной кривой и волатильность кривой доходности связаны линейным соотношением.

Литература

1. Ahn, D. Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence. / D. Ahn, R. Dittmar, A. Gallant. – New Orleans : AFA, 2001. – 52 p.

2. Leipold, M. Asset Pricing under the Quadric Class / M. Leipold, L. Wu. – Journal Of Finance. – 2002. – № 37. – P. 271–295.

3. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure / O. Vasicek. – Journal Of Financial Economics. – 1977. – № 5. – P. 177–188.

4. Медведев, Г. Стохастические процессы финансовой математики / Г.А. Медведев. – Минск : БГУ, 2005. – 243 с.

5. Brown, R. Why Long Term Forward Interest Rates (Almost) Always Slope Down / R.H. Brown, S.M. Schaefer. – Working Paper : London Business School, 2000. – 42 p.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 18.09.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 519.612

О методах декомпозиции разреженных недоопределенных систем с матрицами полного и неполного ранга

Л.А. Пилипчук

В конструктивных методах решения экстремальных неоднородных задач линейного и нелинейного потокового программирования с дополнительными ограничениями применяются принципы декомпозиции ограничений. Это позволяет представить систему уравнений (часть ограничений) в виде независимых разреженных систем и систем общего вида. Решение разреженных систем линейных алгебраических уравнений неполного ранга осуществляется без использования обращения матриц на основе биективного отображения между множествами узлов (за исключением одного узла) и дуг дерева. Для нахождения невырожденной подматрицы полного ранга с целью определения решения системы общего вида используется свойство диагонального преобладания. Рассматриваемый подход может использоваться в задачах оптимального расположения сенсоров в узлах графа (мультиграфа), а также для вычислений в параллельной среде.
Ключевые слова: мультиграф, поток, разреженная система, недоопределенная система, переопределенная система, биективное отображение, матрица полного ранга, диагональное преобладание, декомпозиция.

In the constructive methods for solving the extremal inhomogeneous linear and nonlinear network flow programming problems with additional restrictions the decomposition principles for the restrictions are applied. This makes it possible to present the system of equations (part of the restrictions) as the sparse independent systems and systems of general form. Solution of sparse systems of linear algebraic equations of not full rank is carried out without use of the inverse matrix and based on the bijective mapping between the sets of nodes (except of one node) and arcs of the tree. Diagonal dominance property to find a non-degenerate submatrix of full rank for determining the decisions for the system of general type is used. This approach can be used in the problems of optimal location of sensors in the nodes of the graph (multigraph), as well as in parallel computing environment.
Keywords: multigraph, flow, sparse system, underdetermined system, overdetermined system, bijective mapping, full rank matrix, diagonal dominance, decomposition.

При разработке конструктивных методов решения неоднородных сетевых задач линейной оптимизации с взаимосвязью потоков [1]–[3], дробно-линейных неоднородных сетевых задач с линейными ограничениями [4] применяются принципы декомпозиции ограничений, которые основаны на использовании теоретико-графовых свойств графов, представляющих собой опорные множества [3]. Рассмотрим алгоритмы декомпозиции основных ограничений, которые представлены системой линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = b_i^k, i\in I^k, k\in K, \tag{1}$$

$$\sum_{(i,j)\in U}\ \sum_{k\in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$\sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^k = z_{ij}, (i,j)\in U_0, \tag{3}$$

где $G=(I,U)$ – конечная ориентированная связная мультисеть (мультиграф) с множеством мультидуг U, определенных на $I\times I$ ($|I|<\infty, |U|<\infty$). Мультисеть $G=(I,U)$ представлена в виде множества $|K|$ связных сетей $k\in K=\{1,2,...\}\ k\in K=\{1,2,...\}$, $|K|<\infty$. Каждая связная сеть $G^k=(I^k,U^k)$ соответствует некоторому типу k потока в мультисети $G=(I,U)$, x_{ij}^k – дуговой поток k-го типа по мультидуге $(i,j)\in U$. Определим множество $K(i)=\{k\in K: i\in I^k\}$ типов потоков, проходящих через узел $i\in I$ в мультисети G. Также определим множество типов потоков $K(i,j)=\{k\in K:(i,j)\in U^k\}$, проходящих через мультидугу $(i,j)\in U$. Пусть U_0 – множество таких мультидуг $(i,j)\in U_0\subseteq U$, для которых выполня-

ется неравенство: $|K_0(i,j)|>1$, λ_{ij}^{kp} – коэффициенты матрицы ограничений (2), где $b=(b_i^k, i\in I^k, k\in K), b=(b_i^k, i\in I^k, k\in K)$, $\alpha=(\alpha_p, p=\overline{1,l}), \alpha=(\alpha_p, p=\overline{1,l})$, $z=\left(z_{ij},(i,j)\in U_0\right)-z=\left(z_{ij},(i,j)\in U_0\right)$ – векторы правых частей систем (1), (2), (3) соответственно, $I_i^-(U^k)=\left\{j\in I^k:(j,i)^k\in U^k\right\} I_i^-(U^k)=\left\{j\in I^k:(j,i)^k\in U^k\right\}$, $x=\left(x_{ij}^k,(i,j)\in U, k\in K(i,j)\right)$ – вектор неизвестных. Предположим, что выполняется неравенство

$$\sum_{k\in K}\left|I^k\right|+l+\left|U_0\right|\ll\sum_{k\in K}\left|U^k\right|.$$

В [5] получено общее решение разреженной недоопределенной линейной системы (1) для фиксированного типа потока $k\in K$, которое имеет следующий вид:

$$x_{ij}^k=\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k}x_{\tau\rho}^k\delta_{ij}^k(\tau,\rho)+\left(\tilde{x}_{ij}^k-\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k}\tilde{x}_{\tau\rho}^k\delta_{ij}^k(\tau,\rho)\right),(i,j)^k\in U_T^k,$$
$$x_{\tau\rho}^k\in R,\quad (\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k, \tag{4}$$

где $\tilde{x}=\left(\tilde{x}_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K(i,j)\right)$ – любое частное решение системы (1), U_T^k – остовное дерево графа $G^k=\left(I^k,U^k\right)$, $x_{\tau\rho}^k$ – независимые переменные, соответствующие дугам $(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k$. Множество векторов $\{\delta^k(\tau,\rho),(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k\}$ является фундаментальной системой решений однородной системы, порожденной системой (1), $k\in K.k\in K$.

Замечание 1. В практических приложениях при построении частного решения $\tilde{x}=\left(\tilde{x}_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K(i,j)\right)$ полагаем: $\tilde{x}_{\tau\rho}^k=0$, $(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k, k\in K$.

Таким образом, формула (4) примет вид:

$$x_{\tau\rho}^k\in R,\quad (\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k.x_{\tau\rho}^k\in R,\quad (\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k. \tag{5}$$

В [6], [7] разработаны эффективные алгоритмы построения фундаментальной системы решений $\{\delta^k(\tau,\rho),(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k\}$, $k\in K$ однородной системы, порожденной системой (1), и частного решения $\tilde{x}=\left(\tilde{x}_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K(i,j)\right)$. Применение конструктивных методов декомпозиции для решения одной нелинейной задачи сетевой оптимизации рассмотрено в [8].

Методы декомпозиции позволяют представить систему уравнений (часть ограничений задачи) в виде независимых систем: разреженных систем линейных алгебраических уравнений и системы общего вида. Это позволяет также находить решение разреженных систем линейных алгебраических уравнений на надлежащих структурах для представления базисов (опор) без использования обращения разреженных матриц [6], [7].

Для каждого $k\in K$ подставим общее решение (5) системы (1) в систему (2) и преобразуем ее к следующему виду:

$$\sum_{k\in K}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k}R_p(L_{\tau\rho}^k)x_{\tau\rho}^k=\alpha_p-\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)^k\in U_T^k}\lambda_{ij}^{kp}\tilde{x}_{ij}^k,\ p=\overline{1,l}, \tag{6}$$

где $L_{\tau\rho}^k-L_{\tau\rho}^k-$ фундаментальный цикл, порожденный дугой $\{\delta^k(\tau,\rho),(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k\}-\{\delta^k(\tau,\rho),(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k\}-$ фундаментальная система решений однородной системы, порожденной системой (1), $k\in K.k\in K$.

Аналогичные преобразования применим к системе (3) и учтем свойства ее разреженности. В результате система (3) примет следующий вид:

$$\sum_{k\in K_0(i,j)}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k}\delta_{\xi(i,j)}(L_{\tau\rho}^k)x_{\tau\rho}^k=z_{ij}-\sum_{\substack{k\in K_0(i,j),\\(i,j)^k\in U_T^k}}\tilde{x}_{ij}^k,\quad (i,j)\in U_0, \tag{7}$$

где

$$\delta_{\xi(i,j)}(L_{\tau\rho}^k)=\begin{cases}\delta_{ij}^k(\tau,\rho),(i,j)^k\in L_{\tau\rho}^k,\\ 0,(i,j)^k\notin L_{\tau\rho}^k,\end{cases}\quad (i,j)\in U_0,k\in K_0(i,j).$$

Итак, исходная система (1)–(3) представлена в виде следующих независимых систем линейных алгебраических уравнений:

– недоопределенной системы (6)–(7) общего вида для определения неизвестных $x^k_{\tau\rho},(\tau,\rho)^k \in U^k_C \subseteq U^k \setminus U^k_T, k \in K$;

– $|K|$ независимых разреженных недоопределенных систем вида (1) для определения неизвестных $x^k_{ij},(i,j)^k \in U^k_T$ для каждого $k \in K$.

Для определения ранга матрицы системы (6)–(7) воспользуемся свойством диагонального преобладания. Квадратная $m \times m-$матрица $A=(a_{ij}, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,m})$ называется матрицей с диагональным преобладанием, если для всех $i=1,2,\ldots,m,$ справедливы соотношения

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|. \tag{8}$$

Как известно, матрицы с диагональным преобладанием неособенны, и этот результат составляет содержание признака Адамара [9] (нередко его называют также теоремой Леви-Деспланка, см. [10]). Если в $m \times n-$матрице системы (6)–(7), $n=\sum_{k\in K}|U^k \setminus U^k_T| n=\sum_{k\in K}|U^k \setminus U^k_T|$ найдётся квадратная подматрица размера $m=l+|U_0|$ с диагональным преобладанием, то эта матрица имеет полный ранг. При перестановках строк матрицы свойство диагонального преобладания не сохраняется, при этом ранг матрицы не изменяется. В связи с этим имеет смысл искать в матрице не подматрицы с диагональным преобладанием, а подматрицы, в которых диагонального преобладания можно добиться с помощью подходящей перестановки строк. Нахождение этой перестановки – комбинаторная задача, но её свойства таковы, что решение может быть найдено относительно несложными средствами. В работе [11] приведён алгоритм выявления диагонально преобладающей матрицы для переопределенной системы. В [11] также приведено определение диагонального преобладания (8) на основе свойств псевдообратной матрицы и спектрального радиуса. Для $m \times n-$матрицы A псевдообратной матрицей [9], [12] называется такая вещественная $n \times m-$матрица A^+, что матрицы $A\,A^+$ и A^+A являются симметричными матрицами и выполнены равенства:

$$A\,A^+A=A, \quad A^+A\,A^+=A^+.$$

Если $A-$матрица полного ранга и $m \geq n$, то $A^+=\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ [9]–[10], [12]. В этом случае A^+A-это единичная $n \times n-$матрица. Если $A-$матрица полного ранга и $m \leq n$, то $A^+=A^T\left(A\,A^T\right)^{-1}$ [11]. Тогда $A\,A^+-$это единичная $m \times m-$матрица.

Пусть $\left\{U^k_C \subseteq U^k \setminus U^k_T, k \in K\right\}$ – множество дуг, которым соответствуют столбцы невырожденной подматрицы порядка $m=l+|U_0|$ матрицы недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений (6)–(7). Сгруппируем переменные $x^k_{\tau\rho},(\tau,\rho)^k \in U^k_C, k \in K$ и $x^k_{\tau\rho},(\tau,\rho)^k \in U^k_N, k \in K$, где $U^k_N=U^k \setminus \left(U^k_T \bigcup U^k_C\right), k \in K.$

$$\sum_{k\in K}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_C} R_p(L^k_{\tau\rho})x^k_{\tau\rho}=\alpha_p-\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)^k\in U^k_T}\lambda^{kp}_{ij}\tilde{x}^k_{ij}-\sum_{k\in K}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_N} R_p(L^k_{\tau\rho})x^k_{\tau\rho},\ p=\overline{1,l},$$

$$\sum_{k\in K_0(i,j)}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_C}\delta_{\xi(i,j)}(L^k_{\tau\rho})x^k_{\tau\rho}=z_{ij}-\sum_{\substack{k\in K_0(i,j),\\ (i,j)^k\in U^k_T}}\tilde{x}^k_{ij}-\sum_{k\in K_0(i,j)}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_N}\delta_{\xi(i,j)}(L^k_{\tau\rho})x^k_{\tau\rho},\ (i,j)\in U_0. \tag{9}$$

Подматрица системы (9), столбцы которой соответствуют неизвестным $x^k_{\tau\rho},(\tau,\rho)^k \in U^k_C, k \in K$, имеет ранг $m=l+|U_0|$ (является подматрицей полного ранга). Из (9) вычислим неизвестные $x^k_{\tau\rho},(\tau,\rho)^k \in U^k_C, k \in K$. Обозначим $\psi^k_{ij}=\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_C} x^k_{\tau\rho}\delta^k_{ij}(\tau,\rho),(i,j)^k \in U^k_T, k \in K$.

Неизвестные $x^k_{ij},(i,j)^k \in U^k_T, k \in K,$ соответствующие дугам $(i,j)^k \in U^k_T, k \in K$ (дуги остовных деревьев), вычисляются следующим образом:

$$x_{ij}^k = \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_N^k} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) + \psi_{ij}^k + \tilde{x}_{ij}^k, (i,j)^k \in U_T^k,$$
$$x_{\tau\rho}^k \in R, (\tau,\rho)^k \in U_N^k = U^k \setminus \left(U_C^k \bigcup U_T^k\right), k \in K. \quad (10)$$

Частное решение $\tilde{x} = \left(\tilde{x}_{ij}^k, (i,j) \in U, k \in K(i,j)\right)$ системы (1) построено по правилам *Замечания 1*.

Замечание 2. Если в матрице недоопределенной системы (6)–(7) не существует квадратной подматрицы полного ранга, то для определения ранга матрицы системы (6)–(7) требуется дополнительное исследование.

Замечание 3. Матрица системы (1) является разреженной матрицей неполного ранга. Для нахождения неизвестных $x_{ij}^k, (i,j)^k \in U_T^k$, соответствующих множеству дуг $(i,j)^k \in U_T^k$ остовного дерева не используется обращение матриц, $k \in K$. Используются концепции декомпозиции графов, учитывается структура системы, свойства и тип ее разреженности. Применяются вычислительные методы и технологии разреженного матричного анализа [6], [7].

Полученные результаты могут быть применены для построения оптимальных решений экстремальных задач линейного и нелинейного потокового программирования с дополнительными ограничениями [1], [4], [8] и в задачах оптимального расположения сенсоров в узлах графа (мультиграфа) [6]–[7], [13]. Изложенный подход к построению общего решения разреженной недоопределенной системы (1)–(3) может использоваться для вычислений в параллельной среде.

Литература

1. Пилипчук, Л.А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2009. – 222 с.

2. Йенсен, П. Потоковое программирование / П. Йенсен, Д. Барнес ; Пер. с англ. – М., 1984. – 392 с.

3. Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск : БГУ, 1980. – Ч. 3. Специальные задачи. – 368 с.

4. Пилипчук, Л.А. Дробно-линейные экстремальные неоднородные задачи потокового программирования / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2013. – 235 с.

5. Pilipchuk, L.A. Solution of Large Linear Systems with Embedded Network Structure for a Non-Homogeneous Network Flow Programming Problem / L.A. Pilipchuk, E.S. Vecharynski, Y.H. Pesheva. – Mathematica Balkanica. – 2008. – Vol. 22, Fasc. 3–4. – P. 235–254.

6. Пилипчук, Л.А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2012. – 260 с.

7. Pilipchuk, L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L.A. Pilipchuk. – Minsk : BSU, 2013. – 235 p.

8. Пилипчук, Л.А. Применение конструктивных методов декомпозиции для решения одной нелинейной задачи сетевой оптимизации / Л.А. Пилипчук. – Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2015. – № 2 (192). – С. 54–61.

9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Физматлит, 2010. – 580 с.

10. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

11. Шарый С.П. Об интервальных матрицах полного ранга / С.П. Шарый // Сибирский Журнал вычислительной математики. – 2014. – Т. 17, №3. – С. 273–288.

12. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – М. : Ижевск: Изд-во РХД, 2008. – 288 с.

13. Pilipchuk L.A. Sensor Location Problem for a Multigraph / L.A. Pilipchuk, T.S. Vishnevetskaya, Y.H. Pesheva. – Mathematica Balkanica. New Series. – 2013. – Vol. 27. – Fasc. 1–2. – P. 65–75.

Белорусский государственный университет Поступила в редакцию 29.04.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 512.542

О минимальных тотально локальных не π-нильпотентных классах Фиттинга

В.Г. САФОНОВ, И.Н. САФОНОВА

Пусть θ – полная решетка классов Фиттинга конечных групп. θ-класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют минимальным не $\mathfrak{H}^\theta$-классом Фиттинга (или, иначе, $\mathfrak{H}^\theta$-критическим классом Фиттинга), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные θ-подклассы Фиттинга из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. В работе изучаются $\mathfrak{H}^\theta$-критические классы Фиттинга для случая, когда $\theta = l^\infty$ – полная решетка тотально локальных классов Фиттинга. Получено описание минимальных тотально локальных не π-нильпотентных классов Фиттинга, где π – некоторое непустое множество простых чисел.
Ключевые слова: класс Фиттинга, тотально локальный класс Фиттинга, критический класс Фиттинга.

Let θ be a complete lattice of Fitting classes of finite groups. θ-Fitting class $\mathfrak{F}$ is called a minimal non-$\mathfrak{H}^\theta$-Fitting class (or, otherwise, $\mathfrak{H}^\theta$-critical Fitting class) if $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ but all proper θ-Fitting subclass of $\mathfrak{F}$ are contained in the class of groups $\mathfrak{H}$. In this paper $\mathfrak{H}^\theta$-critical Fitting classes are studied in the case when $\theta = l^\infty$ is the complete lattice of totally local Fitting classes. We obtained the description of minimal totally local non-π-nilpotent Fitting classes, where π is non-empty set of primes.
Keywords: Fitting class, totally local Fitting class, critical Fitting class.

Введение. Все рассматриваемые группы конечны. Мы придерживаемся терминологии, принятой в [1]–[3]. Напомним, что классом Фиттинга называют класс групп $\mathfrak{F}$, одновременно замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Функции вида $f : \mathrm{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$ называют локальными функциями Хартли или, более коротко, локальными H-функциями. Для произвольной локальной H-функции f определяют класс групп $LR(f) = (G \mid F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G))$.

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой локальной H-функции f то говорят, что он локален, а f – локальная H-функция класса $\mathfrak{F}$.

Непустую систему классов Фиттинга θ называют полной решеткой классов Фиттинга, если пересечение любой совокупности классов Фиттинга из θ снова принадлежит θ и во множестве θ имеется такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого класса Фиттинга $\mathfrak{H} \in \theta$ Классы Фиттинга θ называют θ-классами Фиттинга.

Всякий класс Фиттинга называют 0-кратно локальным. При $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют n-кратно локальным, если он имеет такую H-функцию, все непустые значения которой – $(n-1)$-кратно локальные классы Фиттинга. Класс Фиттинга n-кратно локальный для любого целого неотрицательного n называют тотально локальным.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l^\infty \mathrm{fit}\mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех тотально локальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $l^\infty \mathrm{fit}\mathfrak{X}$ называют тотально локальным классом Фиттинга, порожденным совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$ то $l^\infty \mathrm{fit}\mathfrak{X} = l^\infty \mathrm{fit}G$ называют однопорожденным тотально локальным классом Фиттинга. Для любых тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee^\infty \mathfrak{H} = l^\infty \mathrm{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество всех тотально насыщенных классов Фиттинга l^∞ вместе с операциями $\vee^\infty$ и $\cap$ образует полную решетку. H-фунукция, все непустые значения которой l^∞-классы Фиттинга, называется l^∞-значной.

Пусть $\{f_i|i\in I\}$ – некоторая система l^∞-значных H-функций. Тогда через $\vee^\infty(f_i|i\in I)$ обозначается такая H-функция f, что $f(p)=l^\infty\mathrm{fit}(\cup_{i\in I}f_i(p))$, если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_i(p)\neq\varnothing$. В противном случае полагают $f(p)=\varnothing$.

Тотально локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют минимальным тотально локальным не $\mathfrak{H}$-классом Фиттинга (или, иначе, $\mathfrak{H}^\infty$-критическим классом Фиттинга), если $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, но все собственные тотально локальные подклассы Фиттинга из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ называют класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{M}=(G|G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{M})$, где $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т. е. произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, p – некоторое простое число. Полагают

$$\mathfrak{X}(F^p)=\mathrm{fit}(F^p(G)\,|\,G\in\mathfrak{X}),\ \text{если}\ p\in\pi(\mathfrak{X}),\ \mathfrak{X}(F^p)=\varnothing,\ \text{если}\ p\notin\pi(\mathfrak{X}).$$

H-функцию f наывают внутренней или приведенной, если $f(a)\subseteq LR_\omega(f)$ для всех $a\in\omega\cup\{\omega'\}$. Если f_1 и f_2 – ω-локальные H-функции и $f_1(a)\subseteq f_2(a)$ для всех $a\in\omega\cup\{\omega'\}$, то полагают $f_1\le f_2$.

Основной результат. В дальнейшем, через π будем обозначать некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел. Напомним, что группа G, имеющая силовскую p-подгруппу G_p и p'-холловскую подгруппу $G_{p'}$ (p – некоторое простое число) называется p-нильпотентной, если $G_{p'}$ нормальна в G. Группу G называют π-нильпотентной, если она p-нильпотентна для каждого $p\in\pi$.

Как известно, класс всех π-нильпотентных групп совпадает с произведением $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$ и является тотально локальным классом Фиттинга как произведение тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{G}_{\pi'}$ и $\mathfrak{N}_\pi$.

В работе получено описание минимальных тотально локальных не π-нильпотентных классов Фиттинга.

Лемма 1 [1]. *Пусть θ – такая полная решетка классов Фиттинга, что $\theta^\omega\subseteq\theta$ и $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_p\in\theta$ для всех $\mathfrak{H}\in\theta$ и $p\in\omega$. Тогда все θ-канонические ω-локальные H-функции являются одновременно θ-значными и внутренними.*

Лемма 2 [4]. *Пусть $\mathfrak{F}=LR(f)$ и $\mathfrak{H}=LR(h)$, где f и h – полные внутренние H-функции, $\pi=\mathrm{Supp}(h)$. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=LR(m)$, где m – такая полная внутренняя H-функция, что для любого p*

$$m(p)=\mathfrak{F}h(p),\ \text{если}\ p\in\pi,\ \ m(p)=f(p),\ \text{если}\ p\in\pi'.$$

Лемма 3 [1]. *Если $\mathfrak{F}=\theta^\omega\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ и f – минимальная ω-локальная θ-значная H-функция, то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega')=\theta\mathrm{fit}(G^{\omega d}\,|\,G\in\mathfrak{X})$;

2) $f(p)=\theta\mathrm{fit}(\mathfrak{X}(F^p))$ для всех $p\in\omega$;

3) $\mathfrak{F}=LF_\omega(h)$, где $h(\omega')=\mathfrak{F}$ и $h(p)=f(p)$ для всех $p\in\omega$.

Лемма 4 [1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{F}$ для всех $p\in\omega$;

2) $\mathfrak{F}=LR_\omega(f)$, где $f(\omega')=\mathfrak{F}$ и $f(p)=\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p\in\omega$;

3) класс $\mathfrak{F}$ является ω-локальным.

Доказательство следующей леммы осуществляется прямой проверкой.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_i$ – классы Фиттинга, $i\in I$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *и если* $\mathfrak{H}$ *– гомоморф, то* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$*;*

2) $\mathfrak{F}(\cap_{i\in I}\mathfrak{L}_i) = \cap_{i\in I}(\mathfrak{F}\mathfrak{L}_i)$*;*

3) если $\mathfrak{F}$ *–* R_0*-замкнутый класс, то* $\cap_{i\in I}(\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}) = (\cap_{i\in I}\mathfrak{L}_i)\mathfrak{F}$*;*

4) если $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$*, то* $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{L}$*;*

5) если $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$ *и* $\mathfrak{F}$ *– гомоморф, то* $\mathfrak{H}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{F}$*.*

Лемма 6 [2, с. 171]. *Если в группе* G *имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и* $O_p(G) = 1$ *(*p *– некоторое простое число), то существует точный неприводимый* F_pG*-модуль, где* F_p *– поле из* p *элементов.*

Лемма 7 [1]. *Пусть* f_1 *и* f_2 *– минимальные* ω*-локальные* θ*-значные* H*-функции классов Фиттинга* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *соответственно. Тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ *в том и только том случае, когда* $f_1 \le f_2$*.*

Лемма 8. *Пусть* G *– комонолитическая группа с комонолитом* R*, причем* G/R *– простая неабелева группа,* $\pi = \pi(G/R)$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $l^\infty \mathrm{fit}G = l^\infty \mathrm{fit}G\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \pi$;

2) $\mathfrak{S}_\pi \subset l^\infty \mathrm{fit}G = l^\infty \mathrm{fit}G\mathfrak{S}_\pi$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{F} = l^\infty \mathrm{fit}G$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi$. Ввиду лемм 1 и 2 класс Фиттинга $\mathfrak{L}$ является тотально локальным. По лемме 3 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет такую минимальную l^∞-значную внутреннюю H-функцию f, что для любого простого числа $q \in \pi$ имеет место

$$f(q) = l^\infty \mathrm{fit}(F^q(G)) = l^\infty \mathrm{fit}(F^q(G)) = \mathfrak{F}.$$

Согласно лемме 4 имеем $f(q)\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_q = f(q)\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$. Но $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q$ для любого $q \in \pi$. Таким образом, имеет место 1).

Покажем теперь, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}$. В силу леммы 5(1) имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{L}$. Допустим, что $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и пусть B – группа минимального порядка из $\mathfrak{L} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда B – комонолитическая группа с комонолитом $D = B_{\mathfrak{F}}$ и B/D – простая группа. Поскольку $B \in \mathfrak{L} = \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi$, то B/D – группа простого порядка q, где $q \in \pi$. Поэтому $B \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q$. Но в силу утверждения 1) имеем $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_q = \mathfrak{F}$. Следовательно, $B \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}$.

Поскольку $\mathfrak{S}_\pi$ – гомоморф, то ввиду леммы 5(1) имеет место включение $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi$. Поэтому $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F} = l^\infty \mathrm{fit}G$. Так как при этом G – неразрешимая группа, то $\mathfrak{S}_\pi \subset l^\infty \mathrm{fit}G$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– тотально локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальный тотально локальный не* π*-нильпотентный класс Фиттинга, когда* $\mathfrak{F} = l^\infty \mathrm{fit}G$*, где* G *– не* π*-нильпотентная группа Шмидта.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не π-нильпотентный класс Фиттинга. Обозначим через $\mathfrak{H}$ – класс всех π-нильпотентных групп. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ группу G минимального порядка. Тогда G – комонолитическая группа с комонолитом $R = G_{\mathfrak{H}}$ и G/R – простая группа. Поскольку $l^\infty \mathrm{fit}G \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = l^\infty \mathrm{fit}G$. Положим $A = G/R$ и пусть $\tau = \pi(A)$.

Допустим, что A – простая неабелева группа. Тогда по лемме 8 имеет место

$$\mathfrak{S}_\tau \subset l^\infty \mathrm{fit}G = l^\infty \mathrm{fit}G\mathfrak{S}_\tau.$$

Поскольку $\mathfrak{S}_\tau$ – тотально локальный класс Фиттинга и $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не π-нильпотентный класс Фиттинга, то $\mathfrak{S}_\tau \subseteq \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$.

Покажем, что $\tau \subseteq \pi'$. Допустим, что $\tau \cap \pi \ne \varnothing$ и $p \in \tau \cap \pi$. Поскольку A – простая неабелева группа, то $|\tau| \ge 3$. Поэтому найдется простое число $q \in \tau \setminus \{p\}$. Положим $Y = Z_p \wr Z_q$ –

регулярное сплетение групп Z_p порядка p и Z_q порядка q. Тогда поскольку Y разрешимая τ-группа, то $Y \in \mathfrak{S}_\tau$. Следовательно, $Y \in \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\tau \subseteq \pi'$. Но тогда $\pi(R) \cap \pi \neq \varnothing$, поскольку в противном случае G – π'-группа и $G \in \mathfrak{H}$.

Пусть $p \in \pi(R) \cap \pi$. Тогда, в силу локальности класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, имеем $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Кроме того, поскольку A неабелева группа, то $F^q(G) = G$ для любого $q \in \tau$.

Ввиду леммы 3 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет такую минимальную l^∞-значную внутреннюю H-функцию f, что для любого простого числа $q \in \tau$ имеет место

$$f(q) = l^\infty \text{fit}(F^q(G)) = l^\infty \text{fit}G = \mathfrak{F}.$$

По лемме 4 имеет место включение $f(q)\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_q = f(q)\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q$ для любого $q \in \tau$. Далее, поскольку $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q$, то $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q$. Так как при этом класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ неразрешим, то $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \subset \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q = \mathfrak{F}$. Заметим, что класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ является тотально локальным классом Фиттинга, как произведение тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$. А поскольку при этом $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не π-нильпотентный класс Фиттинга, то $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$. Однако последнее невозможно, ввиду того, что $p \in \pi(R) \cap \pi$ и $q \in \tau \subseteq \pi'$. Полученное противоречие показывает, что группа A абелева.

Пусть теперь A – группа простого порядка s. Тогда $R \neq 1$, иначе $G \in \mathfrak{H}$ и $F^s(G) = R$. Ввиду леммы 3 для минимальной l^∞-значной внутренней H-функции f имеем

$$f(s) = l^\infty \text{fit}(F^s(G)) = l^\infty \text{fit}R.$$

Допустим, что $s \in \pi'$. Заметим, что тогда $\pi(R) \cap \pi \neq \varnothing$, так как иначе G – π'-группа и $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Пусть $p \in \pi(R) \cap \pi$. Тогда $\mathfrak{N}_p \subseteq l^\infty \text{fit}R = f(s)$. Обозначим через Z_s группу порядка s. Поскольку Z_s – монолитическая группа и $O_p(Z_s) = 1$, то по лемме 6 существует точный неприводимый F_pZ_s-модуль V. Положим $D = [V]Z_s$. Тогда D – не π-нильпотентная группа Шмидта. Так как при этом $D \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_s \subseteq f(s)\mathfrak{N}_s$ и $f(s)\mathfrak{N}_s \subseteq \mathfrak{F}$, то $D \in \mathfrak{F}$ Ввиду того, что $D \notin \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не π-нильпотентный класс Фиттинга имеем $\mathfrak{F} = l^\infty \text{fit}D$, где D – группа Шмидта, удовлетворяющая условию теоремы.

Допустим теперь, что $s \in \pi$. В этом случае $\pi(R) \cap \pi \neq \varnothing$, поскольку иначе R – π'-группа и $G \in \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_s \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Так как при этом $R \in \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$ и $G \in \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{N}_s$, то $R/R_{\mathfrak{G}_{\pi'}} \notin \mathfrak{N}_s$, поскольку иначе $G \in \mathfrak{H}$. Поэтому найдется такое простое число $p \neq s$, что $p \in \pi(R) \cap \pi$. Тогда $\mathfrak{N}_p \subseteq l^\infty \text{fit}R = f(s)$. Пусть Z_s – группа порядка s. В силу леммы 6 существует точный неприводимый F_pZ_s-модуль W. Положим $D = [W]Z_s$. Тогда D – не π-нильпотентная группа Шмидта. Так как при этом $D \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_s \subseteq f(s)\mathfrak{N}_s$ и $f(s)\mathfrak{N}_s \subseteq \mathfrak{F}$, то $D \in \mathfrak{F}$ Поскольку $D \notin \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не π-нильпотентный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F} = l^\infty \text{fit}D$. Таким образом, $\mathfrak{F} = l^\infty \text{fit}D$, где D – группа Шмидта, удовлетворяющая условию теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l^\infty \text{fit}G$, где G – не π-нильпотентная группа Шмидта, $\mathfrak{H}$ – класс всех π-нильпотентных групп. Покажем, что тогда $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не π-нильпотентный класс Фиттинга. Пусть $G = [P]Q$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, а Q – группа порядка $q \neq p$. Тогда $F^p(G) = 1$ и $F^q(G) = P$.

Понятно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольный собственный тотально локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$. Обозначим через f и l – минимальные l^∞-значные H-функции клас-

сов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{L}$, соответственно. В силу леммы 7 имеет место неравенство $l \le f$. Так как при этом $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$, то найдется такое простое число s, что $l(s) \subset f(s)$. По лемме 3 имеем

$$f(a) = l^{\infty}\mathrm{fit}(F^{a}(G)) = (1), \text{ если } a = p, \quad f(a) = l^{\infty}\mathrm{fit}(F^{a}(G)) = l^{\infty}\mathrm{fit}P = \mathfrak{N}_{p}, \text{ если } a = q.$$

Если теперь $s = p$, то $l(p) = \varnothing$ и $\pi(\mathfrak{L}) = \{q\}$. Значит, $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}_{q}$ и $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}$. Если же $s = q$, то $l(q) \subset \mathfrak{N}_{p}$ или $l(q) \subseteq (1)$. Но тогда $l(p) \subseteq (1)$ и $l(q) \subseteq (1)$, что влечет $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{H}$.

Таким образом, в каждом из возможных случаев, имеем $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Так как при этом $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ то $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не π-нильпотентный класс Фиттинга. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия теоремы 1. Если $\pi = \{p\}$ из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не p-нильпотентный класс Фиттинга, когда $\mathfrak{F} = l^{\infty}\mathrm{fit}G$, где G – не p-нильпотентная группа Шмидта.*

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел из теоремы 1 вытекает

Следствие 2 [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный ненильпотентный класс Фиттинга, когда $\mathfrak{F} = l^{\infty}\mathrm{fit}G$, где G – некоторая группа Шмидта.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный не π-нильпотентный класс Фиттинга, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p}\mathfrak{N}_{q}$, где p и q – различные простые числа, $p \in \pi$.*

Следствие 4 [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальный тотально локальный ненильпотентный класс Фиттинга, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p}\mathfrak{N}_{q}$, где p и q – различные простые числа.*

Литература

1. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Мат. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.

3. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

4. Сыромолотова (Камозина), О.В. Произведения классов Фиттинга конечных групп / О.В. Сыромолотова // Матем. заметки. – 2004. – Т. 75, № 2. – С. 269–276.

5. Сафонов, В.Г. Минимальные тотально локальные ненильпотентные классы Фиттинга / В.Г. Сафонов // Юбилейная научно-практическая конференция, посвященная 75-летию со дня основания Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, Гомель, 14–15 июня 2005 г. : материалы / Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол. : Д.Г. Лин (гл. ред.) – Гомель, 2005. – С. 115–116.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 17.11.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 512.542

О конечных группах, в которых каждая примарная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна

В.Н. Семенчук, В.М. Селькин

Получено описание строения конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна, где $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация с условием Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. В частности, получено описание таких групп в случаях, когда $\mathfrak{I}$ – формация всех p-нильпотентных или всех p-разложимых групп.

Ключевые слова: конечная группа, $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа, $\mathfrak{I}$-абнормальная подгруппа, насыщенная формация, формация с условием Шеметкова.

The structure of finite groups in which every primery subgroup is either $\mathfrak{I}$-subnormal or $\mathfrak{I}$-abnormal is studied, where $\mathfrak{I}$ is a saturated hereditary formation with the Shemetkov property containing all nilpotent groups. In particular, descriptions of these groups have obtained in the cases when $\mathfrak{I}$ is either the formation of all p-nilpotent groups or all of the p-decomposable groups.

Keywords: finite group, $\mathfrak{I}$-subnormal subgroup, primery subgroup, $\mathfrak{I}$-abnormal subgroup, saturated formation, formation with the Shemetkov property.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] Фаттачи описал группы, у которых любая собственная подгруппа либо нормальна, либо абнормальна. Расширяя этот результат, Эберт и Бауман в работе [2] классифицировали группы, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна.

В теории классов конечных групп естественными обобщениями понятий субнормальности и абнормальности являются, соответственно, понятия $\mathfrak{I}$-субнормальной подгруппы и $\mathfrak{I}$-абнормальной подгруппы.

В 1986 г. Ферстер и В.Н. Семенчук, соответственно в работах [3], [4], исследовали строение групп, у которых все собственные подгруппы либо $\mathfrak{I}$-субнормальны, либо $\mathfrak{I}$-абормальны. Впоследствии В.Н. Семенчук и С.Н. Шевчук в работе [5] начали исследовать группы, у которых каждая примарная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальны, либо $\mathfrak{I}$-абормальны. В работе В.Н. Семенчука и А.Н. Скибы [6] были описаны группы, у которых каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{U}$-субнормальна, либо $\mathfrak{U}$-абнормальна для случая, когда $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп.

Дальнейшему развитию данного направления и посвящена настоящая работа.

Необходимые определения и обозначения можно найти в монографии [7].

Напомним некоторые из них:

– формация – класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений;

– формация называется насыщенной, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений;

– формация называется наследственной, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Пусть $\mathfrak{I}$ – непустая формация. Через $G^{\mathfrak{I}}$ обозначается $\mathfrak{I}$-корадикал группы, то есть пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{I}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{I}$-нормальной, если $G^{\mathfrak{I}} \subseteq M$ и $\mathfrak{I}$-абнормальной в противном случае.

Пусть $\mathfrak{I}$ – непустая формация. Следуя Кегелю, назовем подгруппу H $\mathfrak{I}$-субнормальной в группе G, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H,$$

такая, что для любого $i = 1,2,\ldots,m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{I}} \subseteq H_i$.

Подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{I}$-абнормальной, если для любой максимальной цепи

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H,$$

подгруппа H_i $\mathfrak{I}$-абнормальна в H_{i-1} для любого $1 \geq 1$.

Минимальная не $\mathfrak{I}$-группа – группа, не принадлежащая $\mathfrak{I}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{I}$.

Группа Шмидта – минимальная ненильпотентная группа.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G.

Через $|\pi(G)|$ – число простых делителей порядка группы G.

Группа G называется примарной, если $|\pi(G)| = 1$.

Через $\pi(\mathfrak{I})$ – множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{I}$.

Обозначим через G_p силовскую p-подгруппу группы G.

Формация $\mathfrak{I}$ называется формацией с условием Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{I}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Согласно результатам работ [8], [9], примерами таких формаций являются формации всех p-нильпотентных и всех p-разложимых групп.

1. Предварительные сведения. В дальнейшем нам понадобятся следующие известные свойства $\mathfrak{I}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{I}$ – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{I}} \subseteq H$, то H – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G;

2) если H – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа K для любой подгруппы K группы G;

3) если H – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа K и K – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G, то H – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G;

4) если H_1 и H_2 – $\mathfrak{I}$-субнормальные подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G;

5) если H – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{I}$-субнормальна в G для любых $x \in G$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{I}$ – наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы и любая минимальная не $\mathfrak{I}$-группа разрешима. Тогда любая группа, не принадлежащая $\mathfrak{I}$, у которой любая собственная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна разрешима.*

Доказательство. Пусть $G \notin \mathfrak{I}$. Очевидно, что G содержит минимальную не $\mathfrak{I}$-подгруппу H. Если $G = H$, то, согласно условию, G – разрешима и лемма доказана.

Пусть H – собственная подгруппа группы G. Если H – примарная подгруппа группы G, то, согласно условию, $H \in \mathfrak{I}$, что невозможно.

Итак, $|\pi(H)| > 1$. Согласно условию, H – разрешима. Нетрудно показать, что $1 \neq H^{\mathfrak{I}}$ – p-группа. Согласно условию, H либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна. Если H – $\mathfrak{I}$-абнормальна в G, то подгруппа $1 \neq H^{\mathfrak{I}}$ не является ни $\mathfrak{I}$-субнормальной, ни $\mathfrak{I}$-абнормальной в G, что невозможно. Итак, H – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G. По лемме 1 $H^{\mathfrak{I}} \neq 1$ – субнормальная подгруппа группы G. А это значит, что группа G содержит минимальную разрешимую подгруппу N.

Рассмотрим фактор-группу G/N. Согласно лемме 1, нетрудно показать, что любая собственная подгруппа G/N либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна в G/N. Если $G/N \notin \mathfrak{I}$, то, по индукции, G/N разрешима. Отсюда следует, что G разрешима. Аналогичным образом, нетрудно показать, что $\Phi(G) = 1$.

Итак, мы показали, что $N = G^{\mathfrak{I}}$.

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G. Если $N = G^{\mathfrak{I}} \subseteq M$, то M – максимальная $\mathfrak{I}$-нормальная подгруппа группы G. Нетрудно показать, что, согласно условию любая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{I}$-нормальна в M. Так как $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация, то, очевидно, что $M \in \mathfrak{I}$. Пусть $N \not\subseteq M$. Тогда $G = N\lambda M$. Так как $G/N \in \mathfrak{I}$, то $M \in \mathfrak{I}$. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то G – минимальная не $\mathfrak{I}$-группа. А это значит, что G разрешима. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{I}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда любая не p-нильпотентная группа, у которой каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна разрешима.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{I}$ – формация всех p-разложимых групп. Тогда любая не p-разложимая группа, у которой каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна разрешима.*

Следствие 3 [6]. *Пусть $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. Тогда любая группа, у которой каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{U}$-достижима, либо $\mathfrak{U}$-абнормальна разрешима.*

В следующей лемме приведены известные свойства насыщенных наследственных формаций с условием Шеметкова (см. [10], [11]).

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация, с условием Шеметкова. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H и K – перестановочные $\mathfrak{I}$-субнормальные подгруппы группы G, то HK – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G;

2) любая группа $G = AB$, где A и B $\mathfrak{I}$-субнормальные $\mathfrak{I}$-подгруппы принадлежат $\mathfrak{I}$;

3) если все силовские подгруппы группы G $\mathfrak{I}$-субнормальна в G, то $G \in \mathfrak{I}$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация. Пусть G – группа такая, что $G \notin \mathfrak{I}$, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{I})$ и любая примарная подгруппа из G либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна в G. Тогда:*

1) $G^{\mathfrak{I}} \subset G$.

2) $G = G^{\mathfrak{I}}G_p$, где $G^{\mathfrak{I}}$ – собственная подгруппа группы G, а силовская p-подгруппа G_p группы G $\mathfrak{I}$-абнормальна в G и является добавлением к $G^{\mathfrak{I}}$ в G.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $G^{\mathfrak{I}} = G$. Согласно условию любая, силовская p-подгруппа G_p, где $p \in \pi(G)$, является $\mathfrak{I}$-абнормальной в G. Так как $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация, то $G_p \in \mathfrak{I}$ для любого простого числа p из $\pi(G)$. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то любая собственная неединичная подгруппа из G_p $\mathfrak{I}$-субнормальна в G_p, что невозможно. Итак, $|G_p| = p$ для любого простого числа p из $\pi(G)$. Отсюда следует разрешимость группы G. Так как $G_p \in \mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I}$-абнормальна в G, то по теореме 15.1 из [7] G_p – $\mathfrak{I}$-проектор группы G. Согласно теореме 15.3 из [7] все $\mathfrak{I}$-проекторы группы G сопряжены в G. Отсюда нетрудно заметить, что $|G| = p$. А это значит, что $G \in \mathfrak{I}$. Получили противоречие.

Пусть в G существует $\mathfrak{I}$- абнормальная примарная p-подгруппа N, где $p \in \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{I})$. Так как $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация, то $G_p \in \mathfrak{I}$. Пусть N – собственная подгруппа из G_p. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то N $\mathfrak{I}$-субнормальна в G_p, что невозможно. Итак, $N = G_p$. Выше мы показали, что $G^{\mathfrak{I}}$ – собственная подгруппа группы G. Покажем, что G_p является добавлением к $G^{\mathfrak{I}}$ в G. Предположим противное. Тогда в G_p найдется собственная подгруппа K такая, что $G^{\mathfrak{I}}K = G$. Согласно условию, K либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна в G. Как показано выше, K не может быть $\mathfrak{I}$-

абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, K $\mathfrak{I}$-субнормальна в G. Отсюда следует, что K содержится либо в некоторой максимальной $\mathfrak{I}$-нормальной подгруппе M группы G, либо в некоторой нормальной подгруппе группы G. Пусть M – $\mathfrak{I}$-нормальная подгруппа. Тогда $G^{\mathfrak{I}} \subseteq M$, отсюда $G = G^{\mathfrak{I}}K \subseteq M$, что невозможно. Пусть M – нормальная подгруппа группы . Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{I})$, то $G/M \in \mathfrak{I}$. Из того факта, что $G/G^{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{I}$, следует, что $G/M \cap G^{\mathfrak{I}}$. Отсюда $G^{\mathfrak{I}} \subseteq M$. Тогда $G = G^{\mathfrak{I}}K \subseteq M$, что невозможно. Итак, G_p – добавление к $G^{\mathfrak{I}}$ в G. Пусть L – произвольная примарная подгруппа, отличная от G_p. Согласно условию, L либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна в G. Так как либо $L \subseteq G^{\mathfrak{I}}$, либо $L \subset G_p$, то нетрудно заметить, что L – $\mathfrak{I}$-субнормальна подгруппа группы G. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация, с условием Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Если в группе G примарные подгруппы либо $\mathfrak{I}$-субнормальны, либо $\mathfrak{I}$-абнормальны, то в G любая собственная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна.*

Доказательство. Пусть G – группа, у которой каждая примарная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна. Если в группе G все силовские подгруппы $\mathfrak{I}$-субнормальны, то согласно лемме 3 $G \in \mathfrak{I}$. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то любая собственная подгруппа группы G $\mathfrak{I}$-субнормальна в G.

Пусть в группе G найдется силовская p-подгруппа G_p, которая является $\mathfrak{I}$-абнормальной в G. Согласно лемме 4 $G^{\mathfrak{I}}$ – собственная подгруппа группы G. Ввиду леммы 4 $G = G^{\mathfrak{I}}G_p$, где G_p является минимальным дополнением к $G^{\mathfrak{I}}$ в G.

Пусть H – любая собственная подгруппа группы G, содержащая G_p. Так как G_p – $\mathfrak{I}$-абнормальная подгруппа G, то, очевидно, что H – $\mathfrak{I}$-абнормальная подгруппа группы G. Покажем, что все другие собственные подгруппы группы G $\mathfrak{I}$-субнормальны в G.

Пусть T – произвольная собственная подгруппа группы G, не содержащая G_p. Очевидно, что $T_p \subset G_p$. Так как $G_p \in \mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I}$-наследственная формация, то T_p – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа G_p. Теперь, согласно лемме 1, получим, что T_p – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа G.

Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{I}}T$. Если $G^{\mathfrak{I}}T = G$, то известно, что $G_p = T_pG_p^{\mathfrak{I}}$. Так как T_p и $G_p^{\mathfrak{I}}$ – $\mathfrak{I}$-субнормальные подгруппы группы G, то по лемме 3 $T_pG_p^{\mathfrak{I}} = G_p$ – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G, что невозможно. Итак, $G^{\mathfrak{I}}T \subset G$. Очевидно, что все силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{I}}T$ $\mathfrak{I}$-субнормальны. По лемме 3 $G^{\mathfrak{I}}T \in G$. Так как $\mathfrak{I}$ наследственная формация, то T – $\mathfrak{I}$-субнормальна в $G^{\mathfrak{I}}T$. По лемме 1 $G^{\mathfrak{I}}T$ $\mathfrak{I}$-субнормальна в G. Тогда по лемме 1 T – $\mathfrak{I}$-субнормальна в G. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация с условием Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы $G \notin \mathfrak{I}$ либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна, когда G имеет следующее строение:*

1) *G – разрешимая группа;*

2) $G_{p'} \leftthreetimes G_p$, где $G_{p'} = G^{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{I}$, G_p – циклическая подгруппа Картера. Группы G и G_p – $\mathfrak{I}$-проектор группы G;

3) любая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{I}$ – наследственная насыщенная формация с условием Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы и любая примарная подгруппа группы $G \notin \mathfrak{I}$ либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна. Согласно лемме 4, любая собственная подгруппа группы G либо $\mathfrak{I}$-достижима, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна. Так как любая минимальная не $\mathfrak{I}$-группа разрешима, то, и группа G, согласно лемме 2, разрешима.

Пусть в G любая силовская подгруппа $\mathfrak{I}$-субнормальна в G. Тогда по лемме 3 $G \in \mathfrak{I}$, что невозможно. Итак, согласно условию, в группе G найдется силовская подгруппа G_p, которая является $\mathfrak{I}$-абнормальной в G.

Так как $\mathfrak{I}$ содержит все нильпотентные группы, то $G_p \in \mathfrak{I}$. По теореме 15.1 из [7] G_p – $\mathfrak{I}$-проектор группы G. Так как по теореме 15.3 из [7] все $\mathfrak{I}$-проекторы сопряжены, то все силовские G_q группы G, где $q \neq p$ являются $\mathfrak{I}$-субнормальными подгруппами группы G. По лемме 4 $G^{\mathfrak{I}}$ – собственная подгруппа группы G. По лемме 4 $G = G^{\mathfrak{I}}G_p$, где G_p является минимальным добавлением к $G^{\mathfrak{I}}$ в G.

Покажем, что $G^{\mathfrak{I}} = G_{p'}$. Так как G_p является минимальным добавлением к $G^{\mathfrak{I}}$ в G, то

$$G_p^{\mathfrak{I}} \subseteq G^{\mathfrak{I}} \cap G_p \subseteq \Phi(G_p).$$

По лемме Фраттини

$$G = G^{\mathfrak{I}}N_G(G_{p'}) = G_p^{\mathfrak{I}}G_{p'}N_G(G_{p'}) = G_p^{\mathfrak{I}}N_G(G_{p'}).$$

Если $N_G(G_{p'}) \neq G$, то это противоречит тому, что $G_p^{\mathfrak{I}} \subseteq \Phi(G_p)$. Следовательно, $G_{p'}$ нормальна в G.

Отсюда следует, что $G_{p'} = G^{\mathfrak{I}}$. Так как $G^{\mathfrak{I}}$ – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G, то, очевидно что все примарные подгруппы из $G^{\mathfrak{I}}$ $\mathfrak{I}$-субнормальны в $G^{\mathfrak{I}}$. По лемме 3 $G^{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{I}$.

Покажем, что G_p – циклическая подгруппа Картера группы G.

Пусть G_p – нециклическая подгруппа группы G. Тогда в G_p найдутся две несопряженные максимальные подгруппы H_1 и H_2 такие, что

$$G = G^{\mathfrak{I}}H_1G^{\mathfrak{I}}H_2.$$

Очевидно, что $G^{\mathfrak{I}}H_i$ $(i = 1,2)$ – собственная $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G. Покажем, что $G^{\mathfrak{I}}H_i \in \mathfrak{I}$ $(i = 1,2)$. Так как $G^{\mathfrak{I}}$ и H_i $\mathfrak{I}$=достижимы в G и принадлежат $\mathfrak{I}$, то по лемме 3 $G^{\mathfrak{I}}H_i \in \mathfrak{I}$. Так как $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация с условием Шеметкова, то по лемме 3 $G \in \mathfrak{I}$, что невозможно. Итак, G_p – циклическая подгруппа группы G.

Так как G_p – $\mathfrak{I}$-абнормальная подгруппа группы G, то нетрудно показать, что $N_G(G_p) = G_p$. Следовательно, G_p – подгруппа Картера группы G.

Покажем, что максимальная подгруппа G_p^* из G_p нормальна в группе G. Как и выше, нетрудно показать, что $G_{p'}G_p^* \in \mathfrak{I}$. Очевидно, что $G_{p'}G_p^*$ – нормальная подгруппа в группе G. Рассмотрим подгруппу $G_qG_p^*$, где $q \neq p$. Очевидно, что G_q нормальна в $G_qG_p^*$. Предположим, что G_p – ненормальная подгруппа $G_qG_p^*$. Так как $G_qG_p^* \in \mathfrak{I}$, то по лемме 4.5 из [7]

$$G_qG_p^*/F_q(G_qG_p^*) \in f(q),$$

где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{I}$. Отсюда следует, что $p \in \pi(f(q))$. Так как $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация, с условием Шеметкова, то, по теореме 1 из [12], формация $\mathfrak{I}$ имеет локальный экран h такой, что

$$h(q) = \mathfrak{S}_{\pi(f(q))}$$

для любого q из $\pi(G)$.

Рассмотрим подгруппу G_qG_p. Очевидно, что G_q нормальна в G_qG_p. Как показано выше, $p \in \pi(f(q))$. Отсюда следует, что $G_qG_p/F_q(G_qG_p) \in h(q)$ и $G_qG_p/F_p(G_qG_p) \in h(p)$. Отсюда, согласно лемме 4.5 из [7], следует, что $G_qG_p \in \mathfrak{I}$. Так как G_p – $\mathfrak{I}$-абнормальная подгруппа из группы G, то G_pG_q – $\mathfrak{I}$-абнормальная подгруппа из G. По теореме 15.1 из [7] G_qG_p – $\mathfrak{I}$-проектор группы G, что невозможно. Итак, G_p^* нормальна в $G_qG_p^*$, где q – любое простое число из $\pi(G)$. Отсюда следует, что G_p^* – нормальная подгруппа группы G.

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условию из пунктов 1)–3). И пусть K – произвольная примарная подгруппа группы G. Если $K = G_p$, то K – $\mathfrak{I}$-проектор группы G. А это значит, что K – $\mathfrak{I}$-абнормальная подгруппа группы G.

Пусть K – собственная подгруппа из G_p. Тогда $K \subseteq G_{p'} \times G_p^*$, где $G_{p'} = G^{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{I}$, G_p^* – максимальная подгруппа из G_p. Так как $\mathfrak{I}$ содержит все нильпотентные группы, то $G_p^* \in \mathfrak{I}$. Так как $\mathfrak{I}$ – формация, то нетрудно показать, что $G_{p'} \times G_p^* \in \mathfrak{I}$. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то K – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа из $G_{p'} \times G_p^*$. Так как $G^{\mathfrak{I}} = G_{p'}$, то, по лемме 1, $G_{p'} \times G_p^*$ – $\mathfrak{I}$-субнормальна в G. Отсюда по лемме 1 K – $\mathfrak{I}$-субнормальна в G. Если K – q-группа, где $q \neq p$, то $K \subseteq G_{q'}$. Как и выше, нетрудно показать, что K – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G. Теорема доказана.

Следствие 1 [5]. *Пусть $\mathfrak{I}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа группы G, не принадлежащей $\mathfrak{I}$, либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна, когда $G = G_p \leftthreetimes G_q$, где $q \neq p$, G_q – циклическая подгруппа Картера группы G, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G, $G_p = G^{\mathfrak{I}}$.*

Доказательство. Согласно [8] формация $\mathfrak{I}$ всех p-нильпотентных групп является формацией с условием Шеметкова. Тогда из теоремы и того факта, что G не p-нильпотентная группа, следует, что G – разрешимая группа $G_{q'} \leftthreetimes G_q$, где $q \neq p$, $p \in \pi(G_{q'})$, $G_{q'}$ – p-нильпотентна, G_q – $\mathfrak{I}$-абнормальная циклическая подгруппа Картера группы G и любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G.

Покажем, что $G_q = G_p$. Пусть $r \neq p$ принадлежит $\pi(G_{q'})$. Рассмотрим подгруппу $G_r G_q$. Так как G_q – $\mathfrak{I}$-абнормальная подгруппа группы G, то $G_q G_r$ также $\mathfrak{I}$-абнормальна в G, что невозможно. Итак, $G_{q'} = G_p$.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{I}$ – формация всех p-разложимых групп. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа не p-разложимой группы G либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна, когда G – разрешимая группа одного из следующих типов:*

1) $G = G_p \leftthreetimes G_q$, где $q \neq p$, G_q – циклическая подгруппа Картера группы G, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G, $G_p = G^{\mathfrak{I}}$.

2) $G = G_{p'} \leftthreetimes G_p$, где $G_{p'} = G^{\mathfrak{I}}$, G_p – циклическая подгруппа Картера группы G и любая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G.

Согласно [9] формация $\mathfrak{I}$ всех p-разложимых групп является формацией с условием Шеметкова. Так как G не p-разложима, то $p \in \pi(G)$. Из теоремы следует, что либо $G = G_{q'} \leftthreetimes G_q$, либо $G = G_{p'} \leftthreetimes G_p$, где $q \neq p$. Если $G = G_{q'} \leftthreetimes G_q$, то, как и в следствии 1, нетрудно показать, что $G = G_p \leftthreetimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{I}}$ и G_q – циклическая подгруппа Картера группы G.

Пусть $G = G_{p'} \leftthreetimes G_p$. Тогда утверждение 2) следует из теоремы.

Литература

1. Fattachi, A. Groups with only normal and abnormal subgroups / A. Fattachi // J. Algebra. – 1974. – Vol. 28, № 1. – P. 15–19.

2. Ebert, G. A note on subnormal and abnormal chains / G. Ebert, S. Bauman // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 2. – P. 287–293.

3. Förster, P. Finite groups all of whose subgroups are $\mathfrak{I}$-subnormal or or $\mathfrak{I}$-subabnormal / P. Förster // J. Algebra. – 1986. – Vol. 103, № 1. – P. 285–293.

4. Семенчук, В.Н. Строение конечных групп с $\mathfrak{I}$-абнормальными или $\mathfrak{I}$-субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1986. – № 2. – С. 50–55.

5. Семенчук, В.Н. Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{I}$-субнормальны, либо $\mathfrak{I}$-абнормальны / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 8. – С. 46–55.

6. Semenchuk, V.N. On one generalization of finite U-critical groups / V.N. Semenchuk, A.N. Skiba // Journal of Algebra and its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 1650063-1 – 1650063-11.

7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

8. Ito, N. Note on (LM)-groups of finite order / N. Ito // Kodai Math.Sem.Rep. – 1951. – Vol. 1–2. – P. 1–6.

9. Чунихина, И.К. О p-разложимых группах / И.К. Чунихина, С.А. Чунихин // Мат. сборник. – 1944. – 15 (57):2. – С. 325–342.

10. Велесницкий, В.Ф. О конечных группах с перестановочными обобщенно субнормальными подгруппами / В.Ф. Велесницкий, В.Н. Семенчук // Україньский математичный журнал. – 2013. – Р. 1555–1559.

11. Семенчук, В.Н. Разрешимая $\mathfrak{I}$-радикальная формация / В.Н. Семенчук // Мат. заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 262–266.

12. Семенчук, В.Н. Характеризация локальных формаций по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{I}$-групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск : Наука и техника, 1984. – С. 175–181.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 09.11.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

УДК 621.371:*550.837.6*

Фазовые характеристики отраженных радиоимпульсных сигналов от анизотропных сред над углеводородными залежами

В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ

Проведен анализ взаимодействия анизотропного слоя плазмоподобного типа с электромагнитными волнами в режиме радиоимпульсных сигналов. Установлены закономерности изменения фазовых характеристик отраженных радиоимпульсных сигналов при вариации параметров зондирующих сигналов и глубины залегания углеводородов.
Ключевые слова: радиоимпульсный сигнал, анизотропная среда, углеводородная залежь, фазовые характеристики.

The analysis of the interaction of an anisotropic plasma-type layer with electromagnetic waves in the mode radiopulse signals was carried out. The regularities of changes in the phase characteristics of the reflected radiopulse signals were stated while varying the parameters of the probing signals and depth of hydrocarbon occurrence.
Keywords: radiopulse signal, anisotropic medium, hydrocarbon deposits, phase characteristics.

Введение. Актуальность рассматриваемых в настоящей работе задач заключается в разработке новых электромагнитных методов (ЭММ) георазведки, поиска, идентификации месторождений нефти и газа (углеводородов), представляющих огромную ценность и значимость для экономики Республики Беларусь и определяющих широкий спектр глобальных экологических вопросов современного общества [1].

Изучение режимов взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с углеводородными залежами (УВЗ) может быть использовано в поисковой геофизике для повышения точности и уровня достоверности ЭММ обнаружения залежей нефти и газа.

Результаты исследования взаимодействия ЭМВ с УВЗ и его экспериментального исследования приводятся во многих работах, например [2]–[5]. Наряду с этим для реализации новых ЭММ представляет интерес анализ процесса взаимодействия радиоимпульсных ЭМВ с анизотропными средами (АС), образующихся над залежами и скоплениями углеводородов.

Применение зондирующих сигналов с вариацией частот позволяет проводить точные оценки трансформации фазовых характеристик отраженных радиоимпульсных ЭМВ и интерпретировать всевозможные эффекты взаимодействия ЭМВ с АС [5].

Объекты и методы исследования. Модель многослойной среды включает слой 2 толщиной h с плоскими границами раздела, имеющий относительную диэлектрическую проницаемость $\dot{\varepsilon}_2$, расположенный между полубесконечными средами 1 и 3 с относительными диэлектрическими проницаемостями $\dot{\varepsilon}_1 = 1$ и $\dot{\varepsilon}_3$ (рисунок 1).

На границу раздела сред 1 и 2 нормально падает ЭМВ с напряженностью поля $E_П$. Во вторую среду проникает волна $E_{ПР2}$, в третью среду проникает волна $E_{ПР3}$, от нижней границы слоя 2 отражается волна $E_Н$, от границы слоя 1 отражается волна $E_{ОТР}$. На границе 2 и 3 сред образуется импеданс $Z_{2\text{-}3}$.

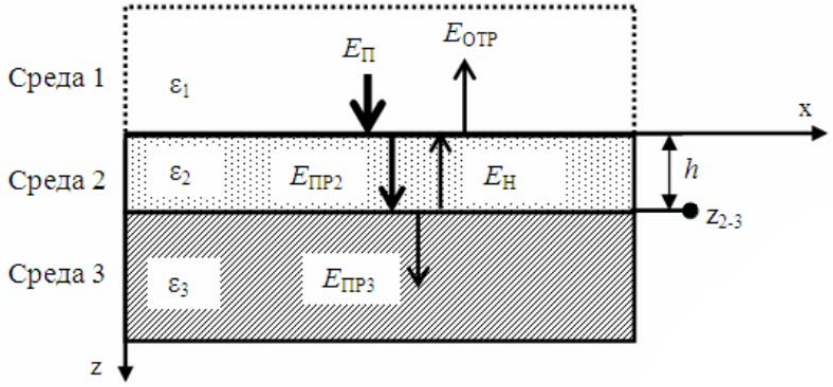


Рисунок 1 – Фрагмент слоистой среды и отражения электромагнитной волны

Рассмотрим взаимодействие анизотропной среды над УВЗ с радиоимпульсным сигналом, спектр которого рассчитывается по формуле:

$$S(f) = \frac{U \cdot \tau_u}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}, \quad (1)$$

где $\frac{U \cdot \tau_u}{2} = 1$ – амплитуда радиоимпульса; $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – частота радиоимпульса; $\tau_и$ – длительность импульса.

Спектр отраженного радиоимпульса определяется формулой:

$$\dot{S}_0 = (1 - \dot{R}_{1-2})^2 \cdot \dot{R}_{2-3} \cdot e^{-2\alpha h} \cdot \dot{S}(f). \quad (2)$$

Примем амплитуду нормально падающей ЭМВ за условную единицу $\dot{E}_n = 1$. На практике же значение напряженности поля будет определяться реализуемой радиотехнической системой для поиска, к которой предъявляются требования при решении конкретной геоинформационной задачи.

Комплексная амплитуда волны, отраженной от границы сред 1–2, определяется коэффициентом отражения от верхней границы $\dot{R}_{1-2}$ как [6]:

$$\dot{E}_{1-2} = \dot{E}_n \cdot \dot{R}_{1-2} = \dot{R}_{1-2}. \quad (3)$$

При этом коэффициент отражения определяется волновыми сопротивлениями сопряженных сред:

$$\dot{R}_{1-2} = \frac{\dot{Z}_{вх} - \dot{Z}_1}{\dot{Z}_{вх} + \dot{Z}_1}, \quad (4)$$

где $Z_1 = 377$ Ом – волновое сопротивление воздуха.

Коэффициент отражения от слоя 3 равен:

$$\dot{R}_{2-3} = \frac{\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2}{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_2}, \quad (5)$$

где $\dot{Z}_2$ – волновое сопротивление второго слоя, $\dot{Z}_3$ – волновое сопротивление третьего слоя.

Входной импеданс на верхней границе второго слоя:

$$\dot{Z}_{вх} = \frac{(\dot{Z}_3 + \dot{Z}_2) + (\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2) \cdot e^{-2\dot{\gamma}_2 h}}{(\dot{Z}_3 + \dot{Z}_2) - (\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2) \cdot e^{-2\dot{\gamma}_2 h}} \cdot \dot{Z}_2, \quad (6)$$

где $\dot{\gamma}_2$ – постоянная распространения волны.

Волновые сопротивления второго и третьего слоев равны

$$\dot{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\dot{\varepsilon}_2 \cdot \varepsilon_0}}, \tag{7}$$

$$\dot{Z}_3 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\dot{\varepsilon}_3 \cdot \varepsilon_0}}, \tag{8}$$

где $\dot{\varepsilon}_3$ – относительная диэлектрическая проницаемость третьего слоя, $\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}$ Г / м, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф / м, $\dot{\varepsilon}_3 = 2{,}5$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$.

Постоянная распространения волны:

$$\dot{\gamma}_2 = j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} \cdot \sqrt{\dot{\varepsilon}_2}. \tag{9}$$

Комплексная относительная диэлектрическая проницаемость 2-го слоя:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_r - j \cdot \frac{\sigma_r}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \varepsilon_0} - \sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{w_{ni}}{V_i^2 + w^2} \cdot \left[1 + j \cdot \frac{V_i}{w} \right] \right\}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_r = 10$ – относительная диэлектрическая проницаемость наполнителя слоя 2 без учета анизотропных свойств; $\sigma_r = 10^{-2}$ См/м – удельная проводимость слоя 2; $w = 2\cdot\pi\cdot f$ – частота ЭМВ; w_{ni} – плазменная частота; V_i – частота столкновения частиц.

$$w_{ni} = g_i \cdot \left(\frac{N_i}{m_i \cdot \varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

где $g_e = g_u = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $N_e = N_u = 10^{16}$ м$^{-3}$, $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $m_u = 5\cdot10^{-4}\cdot m_e$.

$$V_u = \frac{V_в}{\left(\frac{m_u}{m_в}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{12}$$

где $V_e = 2\cdot\pi\cdot10^9$; i = 1 = e – электроны; i = 2 = u – ионы.

Фазовая скорость распространения волны:

$$\vartheta_ф = \frac{c}{\mathrm{Re}\left(\sqrt{\dot{\varepsilon}_2 \cdot \dot{\mu}_2}\right)}, \tag{13}$$

где c – скорость света.

Коэффициент затухания:

$$\alpha_2 = \mathrm{Im}(\dot{\gamma}_2). \tag{14}$$

Представим выражение (2) в виде:

$$\dot{S}_0 = \left|\dot{S}_0\right| \cdot e^{j\varphi_{s0}}, \tag{15}$$

где $\left|\dot{S}_0\right|$ – модуль; φ_{s0} = Ф – фаза спектральной характеристики.

Целью данной работы является анализ трансформации фазовых характеристик отраженных радиоимпульсных ЭМВ от АС над углеводородами.

Результаты исследований. На рисунках 2−5 представлены фазовые характеристики радиоимпульсного сигнала в зависимости от несущей частоты f_0, на глубинах h от 1000 до 5000 м и с частотой импульсов $f_и$, равной 10 кГц. На рисунке 2 с частотой f_0 равной 20 кГц, в диапазоне частот от 0 до 14 кГц фаза меняется не существенно. На участке частот от 15 до 25 кГц наблюдаются два положительных максимума: 0,94 *рад* на частоте 19 кГц и 0,78 *рад* на частоте 24 кГц. Так же видны два отрицательных максимума: минус 0,79 *рад* на частоте 17 кГц, минус 0,86 *рад* на частоте 21кГц. В диапазоне частот от 20 до 100 кГц происходит уменьшение фазы.

На рисунке 3 для частоты f_0, равной 50 кГц, на отрезке частот от 0 до 42 кГц происходят незначительные изменения фазы. В диапазоне частот от 43 до 55 кГц фаза меняется более существенно и наблюдаются положительные (0,82 *рад*, 0,76 *рад*) и отрицательные (минус 0,46 *рад*, минус 0,82 *рад*) максимумы. На участке частот от 56 до 100 кГц существенных изменений фазы не происходит.

На рисунке 4 для частоты f_0, равной 80 кГц, в диапазоне частот от 0 до 74 кГц фаза меняется несущественно. На отрезке частот от 75 до 100 кГц происходят значительные изменения фазы и наблюдаются положительный максимум 0,91 *рад* на частоте 79 кГц и отрицательный (минус 0,87 *рад*) на частоте 83 кГц.

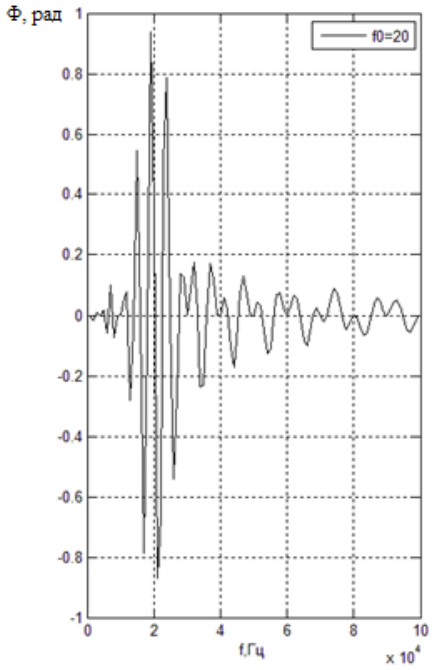


Рисунок 2 – Зависимости Ф = φ(f) для h = 1000 м, f_0 = 20 кГц

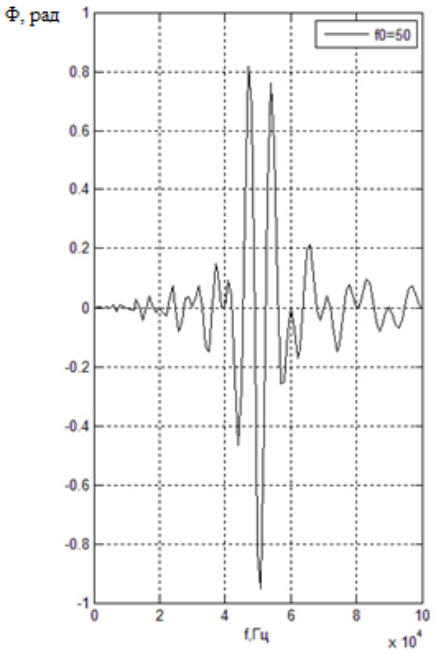


Рисунок 3 – Зависимости Ф = φ(f) для h = 1000 м, f_0 = 50 кГц

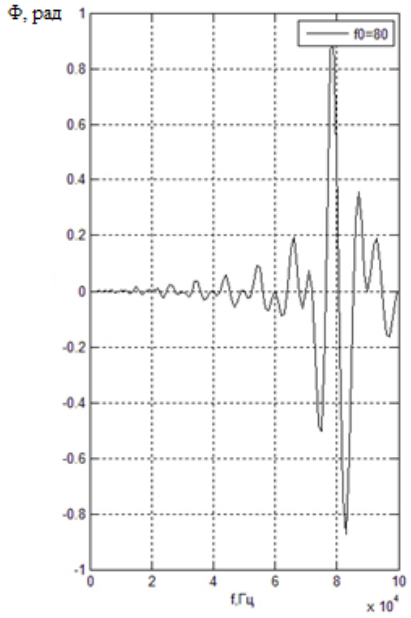


Рисунок 4 – Зависимости Ф = φ(f) для h = 1000 м, f_0 = 80 кГц

Рисунок 5 отражает зависимость фазового спектра радиоимпульсного сигнала, отраженного от залежи, находящейся на глубине h = 5000 м, при длительности импульса 10 кГц.

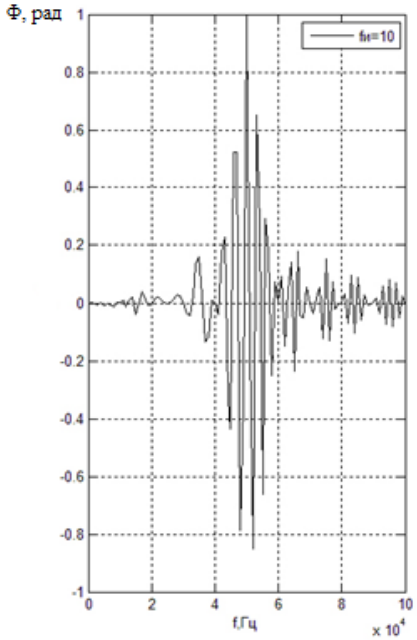


Рисунок 5 – Зависимости Ф = φ(f) для h = 5000 м, fи = 10 кГц

Многочисленные справочные данные, приведенные для различных глубин залегания и при вариации характеристик зондирующих сигналов, могут быть применены для разработки новых методов поиска, идентификации месторождений нефти и газа.

Заключение. Проведен анализ взаимодействия анизотропного слоя плазмоподобного типа с ЭМВ в режиме радиоимпульсных сигналов. Вариация характеристик зондирующих сигналов позволяет повысить информативность методов оконтуривания и выделения УВЗ. Исследована трансформация фазовых характеристик отраженных радиоимпульсных ЭМВ от АС, образующихся над залежами и скоплениями углеводородов, в зависимости от глубины залегания и длительности импульса. Результаты исследования могут быть использованы в поисковой геофизике.

Литература

1. Гололобов, Д.В. Радиотехнические системы поиска и идентификации углеводородных залежей в режиме двухчастотного взаимодействия / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз. тэхн. – 2002. – № 1 – С. 49–54.

2. Moskvichew, V.N. Interraction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V.N. Moskvichew // 9-th Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.

3. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс углеводородной залежи в режиме двухчастотного взаимодействия / Д.В. Гололобов, Н.В. Цывис, В.Ф. Янушкевич // Изв. Беларус. инж. акад. – 2001. – № 1(11). – С. 101–104.

4. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс среды над углеводородными залежами в режиме частотно-модулированных сигналов / Д.В. Гололобов, С.В. Калинцев, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз. тэхн. – 2010. – № 4. – С. 98–101.

5. Москвичев, В.Н. Исследование взаимодействий электромагнитных волн с углеводородной залежью / В.Н. Москвичев // Радиотехника и электроника – 1988. – Вып. 18. – С. 91–96.

6. Финкельштейн, М.И. Применение радиолокационного подповерхностного зондирования в инженерной геологии / М.И. Финкельштейн, В.А.Кутев, В.П. Золоторев .– М. : Недра, 1986. – 182 с.

Полоцкий государственный университет Поступила в редакцию 07.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

Физика

УДК 535.016, 535.012.2, 535.518, 537.862, 537.872.32

Генерация второй гармоники от поверхности конечного цилиндра и её зависимость от ориентации эллипса поляризации падающего излучения

В.Н. Капшай, А.А. Шамына

Приведены формулы, описывающие пространственное распределение поля второй гармоники, генерируемого от поверхности цилиндра. Рассмотрен случай наклонного падения на цилиндр конечных размеров. Построены диаграммы направленности излучения удвоенной частоты для различных параметров задачи. Проанализирована зависимость вида диаграмм направленности от ориентации эллипса поляризации относительно плоскости падения. Обнаружена асимметрия диаграмм направленности при приближении угла между большей полуосью эллипса поляризации и плоскостью падения к 45 градусам.
Ключевые слова: генерация второй гармоники, цилиндр, нелинейное приближение Рэлея-Ганса-Дебая, диаграмма направленности, эллипс поляризации.

The formulae describing spatial distribution of the second harmonic field by the cylinder's surface have been given. The case of inclined incidence on the finite cylinder has been considered. The directivity patterns of double frequency radiation have been plotted in case of various parameters of the problem. Dependence of the directivity patterns' forms on orientation of polarization ellipse relatively to the incidence plane has been analyzed. Asymmetry of the directivity patterns has been observed when the angle between main semiaxis of polarization ellipse and incidence plane approached 45 degrees.
Keywords: second-harmonic generation, cylinder, nonlinear Rayleigh-Gans-Debye approximation, directivity pattern, polarization ellipse.

Введение. С тех пор, как в экспериментах неоднократно было доказано существование такого явления, как генерация второй гармоники от поверхности [1]–[3], появилась необходимость в теоретическом описании этого явления. На данный момент предложено три модели. Первая из них нелинейная модель Рэлея-Ганса-Дебая (РГД) [4], [5], получившая в последующем обобщение на случай учёта дисперсии окружающей среды. Вторая модель – нелинейная модель Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна [6]. Она несколько сложнее обобщенной РГД-модели и не позволяет получить аналитического решения. Третья модель основана на решении задачи Ми [7] для сферических частиц или на точном решении задачи о рассеянии для цилиндрических частиц. Поскольку последние эксперименты позволили получить сигнал удвоенной частоты от наночастиц размером порядка 50 нм [8], то предпочтительнее всего использовать первую модель для количественного описания данного явления. Она позволяет получить аналитические выражения для распределения поля второй гармоники в дальней зоне, генерируемого от частиц, малых по сравнению с длиной волны падающего излучения.

Часто экспериментальное исследование генерации второй гармоники от поверхности диэлектрических частиц происходит следующим образом. Частицы помещают в раствор, где они адсорбируют краситель. В качестве красителя, обладающего нелинейными свойствами, используют малахитовый зелёный пиридин, поверхностно активные вещества. Генерация второй гармоники от полистироловых шариков, диэлектрических частиц в кристаллиновом слое, водяных капель уже были исследованы ранее и подтвердили применимость приближения Рэлея-Ганса-Дебая [9].

Преимуществом такого метода исследования поверхности можно считать то, что в эксперименте присутствует только сигнал от поверхности, поскольку именно на поверхности нарушается условие центросимметричности, и нелинейные эффекты чётного порядка стано-

вятся возможными [10]. Таким образом, удаётся избавиться от помех, создаваемых генерацией второй гармоники от объёма частиц. Этим методом уже была исследована кинетика транспорта веществ через мембраны липосом [11].

1. Постановка задачи. Для решения задачи о ГВГ от поверхности цилиндра введём декартову, цилиндрическую и сферическую системы координат. Схема задачи изображена на рисунке 1. Ось Ox направим вправо, а ось Oz вверх. Ось Oy направим перпендикулярно им обоим так, чтобы оси образовывали правую систему координат. Векторы $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – это единичные орты декартовой системы координат, $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ – единичные орты цилиндрической системы координат, а $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ – единичные орты сферической системы координат. В центре системы координат расположим цилиндрическую частицу, ось которой проходит вдоль оси Oz, а центр частицы находится в начале координат. Обозначим высоту частицы h, а радиус её основания a. Пусть частица покрыта оптически нелинейным слоем толщины $d_0 << a$ ($d_0 << h$).

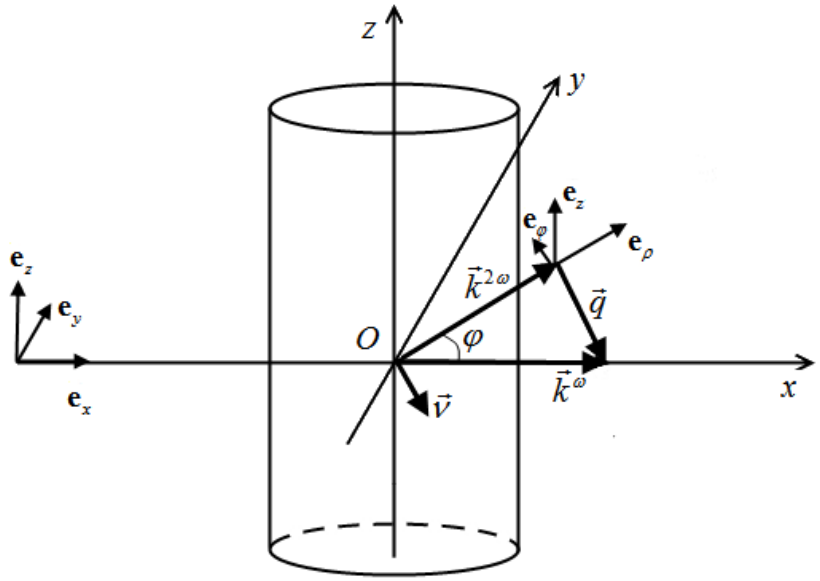


Рисунок 1 – Схема задачи

Зададим падающую в плоскости Oxz волну уравнением в системе СГС

$$\vec{E}^{in}\left(\vec{r}\right) = \vec{e}^{in} E_0 \exp\left(ik^{\omega} x \sin\theta_{in} + ik^{\omega} z \cos\theta_{in} - i\omega t\right), \tag{1}$$

где E_0 – это амплитуда падающей волны, $\vec{k}^{\omega}$ – её волновой вектор на циклической частоте ω, а вектор $\vec{e}^{in}$ характеризует поляризацию падающей волны и задаётся формулой

$$\vec{e}^{in} = \frac{\left(\sin\varphi_{in}\mathbf{e}_y + \cos\varphi_{in}\left(-\cos\theta_{in}\mathbf{e}_x + \sin\theta_{in}\mathbf{e}_z\right)\right)}{\sqrt{1+\sigma^2}} + \frac{i\sigma\left(-\cos\varphi_{in}\mathbf{e}_y + \sin\varphi_{in}\left(-\cos\theta_{in}\mathbf{e}_x + \sin\theta_{in}\mathbf{e}_z\right)\right)}{\sqrt{1+\sigma^2}}, \tag{2}$$

где θ_{in} – это угол между направлением падающей волны и осью Oz, а φ_{in} – это угол между большей полуосью эллипса поляризации и плоскостью падения, $-1 \le \sigma \le +1$ характеризует эллиптичность падающей волны и равен отношению меньшей полуоси эллипса поляризации к большей ($\sigma > 0$ – правая поляризация, $\sigma < 0$ – левая поляризация).

2. Решение. В приближении Рэлея-Ганса-Дебая рассеянной волной пренебрегают, поэтому поле в окрестности участка поверхности равно полю падающей волны. Тогда в дипольном приближении поляризация участка поверхности зависит от напряжённости электрического поля в этой точке следующим образом:

$$P_i^{2\omega}\left(\vec{x}\right) = \chi_{ijk}\left(\vec{x}\right) E_j^{in}\left(\vec{x}\right) E_k^{in}\left(\vec{x}\right), \tag{3}$$

где индексы i, j, k обозначают компоненты векторов $\vec{P}^{2\omega}$ и $\vec{E}^{in}$, а тензор $\chi_{ijk}(\vec{x})$ – это тензор нелинейной восприимчивости третьего ранга, имеющий для некирального слоя следующий общий вид:

$$\chi_{ijk}(\vec{x}) = \chi_1 n_i n_j n_k + \chi_2 n_i \delta_{jk} + \chi_3 \left(n_j \delta_{ki} + n_k \delta_{ij} \right), \tag{4}$$

где χ_{1-3} – коэффициенты анизотропии, n_i, n_j, n_k – компоненты вектора нормали к поверхности, $\delta_{ij}, \delta_{ki}, \delta_{jk}$ – дельта-символы Кронекера. В формуле (3) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Поле генерируемой волны можно вычислить, воспользовавшись методом функции Грина, как следующий интеграл по объёму тонкого слоя:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \left(1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r\right) \mu^{2\omega} \frac{\exp\left(ik^{2\omega}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \int_V \frac{\exp\left(ik^{2\omega}|\vec{x} - \vec{x}'|\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{P}^{2\omega}(\vec{x}')\, d\vec{x}', \tag{5}$$

где $\mu^{2\omega}$ – это магнитная проницаемость окружающей среды на частоте 2ω, c – скорость света. После применения приближения для дальней зоны ($|\vec{x}'| << |\vec{x}|$) и вычисления интеграла формула (5) для боковой поверхности цилиндрической частицы преобразуется к следующему виду:

$$\vec{E}(\vec{x}) = 2\pi i \mu^{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp\left(ik^{2\omega}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} d_0 a h E_0^2 \left(1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r\right) \frac{\sin\left(k^{\omega} h \left(\cos\theta_{in} - \xi \cos\theta\right)\right)}{k^{\omega} h \left(\cos\theta_{in} - \xi \cos\theta\right)} \vec{f}_{lat}(\vec{x}), \tag{6}$$

где $\xi = n^{2\omega} / n^{\omega}$ – это дисперсия окружающей среды, а $\vec{f}_{lat}$ задаётся выражением

$$\begin{aligned} \vec{f}_{lat}(\vec{x}) = \vec{\nu} \Big[\left(\vec{e}_{\perp}^{in} \vec{\nu}\right)^2 \chi_1 J_3(q_{\perp} a) - \left(\vec{e}^{in} \vec{e}^{in}\right) \chi_2 J_1(q_{\perp} a) - \left(\vec{e}_{\perp}^{in} \vec{e}_{\perp}^{in}\right) \chi_1 \left(J_1(q_{\perp} a) + J_3(q_{\perp} a)\right)/4 \Big] - \\ - 2\vec{e}^{in} \left(\vec{e}_{\perp}^{in} \vec{\nu}\right) \chi_3 J_1(q_{\perp} a) - 2\vec{e}_{\perp}^{in} \left(\vec{e}_{\perp}^{in} \vec{\nu}\right) \chi_1 \left(J_1(q_{\perp} a) + J_3(q_{\perp} a)\right)/4, \end{aligned} \tag{7}$$

записанным через функции Бесселя i-го порядка $J_i(z)$. Здесь

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\perp}^{in} = \frac{\left(\sin\varphi_{in} \sin\varphi - \cos\varphi_{in} \cos\theta_{in} \cos\varphi - i\sigma \left(\cos\varphi_{in} \sin\varphi + \sin\varphi_{in} \cos\theta_{in} \cos\varphi\right)\right) \mathbf{e}_{\rho}}{\sqrt{1 + \sigma^2}} + \\ + \frac{\left(\sin\varphi_{in} \cos\varphi + \cos\varphi_{in} \cos\theta_{in} \sin\varphi + i\sigma \left(-\cos\varphi_{in} \cos\varphi + \sin\varphi_{in} \cos\theta_{in} \sin\varphi\right)\right) \mathbf{e}_{\varphi}}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \end{aligned} \tag{8}$$

– это проекция вектора поляризации падающей волны на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра;

$$q_{\perp} = |\vec{q}_{\perp}| = 2k^{\omega} \sqrt{\sin^2\theta_{in} - 2\xi \sin\theta \sin\theta_{in} \cos\varphi + \xi^2 \sin^2\theta} \tag{9}$$

– это модуль составляющей вектора рассеяния $\vec{q} = 2\vec{k}^{\omega} - \vec{k}^{2\omega}$ в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра;

$$\vec{\nu} = \vec{q}_{\perp} / |\vec{q}_{\perp}| = \frac{\left(\sin\theta_{in} \cos\varphi - \xi \sin\theta\right) \mathbf{e}_{\rho} - \sin\theta_{in} \sin\varphi \mathbf{e}_{\varphi}}{\sqrt{\sin^2\theta_{in} - 2\xi \sin\theta \sin\theta_{in} \cos\varphi + \xi^2 \sin^2\theta}} \tag{10}$$

– это единичный вектор в направлении $\vec{q}_{\perp}$.

Интеграл (5) после вычисления для торцов цилиндра, имеющих форму дисков, принимает вид

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) = 2\pi i \mu^{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp\left(ik^{2\omega}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} d_0 a^2 E_0^2 \sin\left(k^{\omega} \left(\cos\theta_{in} - \xi \cos\theta\right) h\right) \times \\ \times \left(J_0(q_{\perp} a) + J_2(q_{\perp} a)\right) \left(1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r\right) \vec{f}_{but}(\vec{x}), \end{aligned} \tag{11}$$

где векторная функция $\vec{f}_{but}(\vec{x})$ записывается как

$$\vec{f}_{but}(\vec{x}) = \begin{Bmatrix} \left[(\chi_1 + 2\chi_3)\left(\vec{e}^{\,in}\mathbf{e}_z\right)^2 + \chi_2\left(\vec{e}^{\,in}\vec{e}^{\,in}\right)\right]\cos\theta + \\ +2\chi_3\left(\vec{e}^{\,in}\mathbf{e}_z\right)\left(e_x^{in}\sin\theta\cos\varphi + e_y^{in}\sin\theta\sin\varphi\right) \end{Bmatrix}\mathbf{e}_r +$$
$$+\begin{Bmatrix} -\left[(\chi_1 + 2\chi_3)\left(\vec{e}^{\,in}\mathbf{e}_z\right)^2 + \chi_2\left(\vec{e}^{\,in}\vec{e}^{\,in}\right)\right]\sin\theta + \\ +2\chi_3\left(\vec{e}^{\,in}\mathbf{e}_z\right)\left(e_x^{in}\cos\theta\cos\varphi + e_y^{in}\cos\theta\sin\varphi\right) \end{Bmatrix}\mathbf{e}_\theta + \quad (12)$$
$$+2\chi_3\left(\vec{e}^{\,in}\mathbf{e}_z\right)\left(-e_x^{in}\sin\varphi + e_y^{in}\cos\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi.$$

Поле второй гармоники от конечного цилиндра будет равно сумме полей от боковой его поверхности (6) и от торцов цилиндра (11).

Ввиду сложности полученных зависимостей, будем проводить анализ формул построением диаграмм направленности (ДН), характеризующих пространственное распределение излучения удвоенной частоты в дальней зоне.

3. Численный анализ. Исследуем зависимость вида ДН от угла между большей полуосью эллипса поляризации и плоскостью падения φ_{in}. Для этого построим несколько ДН при разных коэффициентах анизотропии. Пусть остальные параметры задачи будут следующими:

$$\xi = 1.1, a = 0.5, h = 0.24, \sigma = 0.5, \theta_{in} = \pi/4. \quad (13)$$

Диаграммы направленности для случая, когда большая полуось эллипса поляризации лежит в плоскости падения, изображены на рисунке 1.

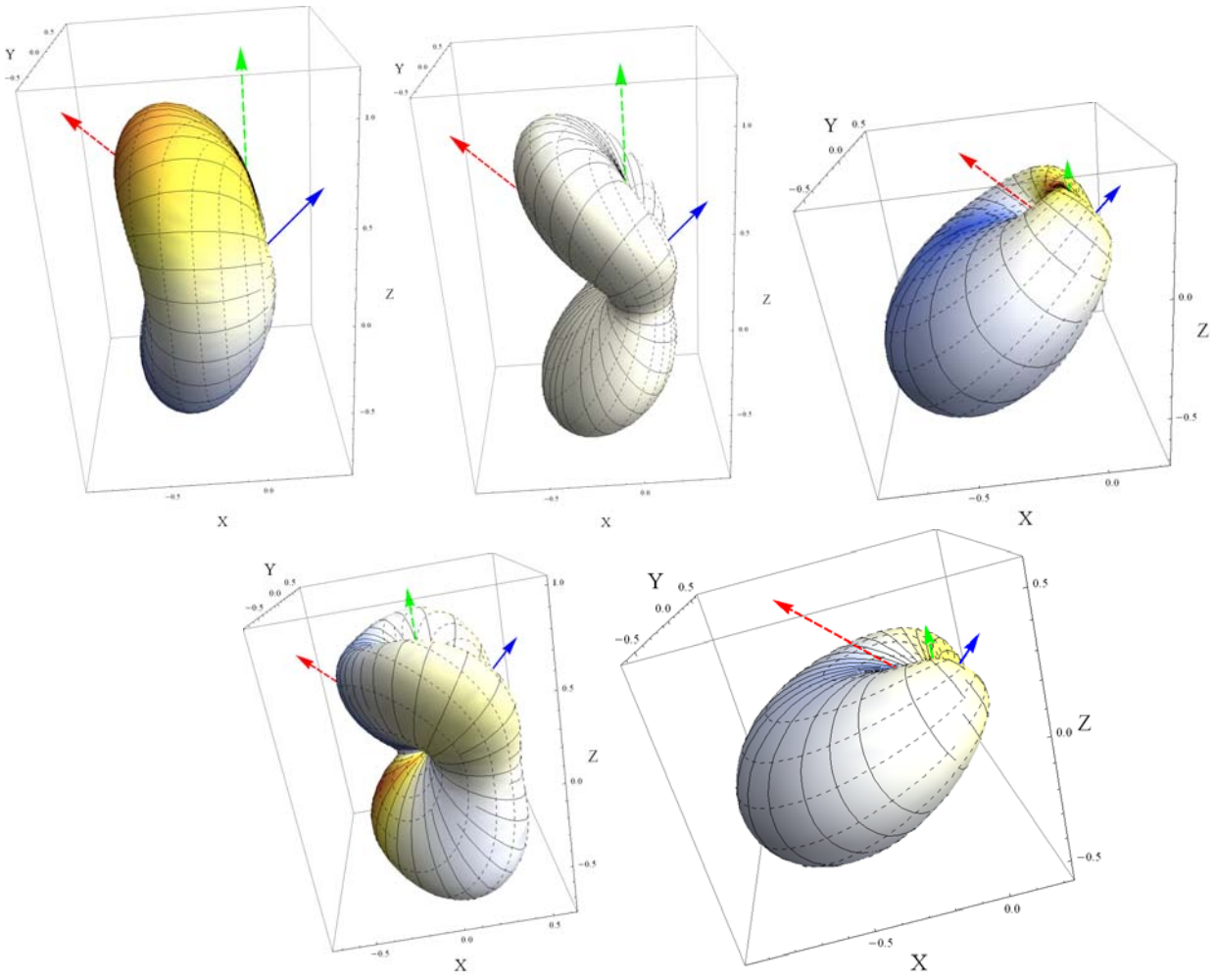


Рисунок 2 – ДН для различных коэффициентов анизотропии. Большая полуось эллипса поляризации излучения второй гармоники находится в плоскости падения

Верхние три графика слева направо построены для коэффициентов анизотропии $(\chi_1 = 1, \chi_2 = 0, \chi_3 = 0), (\chi_1 = 0, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0), (\chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 1)$ соответственно. Нижние два рисунка для коэффициентов анизотропии $(\chi_1 = -1, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0), (\chi_1 = -2, \chi_2 = 0, \chi_3 = 1)$. Стрелка с длинными штрихами, указывающая вверх, – это ось цилиндра; сплошная стрелка, указывающая вправо вверх, – это направление падающей волны; стрелка с короткими штрихами, указывающая влево вверх, – это направление большей полуоси эллипса поляризации. Сплошные и штриховые линии на поверхности диаграммы направленности – это проекции больших и меньших полуосей эллипса поляризации излучения второй гармоники на поверхность диаграммы направленности. Лепестки диаграмм направленности указывают на направления преимущественного излучения.

Теперь приведём ДН для случая, когда большая полуось эллипса поляризации направлена перпендикулярно плоскости падения и направлена вдоль оси Oy. Параметры задачи и обозначения те же.

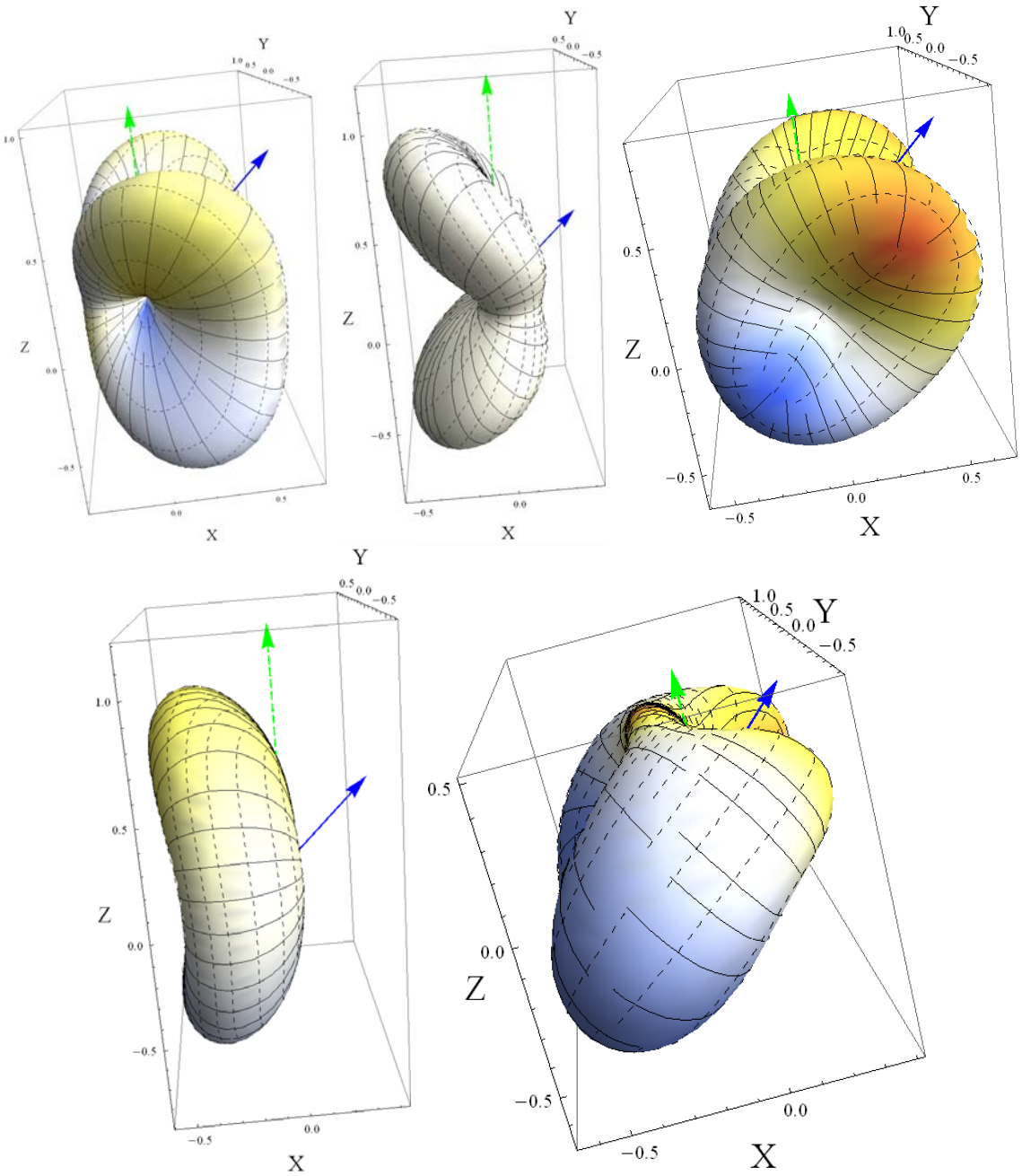


Рисунок 3 – ДН для различных коэффициентов анизотропии. Большая полуось эллипса поляризации излучения второй гармоники перпендикулярна плоскости падения

В обоих случаях можно наблюдать симметрию во всех ДН, представленных на рисунках 2–3. На трёх ДН рисунка 2 и на четырёх ДН рисунка 3 есть по две зеркальных плоскости симметрии. На остальных ДН присутствует только одна плоскость симметрии. Причём вид диаграммы направленности для случая $(\chi_1 = 0, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0)$ не поменялся на обоих рисунках. Дополнительный анализ показывает, что в направлении падающей волны генерируется излучение правой поляризации, совпадающей с поляризацией падающего излучения, а в обратном направлении генерируется излучение противоположной поляризации.

Исследуем теперь случай наклонного положения большей полуоси эллипса поляризации падающей волны по отношению к плоскости падения $\varphi_{in} = \pi / 4$. Диаграммы направленности для этого случая представлены ниже

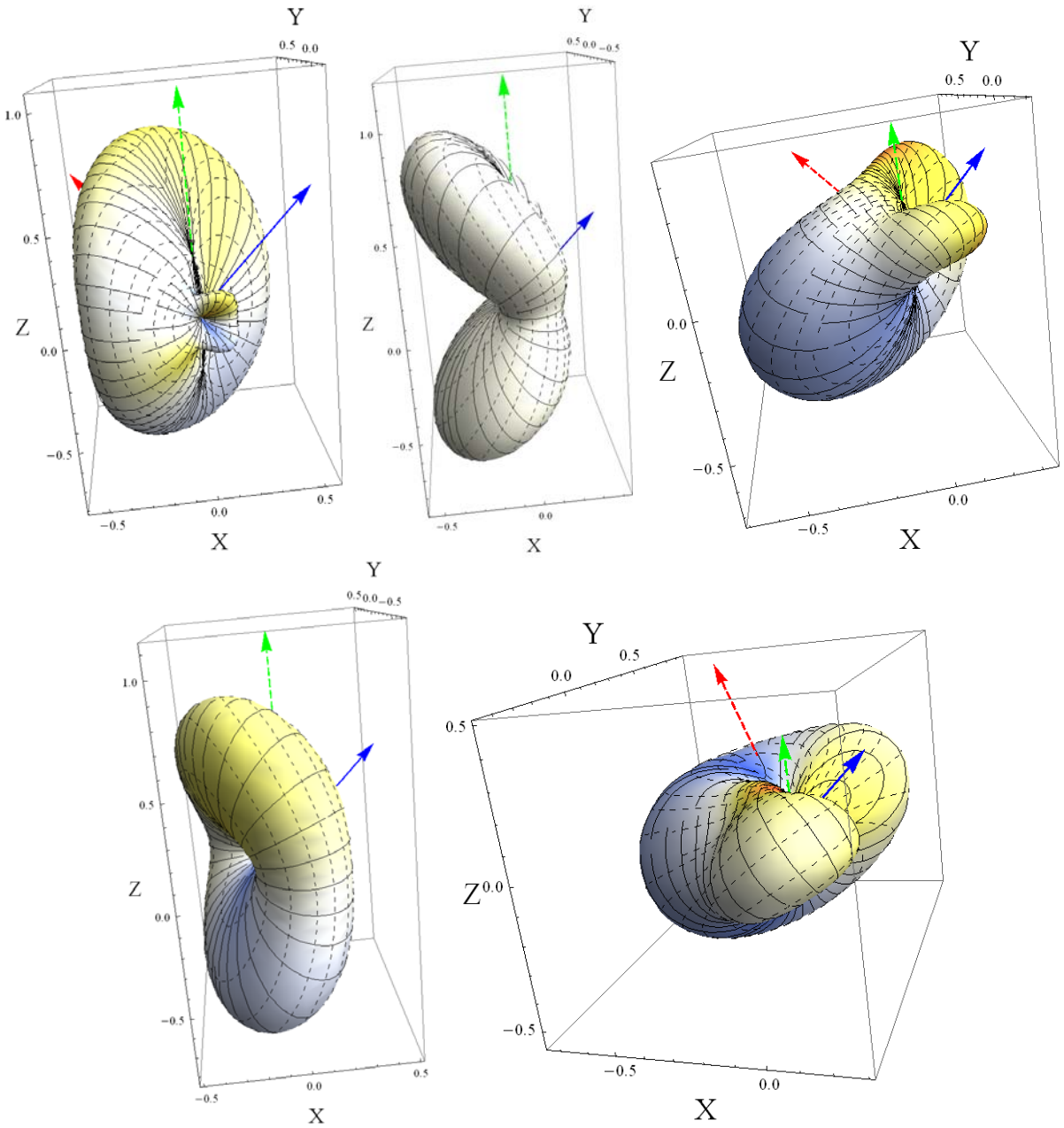


Рисунок 4 – ДН для различных коэффициентов анизотропии. Большая полуось эллипса поляризации излучения второй гармоники находится под углом 45 градусов к плоскости падения

На рисунках можно наблюдать нарушение симметричности ДН для всех случаев, кроме $(\chi_1 = 0, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0)$ и $(\chi_1 = -1, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0)$. При этом главные лепестки ДН поворачиваются в сторону большей полуоси эллипса поляризации. Для случая $(\chi_1 = -1, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0)$

происходит поворот всей диаграммы направленности вместе с большей полуосью. В случае $(\chi_1 = 0, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0)$ диаграмма направленности никак не поменялась и оставалась постоянной для всех трёх значений φ_{in}. Более того, детальный анализ формул показывает, что поляризация излучения удвоенной частоты для этих значений φ_{in} остаётся неизменной и является линейной.

Заключение. Анализ формул (6)–(12) показал, что изменение угла между большей полуосью эллипса поляризации падающего излучения и плоскостью падения приводит к потере симметрии в диаграммах направленности. При этом направление преимущественного излучения поворачивается вместе с большей полуосью эллипса поляризации. Выявлены комбинации коэффициентов анизотропии, при которых ДН сохраняет симметрию, однако поворачивает саму ДН с изменением угла φ_{in}. Для одной из комбинаций коэффициентов анизотропии угол φ_{in} не влияет на вид диаграммы направленности и на поляризацию излучения удвоенной частоты. В большинстве случаев ДН имеет два главных лепестка, что неоднократно доказано экспериментами. В направлении, совпадающем с направлением падающей волны, генерируется излучение с поляризацией, совпадающей с поляризацией падающей волны. В противоположном направлении генерируется излучение противоположной поляризации.

Литература

1. Wang, H. Second harmonic generation from the surface of centrosymmetric particles in bulk solution / H. Wang, E.C.Y. Yan, E. Borguet, K. B. Eisenthal // Chem. Phys. Lett. – 1996. – № 259. – P. 15–20.

2. Wang, H.F. Energetics and Population of Molecules at Microscopic Liquid and Solid Surfaces / H.F. Wang, E.C.Y. Yan, Y. Liu, K.B. Eisenthal // J. Phys. Chem. B. – 1998. – № 102. – P. 4446–4450.

3. Wang, H. Molecules at Liquid and Solid Surfaces / H. Wang, E. Borguet, E.C.Y. Yan, D. Zhang, J. Gutow, K.B. Eisenthal // Langmuir. – 1998. – № 14. – P. 1472–1477.

4. Martorell, J. Scattering of second-harmonic light from small spherical particles ordered in a crystalline lattice / J. Martorell, R. Vilaseca, R. Corbalan // Phys. ReV. A. – 1997. – № 55. – P. 4520.

5. Roke, S. Vibrational Sum Frequency Scattering from a Submicron Suspension / S. Roke, W.G. Roeterdink, J.E.G.J. Wijnhoven, A.V. Petukhov, A.W. Kleyn, M. Bonn // Phys. ReV. Lett. – 2003. – № 91. – P. 258302.

6. Roke, S. Nonlinear optical scattering: The concept of effective susceptibility / S. Roke, M. Bonn, A.V. Petukhov // Phys. ReV. B. – 2004. – № 70. – P. 115106.

7. Dadap, J.I. Theory of optical second-harmonic generation from a sphere of centrosymmetric material: small-particle limit / J.I. Dadap, J. Shan, T.F. Heinz // J. Opt. Soc. Am. B. – 2004. – № 21. – P. 1328.

8. Jen, S.H. Probing Molecules Adsorbed at the Surface of Nanometer Colloidal Particles by Optical Second-Harmonic Generation / S.H. Jen, H.L. Dai // J. Phys. Chem. B. – 2006. – № 110. – P. 23000–23003.

9. Viarbitskaya, S. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya, V. Kapshai, P. van der Meulen, T. Hansson // Phys. Rev. A. – 2010. – № 81. – P. 053850.

10. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики / И.Р. Шен; пер. с англ.; под ред. С.А. Ахманова. – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1989. – 558 с.

11. Liu, J. Second Harmonic Studies of Ions Crossing Liposome Membranes in Real Time / J. Liu, M. Subir, K. Nguyen, K.B. Eisenthal // J. Phys. Chem. B. – 2008. – № 112. – P. 15263–15266.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 10.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 521.1; 524.3

О моделировании радиальных функций плотности планет земной группы

Г.Ю. Тюменков, Д.А. Штромберг

В приближении сферической симметрии и с учетом физически корректного радиального поведения проведено моделирование функций плотности планет земной группы с параболической добавкой. На этой основе предложена обобщенная форма функции плотности для слоистой структуры. Произведен расчет масс планет земной группы по усредненным характеристикам. Дана краткая оценка результатов моделирования.
Ключевые слова: функция плотности, шаровой слой, гипергеометрическая функция, гамма-функция, функция Хэвисайда, планета земной группы.

Using the approximation of spherical symmetry and correct physical radial behavior the density functions of terrestrial planets are simulated in several analytical forms with parabolic term. On this basis the density functions generalized forms for layered structures are proposed. Masses of terrestrial planets are calculated with averaged characteristics. The possible application of simulation results is evaluated.
Keywords: density function, spherical layer, hyper-geometric function, gamma function, Heaviside step function, terrestrial planet.

Введение. До настоящего времени проблема внутреннего строения звезд и планет является достоверно нерешенной и, следовательно, актуальной [1]–[3]. Существеннейшую роль в её решении играет функция плотности, которая для планет земной группы в хорошем приближении может считаться радиально-симметричной $\rho(r)$, потому что среди них наибольшее полярное сжатие характерно для Марса и составляет всего лишь 0,00589. Данная функция плотности определяет массу планеты, в этом случае задаваемую интегралом

$$M_R = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \tag{1}$$

также, она фигурирует в уравнении равновесия

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho(r),$$

и в ряде других важных уравнений теории внутреннего строения. Поэтому моделирование функции плотности $\rho(r)$ является важной задачей в рамках указанной проблематики.

Данная работа является прямым продолжением работы [4], в котором реализуется усовершенствование ранее предложенных модельных функций плотности в рамках частичного или полного удовлетворения условию выгнутости

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} < 0, \tag{2}$$

следующему из уравнения Адамса-Вильямсона [2], [3], для чего предложено использовать простую параболическую добавку. Нормировки новых функций плотности остаются прежними и основываются на знании поверхностной плотности $\rho(R)$ и плотности в центре планеты ρ_0. Учет слоистой структуры также реализуется с помощью θ-функции Хэвисайда. Коэффициенты сшивания полагаются единичными, чтобы не изменять перенормировку функции плотности. Использование неединичных коэффициентов сшивания требует отдельного изучения, что предполагается сделать в дальнейшем.

Модельные функции плотности.

I. Приближение линейной функцией с параболической добавкой. К функции плотности с линейной радиальной зависимостью добавляем параболическую часть, также убывающую с ростом аргумента. В этом случае функция $\rho(r)$ задается выражением

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\left\{\rho_0-\frac{\rho_0-\rho(R)}{2R}\cdot\left(r+\frac{r^2}{R}\right)\right\}. \tag{3}$$

На основе этого масса планеты (1) оказывается равной

$$M(R)=\pi R^3\left[\frac{13}{60}\rho_0+\frac{9}{20}\rho(R)\right]. \tag{4}$$

II. Приближение чистой параболической функцией. Интересно рассмотреть также и функцию плотности чисто параболического вида, так как она полностью удовлетворяет условию (2). В этом случае

$$\rho(r)=\rho_0-\frac{\rho_0-\rho(R)}{R^2}\cdot r^2 \tag{5}$$

и соответствующая масса

$$M(R)=\frac{4\pi R^3}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho(R)\right]. \tag{6}$$

Таким образом, выражения для масс с функциями плотности (3), (5) имеют очень удобный полиномиальный вид (4), (6).

III. Приближение степенной функцией с параболической добавкой. Следующая модельная функция получается, если в ранее предложенной функции $\rho(r)$ с экспоненциальным поведением [4] учесть условие нормировки и сделать соответствующую добавку, то есть

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\left\{\rho_0\left[1+\left(\frac{\rho_0}{\rho(R)}\right)^{-\frac{r}{R}}\right]-\frac{\rho_0-\rho(R)}{R^2}\cdot r^2\right\}, \tag{7}$$

при этом масса примет вид

$$M(R)=2\pi\left\{\frac{\rho_0}{\beta^3}\gamma(3;\beta R)+\frac{R^3}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho(R)\right]\right\}, \tag{8}$$

где введён параметр

$$\beta=\frac{1}{R}\ln\frac{\rho_0}{\rho(R)},$$

а $\gamma(3;\beta R)$ – нижняя неполная гамма-функция [5].

IV Приближение обратной функцией с параболической добавкой. И наконец, последняя предлагаемая в этой работе модификация $\rho(r)$ вида

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\left\{\rho_0-\frac{\rho_0-\rho(R)}{R^2}\cdot r^2+\frac{R\rho_0\rho(R)}{R\rho(R)+\left[\rho_0-\rho(R)\right]r}\right\}, \tag{9}$$

приводящая к массе планеты равной

$$M(R)=2\pi R^3\left\{\frac{\rho_0}{3}F(1;3;4;-\gamma R)+\frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho(R)\right]\right\}. \tag{10}$$

Здесь $F(1;3;4;-\gamma R)$ – гипергеометрическая функция [5], с радиальной зависимостью с коэффициентом

$$\gamma=\frac{\rho_0-\rho(R)}{R\rho(R)}.$$

В последних двух случаях выражения для масс (8), (10) содержат специальные функции, однако, это не затрудняет расчета масс, если использовать возможности аналитического или численного интегрирования с помощью современных программных пакетов, например, ***WolframMathematica***.

Функция плотности для шара со слоистой структурой. Метод использования введенных функций плотности в случае учета слоистой структуры планеты заключается в их

послойном суммировании с использованием обрезающей на границах слоя функции Хэвисайда. При этом обобщенная функция плотности приобретает вид

$$\rho(r) = \sum_{k=1}^{n} \Theta(r - r_k) \cdot \rho_{(j)k}(r) \cdot \Theta(r_{k+1} - r) \cdot A_{(j)k+1}, \tag{11}$$

где: $\rho_{(j)k}(r)$ – функция плотности, присутствие у которой индекса j говорит о привязке к j-му приближению, в то время как индекс k номерует слой; также полагаем $r_1 = 0$; $\Theta(r)$ – функция Хэвисайда.

Следует заметить, что прямое интегрирование функции плотности (11) необязательно, так как его результат может быть представлен в виде суммы масс шаровых слоев, получаемых при использовании формул (4), (6), (8) и (10). Поэтому массу планеты, состоящей из n слоев, записываем в виде

$$M = \sum_{k=1}^{n} \mu_k, \qquad \mu_k = M(r_{k+1}) - M(r_k). \tag{12}$$

где μ_k – масса k-го шарового слоя, которая выражается как разность масс шаров различных радиусов.

Модельный расчет масс планет земной группы. Используем предложенные нами модифицированные модельные функции плотности для расчета масс планет земной группы на основе их известных характеристик [6]–[8], представленных в таблице 1.

Таблица 1 – Характеристики планет земной группы

Планета	Масса (кг)	Средний радиус планеты (км)	Плотность вещества в центре планеты (кг/м^3)	Поверхностная плотность вещества планеты (кг/м^3)
Меркурий	$3{,}33022 \cdot 10^{23}$	2439,7	9800	3300
Венера	$4{,}8675 \cdot 10^{24}$	6051,8	14000	2700
Земля	$5{,}9726 \cdot 10^{24}$	6371,0	13100	2200
Марс	$6{,}4185 \cdot 10^{23}$	3389,5	8500	3700

В качестве особо ценного источника достоверных астрофизических данных следует отметить Internet-ресурс [8].

Далее будем учитывать признанную внутреннюю структуру рассматриваемых планет [7], [8], состоящую из пяти компонентов у Земли (кора, верхняя мантия, мантия, внешнее ядро, внутреннее ядро) и трех компонентов у Меркурия, Венеры и Марса (кора, мантия, ядро). Расчеты производим, варьируя комбинации функций плотности для указанных чисел слоев. С модифицированными функциями плотности имеем порядка 150 комбинаций. Если же комбинировать все восемь модельных вариантов распределения, то число комбинаций будет приближаться к $5 \cdot 10^5$.

В таблице 2 приведены три лучших результата расчета масс в рамках указанного подхода.

Таблица 2 – Расчетная масса с учетом слоистой структуры

Планета	Расчетная масса (кг)		
	I-II-III	II-I-IV	I-III-II
Меркурий	$\mathbf{3{,}3322 \cdot 10^{23}}$	$3{,}3391 \cdot 10^{23}$	$3{,}2533 \cdot 10^{23}$
Венера	$4{,}9555 \cdot 10^{24}$	$\mathbf{4{,}8602 \cdot 10^{24}}$	$4{,}7664 \cdot 10^{24}$
Марс	$\mathbf{6{,}4313 \cdot 10^{23}}$	$6{,}6209 \cdot 10^{23}$	$6{,}2773 \cdot 10^{23}$
	II-III-II-IV-I	I-III-I-IV-III	II-II-I-I-III
Земля	$6{,}0413 \cdot 10^{24}$	$5{,}9855 \cdot 10^{24}$	$\mathbf{5{,}9713 \cdot 10^{24}}$

Полученные результаты сравним с реальными массами планет. Теперь улучшенные результаты более точны и отклоняются от действительных масс следующим образом:

– на 0,059 % выше у Меркурия (I-II-III);

– на 0,150 % ниже у Венеры (II-I-IV);

– на 0,022 % ниже у Земли (II-II-I-I-III);

– на 0,199 % выше у Марса (I-II-III).

Приведенные результаты моделирования можно рассматривать как более качественные по сравнению с [4], а соответствующие модельные функции плотности как достаточно близкие к реальным распределениям масс, допускающие использование при решении соответствующих задач. Отклонение в сторону уменьшения масс планет Земля и Венера, говорит нам о необходимости учета распределения массы в их атмосферах.

Заключение. Таким образом, в работе проведено видоизменение модельных функций плотности, предложенных в [4], для планет земной группы путем параболической добавки, что сделало их частично либо полностью выпуклыми. Последнее требование прослеживается по ряду исследований, упоминаемых в монографиях [6] и [7]. Расчеты показали, что новое модельное поведение функций плотности можно считать более достоверным. Оно с большей точностью может быть использовано при решении уравнений динамического равновесия и прочих задач теории внутреннего строения планет. Также несомненно, что к улучшению результатов может привести учет распределения массы в атмосферах, а также деформаций, связанных с центробежным эффектом.

Литература

1. Carroll, B.W. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – Pearson International Edition, 2007. – 1309 p.

2. Магницкий, В.А. Внутреннее строение и физика Земли / В.А. Магницкий. – Москва : Наука, 2006. – 390 с.

3. Уильям, Б. Внутреннее строение планет / Б. Уильям. – Москва : Мир, 1987. – 328 с.

4. Тюменков, Г.Ю. Моделирование радиальной функции плотности гравитирующего шара / Г.Ю. Тюменков, Е.П. Ельников, Е.В. Фирагина // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 36–39.

5. Кузнецов, Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – Москва : Высшая школа, 1962. – 249 с.

6. Anderson, D.L. Theory of the Earth / D.L. Anderson, E.C. Robertson. – Boston : Blackwell Publications, 1989. – 366 p.

7. Jordan, T.H. Structural Geology of the Earth’s Interior / T.H. Jordan // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 2014. – Vol. 76, № 8. – P. 4192–4200.

8. California Institute of Technology (USA) [Electronic resource] / NASA’S Jet Propulsion Laboratory. – Pasadena, CA, 2004. – Mode of access : www.jpl.nasa.gov/solar-system/. – Data of access : 10.06.2016.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 08.10.2016

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 599.323.2

О находках орешниковой сони (Muscardinus avellanarius) на юго-западе Беларуси

А.А. САВАРИН[1], Д.А. КИТЕЛЬ[2]

Весной 2016 г. проведен сбор погадок ушастой совы (*Asio otus*) в островном лесу близ д. Лозица Малоритского района, а также в самом г. Малорита (Брестская область). В 101 погадке найдены фрагменты черепа 11 особей орешниковой сони.
Ключевые слова: юго-запад Беларуси, погадки ушастой совы, орешниковая соня.

In the spring of 2016 collection of the pellets of long-eared owl (*Asio otus*) in 'island' pine forest in agricultural land near Lozica village (Malorita district), as well as in Malorita town (Brest region), was made up. Skull fragments of 11 individuals of hazel dormouse were found in 101 pellets.
Keywords: south-west of Belarus, pellets of long-eared owl, hazel dormouse.

Введение. Орешниковая соня (*Muscardinus avellanarius)* занесена в Красную книгу Республики Беларусь (2015) (IV категория). В настоящее время трудно однозначно оценить статус вида на территории Белорусского Полесья. Так, на юго-востоке страны (например, в ПГРЭЗ) орешниковая соня выявлена [1] в 9 из 16 обследованных биотопах. Однако точных сведений по численности вида на территории НП «Припятский» нет. Высказанное [2] мнение об «относительной редкости» грызуна на указанной ООПТ основано, прежде всего, на исследованиях, проводимых 15 и более лет назад. По данным учетов 2008 г. в кормовом спектре серой неясыти (*Strix aluco*), обитающей в лесоохотничьем хозяйстве «Выгонощанское» (Брестская область), орешниковая соня и рыжая полевка (*Clethrionomys glareolus*) доминируют среди позвоночных [3].

Цель работы – внести дополнения в Красную книгу Беларуси по местам обнаружения редкого вида млекопитающих.

Результаты и их обсуждение. Мониторинговые исследования редких видов не должны сопровождаться изъятием (уничтожением) особей. В этой связи анализ костных фрагментов в погадках ночных хищных птиц является самым информативным и безопасным для экосистем методом исследования [4].

Весной 2016 г. нами проведен сбор погадок ушастой совы (*Asio otus*) в островном хвойном лесу близ д. Лозица Малоритского района, а также в самом г. Малорита (Брестская область). Полные сведения по датам сбора и объему собранного материала представлены в таблице. В 101 погадке найдены фрагменты черепа 11 особей орешниковой сони (рисунок 1).

Таблица 1 – Места сбора и объем собранного материала

Место сбора погадок	Дата сбора	Количество погадок	Количество особей *M. avellanarius*
д. Лозица	27.04.2016	45	7
	20.05.2016	21	2
г. Малорита	07.05.2016	22	1
	20.05.2016	13	1
Всего		101	11

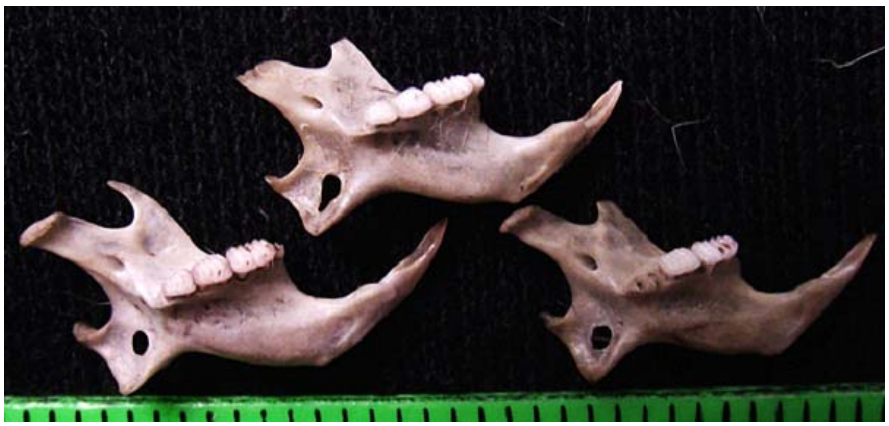


Рисунок 1 – Нижняя челюсть и зубы орешниковой сони

Полученные данные свидетельствуют не только о существенном трофическом воздействии ушастой совы на локальную популяцию орешниковой сони, но и, по-видимому, о высокой численности самого грызуна. Указанное обстоятельство, по нашему мнению, сочетается с тем, что на территории Малоритского района активно ведется сельскохозяйственная деятельность.

В ходе дальнейших исследований необходимо:

– установить кварталы лесов с обитанием редкого вида сони (как известно, пищевые объекты ушастая сова находит в радиусе около 1 км от места дневки);

– внести выявленные кварталы в соответствующие информационные системы и банки данных с целью ограничения хозяйственной деятельности в местах обитания орешниковой сони.

Нельзя исключать обитание грызуна и на окраине самого г. Малорита.

Заключение. Результаты исследований подтверждают точку зрения о важной роли Белорусского Полесья в сохранении редких и малоизученных видов микротериофауны [5]. По мнению украинских специалистов [6], в последнее десятилетие у сонь обнаруживается тенденция к синантропизации. В этой связи представляется актуальным ведение среди местного населения (с помощью СМИ) пропагандистской работы по необходимости бережного отношения к лесному фонду.

Литература

1. Кучмель, С.В. Орешниковая соня (Muscardinus avellanarius) и соня-полчок (Myoxus glis) на территории Полесского государственного радиационно-экологического заповедника / С.В. Кучмель // Прыроднае асяроддзе Палесся: асаблівасці і перспектывы развіцця: зб. навук. прац / Палескі аграрна-эканалагічны інстытут НАН Беларусі; рэдкал. М.В. Міхальчук [і інш.]. – 2014. – Вып. 7. – С. 249–251.

2. Домбровский, В. К териофауне национального парка «Припятский» (Беларусь) / В. Домбровский, И. Зенина // Праці Теріологічної щколи. – 2014. – Т. 12. – С. 22–25.

3. Демянчик, В.Т. Многолетняя динамика лесных видов микромаммалий Micromammalia на Выгонощанском лесо-болотном массиве / В.Т. Демянчик // Науковий вісник Волинського національного університету імені Лесі Українки. – 2009. – №. 2. – С. 234–238.

4. Саварин, А.А. Методические основы изучения мелких млекопитающих (на примере р. Crocidura) / А.А. Саварин, А.Н. Молош. – Минск : Колорград, 2016. – 32 с.

5. Саварин, А.А. К экологии и видовой диагностике белозубок (Crocidura, Soricidae), обитающих на территории Белорусского Полесья / А.А. Саварин, А.Н. Молош // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2015. – № 6 (93). – С. 29–33.

6. Зайцева-Анциферова, Г. Синантропні тенденції в українських вовчків / Г. Зайцева-Анциферова // Праці Теріологічної щколи. – 2014. – Т. 12. – С. 38–46.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Брестское областное отделение
общественной организации
«Ахова птушак Бацькаўшчыны»

Поступила в редакцию 13.10.2016

Технический редактор: *И.В. Близнец.* Корректоры: *Д.Д. Павловец, Г.Н. Петухова*

Подписано в печать 12.12.2016. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 14,18. Уч.-изд. л. 12,35. Тираж 100 экз. Заказ № 701.
Цена свободная

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.