**ISSN 1609–9672**

# ИЗВЕСТИЯ

## Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

№ 6(75)

*Естественные науки*

2012

# ИЗВЕСТИЯ

## Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

Научный и производственно-практический журнал
*Выходит 6 раз в год*
*Издается с октября 1999 г.*

№ 6(75)
*Естественные науки*

2012

Учредитель – Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 546 от 6 июля 2009 года)



*Адрес редакции:*
ул. Советская, 104, к. 2-17, 246019, Гомель
Тел. 57-37-91, e-mail: vesti@gsu.by
Интернет-адрес: http://vesti.gsu.by

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

## Физика

УДК 530.1; 539.12

# Эффекты $Z^{'}$-бозона в процессе $e^{+}e^{-} \to W^{+}W^{-}$ на ускорителе ILC с учетом радиационных поправок

Василий В. Андреев

В работе предложен метод модельно независимого анализа эффектов $Z^{'}$-бозона в процессе $e^{+}+e^{-} \to W^{+}+W^{-}$ с помощью эффективных параметров, которые обобщают целый класс моделей с расширенным калибровочным сектором. Получены модельно независимые ограничения на вышеуказанные параметры при различных энергиях и светимостях ускорителя ILC с учетом полного набора $O(\alpha)$ радиационных поправок.

**Ключевые слова:** $Z^{'}$-бозон, аномальные калибровочные константы, $Z-Z'$ смешивание.

The article presents a method of model-independent analysis of the effects of $Z^{'}$-boson in $e^{+}e^{-} \to W^{+}W^{-}$ process using the effective parameters that summarize the whole class of models with extended gauge sector. The author obtains model-independent constraints on the above parameters at different energies and luminosities of the ILC accelerator with a full set $O(\alpha)$ radiative corrections.

**Keywords:** $Z^{'}$-boson, anomalous gauge couplings, $Z-Z'$ mixing.

### *Введение*

Стандартная Модель электрослабых и сильных взаимодействий элементарных частиц (СМ) не может претендовать на роль всеобъемлющей теории по ряду причин. Так, она содержит большое число (более десяти) свободных параметров, внесенных в нее извне искусственно. В то же время способ объединения сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий в СМ не является удовлетворительным как из-за значительного различия масштабов содержащихся в ней констант связи, соответствующих трем калибровочным группам симметрии, так и вследствие их взаимной независимости. Поэтому вполне естественно предположить, что существует более фундаментальная теория, низкоэнергетический предел которой совпадает с СМ. К числу подобных теоретических построений относятся модели с расширенным калибровочным сектором такие, например, как $E_6$, $LR$, $ALR$, и другие [1]–[4]. Их исследование (теоретическое и экспериментальное) представляет значительный интерес. Эти модели являются одними из простейших расширений СМ, характеризующихся элементарной структурой хиггсовского сектора. Общим для данных моделей является то, что они предсказывают новые физические объекты и явления на масштабе энергий $O$ (1 ТэВ), связанные, например, с наличием тяжелых нейтральных ($Z^{'}$) калибровочных бозонов [1]–[4], обусловленных дополнительными калибровочными симметриями $U(1)^{'}$. Они интересны с точки зрения изучения физических эффектов, выходящих за рамки СМ, или так называемой «новой физики».

Заметим, что процесс аннигиляционного рождения пар $W^{\pm}$-бозонов

$$e^{+}+e^{-} \to W^{+}+W^{-}(\to l\overline{\nu}+q\overline{q}) \qquad (1)$$

является весьма чувствительным к параметрам $Z^{'}$-бозона, а именно – к фермионным и бозонным константам связи, к углу $Z-Z^{'}$ смешивания $\varphi$ и массе $M_{Z^{'}}$ [5]–[8]. Это наиболее ярко проявляется при высоких энергиях, т. е. при $\sqrt{s} \gg 2M_W$. Вклад $Z'$-бозона в сечение процесса (1) нарушает механизм калибровочного сокращения, играющий важную роль в СМ. Действие механизма калибровочного сокращения состоит в том, что он обеспечивает «правильное» поведение сечения процесса (1) с ростом энергии, которое не нарушает унитарный предел, несмотря на быстро растущие с энергией отдельные вклады в сечение. Вместе с тем, эффекты, индуцированные появлением дополнительного калибровочного бозона, нарушают механизм калибровочного сокращения в энергетическом интервале $2M_W \ll \sqrt{s} \ll M_{Z'}$, что проявляется в виде «разбалансировки» отдельных вкладов в сечение и, как следствие, в возникновении существенно иной по сравнению со СМ энергетической зависимостью сечений. Этим обусловлено действие так называемого механизма усиления эффектов «новой физики» в процессе (1) [5]–[8].

Основной задачей данной работы является исследование эффектов $Z'$-бозонов на коллайдере будущего поколения ILC ($\sqrt{s} = 0.5(1)$ ТэВ) на основе данных по прогнозируемым параметрам данного ускорителя (светимость, энергия в системе центра масс, степень поляризации начальных пучков). В работе будут получены модельно независимые ограничения на обобщенные параметры $\xi_{+1}$ и $\xi_{-1}$, являющиеся индикатором наличия эффектов за рамками СМ, связанных с $Z'$-бозоном. Вычисления будут выполнены с учетом полного набора $O(\alpha)$ радиационных поправок к процессу (1). Кроме того, будет проанализировано влияние данных поправок на получаемые ограничения.

Стоит отметить также, что расчеты будут проведены для поляризованных начальных и неполяризованных конечных пучков. Заметим, что проведение расчетов для поляризованных конечных состояний также является возможным, однако существует ряд проблем с их экспериментальной регистрацией. Поэтому в настоящей работе поляризация $W^{\pm}$-бозонов рассматриваться не будет.

***Модели с расширенным калибровочным сектором***

Наиболее популярные модели, предсказывающие существование $Z'$-бозонов, можно условно разделить на две группы. К первой из них относятся теории, в основе которых лежат расширенные, в сравнении со СМ, калибровочные группы и характеризующиеся элементарной структурой хиггсовского сектора. Это, например, лево-правосимметричные модели (LR), альтернативные лево-правосимметричные модели (ALR), $E_6$-модели и т. д. [1], [2], [3], [4]. Ко второй группе можно отнести так называемые альтернативные модели, нарушение электрослабой симметрии в которых происходит за счет механизма, отличающегося от хиггсовского. Это модели техницвета, составных $W$- и $Z$-бозонов, модели с нарушенной симметрией за счет сильновзаимодействующего сектора (BESS-модель) и т. п.

В теории с расширенными калибровочными группами, предполагающими наличие дополнительного калибровочного $Z'$-бозона, массовая матрица состояний $Z$ и $Z'$ имеет недиагональные члены $\delta M$, которые связаны с вакуумными ожиданиями хиггсовских полей [2]:

$$M^2_{ZZ'} = \begin{pmatrix} M_Z^2 & \delta M^2 \\ \delta M^2 & M_{Z'}^2 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $M_Z$ и $M_{Z'}$ – массы $Z$- и $Z'$-бозонов соответственно.

В процессе диагонализации массовой матрицы (2) происходит поворот полей $Z$- и $Z'$-бозонов на угол смешивания $\varphi$, что приводит к появлению собственных массовых или так называемых «физических» состояний $Z_1$ и $Z_2$:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

при этом массы $M_1$ и $M_2$ состояний $Z_1$ и $Z_2$ определяются посредством:

$$M_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[M_Z^2 + M_{Z'}^2 \pm \sqrt{\left(M_Z^2 - M_{Z'}^2\right)^2 + (4\,\delta M^2)^2}\right]. \tag{4}$$

Именно состояния $Z_1$ и $Z_2$, определяемые формулами (3) и (4), будут использоваться для расчетов. Из формулы (2) вытекают следующие соотношения для состояний $Z_1$ и $Z_2$:

$$Z_1 = Z\cos\varphi + Z'\sin\varphi\,, \tag{5}$$

$$Z_2 = -Z\sin\varphi + Z'\cos\varphi\,. \tag{6}$$

Исходя из соотношений (5) и (6) легко получить формулы для констант связи $Z_1$- и $Z_2$-бозонов с фермионами $a_1(v_1)$ и $a_2(v_2)$ [2]:

$$v_1 = v\cos\varphi + \frac{g_2}{g_1}v'\sin\varphi\,,\quad a_1 = a\cos\varphi + \frac{g_2}{g_1}a'\sin\varphi\,, \tag{7}$$

$$v_2 = -\frac{g_1}{g_2}v\sin\varphi + v'\cos\varphi\,,\quad a_2 = -\frac{g_1}{g_2}a\sin\varphi + a'\cos\varphi\,, \tag{8}$$

где $a(a')$ и $v(v')$ – соответственно аксиальные и векторные константы связи $Z(Z')$-бозона с фермионами, $g_1 = 1/\left(2s_W c_W\right)$, а $g_2$ зависит от конкретной расширенной калибровочной модели [2], [4]. Также заметим, что $s_W = \sin\theta_W$, $c_W = \cos\theta_W$, а $\theta_W$ – угол Вайнберга.

Выражения для трехбозонных констант $Z_1$- и $Z_2$-бозонов $g_{WWZ_1}$ и $g_{WWZ_2}$ получаются аналогичным образом. При этом, однако, надо учесть, что в силу $SU(2)_L$-калибровочной симметрии константа связи $Z'$-бозона с $W$-бозонами $g_{WWZ'} = 0$. В результате получим:

$$g_{WWZ_1} = \cos\varphi\; g_{WWZ}\,,\; g_{WWZ_2} = -\sin\varphi\; g_{WWZ}\,,$$

где $g_{WWZ} = c_W / s_W$ – трехбозонная константа стандартного $Z$-бозона.

***Наблюдаемые процесса*** $e^+e^- \to W^+W^-$

В СМ процесс (1) в борновском приближении состоит из двух s-канальных диаграмм с обменом $\gamma$-квантом и $Z$-бозоном и t-канальной диаграммы с обменом нейтрино. Для моделей с расширенным калибровочным сектором возникает иной набор диаграмм, включающий в себя обмен $Z_1$- и $Z_2$-бозонами в s-канале.

Матричный элемент процесса (1) можно представить как сумму отдельных частей:

$$M = M(\nu) + M(\gamma) + M(Z_1) + M(Z_2)\,. \tag{9}$$

Выражение (9) перепишем в виде

$$M = M_{SM} + \Delta M = M(\nu) + M(\gamma) + M(Z) + \Delta M\,, \tag{10}$$

$$\Delta M = M(Z_1) + M(Z_2) - M(Z)\,,$$

разделяя части, связанные с вкладом СМ и эффектами $Z'$-бозона.

Матричные элементы процесса (1) в рамках СМ, а также с учетом АКК рассмотрены в работах [9], [10], [11]. В настоящей работе будут приведены лишь выражения для матричного элемента $\Delta M$, хотя стоит заметить, что все выражения для матричных элементов с учетом дополнительного калибровочного $Z'$-бозона автором были рассчитаны самостоятельно с использованием метода базисных спиноров [12], позволяющего получать компактные выражения с произвольными значениями спиральностей фермионов и $W$-бозонов.

Итак, часть матричного элемента $\Delta M$ из формулы (10) имеет следующий вид:

$$\Delta M_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'} = \frac{4\pi\alpha\,\lambda\,\delta_{\lambda,-\lambda'}\beta_W}{2s_W c_W}\,A_{\tau,\tau'}^{\lambda}\left(Z\right) g_{WWZ}\; g_{-\lambda}\;\chi \times \xi_\lambda\,, \tag{11}$$

где

$$\xi_{-\lambda} = 1 - \cos\varphi\,\frac{g_{-\lambda,1}\,\chi_1}{g_{-\lambda}\,\chi} + \sin\varphi\,\frac{g_2}{g_1}\,\frac{g_{-\lambda,2}\,\chi_2}{g_{-\lambda}\,\chi}\,. \tag{12}$$

Здесь $\lambda(\lambda')$ – спиральности электрона (позитрона), $\tau(\tau') = \pm 1(T)$, $0(L)$ – спиновые состояния $W^-(W^+)$-бозонов, $\chi_{1,2} = s/(s - M^2_{Z_{1,2}})$, $\chi = s/\left(s - M_Z^2\right)$, $g_{\lambda,1} = v_1 + \lambda a_1$, $g_{\lambda,2} = v_2 + \lambda a_2$, $g_{-\lambda} = v - \lambda a$, $\beta_W = \sqrt{1 - 4M_W^2/s}$, $A^{\lambda}_{\tau,\tau'}(Z)$ – спиральные структуры.

Таким образом, функция $\Delta M$ представляет собой произведение двух частей. Первая часть является чисто кинематической. Вторая часть эффективно содержит в себе «новую физику» и охватывает весь спектр моделей с расширенным калибровочным сектором, предполагающим наличие $Z'$-бозона. Эту часть можно представить как некий обобщенный параметр $\xi_{-\lambda}$, который, в зависимости от $\lambda$, разделяется на два независимых параметра $\xi_{+1}$ и $\xi_{-1}$. Они будут в дальнейшем использоваться для анализа эффектов «новой физики».

В качестве наблюдаемых в настоящей работе будем использовать поляризационные ($P_L$ и $P_L'$ – степень поляризации электронных и позитронных пучков соответственно) дифференциальные сечения процесса (1) [13], [14]:

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{4}\left[\left(1+P_L\right)\left(1-P_L'\right)\frac{d\sigma^+}{dz} + \left(1-P_L\right)\left(1+P_L'\right)\frac{d\sigma^-}{dz}\right],\ z = \cos\theta, \tag{13}$$

где

$$\frac{d\sigma^{\lambda}}{dz} = \sum_{\tau,\tau'}\frac{\beta_W}{32\pi s}\left|M^{\lambda,-\lambda}_{\tau,\tau'}\right|^2 Br\left(W \to q\overline{q}\right)Br\left(W \to l\overline{\nu}_l\right).$$

Множители $Br\left(W \to q\overline{q}\right)$ и $Br\left(W \to l\overline{\nu}_l\right)$ представляют собой сечения распадов $W$-бозона в пару кварков и пару лептонов соответственно. Таким образом, в данной работе учитывается так называемая «полулептонная» мода распада $W$-бозонов.

***Методика получения ограничений***

В данном разделе будет рассмотрен метод получения ограничений на параметры $\xi_{+1}, \xi_{-1}$.

Для оценки чувствительности к эффектам, индуцированных $Z'$-бозоном, наблюдаемых процесса (1) рекомендуется использовать функцию вида:

$$\chi^2(\Omega) = \sum_{\{P_L,P_L'\}}\sum_{i=1}^{bins}\left[\frac{N_i^{SM} - N_i(\Omega)}{\delta N_i^*}\right]^2, \tag{14}$$

где $\Omega = \left\{\xi_{+1}, \xi_{-1}\right\}$, $N_i^* = N_i^{SM} \pm N_i^{rad}$, $N_i^{SM}$ – число событий, попадающих в угловой интервал, ограниченный размерами $i$-го бина, рассчитанное в рамках СМ, $N_i^{rad}$ – число событий, соответствующее $O(\alpha)$ радиационным поправкам к СМ сечению в $i$-м бине, $N_i(\Omega)$ – число событий, индуцируемое взаимодействиями при наличии $Z'$-бозона.

Суммирование в формуле (14) выполняется по 10-ти бинам, на которые разбивается интервал углов рассеяния $(-1.0 \le z \le 1.0)$. Однако, с учетом технических особенностей экспериментальных установок, данные которых использовались при анализе, разрешенный интервал углов рассеяния сужается до $-0.98 \le z \le 0.98$.

Число событий в $i$-ом бине вычисляется по формуле

$$N_i = L_{int}\ \varepsilon\ \sigma_i\ ; \quad \sigma_i \equiv \sigma(z_i, z_{i+1}) = \int_{z_i}^{z_{i+1}}\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)dz\,, \tag{15}$$

где $L_{int}$ – интегральная светимость ускорителя, определяемая за весь период проведения эксперимента, а $\varepsilon$ – эффективность регистрации событий $N_i$ в эксперименте.

Ошибка измерения сечения, содержащаяся в выражении (14), состоит из двух частей, включающих статистическую и систематическую погрешности:

$$\delta N_i^* = \sqrt{N_i^* + \left(\delta_{syst}\; N_i^*\right)^2}\;. \tag{16}$$

Для получения ограничений на параметры $\xi_{+1}, \xi_{-1}$ использовался критерий

$$\chi^2\left(\Omega\right) \le \Delta\chi^2_{crit}\;. \tag{17}$$

Здесь $\Delta\chi^2_{crit}$ определяется задаваемым уровнем достоверности (C.L.) и числом параметров, входящих в набор $\Omega$. Для $95\%$ C.L. и 2-х параметров величина $\Delta\chi^2_{crit} = 5.99$ [15].

Очевидно, что при энергиях, которые планируется достичь на коллайдере ILC, существенный вклад в дифференциальные сечения (13), а следовательно, и в число событий $N_i^*$ будут вносить радиационные поправки. Поэтому в работе проводился полный учет электрослабых $O(\alpha)$ радиационных поправок. Расчеты проводились с использованием программных пакетов *Feynarts 3.7* и *Formcalc 7.4* [16], [17].

Следует заметить, что поправки вносят вклад лишь в знаменатель функции $\chi^2\left(\Omega\right)$ (14). Это обусловлено тем, что эффекты, индуцированные $Z'$-бозоном, рассматриваются как небольшое возмущение над СМ фоном. В силу этого, нет существенной разницы между вкладами радиационных поправок в число $N_i\left(\Omega\right) = N_i^{SM} + \Delta N_i$ и $N_i^{SM}$, что приводит к сокращению вкладов радиационных поправок в числителе функции $\chi^2\left(\Omega\right)$.

***Расчеты***

Процедура получения ограничений была выполнена с использованием систем аналитических и численных вычислений. При этом использовались следующие прогнозируемые параметры ускорителя ILC [18]:

$$\sqrt{s} = 0.5\ (1.0)\ \text{ТэВ}\,,\ L_{int} = 500\ (1000)\ \text{фб}^{-1}\,,\ \varepsilon \simeq 0.3\,,\ \{P_L = \pm 0.8\,,\ P_L' = \mp 0.5\}.$$

При помощи вышеупомянутой методики были получены ограничения на параметры $\xi_{+1}, \xi_{-1}$ для энергии $\sqrt{s} = 0.5$ ТэВ и интегральной светимости $L_{int} = 500$ фб$^{-1}$ (рисунок 1а), а также $\sqrt{s} = 1.0$ ТэВ и $L_{int} = 1000$ фб$^{-1}$ (рисунок 1б). На рисунках 1а, б представлены ограничения, рассчитанные как без учета $O(\alpha)$ радиационных поправок (штриховая линия), так и с учетом последних (сплошная линия).

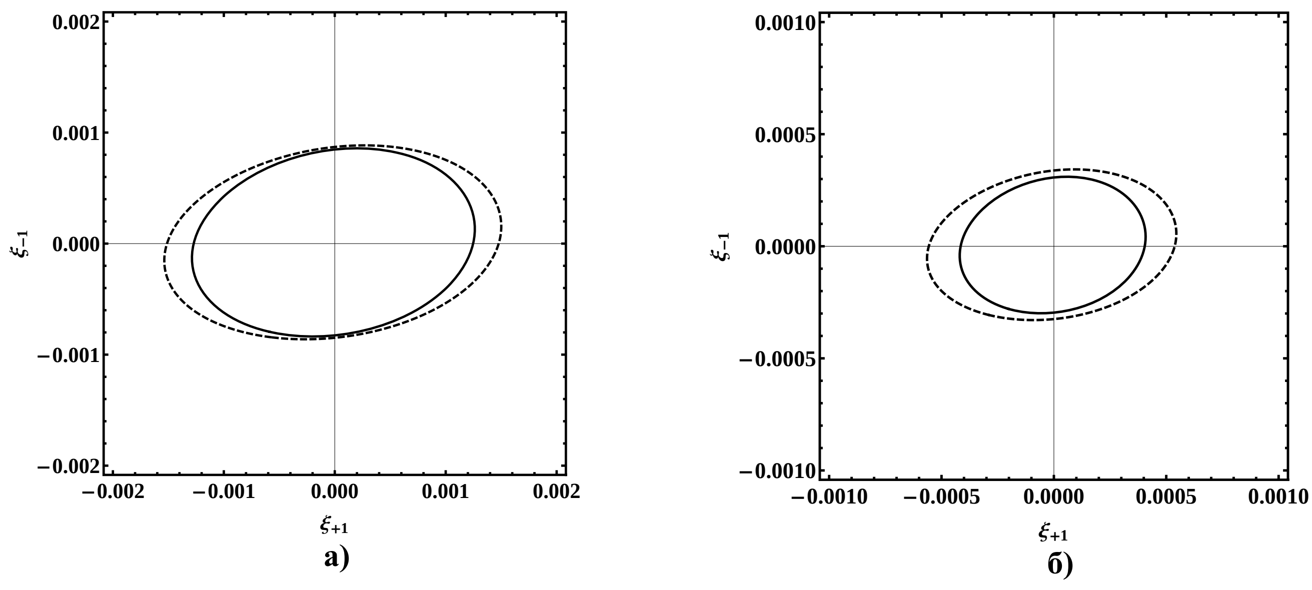



Рисунок 1 – а) ограничения на параметры $\xi_{+1}, \xi_{-1}$ при энергии $\sqrt{s} = 0.5$ ТэВ и светимости $L_{int} = 500$ фб$^{-1}$; б) то же, что на рисунке 1а, но для $\sqrt{s} = 1$ ТэВ и $L_{int} = 1000$ фб$^{-1}$

Из рисунка 1а) и рисунка 1б) видно, что при учете радиационных поправок получаются более строгие ограничения на параметры $Z'$-бозона $\xi_{+1}, \xi_{-1}$. Данный результат довольно интересен. Это обусловлено тем, что для большинства бинов радиационные поправки имеют отрицательную величину, уменьшая тем самым соответствующее число событий в бине и (т. к. присутствуют только в знаменателе) увеличивая функцию $\chi^2(\Omega)$. Из критерия (17) очевидно, что увеличение функции $\chi^2(\Omega)$ приводит к редуцированию разрешенных областей на плоскости параметров $\xi_{+1}, \xi_{-1}$, что и можно наблюдать на рисунках 1а), б).

Также необходимо отметить, что при увеличении энергии $\sqrt{s}$ процесса влияние радиационных поправок на получаемые ограничения усиливается, так при энергии $\sqrt{s} = 0.5$ ТэВ учет радиационных поправок позволяет редуцировать разрешенные области на плоскости параметров $\xi_{+1}, \xi_{-1}$ на $2.8\%$ в вертикальном и на $16.5\%$ – в горизонтальном направлении. При энергии $\sqrt{s} = 1.0$ ТэВ аналогичные цифры составляют $9\%$ и $25\%$ соответственно. Все вышесказанное свидетельствует о крайней степени необходимости учета радиационных поправок при исследовании эффектов «новой физики» на ускорителе ILC.

***Заключение***

В работе предложен метод модельно независимого анализа эффектов $Z'$-бозона в процессе $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$ с помощью параметров $\xi_{+1}$ и $\xi_{-1}$, которые обобщают целый класс моделей с расширенным калибровочным сектором.

Также в настоящей работе были получены модельно независимые ограничения на вышеуказанные параметры $\xi_{+1}$ и $\xi_{-1}$ при различных энергиях и светимостях ускорителя ILC с учетом полного набора $O(\alpha)$ радиационных поправок.

Было исследовано влияние последних на получаемые результаты, а также изучена степень этого влияния при различных энергиях начальных пучков $\sqrt{s}$.

## Литература

1. Hewett, J.L. Low-Energy Phenomenology of Superstring Inspired E(6) Models / J.L. Hewett, T.G. Rizzo // Phys. Rept. – 1989. – Vol. 183. – P. 193.

2. Leike, A. The Phenomenology of extra neutral gauge bosons / A. Leike // Phys. Rept. – 1999. – Vol. 317. – P. 143–250.

3. Rizzo, T.G. Z0 phenomenology and the LHC / T.G. Rizzo // Boulder 2006, Colliders and neutrinos. – 2006. – P. 537.

4. Langacker, P. The Physics of Heavy Z-prime Gauge Bosons / P. Langacker // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81. – P. 1199–1228.

5. Pankov, A.A. Manifestations of heavy extra neutral E(6) gauge bosons in $e^+e^- \to W^+W^-$ at LEP-2 / A.A. Pankov, N. Paver // Phys. Lett. – 1991. – Vol. B272. – P. 425–430.

6. Панков, А. Усиление эффектов новой физики в процессе $e^+e^- \to W^+W^-$ / А. Панков // Ядерная физика. – 1992. – Т. 55. – С. 461.

7. Pankov, A.A. Looking for extra neutral gauge boson effects in longitudinally polarized $e^+e^- \to W^+W^-$ / A.A. Pankov, N. Paver // Phys. Lett. – 1992. – Vol. B274. – P. 483–488.

8. Pankov, A.A. Probing Z–Z-prime mixing at future e+e- colliders / A.A. Pankov, N. Paver // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D48. – P. 63–77.

9. Bilenky, M. Trilinear couplings among the electroweak vector bosons and their determination at LEP-200 / M. Bilenky, J.L. Kneur, F.M. Renard, D. Schildknecht // Nucl. Phys. – 1993. – Vol. B409. – P. 22.

10. Gounaris, G. Analytic expressions of cross-sections, asymmetries and W density matrices for $e^+e^- \to W^+W^-$ with general three boson couplings / G. Gounaris, J. Layssac, G. Moultaka, F.M. Renard // Int. J. Mod. Phys. – 1993. – A8. – P. 3285.

11. Hagiwara, K. Probing the weak boson sector in $e^+e^- \to W^+W^-$ / K. Hagiwara, R.D. Peccei, D. Zeppenfeld, K. Hikasa // Nucl. Phys. – 1987. – Vol. B282. – P. 253– 298.

12. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, № 2. – С. 410–420.

13. Zeppenfeld, D. Measuring the $\gamma WW$ and $ZWW$ three gauge vertex with polarized beams / D. Zeppenfeld // Phys. Lett. – 1987. – Vol. B183. – P. 380–395.

14. Fleischer, J. Transverse versus longitudinal polarization effects in $e^+e^- \to W^+W^-$ / J. Fleischer, K. Kolodziej, F. Jegerlehner // Phys. Rev. – 1994. – Vol. D49. – P. 2174–2187.

15. Review of particle physics / K. Nakamura [et al.] // J. Phys. G. – 2010. – Vol. G37. – P. 075021.

16. Hahn, T. Generating Feynman Diagrams and Amplitudes with FeynArts 3 / T. Hahn // Comput. Phys. Commun. – 2001. – Vol. 140. – P. 418.

17. Hahn, T. Automatized One-Loop Calculations in 4 and D dimensions / T. Hahn, M. Perez-Victoria // Comput. Phys. Commun. –1999. – Vol. 118. – P. 153.

18. ILC Reference Design Report Volume 1 – Executive Summary / J. Brau [et al.] // physics.acc-ph/0712.1950.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 29.08.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 539.12*

# Матричный элемент распада мезона в лептонную пару

В.В. Андреев, В.Ю. Гавриш

В работе представлена методика получения матричного элемента распада мезона с произвольным спином $J$ в лептонную пару с учетом кварковой структуры.
**Ключевые слова:** лептон, мезон, пуанкаре-инвариантная квантовая механика, волновая функция, кварк.

The paper presents a technique to obtain the matrix element of meson decay with $J$ arbitrary spins into a lepton pair in view of the quark structure.
**Keywords:** lepton, meson, Poincare-invariant quantum mechanics, wave function, quark.

## *Введение*

Исследования электрослабых распадов адронов всегда были источником информации о взаимодействии кварков. Сегодня электрослабые распады адронов, которые содержат тяжелые кварки, дают возможность измерять параметры Стандартной Модели (СМ), а также служат для поисков эффектов новой физики, т. е. физики вне СМ. В частности, адронные распады позволяют определить элементы матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава, углы смешивания. Лептонные распады псевдоскалярных мезонов в моделях с двумя заряженными хиггсовскими бозонами становятся чувствительными к массам этих бозонов [1].

Вычисления лептонных распадов мезонов с учетом их кварковой структуры проделаны в различных подходах таких, как решеточные модели [2]–[9], модели, основанные на правилах сумм в КХД (см., например, [10]–[12]), и в моделях, использующих конституэнтную кварковую модель ([13]–[21], см. также обзор [22] и ссылки в нем). Результаты таких вычислений значительно отличаются друг от друга, и теоретические неопределенности расчетов достаточно велики. Кроме этого, для мезонов с тяжелым и легким кварком ($B$, $B_s$, $D$, $D_s$-мезоны) важно учитывать и релятивистские эффекты, которыми часто пренебрегают. Таким образом, развитие новых подходов, учитывающих релятивизм кварков и уменьшающих теоретические неопределенности вычислений лептонных распадов, актуально и в настоящее время.

Цель данной работы – разработка методики вычисления распада мезона в лептонную пару с учетом его кварковой структуры. Для описания составных релятивистских систем используется наиболее простое обобщение обычной квантовой механики – релятивистская гамильтонова динамика (РГД) или пуанкаре-инвариантная квантовая механика [24], [25][1].

## *Матричный элемент распада* $h(q\bar{Q}) \to \ell_1 + \ell_2$

Реакция распада мезона $h$ в лептонную пару $\ell_1$, $\ell_2$

$$h \to \ell_1 + \ell_2 \tag{1}$$

характеризуется $S$-матричным элементом

$$M\left(h \to \ell_1 \ell_2\right) = {}_{out}\left\langle \ell_1, \ell_2 \left| S - I \right| \Psi_{\mathbf{Q},M,J\mu} \right\rangle_{in}. \tag{2}$$

Здесь вектор

$$\left| \Psi_{\mathbf{Q},M,J\mu} \right\rangle \tag{3}$$

определяет состояние мезона спина $J$, массы $M$ и импульса $\mathbf{Q}$ в представлении Гейзенберга [23].

[1]Объем данной работы не позволяет даже кратко характеризовать имеющиеся в настоящее время модели для описания связанных систем. Описание некоторых подходов можно найти, например, в [26].

В данной работе будем рассматривать мезон $h$ как релятивистскую составную систему кварка $q$ и антикварка $\bar{Q}$ в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики [24], [25].

В таком подходе процесс распада (1) обусловлен взаимодействием кварков, входящих в мезон $h$. Поскольку при расчетах реакций с фермионами наиболее эффективным является использование спиральных состояний, а для описания связанных систем «хорошими» квантовыми числами являются орбитальный момент относительного движения $\ell$ и полный спиновой момент $S$, необходимо найти связь между вектором состояния (3) и векторами состояния пары $q\bar{Q}$ с учетом этих требований.

Пуанкаре-инвариантная квантовая механика дает возможность связать вектор состояния мезона (2) с векторами состояний входящих в него кварков на основе представлений группы Пуанкаре. Главным требованием пуанкаре-инвариантной квантовой механики является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц.

Схема решения поставленной задачи состоит в следующем: на первом этапе строится базис прямого произведения двух частиц без учета взаимодействия. В случае системы двух частиц с массами $m_q$ и $m_Q$ и, соответственно, с 4-импульсами $p_1 = \left(\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1\right)$ и $p_2 = \left(\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2\right)$ этот базис

$$|\mathbf{p}_1, \lambda_1\rangle |\mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle \equiv |\mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle \tag{4}$$

определяет приводимое представление группы Пуанкаре.

На втором этапе с помощью разложения Клебша-Гордана для группы Пуанкаре (см., например, [27], [28], [29]) строится базис неприводимого представления, который характеризует систему целиком. Для этого введем полный импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \tag{5}$$

и относительный импульс $\mathbf{k}$ двух частиц

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{\widetilde{M}_0\left(\omega_{\widetilde{M}_0}(P) + \widetilde{M}_0\right)}\left(m_Q^2 - m_q^2 - \widetilde{M}_0\left[\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)\right]\right) \tag{6}$$

с

$$\widetilde{M}_0 = \sqrt{\left[\omega_{m_Q}(p_2) + \omega_{m_q}(p_1)\right]^2 - \mathbf{P}^2}\ .$$

Базис двухчастичного неприводимого представления определяется квантовыми числами полного импульса (5), полного углового момента $J$, его проекцией $\mu$, эффективной массой невзаимодействующих частиц

$$M_0 = \omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_q}(k) \tag{7}$$

или $k = |\mathbf{k}|$, а также двумя дополнительными числами, которые снимают вырождение данного базиса.

В зависимости от выбора чисел, снимающих вырождение, различают две схемы: схема с «L-S» связью с квантовыми числами орбитального момента относительного движения $\ell$ и полного спинового момента $S$ и схема «спиральность» с пуанкаре-инвариантными спиральностями $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ [28]. В системе центра инерции $(\mathbf{P} = 0)$ числа $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ совпадают с обычными спиральностями фермионов.

В схеме «спиральность» разложение Клебша-Гордана группы Пуанкаре имеет вид [28]:

$$|\mathbf{P}, k, J, \mu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1)\omega_{m_Q}(p_2)M_0}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_Q}(k)\omega_{M_0}(P)}}\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\int d^2\hat{\mathbf{k}}\ D^{*J}_{\mu,\lambda}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k)|\mathbf{p}_1, \tilde{\lambda}_1; \mathbf{p}_2, \tilde{\lambda}_2\rangle \tag{8}$$

с $\lambda = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2$. Функция $D^J_{\mu\lambda}(\phi_k, \theta_k, -\phi_k)$ задает матрицы неприводимого представления группы $SU(2)$ индекса $J$. Явный вид матрицы $D$ определяется через сферические углы вектора относительного движения (6) $\hat{\mathbf{k}} = \{\sin\theta_k \cos\phi_k, \sin\theta_k \sin\phi_k, \cos\theta_k\}$.

На третьем этапе от системы без взаимодействия переходят к одночастичному базису связанной системы (3) путем добавления в один из операторов полного набора базиса (8) оператора взаимодействия. Требование сохранения пуанкаре-инвариантности в рамках точечной и мгновенной форм РГД приводит к появлению волновой функции (ВФ) связанной системы $\Phi$:

$$\left\langle \mathbf{P}, k, J, \mu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \middle| \Psi_{\mathbf{Q},M,J'\mu'} \right\rangle = \delta(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\delta_{J'J}\delta_{\mu'\mu}\Phi^{J\mu}_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2}(k). \tag{9}$$

Нормировка ВФ (9) с учетом числа цветов кварков $N_c$ следует из нормировки векторов состояний и имеет вид

$$N_c\int_0^\infty dk\, k^2\left|\Phi^{J\mu}_{\ell,S}(k)\right|^2 = 1. \tag{10}$$

Использование соотношения, связывающего вектор состояния в схеме с «L-S» связью с вектором состояния в схеме «спиральность» [28], [30]

$$|\,\mathbf{P},k,J\mu,\ell,S\rangle = \sum_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2J+1}}\,C^{\,s_1\quad s_2\quad S}_{\,\tilde{\lambda}_1\; -\tilde{\lambda}_2\;\; \lambda}\,C^{\,\ell\;\; S\;\; J}_{\,0\;\; \lambda\;\; \lambda}\,|\,\mathbf{P},k,J\mu,\tilde{\lambda}_1,-\tilde{\lambda}_2\rangle, \tag{11}$$

где $C^{\,s_1\;\; s_2\;\; S}_{\,\lambda_1\;\; \lambda_2\;\; \lambda}$ – коэффициенты Клебша-Гордана, приводит к следующему результату:

$$|\,\Psi_{\mathbf{P},J\mu,M}\rangle = \int_0^\infty dk\, k^2\Phi^{J\mu}_{\ell,S}(k)\sqrt{\frac{\omega_{m_1}(p_1)\omega_{m_2}(p_2)M_0}{\omega_{m_1}(k)\omega_{m_2}(k)\omega_{M_0}(P)}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\times$$
$$\times\sum_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2} C^{\,1/2\quad 1/2\quad S}_{\,\tilde{\lambda}_1\;\; -\tilde{\lambda}_2\;\; \lambda}\,C^{\,\ell\;\; S\;\; J}_{\,0\;\; \lambda\;\; \lambda}\int d^2\mathbf{k}\, D^{*J}_{\mu\lambda}(\phi_k,\theta_k,-\phi_k)\left|\mathbf{p}_1,\tilde{\lambda}_1,\mathbf{p}_2,\tilde{\lambda}_2\right\rangle. \tag{12}$$

Подставляя (12) в матричный элемент (2), после ряда упрощений в системе покоя мезона $(\mathbf{P}=0)$ находим, что

$$M(h\to\ell_1\ell_2) = \sum_{a=1}^{N_c}\int_0^\infty dk k^2\Phi^{J\mu}_{\ell,S}(k)\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sum_{\lambda_1,\lambda_2} C^{\,1/2\quad 1/2\quad S}_{\,\lambda_1\;\; -\lambda_2\;\; \lambda}\,C^{\,\ell\;\; S\;\; J}_{\,0\;\; \lambda\;\; \lambda}\times$$
$$\times\int d^2\mathbf{k}\, D^{*J}_{\mu\lambda}(\phi_k,\theta_k,-\phi_k)_{out}\langle\ell_1,\ell_2|S-I\left|\mathbf{k},\lambda_1;-\mathbf{k},\lambda_2,a\right\rangle_{in}. \tag{13}$$

Здесь уже $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – спиральности кварка и антикварка, а волновая функция мезона определяется «хорошими» квантовыми числами $\ell$ и $S$, которые, в свою очередь, задают значения операторов $P$, $C$ и $G$-четности.

Таким образом, матричный элемент распада мезона спина $J$ в лептонную пару выражается через матричный элемент субпроцесса с участием кварков, входящих в этот мезон $M\left(q\bar{Q}\to\ell_1\ell_2\right)$.

***Пример: распад $\pi^-(d\bar{u})\to e^- + \bar{\nu}_e$***

Для демонстрации методики рассмотрим процесс лептонного распада псевдоскалярного мезона $\pi^-(d\bar{u})\to e^-(q_1,\sigma_1)+\bar{\nu}_e(q_2,\sigma_2)$ в стандартной теории электрослабого взаимодействия. Поскольку для пиона $J=S=\ell=0$, то выражение (13) существенно упрощается

$$M^{\sigma_1,\sigma_2}\left(\pi^-\to e^-\nu_e\right) = \sum_{a=1}^{N_c}\sqrt{\frac{1}{8\pi}}\int_0^\infty dk k^2\Phi_\pi(k)\int d^2\mathbf{k}\sum_\lambda \lambda M^{\sigma_1,\sigma_2}_{\lambda,\lambda}\left(d\bar{u}\to e^-\nu_e\right). \tag{14}$$

В борновском приближении субпроцесс с участием кварков определяется диаграммой с обменом заряженным $W$-бозоном. Матричный элемент, соответствующий данному субпроцессу, можно записать в виде

$$M^{\sigma_1,\sigma_2}_{\lambda,\lambda}\left(d\bar{u}\to e^-\nu_e\right) = \frac{\sqrt{2}\,V_{ud}N_cG_F}{(2\pi)^3\sqrt{\omega_{m_d}(k)\omega_{m_u}(k)}}\frac{M_W^2}{M_W^2-M_\pi^2}\times$$
$$\times\bar{\upsilon}_\lambda(-\mathbf{k},m_u)\gamma_\mu\,\omega_- u_\lambda(\mathbf{k},m_d)\,\bar{u}_{\sigma_1}(\mathbf{q},m_e)\gamma^\mu\,\omega_-\upsilon_{\sigma_2}(-\mathbf{q},0), \tag{15}$$

где $V_{ud}$ – элемент матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава; $M_W$ – масса $W$-бозона; $M_\pi$ – масса $\pi^-$-мезона; $\omega_\pm = (1 \pm \gamma_5)/2$ – проективная матрица; а $m_u$ и $m_d$ – массы $u$ и $d$-кварков соответственно.

В выражении (15) учтена кинематика двухчастичного распада, а именно, что

$$q_1 + q_2 = M_{\pi^-}\,, \quad \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0\,, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}\,, \tag{16}$$

а также, что постоянная тонкой структуры $\alpha$, синус угла Вайнберга $s_W$ и константа Ферми $G_F$ связаны соотношением

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} s_W^2 M_W^2 G_F}{\pi}\,. \tag{17}$$

Подстановка (15) в матричный элемент (14) приводит к выражению

$$M^{\sigma_1,\sigma_2}\left(\pi^- \to e^- \nu_e\right) = \frac{\sqrt{2}\, V_{ud} N_c G_F}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \frac{M_W^2}{M_W^2 - M_\pi^2} \times$$

$$\times \bar{u}_{\sigma_1}(\mathbf{q}, m_e) \gamma^\mu\, \omega_- \upsilon_{\sigma_2}(-\mathbf{q}, 0) \int_0^\infty dk \frac{k^2 \Phi_\pi(k)}{\sqrt{\omega_{m_d}(k)\, \omega_{m_u}(k)}} \int d^2\mathbf{k} \sum_\lambda \lambda \bar{\upsilon}_\lambda(-\mathbf{k}, m_u) \gamma_\mu\, \omega_- u_\lambda(\mathbf{k}, m_d)\,. \tag{18}$$

Таким образом, соотношение (18) позволяет рассчитать матричный элемент лептонного распада $\pi^-\left(d\bar{u}\right) \to e^- + \bar{\nu}_e$ с учетом кварковой структуры $\pi^-$-мезона. Фермионные токи, входящие в (18), можно рассчитать на основе метода базисных спиноров, развитого одним из авторов в [31], [32].

Волновая функция мезона $\Phi(k)$ находится из уравнения пуанкаре-инвариантной механики [24]:

$$\sum_{\ell', S'} \int_0^\infty V^J_{\ell,S;\ell',S'}\left(k, k'\right) \Phi^{J\mu}_{\ell',S'}\left(k'\right) k'^2 dk' = \left(M - M_0\right) \Phi^{J\mu}_{\ell,S}\left(k\right), \tag{19}$$

где $V^J_{\ell,S;\ell',S'}\left(k, k'\right)$ – матричный элемент феноменологического потенциала межкваркового взаимодействия $V$.

***Заключение***

В работе представлена методика получения матричного элемента распада мезона с произвольным спином $J$ в лептонную пару с учетом кварковой структуры. Двухчастичная релятивистская связанная система $q\bar{Q}$ описывается на основе пуанкаре-инвариантной квантовой механики (или РГД), что позволяет сделать задачу расчета замкнутой. Авторы планируют применить развитую методику для расчета редких лептонных распадов мезонов.

## Литература


1. Hou, W.-S. Enhanced charged Higgs boson effects in B- $\to$ tau anti- neutrino, mu anti-neutrino and b $\to$ tau anti-neutrino + X / W.-S. Hou // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D48. – P. 2342–2344.

2. Quenched heavy light decay constants / R.M. Baxter [et al.] // Phys. Rev. – 1994. – Vol. D49. – P. 1594–1605.

3. $B$-meson decay constants from NRQCD / A. Ali Khan [et al.] // Phys. Lett. – 1998. – Vol. B427. – P. 132–140.

4. Lattice determination of heavy-light decay constants / C.W. Bernard [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81. – P. 4812–4815.

5. Non-perturbatively improved heavy-light mesons: Masses and decay constants / D. Becirevic [et al.] // Phys. Rev. – 1999. – Vol. D60. – P. 074501.

6. Draper, T. Status of heavy quark physics on the lattice / T. Draper // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 1999. – Vol. 73. – P. 43–57.

7. $B$-meson decay constant from two-flavor lattice QCD with non-relativistic heavy quarks / A. Ali Khan [et al.] // Phys. Rev. – 2001. – Vol. D64. – P. 054504.

8. Decay constants of B and D mesons from improved relativistic lattice QCD with two flavours of sea quarks / A. Ali Khan [et al.] // Phys. Rev. – 2001. – Vol. D64. – P. 034505.

9. Lattice results for the decay constant of heavy-light vector mesons / C. Bernard [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. D65. – P. 014510.

10. Narison, S. Extracting m-bar(c)(M(c)) and f(D/s, B) from the pseudoscalar sum rules / S. Narison // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 1999. – Vol. 74. – P. 304–308.

11. Jamin, M. f(B) and f(B/s) from QCD sum rules / M. Jamin, B.O. Lange // Phys. Rev. – 2002. – Vol. D65. – P. 056005.

12. Penin, A.A. Heavy-light meson decay constant from QCD sum rules in three-loop approximation / A.A. Penin, M. Steinhauser // Phys. Rev. – 2002. – Vol. D65. – P. 054006.

13. Colangelo, P. Relativistic bound-state effects in heavy-meson physics / P. Colangelo, G. Narduli, M. Pietroni // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D43, N9. – P. 3002–3010.

14. Ivanov, M.A. Leptonic and semileptonic decays of pseudoscalar mesons / M.A. Ivanov, P. Santorelli // Phys. Lett. – 1999. – Vol. B456. – P. 248–255.

15. Ciftci, H. Meson decay in an independent quark model / H. Ciftci, H. Koru // Int. J. Mod. Phys. – 2000. – Vol. E9. – P. 407–416.

16. Melikhov, D. Weak form factors for heavy meson decays: An update / D. Melikhov, B. Stech // Phys. Rev. – 2000. – Vol. D62. – P. 014006.

17. Decay constants of heavy meson of 0- state in relativistic Salpeter method / G. Cvetic, C.S. Kim, G.-L. Wang, W. Namgung // Phys. Lett. – 2004. – Vol. B596. – P. 84–89.

18. Weak decay constant of pseudoscalar mesons in a QCD-inspired model / L.A.M. Salcedo, J.P.B.C. de Melo, D. Hadjmichef, T. Frederico // Braz. J. Phys. – 2004. – Vol. 34. – P. 297–299.

19. Ebert, D. Decay constants of heavy-light mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Mod. Phys. Lett. – 2002. – Vol. A17. – P. 803–808.

20. Leptonic decay constants f(D/s) and f(D) in three flavor lattice QCD / J.N. Simone [et al.] // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 2005. – Vol. 140. – P. 443–445.

21. Ebert, D. Relativistic treatment of the decay constants of light and heavy mesons / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Phys. Lett. – 2006. – Vol. B635. – P. 93–99.

22. Richman, J.D. Leptonic and semileptonic decays of charm and bottom hadrons / J.D. Richman, P.R. Burchat // Rev. Mod. Phys. – 1995. – Vol. 67. – P. 893–976.

23. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.

24. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.

25. Крутов, А.Ф. Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40, 2. – С. 268–318.

26. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантово-полевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2008. – 294 с.

27. Широков, Ю.М. Релятивистская теория поляризационных эффектов / Ю.М. Широков // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 34, 4. – С. 1005–1011.

28. Верле, Ю. Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – М. : Атомиздат, 1969. – 442 с.

29. Новожилов, Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц / Ю.В. Новожилов. – М. : Наука, 1972. – 472 с.

30. Браун, Д.Е. Нуклон-нуклонные взаимодействия / Д.Е. Браун, А.Д. Джексон. – М. : Атомиздат, 1979. – 248 с.

31. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, 2. – С. 410–420.

32. Андреев, В.В. Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях / В.В. Андреев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 235 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 29.08.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 539.12*

# Уравнения движения адронов спина ноль и половина в электромагнитном поле с учетом электромагнитных характеристик

В.В. Андреев, Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова, А.Н. Сердюков

Получены эффективные ковариантные лагранжианы взаимодействия низкоэнергетического электромагнитного поля со структурными частицами спина 0 и ½. Это позволяет ковариантными методами определить вклад поляризуемостей в амплитуды и сечения двухфотонных процессов. На основе релятивистского калибровочно-инвариантного подхода, решений электродинамических уравнений ковариантным методом функций Грина и эффективных лагранжианов определены низкоэнергетические амплитуды комптоновского рассеяния. Проведен расчет магнитной и электрической квазистатических поляризуемостей для спинорной частицы с использованием методики вычисления матричных элементов комптоновского рассеяния.
**Ключевые слова:** поляризуемость, лагранжиан, комптоновское рассеяние, функция Грина.

The effective covariant Lagrangians of a low-energy electromagnetic field interaction with the structural particles of spin 0 and ½ are obtained. By the covariant methods that allows to determine the contribution of polarizabilities to the amplitudes and to the cross section of a two-photon's processes. On the basis of the relativistic gauge-invariant approach, the solutions of the electromagnetic equations by the covariant method of Green functions and the effective Lagrangians the low-energy Compton scattering amplitudes are determined. The calculations of magnetic and electric quasi-static polarizabilities of spinor particle were evaluated on the basis of matrix elements calculation for Compton scattering amplitudes.
**Keywords:** polarizability, Lagrangian, Compton scattering, Green function.

***Введение***

В настоящее время известны многие электродинамические процессы, на основе которых планируются эксперименты по извлечению данных о поляризуемостях адронов. В связи с этим возникает задача о том, как последовательно ковариантным образом учитывать вклад поляризуемостей в амплитуды и сечения электродинамических процессов на адронах. Подобную проблему можно решить, построив теоретико-полевой ковариантный формализм взаимодействия электромагнитного поля с адронами с учетом их поляризуемостей.

На протяжении многих лет Ф.И. Федоровым, Л.Г. Морозом и их учениками активно развивались ковариантные методы получения лагранжианов и уравнений взаимодействия электромагнитного поля с адронами, в которых электромагнитные характеристики этих частиц являются основополагающими [1]–[5]. Определение амплитуд и сечений через поляризуемости ядер в рамках нерелятивистской электродинамики представлено в работе [6].

В настоящей работе на основе калибровочно-инвариантного формализма и решений электродинамических уравнений методом функции Грина [7]–[9] дано релятивистское обобщение подхода [6] для получения амплитуды комптоновского рассеяния на скалярных и спинорных частицах с учетом их поляризуемостей. В рамках ковариантного теоретико-полевого подхода получены лагранжиан, тензор энергии-импульса и уравнения взаимодействия электромагнитного поля с адронами спина 0 и 1/2 с учетом поляризуемостей. В работе также вычисляются структуры, которые аналогичны поляризуемостям, но возникают не за счет сильных взаимодействий. Анализируется возможный вклад этих структур в поляризуемости адронов.

***Ковариантное представление амплитуды комптоновского рассеяния на π-мезоне с учетом вклада поляризуемостей***

Воспользуемся ковариантным формализмом Лагранжа для определения низкоэнергетической части амплитуды комптоновского рассеяния на $\pi$-мезоне с учетом поляризуемостей. Из низкоэнергетической теоремы следует, что амплитуда комптоновского рассеяния в области низких энергий определяется борновской частью, а также вкладом поляризуемостей и среднеквадратичного радиуса мезона.

Запишем лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной частицей с учетом поляризуемостей следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4}F^2 + \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - m^2(\varphi^+\varphi) + L_I^{(e)} + L_I^{(\alpha)}. \qquad (1)$$

В уравнении (1) введены следующие определения:

$$L_I^{(e)} = j_\mu A^\mu + e^2 A^2(\varphi^+\varphi), \quad L_I^{(\alpha)} = \left[L^{\mu\nu}\left(\vec{p},\vec{m},\vec{\partial}\right) + L^{\mu\nu}\left(\overleftarrow{\partial},\vec{p},\vec{m}\right)\right]F_{\mu\nu}, \qquad (2)$$

где
$$L^{\mu\nu}\left(\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}},\vec{\partial}\right) = -\frac{i}{4m}\left\langle\left[\left(\hat{\vec{p}}^\mu \vec{\partial}^\nu - \hat{\vec{p}}^\nu \vec{\partial}^\mu\right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{\vec{m}}_\rho \vec{\partial}_\sigma\right]\right\rangle,$$

$$L^{\mu\nu}\left(\overleftarrow{\partial},\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}}\right) = -\frac{i}{4m}\left\langle\left[\left(\overleftarrow{\partial}^\nu \hat{\vec{p}}^\mu - \overleftarrow{\partial}^\mu \hat{\vec{p}}^\nu\right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overleftarrow{\partial}_\sigma \hat{\vec{m}}_\rho\right]\right\rangle.$$

В определении (2) $\hat{\vec{p}}^\mu$ и $\hat{\vec{m}}_\mu$ – операторы электрической и магнитной поляризаций структурной частицы, стрелки указывают действие операторов на волновые функции $\pi$-мезона, $\left\langle\hat{O}\right\rangle = \varphi^+(x)\hat{Q}\varphi(x)$, $\varphi(x)$ – волновая функция $\pi$-мезона. Выражение (2) согласовано с классическим определением взаимодействия электромагнитного поля с частицей с учетом ее электрической и магнитной поляризаций [10], [11].

Получим уравнения движения структурной заряженной частицы в электромагнитном поле. Для этого воспользуемся уравнениями Лагранжа – Эйлера. В результате получим:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi(x) = -(\hat{V}^{(e)}_{(x)} + \hat{V}^{(\alpha)}_{(x)})\varphi(x). \qquad (3)$$

В уравнении (3) оператор $\hat{V}$ определяется следующим образом:

$$\hat{V}^{(e)}_{(x)} + \hat{V}^{(\alpha)}_{(x)} = \partial_\nu(ieA^\nu + \hat{\pi}_I^{(\alpha)\nu}) + ieA^\nu\partial_\nu - e^2A^2,$$

где
$$\hat{\pi}_I^{(\alpha)\nu} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu\varphi^+)}\left[\hat{L}^{\rho\sigma}\left(\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}},\vec{\partial}\right) + \hat{L}^{\rho\sigma}\left(\overleftarrow{\partial},\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}}\right)\right]F_{\rho\sigma}.$$

Вычислим теперь амплитуду комптоновского рассеяния на $\pi$-мезоне с учетом поляризуемостей. Для этого определим S-матричные элементы согласно работам [7], [8]:

$$S_{fi} = \left\langle f_p(x'), \int d^4x\Delta^c(x'-x)|_{t=+\infty}\hat{V}^{(\alpha)}(x)f_p(x)\right\rangle = (-i)\int d^4x f_p^*(x)\hat{V}^{(\alpha)}(x)f_p(x), \qquad (4)$$

где $f_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_p}}e^{-ipx}$, $\Delta^c(x'-x)$ – функция Грина.

При вычислении (4) использовано соотношение

$$\left\langle f_p(x'),\Delta^c(x'-x)\right\rangle|_{z'=+\infty} = \int d^3x' f_p^*(x')\overleftrightarrow{\partial}_{t'}\Delta^c(x'-x)|_{t'=+\infty} = (-i)f_p^*(x).$$

Если в (4) воспользуемся асимптотическими условиями, а именно: будем пренебрегать взаимодействиями при $t = \pm\infty$, тогда для $S_{fi}$ справедливо:

$$S_{fi} = i\int d^4x\partial_\mu f_p^*(x)\hat{\pi}_I^{(\alpha)\mu}(x) = \int d^4x\left[L^{\mu\nu}\left(\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}},\vec{\partial}\right) + L^{\mu\nu}\left(\overleftarrow{\partial},\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}}\right)\right]F_{\mu\nu}.$$

В соотношении (2) представим операторы $\hat{p}^{\mu}$ и $\hat{m}_{\mu}$ следующим образом: $\hat{p}^{\mu} = 4\pi\alpha F^{\mu\rho}(i\partial_{\rho})$, $\hat{m}_{\mu} = 4\pi\beta\widetilde{F}_{\mu\rho}(i\partial^{\rho})$, где $\alpha$ и $\beta$ – электрическая и магнитная поляризуемости π-мезона, а тензор $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$. Тогда для S-матричного элемента получим:

$$S_{fi} = i\frac{2\pi}{m}\int d^4x\left[\left\langle \overleftarrow{\partial}_{\rho}\vec{\partial}^{\nu}\right\rangle + \left\langle \overleftarrow{\partial}^{\nu}\vec{\partial}_{\rho}\right\rangle\right]\left[\alpha F^{\mu\rho}F_{\mu\nu} + \beta\widetilde{F}^{\mu\rho}\widetilde{F}_{\mu\nu}\right]. \tag{5}$$

Если в (5) воспользуемся соотношением $\widetilde{F}^{\mu\rho}\widetilde{F}_{\mu\nu} = \left(F^{\mu\rho}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\nu}F^2\right)$, то (5) можно представить в виде:

$$S_{fi} = i\frac{2\pi}{m}\int d^4x\left[\left\langle \overleftarrow{\partial}_{\rho}\vec{\partial}^{\nu}\right\rangle + \left\langle \overleftarrow{\partial}^{\nu}\vec{\partial}_{\rho}\right\rangle\right]\left[(\alpha+\beta)F^{\mu\rho}F_{\mu\nu} - \frac{\beta}{2}\delta^{\rho}_{\nu}F^2\right]. \tag{6}$$

В импульсном представлении амплитуда (6) определяется следующим образом:

$$S_{fi} = \frac{(-i)(2\pi)^4\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^6\sqrt{16\omega_1\omega_2E_1E_2}}M,$$

здесь введена матрица $M$:

$$M = -\frac{2\pi}{m}\left(p_{2\nu}p_1^{\mu} + p_2^{\mu}p_{1\nu}\right)\left[(\alpha+\beta)\left(F^{(2)}_{\mu\rho}F^{\rho\nu}_{(1)} + F^{(1)}_{\mu\rho}F^{\rho\nu}_{(2)}\right) - \beta\delta^{\nu}_{\rho}F^{\mu\nu}_{(2)}F^{(1)}_{\mu\nu}\right], \tag{7}$$

где $F^{\mu\nu}_{(1)} = k_1^{\mu}e^{(\lambda_1)\nu} - k_1^{\nu}e^{(\lambda_1)\mu}$, $F^{\mu\nu}_{(2)} = k_2^{\mu}e^{(\lambda_2)\nu} - k_2^{\nu}e^{(\lambda_2)\mu}$.

Из (7) следует калибровочно-инвариантное выражение для амплитуды комптоновского рассеяния на частице спина 0 с учетом поляризуемостей.

***Ковариантное представление амплитуды комптоновского рассеяния на нуклоне с учетом вклада поляризуемостей***

В этом случае определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с нуклоном следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\left[\left(i\hat{\vec{\partial}} - m\right) - e\hat{A} - \frac{1}{4}\hat{\vec{L}}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\Psi - \frac{1}{2}\overline{\Psi}\left[\left(i\hat{\overleftarrow{\partial}} + m\right) + e\hat{A} + \frac{1}{4}\hat{\overleftarrow{L}}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\Psi. \tag{8}$$

В этом выражении

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right),$$

$$\hat{\vec{L}}^{\mu\nu} = \frac{e\mu}{m}\sigma^{\mu\nu} - \frac{i}{2m}\left[\left(\hat{p}^{\mu}\vec{\partial}^{\nu} - \hat{p}^{\nu}\vec{\partial}^{\mu}\right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{m}_{\rho}\vec{\partial}_{\sigma}\right],$$

$$\hat{\overleftarrow{L}}^{\mu\nu} = \frac{e\mu}{m}\sigma^{\mu\nu} + \frac{i}{2m}\left[\left(\hat{p}^{\mu}\overleftarrow{\partial}^{\nu} - \hat{p}^{\nu}\overleftarrow{\partial}^{\mu}\right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{m}_{\rho}\overleftarrow{\partial}_{\sigma}\right].$$

Стрелки указывают направления действия производных, $\mu$ – магнитный момент частицы, а операторы $\hat{p}^{\mu}$ и $\hat{m}_{\mu}$ являются операторами электрической и магнитной поляризации структурной частицы.

Используя уравнения Лагранжа – Эйлера и лагранжиан (8), получим уравнения:

$$\left[\left(i\hat{\vec{\partial}} - m\right) - e\hat{A} - \frac{1}{4}\hat{\vec{L}}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\Psi = 0,$$

$$\overline{\Psi}\left[\left(i\hat{\overleftarrow{\partial}}+m\right)+e\hat{A}+\frac{1}{4}\hat{\overleftarrow{L}}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]=0.$$

Амплитуду комптоновского рассеяния вычислим по приведенной методике.

Чтобы получить согласование с низкоэнергетическим представлением амплитуды комптоновского рассеяния на нуклоне, операторы поляризации частицы определим так $\hat{p}^{\mu}=4\pi\alpha F^{\mu\nu}\gamma_{\nu}$, $\hat{m}_{\mu}=4\pi\beta\widetilde{F}^{\mu\nu}\gamma_{\nu}$, где $\alpha$ и $\beta$ – электрическая и магнитная поляризуемости нуклона. Таким образом, S-матрица рассеяния выражается через поляризуемости следующим образом:

$$\hat{S}=i\int\langle L_I\rangle d^4x,$$

где

$$\langle L_I\rangle=\frac{2\pi}{m}\left[\alpha F_{\mu\nu}F_{\rho}^{\ \mu}+\beta\widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\rho}^{\ \mu}\right]\theta^{\nu\rho},$$

$$\theta^{\nu\rho}=\frac{i}{2}\overline{\Psi}\overleftrightarrow{\partial}^{\nu}\gamma^{\rho}\Psi.$$

Вычисление дифференциального сечения комптоновского рассеяния на угол $\theta=0$ приводит к следующему результату

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{1}{8\pi m}\right)^2\left[-2e+8\pi m\omega^2(\alpha+\beta)\right]^2,$$

где $\omega$ – частота излучения.

***Тензоры энергии-импульса взаимодействия электромагнитного поля спина 1/2 с учетом электрической поляризуемости***

В электродинамике при описании взаимодействия электромагнитного поля с заряженной частицей спина 1/2 и аномальным магнитным моментом $\mu$ используется лагранжиан [9], [12]:

$$L=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{i}{2}\overline{\Psi}\vec{D}\Psi-\frac{i}{2}\overline{\Psi}\overleftarrow{D}\Psi-m\overline{\Psi}\Psi, \qquad (9)$$

где

$$\vec{D}_{\mu}=\vec{\partial}_{\mu}+ieA_{\mu}+\frac{i\mu e}{4m}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

$$\overleftarrow{D}_{\mu}=\overleftarrow{\partial}_{\mu}-ieA_{\mu}-\frac{i\mu e}{4m}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Соответствующие лагранжиану (9) уравнения Лагранжа – Эйлера имеют вид:

$$\left(i\vec{D}-m\right)\Psi=0,$$

$$\overline{\Psi}\left(i\overleftarrow{D}+m\right)=0,$$

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=j^{\mu}\equiv\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi-\partial_{\rho}\left[\frac{\mu e}{2m}\overline{\Psi}^{\rho\mu}\Psi\right].$$

Канонический и метрический тензоры энергии-импульса выражаются через операторы полей [12]:

$$T_{\mu\nu}^{(can)}=-F_{\mu\rho}\partial_{\nu}A^{\rho}+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}+\widetilde{\theta}_{\mu\nu}-\frac{\mu e}{2m}\left(\overline{\Psi}\sigma_{\mu\rho}\Psi\right)\left(\partial_{\nu}A^{\rho}\right), \qquad (10)$$

$$T_{\mu\nu}^{(metr)}=F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\ \rho}+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}+\widetilde{\theta}_{\mu\nu}+\frac{\mu e}{2m}\overline{\Psi}\sigma_{\mu\rho}\Psi F_{\nu}^{\ \rho}-\frac{e}{2}\left[\overline{\Psi}\gamma_{\mu}\Psi A_{\nu}+\overline{\Psi}\gamma_{\nu}\Psi A_{\mu}\right], \qquad (11)$$

где

$$\tilde{\theta}_{\mu\nu} = \left(\theta_{\mu\nu} + \theta_{\nu\mu}\right), \quad \theta_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\Psi .$$

Проделаем аналогичные построения лагранжиана, но уже для частицы, имеющей электрический заряд $e$ и электрическую поляризуемость $\alpha_E$ ($\beta_M = 0$). Тогда лагранжиан (8) принимает вид аналогичный (9), но в нем операторы $D$ переопределены с учетом поляризуемости:

$$\vec{D}_{\mu} = \left(g_{\mu\nu} + \frac{2\pi\alpha_E}{m}F_{\sigma\nu}F_{\mu}{}^{\sigma}\right)\vec{\partial}^{\nu} + ieA_{\mu},$$

$$\overleftarrow{D}_{\mu} = \overleftarrow{\partial}^{\nu}\left(g_{\mu\nu} + \frac{2\pi\alpha_E}{m}F_{\mu}{}^{\sigma}F_{\sigma\nu}\right) - ieA_{\mu}.$$

Следуя методике, с помощью которой были получены выражения (10) и (11), найдем метрический тензор энергии-импульса с учетом поляризуемости частицы спина 1/2:

$$T^{\mu\nu}_{(metr)} = F^{\mu\rho}F^{\nu}_{\rho} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\left(j_{\mu}A_{\nu} + j_{\nu}A_{\mu}\right) + T^{\mu\nu}_{I} ,$$

где

$$T^{\mu\nu}_{I} = J^{\mu\rho}F^{\nu}_{\rho} + \frac{g^{\mu\nu}}{4}F_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}, \tag{12}$$

а вспомогательный тензор $J$ пропорционален электрической поляризуемости

$$J^{\rho\sigma} = -\frac{4\pi\alpha_E}{m}\left(F^{\rho}_{\mu}\tilde{\theta}^{\mu\sigma} - F^{\sigma}_{\mu}\tilde{\theta}^{\mu\rho}\right). \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) следует, что при взаимодействии электромагнитного поля с частицей большой массы плотность энергии переходит в классическое выражение при $\beta_M = 0$ [13]:

$$T^{00} = -2\pi\alpha_E\vec{E}^2 ,$$

где $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля.

***Квазистатические поляризуемости частиц спина 1/2 в КЭД***

Интересной особенностью частиц, не имеющих структуру за счет сильных взаимодействий (поляризуемости, среднеквадратичный радиус и др.), является наличие аналогичных характеристик, проявляющихся за счет электромагнитных или слабых взаимодействий. Так, хорошо известно, что аномальный магнитный момент электрона «индицируется» высшими порядками теории возмущений, в то время как у протона он имеется изначально.

В данном разделе найдем квазистатические поляризуемости бесструктурных фермионов, которые возникают в комптоновском рассеянии за счет высших порядков.

Хорошо известно, что в общем случае АКР $T$ вперед ($\theta = 0$) и назад ($\theta = \pi$) с точностью до $\omega^2$ запишутся в виде:

$$T^{\lambda',\sigma'}_{\lambda,\sigma}(\theta = 0) = 8\pi m_f\omega^2\left(\alpha_E + \beta_M\right)\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\sigma,\sigma'} ,$$

$$T^{\lambda',\sigma'}_{\lambda,\sigma}(\theta = \pi) = 8\pi m_f\omega^2\left(\alpha_E - \beta_M\right)\lambda\delta_{-\lambda,\lambda'}\delta_{\sigma,-\sigma'} .$$

Здесь $\lambda$ и $\lambda'$ – спиральности начального и конечного фермионов соответственно, $\sigma$ и $\sigma'$ – спиральности входящего и исходящего фотонов соответственно, $m_f$ – масса фермиона.

С другой стороны, существует возможность рассчитать матричные элементы и соответственно амплитуду комптоновского рассеяния в рамках КЭД, включая следующий за борновским порядок теории возмущений по константе $\alpha_{QED}$ (см., например, [14], [15]). В работах [16], [17] разработана методика вычисления поляризуемостей фермионов в рамках квантово-полевых моделей и теорий путем сравнения соответствующих матричных элементов.

Итогом этой процедуры в данном случае являются соотношения:

$$\alpha_E^{q-s}+\beta_M^{q-s}=\frac{\alpha_{QED}^2}{3\pi m_f^3}\frac{11}{6}+\frac{8\alpha_{QED}^2}{3\pi m_f^3}ln\left(\frac{2\omega}{m_f}\right), \tag{14}$$

$$\alpha_E^{q-s}-\beta_M^{q-s}=-\frac{\alpha_{QED}^2}{3\pi m_f^3}\frac{59}{6}+\frac{4\alpha_{QED}^2}{3\pi m_f^3}ln\left(\frac{2\omega}{\lambda}\right), \tag{15}$$

где параметр $\lambda$ представляет собой бесконечно малую массу фотона.

Отметим, что структуры, аналогичные поляризуемостям, появляются за счет электромагнитных взаимодействий, поэтому имеет смысл говорить о полученных выше величинах как о неких «квазиполяризуемостях», которые представляют собой поправки к поляризуемостям в общем случае. По этой причине для них и введены обозначения $\alpha_E^{q-s}$, $\beta_M^{q-s}$.

Как следует из (14) и (15), квазистатические поляризуемости помимо постоянных членов содержат и неаналитические слагаемые $\sim \ln\omega$, которые расходятся в томпсоновском пределе ($\omega \to 0$). Именно вышеуказанное свойство и послужило причиной того, что в работах [18], [19] структуры (14) и (15) были названы квазистатическими поляризуемостями.

Уравнение (14) совпадает с выражением, полученным в работах [18], [19], а формула (15) получена впервые. И если в работе [18] методика потребовала значительных усилий по расчету сечений и взятия интегралов в правиле сумм Балдина [20], то в предлагаемой методике процедура фактически свелась к разложению выражений матричных элементов по частоте фотона $\omega$.

Из соотношений (14) и (15) легко найти электрическую ($\alpha_E^{q-s}$) и магнитную ($\beta_M^{q-s}$) квазистатические поляризуемости и оценить их вклад в поляризуемости «дираковского» протона (точечный фермион с нулевым аномальным магнитным моментом). Полагая $m_f = m_p$, а параметр $\omega = 0{,}1 m_p$, находим, что

$$\alpha_E^{q-s}+\beta_M^{q-s}\approx -5{,}8\times 10^{-7}\,\text{Фм}^3.$$

Сравнивая полученный результат с экспериментальными значениями [21]

$$\alpha_E^{(p)}+\beta_E^{(p)}=\left(13{,}8\pm 0{,}4\right)\times 10^{-4}\,\text{Фм}^3,$$

можно заметить, что вклад данных поправок мал и не превышает даже экспериментальных ошибок.

***Заключение***

На основе калибровочно-инвариантного подхода и решений электродинамических уравнений методом функции Грина получены в ковариантной форме лагранжианы и амплитуды комптоновского рассеяния на пионе и нуклоне с учетом их поляризуемостей.

Установлено, что в случае пиона операторы $\hat{p}^\mu$ и $\hat{m}_\mu$ определяются через тензоры электромагнитного поля $\hat{p}^\mu = 4\pi\alpha F^{\mu\rho}(i\partial_\rho)$, $\hat{m}_\mu = 4\pi\beta\widetilde{F}_{\mu\rho}(i\partial^\rho)$. Лагранжиан (2) согласуется с выражениями лагранжианов, приведенных в работе [22], и низкоэнергетическим представлением амплитуды комптоновского рассеяния на пионе.

В случае комптоновского рассеяния на нуклоне операторы $\hat{p}^\mu$ и $\hat{m}_\mu$ определяются следующими выражениями $\hat{p}^\mu = 4\pi\alpha F^{\mu\rho}\gamma_\rho$, $\hat{m}_\mu = 4\pi\beta\widetilde{F}_{\mu\rho}\gamma^\rho$, что приводит к амплитуде низкоэнергетического комптоновского рассеяния на нуклоне, которая следует из низкоэнергетических теорем теории поля.

Выполнено релятивистское обобщение подхода [6] для получения АКР на скалярных и спинорных частицах с учетом их поляризуемостей. Получены соответствующие тензоры энергии-импульса взаимодействия электромагнитного поля с адронами спина 1/2.

Показано, что разработанный ковариантный формализм Лагранжа для взаимодействия электромагнитного поля с адронами согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния как для спина 0, так и для спина 1/2.

На основе оригинальной методики воспроизведен известный результат для комбинации квазистатических поляризуемостей $\alpha_E^{q-s}+\beta_M^{q-s}$ в рамках КЭД и получено новое выражение для $\alpha_E^{q-s}-\beta_M^{q-s}$. Несомненным достоинством методики выделения «поляризуемостей», упомянутой в разделе 4, является ее относительная простота. Данный подход открывает более широкие возможности для изучения внутренней структуры нуклонов и может быть применен в рамках различных квантово-полевых теорий и моделей.

### Литература

1. Мороз, Л.Г. Матрица рассеяния с учетом взаимодействия Паули / Л.Г. Мороз, Ф.И. Федоров // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 39. – Вып. 2. – С. 293–303.

2. Крылов, Б.В. Спиновые частицы в поле плоской электромагнитной волны / Б.В. Крылов, А.Ф. Радюк, Ф.И. Федоров // Препринт АН БССР. Ин-т физики. – 1976. – № 113. – 60 с.

3. Максименко, Н.В. Поляризуемость и гирация элементарных частиц / Н.В. Максименко, Л.Г. Мороз // Вопросы атомной науки и техники. Серия: общая и ядерная физика. – 1979. – № 4(10). – С. 26–27.

4. Левчук, М.И. Гирация нуклона как одна из характеристик его электромагнитной структуры / М.И. Левчук, Л.Г. Мороз // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1985. – № 1. – С. 45–54.

5. Максименко, Н.В. Поляризуемость элементарных частиц с точки зрения феноменологической релятивистской электродинамики / Н.В. Максименко, А.Н. Сердюков, В.А. Пенязь // Сб. научных трудов ИФ АН БССР «Классическая и квантовая теория гравитации». – Минск, 1976. – С. 166–167.

6. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 315 с.

7. Богуш, А.А. Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск : Наука и техника, 1968. – 387 с.

8. Богуш, А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. – Минск : Наука и техника, 1987. – 359 с.

9. Бьёркен, Дж.Д. Релятивистская квантовая теория поля / Дж.Д. Бьёркен, Е.Д. Дрелл. – М. : Наука. – 1978. – Т. 1. – 295 с.

10. Де Гроот, С.Р. Электродинамика / С.Р. де Гроот, Л.Г. Сатторп. – М. : Наука, 1982. – 560 с.

11. Anandan, J.S. Classical and quantum interaction of the dipole / J.S. Anandan // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 1354–1357.

12. Полубаринов, И.В. Уравнения квантовой электродинамики / И.В. Полубаринов // ЭЧАЯ. – 2003. – Т. 32. – Вып. 3. – С. 738–811.

13. Петрунькин, В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12. – С. 692–753.

14. Tsai, W.-Y. Compton scattering. ii. differential cross-sections and left-right asymmetry / W.-Y. Tsai, L.L. Deraad, K.A. Milton // Phys. Rev. – 1972. – Vol. D6. – P. 1428–1438.

15. Denner, A. Complete O(alpha) QED corrections to polarized Compton scattering / A. Denner, S. Dittmaier // Nucl. Phys. – 1999. – Vol. B540. – P. 58–86.

16. Андреев, В.В. Электрические и магнитные квазистатические поляризуемости спинорной частицы в КЭД / В.В. Андреев, А.М. Сейтлиев // В сб. науч. трудов «Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности» / под ред. К.Ю. [и др.]. – Институт физики НАН Беларуси. – Вып. 7. – Минск : Институт физики НАН Беларуси, 2011. – С. 8–15.

17. Андреев, В.В. Инвариантные амплитуды комптоновского рассеяния в КЭД / В.В. Андреев, А.М. Сейтлиев // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 3. – С. 60–65.

18. Llanta, E. Polarizability sum rules in QED / E. Llanta, R. Tarrach // Phys. Lett. – 1978. – Vol. B78. – P. 586–589.

19. Holstein, B.R. Sum rules for magnetic moments and polarizabilities in QED and chiral effective-field theory / B.R. Holstein, V. Pascalutsa, M. Vanderhaeghen // Phys. Rev. – 2005. – Vol. D72, № 9. – P. 094014.

20. Baldin, A.M. Polarizability of nucleons / A.M. Baldin // Nucl. Phys. – 1960. – Vol. C18. – P. 310–317.

21. Review of Particle Physics / K. Nakamura [et al.] // Journal of Physics G. – 2010. – Vol. 37. – P. 075021.

22. Feinberg, G. General Theory of the van der Waals interaction: a model-independent approach / G. Feinberg, J. Sucher // Phys. Rev. A2. – 1970. – P. 2395–2415.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 10.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 530.1; 539.12*

# Релятивистское обобщение корнельского потенциала: пертурбативная часть

К.С. Бабич, В.В. Андреев

Получено ядро интегрального радиального уравнения движения релятивистской кварк-антикварковой системы на основе обобщения пертурбативной части корнельского потенциала.
**Ключевые слова:** корнельский потенциал, кварк, релятивистская гамильтонова динамика, интегральное уравнение, базисные спиноры.

The kernel of the integral radial equation of motion of a relativistic quark-antiquark system based on generalized perturbation of the Cornell potential is calculated in the article.
**Keywords:** Cornell potential, quark, relativistic Hamiltonian dynamics, integral equation, basis spinors.

### *Введение*

Основу вычислений энергетического спектра связанных систем составляет процедура получения потенциала взаимодействия частиц. При описании мезона как системы из кварка и антикварка широко используется корнельский потенциал. Эффективный центрально-симметричный потенциал взаимодействия между кварками с конституэнтными массами $m_q$ и $m_Q$ включает кулоновскую и запирающую части:

$$\hat{V}\left(r\right)=-\frac{4\alpha_s}{3r}+\sigma r+w\,,\;\; r=\left|\mathbf{r}\right|, \tag{1}$$

где $\sigma$, $w$ – параметры, которые связывают в квантовой с натяжением глюонной струны и кварковым конденсатом. Параметр $\alpha_s$ – константа сильной связи в квантовой хромодинамике (КХД). Такой потенциал удовлетворяет требованию конфайнмента кварков и был широко использован при расчетах спектров тяжелых мезонов [1], [2].

Однако для описания релятивистских эффектов, а также для систем с легкими кварками ($u, d$ и $s$) необходимо релятивистское обобщение потенциала (1). Такое обобщение зависит от модели, используемой для описания свойств релятивистских систем.

Построение пертурбативной части потенциала взаимодействия релятивистских частиц часто осуществляют с помощью амплитуды упругого рассеяния $T_{fi}$ частиц, входящих в систему [3]:

$$\hat{V}_{fi}=-\left(2\pi\right)^3\delta\left(\mathbf{P}'-\mathbf{P}\right)T_{\rm fi}. \tag{2}$$

В нашем случае это реакция упругого рассеяния кварка на антикварке

$$q_i(k_1,\lambda_{k_1})+\overline{q}_j(k_2,\lambda_{k_2})\to q_k(p_1,\lambda_{p_1})+\overline{q}_l(p_2,\lambda_{p_2})\,, \tag{3}$$

где импульс частиц и спиновые числа задаются между круглыми скобками, полный импульс системы $\mathbf{P}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2$, а индексы $i,j,k,l=1,2,3$ обозначают цветовые степени свободы кварков.

Наиболее общепринятой методикой нахождения явного вида потенциала является расчет спинорных структур амплитуды в терминах матриц Паули и импульсов, используя явный вид биспиноров [3]–[5]. Такое вычисление, как правило, делают приближенно, применяя разложение по скоростям $v/c$ частиц системы. Далее рассчитывают потенциал $V(\mathbf{r})$ в координатном пространстве как фурье-преобразование вышеупомянутой амплитуды рассеяния $T_{fi}$.

Еще одним важнейшим моментом при исследовании спектров является решение уравнения для системы частиц с полученным потенциалом. Как правило, такие уравнения представляют собой трехмерные интегро-дифференциальные уравнения, решение которых численными методами с необходимой для экспериментов точностью является сложной и громоздкой задачей. Поэтому для увеличения точности и сокращения временных затрат удобно свести трехмерные уравнения к одномерным путем интегрирования по угловым переменным. Итогом данной процедуры будет радиальное уравнение с ядром, зависящим только от модулей импульсов частиц.

Цель данной работы – найти пертурбативную часть ядра, которое входит в радиальное уравнение, без использования разложения по скоростям кварков, т. е. точно. Характерной особенностью наших вычислений является использование только импульсного пространства, поскольку в релятивистском случае оно возникает естественным образом.

***Система кварк-антикварк в РГД***

Описание связанных состояний проводится в рамках пуанкаре-ковариантной модели, основанной на релятивистской гамильтоновой динамике (РГД). Основным требованием РГД является условие сохранения пуанкаре инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц [6]–[8].

В случае системы двух фермионов с массами $m_q$ и $m_Q$ и, соответственно, с 4-импульсами $p_1=\left(\omega_{m_q}(p_1),\mathbf{p}_1\right)$ и $p_2=\left(\omega_{m_Q}(p_2),\mathbf{p}_2\right)$ и проекциями спина $\lambda_{1,2}$ волновая функция (ВФ) связанной системы спинорных кварков массы $M$ с полным угловым моментом $J$ и его проекцией $\mu$ удовлетворяет в РГД трехмерному интегральному уравнению [7]:

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\int<\mathbf{k},\sigma_1,\sigma_2\,||\,\hat{V}\,||\,\mathbf{k}',\lambda_1,\lambda_2>\Phi^{J\mu}_{\mathbf{P};\lambda_1\lambda_2}\left(\mathbf{k}'\right)d\mathbf{k}'=$$
$$=\left(M-\sqrt{\mathbf{k}^2+m_q^2}-\sqrt{\mathbf{k}^2+m_Q^2}\right)\Phi^{J\mu}_{\mathbf{P};\sigma_1\sigma_2}\left(\mathbf{k}\right) \quad (4)$$

с редуцированным матричным элементом:

$$<\mathbf{P},\mathbf{k},\sigma_1,\sigma_2\left|\hat{V}\right|\mathbf{P}',\mathbf{k}',\lambda_1,\lambda_2>=\delta\left(\mathbf{P}-\mathbf{P}'\right)<\mathbf{k},\sigma_1,\sigma_2\,||\,\hat{V}\,||\,\mathbf{k}',\lambda_1,\lambda_2>. \quad (5)$$

В (4) и (5) полный и относительный импульсы движения определены следующим образом:

$$\mathbf{P}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2\,, \quad (6)$$

$$\mathbf{k}=\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)+\frac{\mathbf{P}}{\widetilde{M}_0\left(\omega_{\widetilde{M}_0}(P)+\widetilde{M}_0\right)}\left(m_Q^2-m_q^2-\widetilde{M}_0\left[\omega_{m_Q}(p_2)-\omega_{m_q}(p_1)\right]\right), \quad (7)$$

где

$$\widetilde{M}_0=\sqrt{\left[\omega_{m_Q}(p_2)+\omega_{m_q}(p_1)\right]^2-\mathbf{P}^2}\,.$$

Радиальное уравнение для двухчастичного связанного состояния в системе центра инерции (с.ц.и.) ($\mathbf{P}=0$) имеет вид [7]

$$\sum_{\ell',S'}\int_0^\infty V^J_{\ell,S;\ell',S'}\left(k,k'\right)\Phi^{J\mu}_{\ell',S'}\left(k'\right)k'^2dk'=\left(M_\psi-M_0\right)\Phi^{J\mu}_{\ell,S}\left(k\right),\quad k=\left|\mathbf{k}\right|. \quad (8)$$

Поскольку при расчетах реакций с фермионами наиболее эффективным является использование спиральных состояний, а для описания связанных систем «хорошими» квантовыми числами являются орбитальный момент относительного движения $\ell$ и полный спиновой момент $S$, удобно перейти к спиральным состояниям в операторе $V^J_{\ell',S',\ell,S}\left(k',k\right)=<k',J,\mu,\ell',S'\,||\,\hat{V}\,||\,k,J,\mu,\ell,S>$, определяющим ядро уравнения (8). Такая процедура описана, в частности, в [9], и результатом ее является соотношение

$$V^J_{\ell',S';\ell,S}\left(k',k\right)=\frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{2J+1}\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2'}C^{1/2\ 1/2\ S}_{\lambda_1/2\ -\lambda_2/2\ \lambda}\,C^{\ell\,S\,J}_{0\,\lambda\,\lambda}\times$$
$$\times C^{1/2\ 1/2\ S'}_{\lambda_1'/2\ -\lambda_2'/2\ \lambda'}\,C^{\ell'\,S'\,J}_{0\,\lambda'\,\lambda'}\,V^J_{\lambda_1',\lambda_2';\lambda_1,\lambda_2}\left(k',k\right)\,, \quad (9)$$

где

$$V^{J}_{\lambda_1',\lambda_2';\lambda_1,\lambda_2}\left(k',k\right)=\int\limits_{-1}^{1} d\left(\cos\beta\right)\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\, D^{J}_{\lambda,\lambda'}\left(\phi,\beta,-\phi\right)\left\langle \mathbf{k}',\lambda_1',\lambda_2' \,||\, \hat{V} \,||\, \mathbf{k},\lambda_1,\lambda_2\right\rangle, \tag{10}$$

$$\cos\beta=\left(\mathbf{k}\mathbf{k}'\right)/\left(\left|\mathbf{k}\right|\left|\mathbf{k}'\right|\right)=\cos\theta_{k'}\cos\theta_k+\cos\left(\phi_{k'}-\phi_k\right)\sin\theta_{k'}\sin\theta_k\,, \tag{11}$$

$$\lambda=\lambda_1/2-\lambda_2/2\,,\ \lambda'=\lambda_1'/2-\lambda_2'/2\,. \tag{12}$$

Функция $D^{J}_{\mu\,\lambda}\left(\phi_k,\theta_k,-\phi_k\right)$ задает матрицы неприводимого представления группы $SU\left(2\right)$ индекса $J$. Явный вид матрицы $D$ определяется через сферические углы вектора относительного движения (7) $\hat{\mathbf{k}}=\left\{\sin\theta_k\cos\phi_k,\sin\theta_k\sin\phi_k,\cos\theta_k\right\}$. Величины вида $C^{1/2\ 1/2\ S}_{\lambda_1\ -\lambda_2\ \lambda}$ являются коэффициентами Клебша – Гордана.

Здесь и далее для величин $\lambda_{1,2}$ будем использовать *удвоенное значение спиральностей* кварков (фермионов), т. е. $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

***Потенциал***

Сделаем несколько замечаний по поводу построения потенциала. Расчет потенциала, как правило, делается в рамках теории возмущений, которая не всегда приемлема, если возникает необходимость учесть непертурбативные эффекты. На практике это приводит к тому, что выражение, полученное с помощью амплитуды рассеяния, модифицируется тем или иным способом. Такая ситуация имеет место при описании взаимодействия между кварками в адроне.

Важным является и то, что в квантовополевых теориях содержатся различные требования такие, как калибровочная инвариантность, перекрестная симметрия и др. Эти требования не всегда выполняются автоматически при использовании схемы получения потенциала, основанной на амплитуде рассеяния. Требование калибровочной инвариантности приводит к условию сохранения токов, определяющих потенциал. Как известно, построение таких сохраняющихся токов требует их модификации [10]–[14]. Кроме этого, процесс вычисления амплитуды, как следует из ее определения (2), должен дополняться процедурой продолжения за массовую поверхность, которая не является однозначной.

Поэтому потенциал, основанный на амплитуде рассеяния, практически всегда будет некоторым эффективным потенциалом. Такая особенность характерна для любой модели (см. [15]–[17]), описывающей релятивистские связанные системы, и модели, основанные на использовании РГД, не являются исключением. В данной работе потенциал будем строить с учетом требований КХД и конфайнмента кварков.

В первом ненулевом порядке теории возмущений основной вклад в амплитуду упругого рассеяния $T_{fi}$ кварка на антикварке определяется диаграммой одноглюонного обмена, изображенной на рисунке 1.

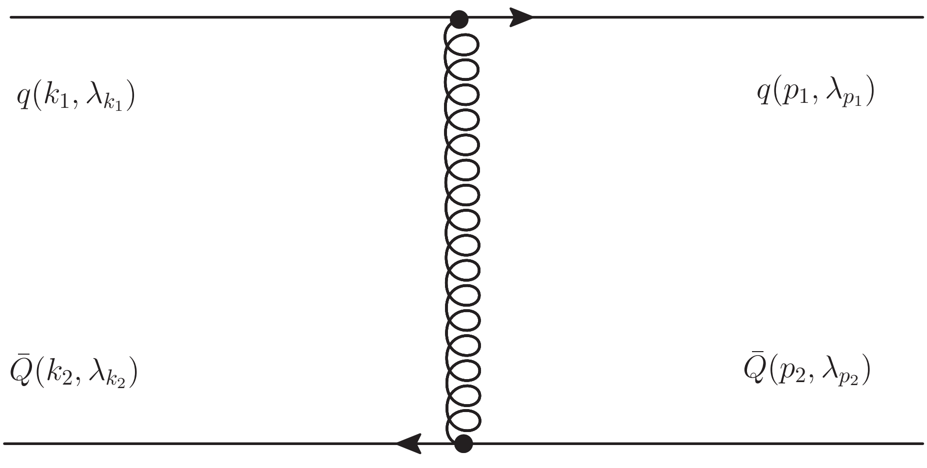



Рисунок 1 – Диаграмма одноглюонного обмена между кварком $q$ и антикварком $\bar{Q}$

Используя правила Фейнмана, находим, что пертурбативная часть межкваркового потенциала $V_{pert}$ в системе центра инерции дается выражением:

$$< \mathbf{k}^{'}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} \| \hat{V}_{pert} \| \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} > \equiv V^{(pert)}_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}\,\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}} \left( \mathbf{k}, \mathbf{k}^{'} \right) =$$

$$= (-1) \frac{N_{k,k^{'}}}{8\pi^2} \frac{4\alpha_s}{3q^2} j^{\mu}(1) D_{\mu\nu}(q) j^{\nu}(2), \tag{13}$$

$$j^{\mu}(1) = \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \gamma^{\mu} u_{\lambda_{k_1}}(k_1), \; j^{\mu}(2) = \bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2) \gamma^{\mu} \upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2), \tag{14}$$

где $q$ – импульс глюона: $q = \left\{ 0, \mathbf{k} - \mathbf{k}^{'} \right\}$, $N_{k,k^{'}} = 1 / \sqrt{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k) \omega_{m_q}(k^{'}) \omega_{m_Q}(k^{'})}$ и

$$k_1 = \left( \omega_{m_q}(k), \mathbf{k} \right), p_1 = \left( \omega_{m_q}(k^{'}), \mathbf{k}^{'} \right), \; k_2 = \left( \omega_{m_Q}(k), -\mathbf{k} \right), p_2 = \left( \omega_{m_Q}(k^{'}), -\mathbf{k}^{'} \right).$$

Функция $D_{\mu\nu}(q)$, связанная с пропагатором глюона,

$$D_{\mu\nu}(q) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right). \tag{15}$$

В отличие от упругого рассеяния в с.ц.и. при построении потенциала (13) необходимо учитывать виртуальность состояний кварков, что приводит к тому, что $|\mathbf{k}| \neq |\mathbf{k}^{'}|$ [4].

Перейдем к процедуре модификации $V_{pert}(\mathbf{k}, \mathbf{k}^{'})$. Требование сохранения тока (см. [7]) в кварк-глюонной вершине приводит к тому, что

$$q_{\mu} j^{\mu}(1) = q_{\mu} j^{\mu}(2) = 0. \tag{16}$$

Но при этом, как следует из определения (14), выполняются соотношения

$$q_{1,\mu} j^{\mu}(1) = 0; \quad q_{2,\mu} j^{\mu}(2) = 0, \tag{17}$$

где

$$q_1 = \left\{ \omega_{m_q}(k) - \omega_{m_q}(k^{'}), \mathbf{k}' - \mathbf{k} \right\}, \quad q_2 = \left\{ \omega_{m_Q}(k^{'}) - \omega_{m_Q}(k), \mathbf{k} - \mathbf{k}^{'} \right\}, \tag{18}$$

а не требование (16).

Выполнить требование калибровочной инвариантности (16) можно с помощью модификации токов $j^{\mu}(1,2)$, посредством их переопределения (см., например, [13]):

$$j^{\mu}(1,2) \to J^{\mu}(1,2) = \left( g^{\mu}_{\nu} - \frac{q^{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) j^{\nu}(1,2). \tag{19}$$

Кроме этого, учет эффектов поляризации вакуума за счет высших порядков КХД, как известно, приводит к зависимости константы сильного взаимодействия $\alpha_s$ от $q^2$, что свою очередь также модифицирует потенциал. В итоге потенциал, генерируемый диаграммой одноглюонного обмена, с учетом условия сохранения токов и бегущей константы КХД примет вид:

$$V^{(pert)}_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}\,\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}} \left( \mathbf{k}, \mathbf{k}^{'} \right) = (-1) \frac{N_{k,k^{'}}}{8\pi^2} \frac{4\alpha_s(q^2)}{3q^2} J^{\mu}(1) D_{\mu\nu}(q) J^{\nu}(2) =$$

$$= (-1) \frac{N_{k,k^{'}}}{8\pi^2} \frac{4\alpha_s(q^2)}{3q^2} \left[ j^{\mu}(1) j_{\mu}(2) - \frac{(qj(1))(qj(2))}{q^2} \right]. \tag{20}$$

Потенциал (20) в нерелятивистском пределе ($k^2, k^{'2} \ll m_q^2, m_Q^2$) в координатном пространстве переходит в кулоновский потенциал (см., например, [18])

$$\hat{V}_C(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r}. \tag{21}$$

Поэтому можно считать (20) релятивистским обобщением части корнельского потенциала (1).

Поскольку расчет вклада в ядро радиального уравнения (8) запирающей части будет проделан в другой работе, здесь ограничимся кратким рассмотрением. Получение запирающей составляющей межкваркового потенциала можно провести исходя из анализа лоренцструктуры потенциала и экспериментальных данных по спектру масс мезонов. Это приводит к тому, что непертурбативная часть межкваркового потенциала определяется как сумма векторной ($\sim K_V(q^2)$) и скалярной ($\sim K_S(q^2)$) запирающих частей [5]:

$$< \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} \| \hat{V}_{conf} \| \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} >=$$

$$= \frac{N_{k,k'}}{(2\pi)^3}[K_V(q^2)\bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1)\left(\gamma^\mu + \frac{i\kappa_q}{2m_q}(k_1 - p_1)_\nu \sigma^{\mu\nu}\right)u_{\lambda_{k_1}}(k_1)\times$$

$$\times\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\left(\gamma^\mu + \frac{i\kappa_Q}{2m_Q}(p_2 - k_2)_\nu \sigma^{\mu\nu}\right)\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2) + K_S(q^2)\bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1)u_{\lambda_{k_1}}(k_1)\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2)], \quad (22)$$

где

$$K_V\left(q^2\right) = -\frac{8\pi A_V}{\mathbf{q}^4} + \delta\left(\mathbf{k}' - \mathbf{k}\right)B_V\left(k\right), \; K_S\left(q^2\right) = -\frac{8\pi A_S}{\mathbf{q}^4} + \delta\left(\mathbf{k}' - \mathbf{k}\right)B_S\left(k\right). \quad (23)$$

Потенциал (22) в нерелятивистском пределе переходит в линейный запирающий потенциал $V\left(r\right) = \sigma r + w$ с параметрами

$$\sigma = \left(A_V - A_S\right), \quad w = \left(B_V - B_S\right). \quad (24)$$

Таким образом, можно сказать, что сумма $< \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} \| \hat{V}_{pert} + \hat{V}_{conf} \| \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} >$, определенная соотношениями (20) и (22), является релятивистским обобщением корнельского потенциала (1).

### *Пертурбативная часть ядра радиального уравнения*

Расчет $V^J_{\lambda_1',\lambda_2';\lambda_1,\lambda_2}\left(k',k\right)$ и, соответственно, $V^J_{\ell',S';\ell,S}\left(k',k\right)$, посредством которого определяется пертурбативная часть ядра интегрального уравнения (8), проведем в два этапа. Сначала вычислим спинорную часть потенциала $\left\langle \mathbf{k}', \lambda_1', \lambda_2' \| \hat{V} \| \mathbf{k}, \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle$, а затем проведем интегрирование по угловым переменным.

Спинорную часть потенциала (20) рассчитаем с помощью метода базисных спиноров [19], [20]. В данном подходе фермионная цепочка с оператором $Q$, который выражается через комбинацию матриц Дирака, может быть представлена в виде:

$$\bar{u}_{\lambda_p}\left(p, s_p\right)Q\, u_{\lambda_k}\left(k, s_k\right) = \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}\sum_{A,C=-1}^{1}\bar{u}_{\lambda_p}\left(p, s_p\right)u_{-\sigma}\left(b_{-C}\right)\times$$

$$\left\{\bar{u}_\sigma\left(b_C\right)Q\, u_{-\rho}\left(b_{-A}\right)\right\}\bar{u}_\rho\left(b_A\right)u_{\lambda_k}\left(k, s_k\right)$$

$$= \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}\sum_{A,C=-1}^{1}\bar{s}^{(C,1)}_{\lambda_p,\sigma}\left(p\right)\Gamma^{C,A}_{\sigma,\rho}\left[Q\right]s^{(A,1)}_{\rho,\lambda_k}\left(k\right), \left(\sigma,\rho,C,A = \pm 1\right), \quad (25)$$

где коэффициенты разложения по базисным спинорам ${}^{(A,D)}_{\rho,\lambda_k}\left(k\right)$ для спиральных состояний определены посредством соотношения ($D = 1$ соответствует фермиону, а $D = -1$ – антифермиону):

$$s^{(A,D)}_{\rho,\lambda_k}\left(k\right) = \lambda_k D^{*1/2}_{A\,\rho/2, D\lambda_k/2}\left(\phi_k, \theta_k, \phi_k\right)W_{m_k}\left(D\rho\lambda_k \times k\right) \quad (26)$$

с вспомогательной функцией

$$W_{m_k}\left(\pm k\right) = \sqrt{\omega_{m_k}\left(k\right) \pm k}\ . \quad (27)$$

Конструкция $\Gamma\left(Q\right)$ для произведения матриц Дирака $Q$

$$\Gamma^{C,A}_{\sigma,\rho}\left(Q\right) \equiv \bar{u}_\sigma\left(b_C\right)Q\, u_{-\rho}\left(b_{-A}\right) \quad (28)$$

вычисляется через 4-вектора $b_A$ и $n_\lambda$ $(A, C, \rho, \sigma = \pm 1)$ посредством соотношений [19], [20]:

$$\gamma^\mu u_\rho\left(b_A\right) = 2\, b_A^\mu\, u_{-\rho}\left(b_{-A}\right) - 2\, A\, n^\mu_{-A\times\rho}\, u_{-\rho}\left(b_A\right),$$

$$\gamma_5\, u_\rho\left(b_A\right) = \rho\, u_\rho\left(b_A\right), \; \bar{u}_\sigma\left(b_C\right)u_\rho\left(b_A\right) = \delta_{\sigma,-\rho}\,\delta_{C,-A}\,. \quad (29)$$

Векторы $b_A$ и $n_\lambda$ образуют изотропную тетраду пространства Минковского

$$b_A = 1/2\left(l_0 + A\,l_3\right), n_\lambda = 1/2\left(\lambda\,l_1 + i\,l_2\right),\ A,\lambda = \pm 1, \tag{30}$$

где 4-векторы $l_A\left(A = 0,1,2,3\right)$ определяют ортонормальный базис данного пространства с метрическим тензором $g$, т. е. $\left(l_A l_B\right) = g_{AB}$.

Подставляя коэффициенты разложения (26), получим произведение фермионных токов $\left(j(1)j(2)\right)$, входящих в (20), которое запишется в виде

$$\begin{aligned} &N_{k,k'}\,\bar{u}_{\lambda_{p_1}}\left(p_1\right)\gamma^\mu u_{\lambda_{k_1}}\left(k_1\right)\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}\left(k_2\right)\gamma_\mu \upsilon_{\lambda_{p_2}}\left(p_2\right) = \\ &= 2\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}\sqrt{\left(1-\sigma\lambda_{k_1}\upsilon_{k_1}\right)\left(1+\rho\lambda_{k_2}\upsilon_{k_2}\right)}\sqrt{\left(1-\sigma\lambda_{p_1}\upsilon_{p_1}\right)\left(1+\rho\lambda_{p_2}\upsilon_{p_2}\right)}\times \\ &\times[\delta_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}\rho\,\sigma D^{*1/2}_{-\lambda_{k_1}/2,\lambda_{p_1}/2}\left(\phi,\beta,-\phi\right)D^{*1/2}_{\lambda_{k_1}/2,-\lambda_{p_2}/2}\left(\phi,\beta,-\phi\right) + \\ &+\delta_{\sigma\lambda_{k_2},-\rho\lambda_{k_1}}D^{*1/2}_{\lambda_{k_1}/2,\lambda_{p_1}/2}\left(\phi,\beta,-\phi\right)D^{*1/2}_{-\lambda_{k_2}/2,-\lambda_{p_2}/2}\left(\phi,\beta,-\phi\right)], \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\upsilon_{k_1} = \frac{k}{\omega_{m_q}\left(k\right)},\ \upsilon_{p_1} = \frac{k'}{\omega_{m_q}\left(k'\right)},\ \upsilon_{k_2} = \frac{k}{\omega_{m_Q}\left(k\right)},\ \upsilon_{p_2} = \frac{k'}{\omega_{m_Q}\left(k'\right)}. \tag{32}$$

В дальнейшем, согласно (10), для интегрирования по угловым переменным будут необходимы спинорные структуры потенциала, умноженные на $D^J_{\lambda,\lambda'}\left(\phi,\beta,-\phi\right)$ с $\lambda = \left(\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}\right)/2$ и $\lambda' = \left(\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2}\right)/2$.

Представление спинорной части в форме (31) и разложение Клебша – Гордана для $D$ матриц

$$\begin{aligned} &D^J_{\lambda,\lambda'}\left(\phi,\beta,-\phi\right)D^{*s_1}_{\lambda_{k_1}/2,\lambda_{p_1}/2}\left(\phi,\beta,-\phi\right)D^{*s_2}_{-\lambda_{k_2}/2,-\lambda_{p_2}/2}\left(\phi,\beta,-\phi\right) = \\ &= \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2}\sum_{\ell=|J-s|}^{J+s}\frac{\left(2\ell+1\right)}{\left(2J+1\right)}C^{s_1\ \ \ s_2\ \ \ \ s}_{\lambda_{k_1}/2\ -\lambda_{k_2}/2\ \lambda}C^{s_1\ \ \ s_2\ \ \ \ s}_{\lambda_{p_1}/2\ -\lambda_{p_2}/2\ \lambda'}C^{\ell\,S\,J}_{0\,\lambda\,\lambda};C^{\ell\,S\,J}_{0\,\lambda'\,\lambda'}\ P_\ell\left(\cos\beta\right) \end{aligned} \tag{33}$$

позволяет записать подынтегральное выражение формулы (10) как линейную комбинацию полиномов Лежандра $P_\ell\left(\cos\beta\right)$ и таким образом разделить угловые переменные и переменные $k = \left|\mathbf{k}\right|, k' = \left|\mathbf{k}'\right|$. Такое построение существенно упрощает следующий этап интегрирования. Для сокращения записи рассчитанных структур введем вспомогательные функции

$$G^{J,s_1,s_2}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}\left[\Phi\left(x\right)\right] = \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2}\sum_{\ell=|J-s|}^{J+s}\frac{\left(2\ell+1\right)}{\left(2J+1\right)}C^{s_1\ \ \ s_2\ \ \ \ s}_{\lambda_{k_1}/2\ -\lambda_{k_2}/2\ \lambda}\,C^{s_1\ \ \ s_2\ \ \ \ s}_{\lambda_{p_1}/2\ -\lambda_{p_2}/2\ \lambda'}C^{\ell\,S\,J}_{0\,\lambda\,\lambda};C^{\ell\,S\,J}_{0\,\lambda'\,\lambda'}\ \ \Phi_\ell\left(x\right) \tag{34}$$

и

$$W_{\lambda,\rho}\left(k\right) = \sqrt{1+\lambda\,\upsilon_{k_1}}\sqrt{1+\rho\upsilon_{k_2}}\ , W_{\lambda,\rho}\left(k'\right) = \sqrt{1+\lambda\,\upsilon_{p_1}}\sqrt{1+\rho\upsilon_{p_2}}\ . \tag{35}$$

В итоге ядро радиального уравнения, определяемое первой частью потенциала (20), после тривиального интегрирования по углу $\phi$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} &V^{(I)}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2},\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}\left(k,k'\right) = 2\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k_1},\rho\lambda_{k_2}}\left(k\right)W_{-\sigma\lambda_{p_1},\rho\,\lambda_{p_2}}\left(k'\right)[\delta_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}\rho\,\sigma\times \\ &\times G^{J,1/2,1/2}_{-\lambda_{k_1},\lambda_{k_1};\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}_\ell\left(k,k'\right)\right] + \delta_{\sigma\lambda_{k_2},-\rho\lambda_{k_1}}G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}_\ell\left(k,k'\right)\right]]. \end{aligned} \tag{36}$$

Аналогичные вычисления для второй части потенциала (20)

$$V^{(II)}_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}\,\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}\left(\mathbf{k}',\mathbf{k}\right) = \frac{N_{k,k'}}{8\pi^2}\frac{4\alpha_s\left(q^2\right)}{3q^4}\left(q\,j_{\lambda_{p_1},\lambda_{k_1}}\left(p_1,k_1\right)\right)\left(qj_{\lambda_{p_2},\lambda_{k_2}}\left(p_2,k_2\right)\right) \tag{37}$$

приводят к вкладу вида

$$V^{(II)}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2},\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}\left(k,k'\right) = G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}\left[\tilde{U}\left(k',k\right)\right]\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k_1},\rho\lambda_{k_2}}\left(k\right)W_{-\sigma\lambda_{p_1},\rho\,\lambda_{p_2}}\left(k'\right). \tag{38}$$

Функции $\tilde{R}_\ell\left(k^{'},k\right)$ и $\tilde{U}_\ell\left(k^{'},k\right)$, входящие в уравнения (36) и (38), выражаются в виде одномерных интегралов:

$$\tilde{R}_\ell\left(k^{'},k\right) = (-\frac{4}{3}) \frac{\alpha_s\left(q^2\right)P_\ell\left(x\right)}{q^2}\,dx\,, \tag{39}$$

$$\tilde{U}_\ell\left(k^{'},k\right) = \varrho\left(k^{'},k\right)\int\limits_{-1}^{1} \frac{\alpha_s\left(q^2\right)P_\ell\left(x\right)}{q^4}\,dx\,. \tag{40}$$

Размерный множитель $\varrho_{12}\left(k^{'},k\right)$ в (40)

$$\varrho\left(k^{'},k\right) = \left(\omega_{m_q}\left(k^{'}\right) - \omega_{m_q}\left(k\right)\right)\left(\omega_{m_Q}\left(k\right) - \omega_{m_Q}\left(k^{'}\right)\right) \tag{41}$$

делает размерность функций $\tilde{R}_\ell$ и $\tilde{U}_\ell$ одинаковой. Для вычисления ядра уравнения (8) необходимо воспользоваться соотношением (9).

Соотношения (36) и (38)–(40) позволяют получить пертурбативную часть ядра радиального уравнения (8) как для синглетного, так и для триплетного состояний системы кварк-антикварк с произвольным угловым моментом $J$, четностью $(-1)^{\ell+1}$ с произвольными массами $m_q, m_Q$, если известно поведение бегущей константы связи в КХД – $\alpha_s\left(q^2\right)$.

***Заключение***

В работе получено ядро пертурбативной части для релятивистского радиального уравнения системы кварк-антикварк с произвольным полным моментом $J$, спиновым моментом $S = 0{,}1$ и неравными массами. В основе работе лежит точное (без разложений по скоростям фермионов системы) вычисление спинорных структур релятивистского обобщения корнельского потенциала, что в свою очередь приводит к необходимости решать одномерное интегральное уравнение, а не трехмерное.

В дальнейшем авторы планируют провести полный аналогичный расчет всех составных частей релятивистского корнельского потенциала, а также определить его параметры на основе современных экспериментальных данных.

**Литература**

1. Charmonium : comparison with experiment / E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita [et al.] // Phys. Rev. – 1980. – Vol. D21. – P. 203.

2. Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States / E. Eichten, T. Kinoshita, K. Gottfried [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1975. – Vol. 34. – P. 369–372.

3. Lucha, W. Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states / W. Lucha, H. Rupprecht, F.F. Schoberl // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.

4. Пилькун, Х. Физика релятивистских частиц / Х. Пилькун. – М. : Мир, 1983. – 542 с.

5. V.O. Galkin, A.Y. Mishurov, R.F. Faustov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1992. – Vol. 55. – P. 1207–1213.

6. Dirac, P.A.M. Forms of relativistic dynamics / P.A.M. Dirac // Rev. of Modern Phys. – 1949. – Vol. 21. – P. 392–399.

7. Keister, B. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B. Keister, W. Polyzou // «Advances in Nuclear Physics» Plenum. New York. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.

8. Крутов, А.Ф. Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40, 2. – С. 268–318.

9. Браун, Д.Е. Нуклон-нуклонные взаимодействия / Д.Е. Браун, А.Д. Джексон. – М. : Атомиздат, 1979. – 248 с.

10. Desplanques, B. Nucleon and pion form factors in different forms of relativistic quantum mechanics / B. Desplanques // Int. J. Mod. Phys. – 2005. – Vol. A20. – P. 1601–1606.

11. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.

12. Savkli, C. The role of interaction vertices in bound state calculations / C. Savkli, F. Gross, J. Tjon // Phys. Lett. – 2002. – Vol. B531. – P. 161–166.

13. Klink, W.H. Point-form electrodynamics and the construction of conserved current operators / W.H. Klink // Few Body Syst. – 2003. – Vol. 33. – P. 99–110.

14. Krutov, A.F. Isgur-Wise function in a relativistic model of constituent quarks / A.F. Krutov, O.I. Shro, V.E. Troitsky // Phys. Lett. – 2001. – Vol. B502. – P. 140–146.

15. Savkli, C. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism / C. Savkli, F. Gross // Phys. Rev. – 2001. – Vol. C63. – P. 035208.

16. Solving nonperturbative flow equations / J.A. Adams [et al.] // Mod. Phys. Lett. – 1995. – Vol. A10. – P. 2367–2380.

17. Gubankova, E. Flow equations for quark-gluon interactions in light-front QCD / E. Gubankova, C.-R. Ji, S.R. Cotanch // Phys. Rev. – 2000. – Vol. D62. – P. 125012.

18. Lucha, W. Effective Potential Models for Hadrons / W. Lucha, F.F. Schoberl [Electronic resource]. – 1995. – Mode of access : http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9601263. – Date of access : 14.01.2008.

19. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, 2. – С. 410–420.

20. Андреев, В.В. Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях / В.В. Андреев. – Гомель : УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2004. – 235 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 25.05.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 539.12*

# Численное решение стационарного уравнения Шредингера обобщенным методом Нумерова

Е.А. Дей

Предложен новый обобщенный вариант метода Нумерова для численного решения уравнения Шредингера, основанный на использовании конечно-разностных производных высших порядков точности. Выполнено численное исследование эффективности обобщенного метода для различных значений порядка аппроксимации при решении одномерного уравнения Шредингера с потенциалом гармонического осциллятора и радиального уравнения Шредингера с потенциалом Вудса-Саксона. Показано, что практический порядок сходимости результатов соответствует теоретическим оценкам. Сделан вывод о высокой эффективности обобщенного метода Нумерова высших порядков для численного решения задач квантовой механики.
**Ключевые слова:** уравнение Шредингера, метод Нумерова, потенциал гармонического осциллятора, потенциал Вудса-Саксона.

A new generalized variant of the Numerov method for numerical solution of the Schrödinger equation is proposed. Generalization is done by use of the high-order finite-difference approximations. The numerical investigation of the efficiency of this method is done for different values of the order of approximation for solution of the one-dimensional Schrödinger equation with oscillator potential and radial Schrödinger equation with Woods-Saxon potential. It is shown that practical convergence rate corresponds with theoretical evaluations. The high efficiency of the high-order generalized Numerov method for numerical solution of quantum mechanical problems is established at a conclusion.
**Keywords**: Schrödinger equation, Numerov method, oscillator potential, Woods-Saxon potential.

***Введение***

Уравнение Шредингера составляет теоретическую основу решения многих практически важных задач, число которых увеличивается как с развитием нанотехнологий, так и с разработкой новых теоретических моделей для описания взаимодействия квантовых частиц.

Для численного решения одномерного уравнения Шредингера [1], [2]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x) \qquad (1)$$

или радиального уравнения

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi}{dr^2}+V(r)\chi(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\chi(r)=E\chi(r), \quad \chi(r)=rR(r) \qquad (2)$$

разработан целый ряд методов, базирующихся на различных исходных принципах (вариационные, метод конечных элементов, метод граничных элементов, метод конечных разностей и т. д.) [2]–[7].

Одним из эффективных способов повышения точности конечно-разностных расчетов является метод Нумерова [2]–[5], использующий оригинальный прием учета правой части уравнения для повышения точности конечно-разностной аппроксимации дифференциального оператора. Стандартным в методе Нумерова является второй порядок точности для аппроксимации второй производной волновой функции в уравнении Шредингера и получение локальной погрешности четвертого порядка по шагу дискретизации вследствие учета правой части уравнения.

На практике метод Нумерова используется в двух различных формах: а) для реализации поочередного вычисления собственных значений методом пристрелки; б) для получения матричной задачи на собственные значения и приближенного расчета сразу большого числа энергетических уровней.

В данной работе матричный вариант метода Нумерова обобщен для произвольного четного порядка конечно-разностной аппроксимации второй производной. Получены формулы для коэффициентов метода произвольного четного порядка P, выполнены тестовые расчеты для порядков P = 2..12. Исследованы вычислительные свойства метода в зависимости от числа используемых точек и порядка, выполнено сравнение результатов с другими методами, сформулированы соответствующие выводы.

***Обобщенные соотношения Нумерова для решения одномерного уравнения Шредингера***

В последующих соотношениях будем использовать компактную форму записи уравнений (1), (2)

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + g(x)\psi(x) = \varepsilon\psi(x) \tag{3}$$

с граничными условиями $\psi(x\min) = 0;\ \psi(x\max) = 0$. Область изменения аргумента [*xmin; xmax*] разделим на N отрезков с шагом $h = (x\max - x\min)/N$ так, что $x_i = x\min + ih,\ i = 0..N$. Соответственно, в граничных точках $\psi_0 = \psi(x_0) = 0;\ \psi_N = \psi(x_N) = 0$.

Для численного решения будем использовать центральные конечно-разностные аппроксимации второй производной волновой функции, имеющие общий вид

$$\psi''(x_i) = \frac{1}{h^2}\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k\psi_{i+k} + O(h^p), \tag{4}$$

где $C_{-p/2}$, $C_{-p/2+1}, \dots C_{-1}$, $C_0$, $C_1, \dots C_{p/2-1}$, $C_{p/2}$ – неопределенные коэффициенты. Вследствие симметрии центральных конечно-разностных выражений справедливы равенства $C_{-p/2} = C_{p/2},\ \dots C_{-1} = C_1$.

Для получения численных значений коэффициентов используем разложение сеточных значений волновой функции, входящих в (4), в ряд Тейлора в форме Лагранжа. Для узлов $x_{i+k}$, $k = -p/2..p/2$ он имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_{i+k} &= \psi(x_i + kh) = \psi_i + kh\psi_i' + \frac{(kh)^2}{2!}\psi_i'' + \frac{(kh)^3}{3!}\psi_i^{(3)} + \frac{(kh)^4}{4!}\psi_i^{(4)} + \dots \\ &+ \frac{(kh)^p}{p!}\psi_i^{(p)} + \frac{(kh)^{p+1}}{p+1!}\psi_i^{(p+1)} + \frac{(kh)^{p+2}}{p+2!}\psi^{p+2}(\xi_k); \qquad \zeta_k \in [x_i; x_{i+k}].\end{aligned} \tag{5}$$

После суммирования всех уравнений (5), умноженных на коэффициент $C_k$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2}\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k\psi_{i+k} &= \frac{1}{h^2}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k\right)\psi_i + \frac{1}{h}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k\right)\psi_i' + \frac{1}{2!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^2\right)\psi_i'' + \frac{h}{3!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^3\right)\psi_i^{(3)} + \\ &+ \frac{h^2}{3!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^4\right)\psi_i^{(4)} + \dots + \frac{h^{p-2}}{p!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^p\right)\psi_i^{(p)} + \frac{h^{p-1}}{(p+1)!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^{p+1}\right)\psi_i^{(p+1)} + \\ &+ \frac{h^p}{(p+2)!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^{p+2}\right)\psi_i^{(p+2)} + \frac{h^{p+2}}{(p+4)!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^{p+4}\psi^{(p+4)}(\xi_k)\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Обозначив полученные суммы

$$\sigma_s = \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^s, \tag{7}$$

получаем систему (p+1) линейных уравнений для вычисления коэффициентов $C_k$

$$\sigma_0 = 0;\quad \sigma_1 = 0;\quad \sigma_2 = 2;\quad \sigma_3 = 0;\quad \sigma_4 = 0;\ \dots\ \sigma_p = 0. \tag{8}$$

В результате решения системы (8) приходим к явному выражению для конечно-разностной аппроксимации второй производной от волновой функции в $i$-м узле сетки с точностью $O(h^p)$

$$\left.\frac{d^2\psi}{dx^2}\right|_i = \frac{1}{h^2}\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k\psi_{i+k} - \frac{h^p}{(p+2)!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^{p+2}\right)\psi_i^{(p+2)} - \frac{h^{p+2}}{(p+4)!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^{p+4}\psi^{(p+4)}(\xi_k)\right). \quad (9)$$

Процедура Нумерова заключается в учете первого слагаемого погрешности путем выражения его через $\psi''$ на основе исходного уравнения. В данном случае это действие обобщается в виде производной $p$-го порядка от слагаемых в (3)

$$\psi_i^{(p+2)} = \frac{d^p}{dx^p}\psi_i'' = f(x)_i^{(p)}; \qquad f(x) = g(x)\psi(x) - \varepsilon\psi(x). \quad (10)$$

Основная идея выполняемого обобщения заключается в приближенном расчете $p$-й производной $\left.\frac{d^p f}{dx^p}\right|_i$ с помощью конечно-разностного выражения $\frac{1}{h^p}\sum_{k=-p/2}^{p/2} D_k f_{i+k}$, использующего те же узлы сетки, что и (4). Для неопределенных коэффициентов $D_k$ аналогичным образом получаем систему линейных уравнений

$$\tilde\sigma_0 = 0;\ \ \tilde\sigma_1 = 0;\ \ \tilde\sigma_2 = 0;\ \ \tilde\sigma_3 = 0;\ \ \ldots\ \ \tilde\sigma_p = p!, \quad (11)$$

где $\tilde\sigma_k$ обозначены такие же суммы, что и в (6), но для коэффициентов $D_k$.

Таким образом, для $p$-й производной в правой части (10) получаем

$$\left.\frac{d^p f}{dx^p}\right|_i = \frac{1}{h^p}\sum_{k=-p/2}^{p/2} D_k f_{i+k} - \frac{h^2}{(p+2)!}\left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} D_k k^{p+2}\right) f_i^{(p+2)}(\xi). \quad (12)$$

Выражая $\psi_i^{(p+2)}$ с помощью (10), (12) и подставляя в (9), получаем явный вид системы соотношений, выражающих аппроксимацию уравнения Шредингера по обобщенному методу Нумерова с порядком точности $p+2$

$$\sum_{k=-p/2}^{p/2}\left\{-\frac{C_k}{h^2} + \frac{\sigma_{p+2}}{(p+2)!}D_k g_{i+k} + \delta_{k,0}g_i\right\}\psi_{i+k} = \varepsilon\sum_{k=-p/2}^{p/2}\left\{\frac{\sigma_{p+2}}{(p+2)!}D_k + \delta_{k,0}\right\}\psi_{i+k} + O\left(h^{p+2}\right),$$
$$i = 1..N-1. \quad (13)$$

Записав систему уравнений (13) в матричной форме, получаем обобщенную матричную задачу на собственные значения

$$A\psi = \varepsilon B\psi. \quad (14)$$

Для случая $p=2$ (стандартный метод Нумерова) значения коэффициентов $C_{-1} = 1,\ C_0 = -2,\ C_1 = 1$, $D_{-1} = 1,\ \mathrm{D}_0 = -2,\ \mathrm{D}_1 = 1$, и система (13) принимает вид, совпадающий с известным [2], [3]

$$\left(-\frac{1}{h^2} + \frac{g_{i-1}}{12}\right)\psi_{i-1} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{10}{12}g_i\right)\psi_i + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{g_{i+1}}{12}\right)\psi_{i+1} = \varepsilon\left(\frac{1}{12}\psi_{i-1} + \frac{10}{12}\psi_i + \frac{1}{12}\psi_{i+1}\right). \quad (15)$$

Погрешность аппроксимации в данном случае имеет порядок $O\left(h^4\right)$.

Рассмотрим далее случай $p=4$. При этом на основании (8) и (11) получаем значения коэффициентов

$$D_{-2} = 1,\ \mathrm{D}_{-1} = -4,\ \mathrm{D}_0 = 6,\ \mathrm{D}_1 = -4,\ \mathrm{D}_2 = 1,$$
$$C_{-2} = -1/12,\ C_{-1} = 16/12,\ C_0 = -30/12,\ C_1 = 16/12,\ C_2 = -1/12,$$

и система сеточных уравнений (13) имеет вид

$$\left(\frac{1}{12h^2} - \frac{g_{i-2}}{90}\right)\psi_{i-2} + \left(-\frac{16}{12h^2} + \frac{4g_{i-1}}{90}\right)\psi_{i-1} + \left(\frac{30}{12h^2} + \frac{84}{90}g_i\right)\psi_i + \left(-\frac{16}{12h^2} + \frac{4g_{i+1}}{90}\right)\psi_{i+1} +$$
$$+\left(\frac{1}{12h^2} - \frac{g_{i+2}}{90}\right)\psi_{i+2} == \varepsilon\left(-\frac{1}{90}\psi_{i-2} + \frac{4}{90}\psi_{i-1} + \frac{84}{90}\psi_i + \frac{4}{90}\psi_{i+1} - \frac{1}{90}\psi_{i+2}\right), \quad i = 1..N-1. \quad (16)$$

Погрешность аппроксимации в этом случае имеет порядок $O\left(h^6\right)$.

Решая систему уравнений (8) с учетом (7), получаем значения коэффициентов для центральных конечно-разностных аппроксимаций второй производной (таблица 1).

Таблица 1 − Коэффициенты центральных конечно-разностных вторых производных

| P | $C_0$ | $C_{-1} = C_1$ | $C_{-2} = C_2$ | $C_{-3} = C_3$ | $C_{-4} = C_4$ | $C_{-5} = C_5$ | $C_{-6} = C_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | -2 | 1 | | | | | |
| 4 | -5/2 | 4/3 | -1/12 | | | | |
| 6 | -49/18 | 3/2 | -3/20 | 1/90 | | | |
| 8 | -205/72 | 8/5 | -1/5 | 8/315 | -1/560 | | |
| 10 | -5269/1800 | 5/3 | -5/21 | 5/126 | -5/1008 | 1/3150 | |
| 12 | -5369/1800 | 12/7 | -15/56 | 10/189 | -1/112 | 2/1925 | -1/16632 |

В результате решения системы уравнений (11) получаем значения коэффициентов для центральных конечно-разностных аппроксимаций Р-й производной (таблица 2).

Таблица 2 − Коэффициенты центральных конечно-разностных производных порядка Р

| P | $D_0$ | $D_{-1} = D_1$ | $D_{-2} = D_2$ | $D_{-3} = D_3$ | $D_{-4} = D_4$ | $D_{-5} = D_5$ | $D_{-6} = D_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | -2 | 1 | | | | | |
| 4 | 6 | -4 | 1 | | | | |
| 6 | -20 | 15 | -6 | 1 | | | |
| 8 | 70 | -56 | 28 | -8 | 1 | | |
| 10 | -252 | 210 | -120 | 45 | -10 | 1 | |
| 12 | 924 | -792 | 495 | -220 | 66 | -12 | 1 |

***Исследование практического порядка сходимости обобщенного метода Нумерова***

Программная реализация обобщенного метода Нумерова для Р = 2..12 выполнена в системе Matlab. В качестве первой тестовой задачи рассмотрено численное решение одномерного уравнения Шредингера с потенциалом гармонического осциллятора. В системе единиц $\hbar = 1$, m = 0.5 потенциал имеет вид $V(x, y) = x^2 / 2$, а точные собственные значения энергии $\varepsilon_k = k + 1/2$, $k = 0,1...$ Значения погрешности численного решения для первых 50 уровней приведены в таблице 3 для классического метода Нумерова (Р = 2) и обобщенного метода с порядком Р = 4..12 (xmin = –20, xmax = 20, h = 0.05).

Таблица 3 − Погрешность расчета уровней энергии одномерного гармонического осциллятора для классического метода Нумерова (Р = 2) и обобщенного метода с порядком Р = 4..12

| k | P = 2 | P = 4 | P = 6 | P = 8 | P = 10 | P = 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -7.8e-005 | -6.5e-008 | -9.1e-011 | 4.7e-013 | -7.7e-012 | 1.7e-010 |
| 5 | -4.8e-003 | -1.5e-005 | -6.2e-008 | -3.1e-010 | -9.5e-012 | 1.7e-010 |
| 10 | -1.7e-002 | -1.0e-004 | -7.6e-007 | -6.6e-009 | -7.1e-011 | 1.7e-010 |
| 15 | -3.8e-002 | -3.2e-004 | -3.5e-006 | -4.4e-008 | -6.2e-010 | 1.7e-010 |
| 20 | -6.6e-002 | -7.4e-004 | -1.1e-005 | -1.8e-007 | -3.2e-009 | 1.2e-010 |
| 25 | -1.0e-001 | -1.4e-003 | -2.5e-005 | -5.2e-007 | -1.1e-008 | -9.3e-011 |
| 30 | -1.5e-001 | -2.4e-003 | -5.2e-005 | -1.3e-006 | -3.3e-008 | -7.5e-010 |
| 35 | -2.0e-001 | -3.8e-003 | -9.5e-005 | -2.7e-006 | -8.2e-008 | -2.5e-009 |
| 40 | -2.6e-001 | -5.7e-003 | -1.6e-004 | -5.1e-006 | -1.8e-007 | -6.4e-009 |
| 45 | -3.3e-001 | -8.0e-003 | -2.5e-004 | -9.1e-006 | -3.6e-007 | -1.4e-008 |
| 50 | -4.0e-001 | -1.1e-002 | -3.8e-004 | -1.5e-005 | -6.6e-007 | -3.0e-008 |

По результатам трех последовательных расчетов для величины шага h, h/2, h/4 можно определить практический порядок сходимости численного метода $\widetilde{P}$

$$\widetilde{P} = \log_2\left(\frac{\varepsilon^{(h)} - \varepsilon^{(h/2)}}{\varepsilon^{(h/2)} - \varepsilon^{(h/4)}}\right). \quad (20)$$

Применяя эту формулу для оценки энергетических уровней гармонического осциллятора, получаем значения практического порядка сходимости $\widetilde{P}$ для различных значений порядка аппроксимации P второй производной в уравнении Шредингера (таблица 4).

Таблица 4 – Практический порядок сходимости обобщенного метода Нумерова при численном решении одномерного уравнения Шредингера с потенциалом гармонического осциллятора

| K | P = 2 | P = 4 | P = 6 | P = 8 | P = 10 | P = 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 2.01 | 3.95 | 5.88 | 7.79 | 9.67 | 11.53 |
| **5** | 2.03 | 3.94 | 5.86 | 7.75 | 9.62 | 11.46 |
| **10** | 2.04 | 3.93 | 5.83 | 7.71 | 9.56 | 11.39 |
| **15** | 2.05 | 3.91 | 5.79 | 7.66 | 9.50 | 11.31 |
| **20** | 2.07 | 3.90 | 5.76 | 7.60 | 9.43 | 11.23 |
| **25** | 2.09 | 3.89 | 5.72 | 7.55 | 9.35 | 11.14 |
| **30** | 2.11 | 3.88 | 5.69 | 7.49 | 9.28 | 11.04 |
| **35** | 2.13 | 3.88 | 5.66 | 7.44 | 9.20 | 10.94 |
| **40** | 2.15 | 3.87 | 5.63 | 7.38 | 9.12 | 10.84 |
| **45** | 2.18 | 3.87 | 5.60 | 7.33 | 9.04 | 10.74 |
| **50** | 2.20 | 3.88 | 5.58 | 7.28 | 8.97 | 10.64 |

Таким образом, практический порядок сходимости различных вариантов обобщенного метода Нумерова соответствует теоретическому значению.

Обобщенный метод Нумерова использован также для численного решения радиального уравнения Шредингера (2) с потенциалом Вудса-Саксона при $l = 0$

$$V(r) = \frac{a}{1+D} - \frac{acD}{(1+D)^2}; \quad D = e^{c(r-b)}; \quad a = -50, \quad b = 7, \quad c = 5/3. \quad (21)$$

При решении радиального уравнения в точке r = 0 учитывалось граничное условие точки симметрии $dR/dr = 0$. В таблице 5 приведены значения уровней энергии, вычисленные при h = 0.02, rmin = 0, rmax = 16, а также результаты работы [7], полученные с точностью $10^{-14}$.

Таблица 5 – Результаты численного решения радиального уравнения Шредингера с потенциалом Вудса-Саксона обобщенным методом Нумерова

| k | $E_k$ [7] | P = 4 | P = 8 | P = 12 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -49.457788728083 | -49.457788728498 | -49.457788728080 | -49.457788728089 |
| 1 | -48.148430420006 | -48.148430429375 | -48.148430420003 | -48.148430420012 |
| 2 | -46.290753954466 | -46.290754022469 | -46.290753954461 | -46.290753954471 |
| 3 | -43.968318431814 | -43.968318715399 | -43.968318431808 | -43.968318431818 |
| 4 | -41.232607772180 | -41.232608632046 | -41.232607772172 | -41.232607772183 |
| 5 | -38.122785096728 | -38.122787218323 | -38.122785096719 | -38.122785096730 |
| 6 | -34.672313205700 | -34.672317735643 | -34.672313205691 | -34.672313205700 |
| 7 | -30.912247487909 | -30.912256172372 | -30.912247487908 | -30.912247487909 |
| 8 | -26.873448916060 | -26.873464221039 | -26.873448916078 | -26.873448916058 |
| 9 | -22.588602257693 | -22.588627440000 | -22.588602257756 | -22.588602257691 |
| 10 | -18.094688282124 | -18.094727358668 | -18.094688282276 | -18.094688282121 |
| 11 | -13.436869040250 | -13.436926555547 | -13.436869040560 | -13.436869040246 |
| 12 | -8.676081670737 | -8.676162029944 | -8.676081671305 | -8.676081670731 |
| 13 | -3.908232481206 | -3.908338092841 | -3.908232482150 | -3.908232481201 |

Изменение десятичного логарифма погрешности (по сравнению с результатами [7]) для указанных в таблицах уровней k = 0..13 отражено на рисунке 1.

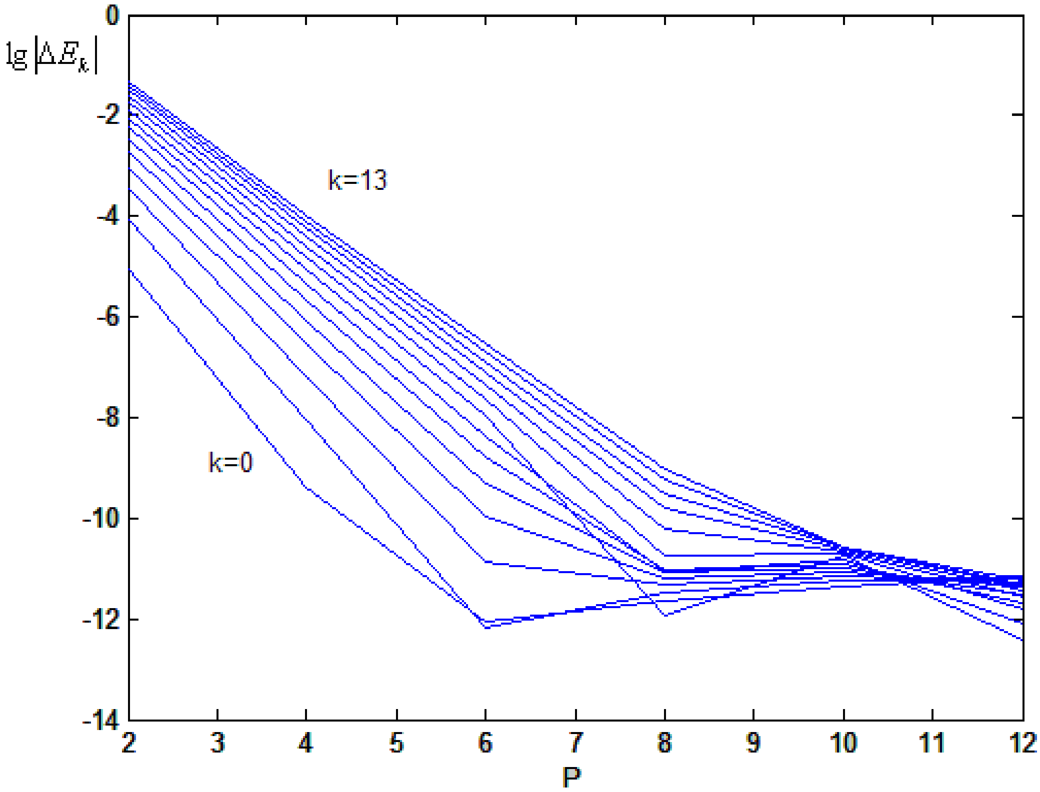



Рисунок 1 – График десятичного логарифма погрешности для энергетических уровней потенциала Вудса-Саксона при различных значениях порядка обобщенного метода Нумерова

Анализ графиков погрешности показывает, что при достижении определенного значения P реализуется точность результатов, сопоставимая с точностью компьютерного представления данных, так что дальнейшего улучшения результатов при увеличении P в обычной практике расчетов не происходит. Это отражает существенное повышение точности результатов, достигаемое при использовании обобщенного метода Нумерова.

***Заключение***

В работе предложен новый эффективный метод численного решения уравнения Шредингера для связанных состояний, основанный на обобщении метода Нумерова с использованием конечно-разностных производных высших порядков точности. Получены расчетные формулы для произвольного четного порядка P, вычислены коэффициенты для P = 2..12. Выполнено практическое исследование вычислительной эффективности метода на примере одномерного гармонического осциллятора и потенциала Вудса-Саксона.

Приведенные результаты подтверждают существенное уменьшение погрешности численного решения стационарного уравнения Шредингера при использовании обобщенного метода Нумерова.

## Литература

1. Давыдов, А.С. Квантовая механика / А.С. Давыдов. – 2-е изд. – М. : Наука, 1973. – 704 с.

2. González, J.L.M. Getting started with Numerov's method / J.L.M. González, D. Thompson // Computers in Physics. – 1997. – Vol. 11. – P. 514–515.

3. Vigo-Aguiar, J. A variable-step Numerov method for numerical solution of the Schrödinger equation / J. Vigo-Aguiar, H.A. Ramos // J. Math. Chem. – 2005. – Vol. 37. – P. 255–262.

4. Bougouffa, S. The study of atomic transitions by use of Numerov technique in schematic model / S. Bougouffa // Fizika A. – 2006. – Vol. 15. – P. 193–208.

5. Турчак, Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – 2-е изд. – М. : Физматлит, 2003. – 304 с.

6. Парлетт, Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Б. Парлетт – М.: Мир, 1983. – 384 с.

7. Ledoux, V. Solution of the Schrödinger equation by a high order perturbation method based on a linear reference potential / V. Ledoux, M. Rizea, L. Ixaru, G. Vanden Berghe, M. Van Daele // Comput. Phys. Commun. – 2006. – Vol. 175. – P. 424–439.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 15.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 530.1; 539.12*

# Расчет параметров изоэнтальпического охлаждения газов Редлиха – Квонга

Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

В статье в рамках феноменологического метода изучен процесс изоэнтальпического охлаждения газов, описываемых уравнением состояния Редлиха – Квонга. Рассчитаны критические параметры и определена приведенная форма уравнения. В терминах приведенных переменных определена точная форма кривой инверсии, вычислены ее параметры и выделена область положительности эффекта Джоуля – Томсона. Выполнено сравнение полученной теоретической кривой с обобщенной экспериментальной кривой инверсии и кривыми инверсии, следующими из других уравнений состояния.
**Ключевые слова:** реальный газ, критические параметры, уравнение Редлиха – Квонга, процесс Джоуля – Томсона, кривая инверсии, положительный эффект.

In the framework of phenomenological method the isoenthalpic cooling process in real gases describing by Redlich – Kwong equation of state is studied in the paper. Critical parameters are calculated and reduced equation form is found as well. The explicit form of inversion curve is built, its parameters are calculated and the area of the Joule – Tomson effect's positivity is highlighted in terms of reduced variables. A comparison of the obtained theoretical curve with the generalized experimental one and with inversion curves that follow from other equations of state is realized.
**Keywords:** real gas, critical parameters, Redlich – Kwong equation, Joule – Tomson process, inversion curve, positive effect.

### *Критическое состояние и параметры уравнения*

В термодинамике при теоретическом рассмотрении реальных газов и жидкостей широко используются полуэмпирические двухпараметрические уравнения состояния Ван-дер-Ваальса, Бертло, Дитеричи [1]–[3]. Для расчета конкретных характеристик применяется также уравнение состояния Редлиха – Квонга [4]. Его молярная форма имеет вид

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{\sqrt{T}V(V+b)}. \tag{1}$$

Важнейшим элементом при сопоставлении результатов, получаемых из двухпараметрических уравнений состояния, с экспериментальными данными является рассмотрение критического состояния вещества. На изотерме при критической температуре этому состоянию соответствует единственная (критическая) точка, являющаяся одновременно точкой схождения локальных экстремумов и точкой перегиба изотермы. Математически это означает

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{Tkp} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{Tkp} = 0. \tag{2}$$

Для уравнения (1) частные производные (2) равны

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{\sqrt{T}}\left[\frac{2V+b}{V^2(V+b)^2}\right] - \frac{RT}{(V-b)^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{2a}{\sqrt{T}}\left[\frac{3V^2+3Vb+b^2}{V^3(V+b)^3}\right]. \tag{3}$$

Соотношения (2)–(3) образуют систему уравнений, решение которой позволяет выразить характеристики критического состояния (критическую температуру $T_{kp}$, критическое давление $P_{kp}$ и критический объем $V_{kp}$) через параметры *a, b* уравнения состояния:

$$V_{kp} = \frac{b}{\xi}, \qquad T_{kp} = \left(\frac{3a\xi^2}{bR}\right)^{2/3}, \qquad P_{kp} = \left(\frac{Ra^2\xi^7}{3b^5}\right)^{1/3}. \tag{4}$$

В формулах (4) введена константа

$$\xi = \sqrt[3]{2} - 1 = 0{,}259921 \cong 0{,}260, \qquad 1 - \xi = \xi(\xi + 1)(\xi + 2).$$

На практике соотношения (4) часто используются для получения численных значений параметров уравнения состояния по экспериментальным значениям критических температур и давлений газов

$$a = \frac{1}{9\xi}\frac{R^2 T_{kp}^{5/2}}{P_{kp}} = 0{,}427480\frac{R^2 T_{kp}^{5/2}}{P_{kp}}, \qquad b = \frac{\xi}{3}\frac{RT_{kp}}{P_{kp}} = 0{,}086640\frac{RT_{kp}}{P_{kp}}. \tag{5}$$

Определив приведённые параметры

$$\widetilde{V} = \frac{V}{V_{kp}}, \qquad \widetilde{T} = \frac{T}{T_{kp}}, \qquad \widetilde{P} = \frac{P}{P_{kp}} \tag{6}$$

и подставив выражения (4), (6) в (1), получаем приведенный вид уравнения Редлиха – Квонга

$$\widetilde{P} = \frac{3\widetilde{T}}{\widetilde{V} - \xi} - \frac{1}{\xi \widetilde{T}^{1/2}\widetilde{V}\left(\widetilde{V} + \xi\right)}. \tag{7}$$

***Изоэнтальпическое охлаждение газов***

Применим уравнение Редлиха – Квонга для исследования подсистемно равновесного изоэнтальпического (*dW = 0*) процесса прокачки реального газа сквозь пористую перегородку [1]–[3], [5], [6]. При этом процессе наблюдается изменение температуры реального газа (эффект Джоуля – Томсона). Математически это изменение характеризуется коэффициентом Джоуля – Томсона

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_W = -\widetilde{\lambda}\,\frac{P_{кр}}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \tag{8}$$

где $C_P$ – изобарная теплоемкость системы, а новая безразмерная величина $\widetilde{\lambda}$ выражается в терминах приведенных переменных (6)

$$\widetilde{\lambda} = \widetilde{V}\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \widetilde{V}}\right)_{\widetilde{T}} + \widetilde{T}\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \widetilde{T}}\right)_{\widetilde{V}} \tag{9}$$

и имеет одинаковое значение для газов, находящихся в соответственных состояниях. В физических областях значений производная $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T < 0$, а теплоемкость $C_P > 0$, что означает одинаковость знаков $\mu_{JT}$ и $\widetilde{\lambda}$ в (8). При уменьшении давления ($d\widetilde{P} < 0$), следующем из условия протекания процесса Джоуля – Томсона, возможны два варианта изменения температуры в зависимости от знака параметра $\widetilde{\lambda}$:

$$\widetilde{\lambda} > 0 \to d\widetilde{T} < 0, \qquad \widetilde{\lambda} < 0 \to d\widetilde{T} > 0.$$

Первый вариант соответствует положительному эффекту Джоуля – Томсона (газ остывает), второй – отрицательному (газ нагревается). Условием же $\widetilde{\lambda} = 0$ задаются точки инверсии, в которых изменяется знак эффекта, поэтому данному условию можно сопоставить температуру инверсии $T_i$ и получить выражение для ее расчета.

Найдем $\widetilde{\lambda}$ на основе определения (9) и уравнения (7)

$$\widetilde{\lambda} = \frac{5\widetilde{V} + 3\xi}{2\xi \widetilde{T}^{1/2}\widetilde{V}\left(\widetilde{V} + \xi\right)^2} - \frac{3\xi \widetilde{T}}{\left(\widetilde{V} - \xi\right)^2}. \tag{10}$$

Далее с учетом (4), (6) получим выражение для приведённой температуры инверсии

$$\widetilde{T}_i\left(\widetilde{V}\right) = \left[\frac{\left(5\widetilde{V} + 3\xi\right)\left(\widetilde{V} - \xi\right)^2}{6\xi^2 \widetilde{V}\left(\widetilde{V} + \xi\right)^2}\right]^{2/3}. \tag{11}$$

Последующее использование уравнения в приведенных переменных (7) и соотношения (11) позволяет выразить давление в точке инверсии через значение объема газа

$$\tilde{P}_i\left(\tilde{V}\right)=\frac{3^{1/3}\left(5\tilde{V}^2-4\xi V-5\xi^2\right)}{\left[4\xi^4\tilde{V}^2\left(5\tilde{V}+3\xi\right)\left(\tilde{V}+\xi\right)^4\left(\tilde{V}-\xi\right)^2\right]^{1/3}}. \tag{12}$$

Полученные новые соотношения (11), (12) для точек инверсии, однако, не позволяют явно выразить температуру инверсии через давление в виде аналитического выражения кривой инверсии $\tilde{P}_i(\tilde{T})$. Но на их основе можно реализовать аналитическое, численное и графическое исследование ее поведения по переменной $\tilde{V}$, причем наиболее удобным как раз и является использование уравнений, записанных в приведенной форме. В этом случае результат имеет общий для всех реальных газов характер, и численное решение достаточно выполнить только один раз.

Рассмотрим предельное поведение параметров инверсионной кривой при условии $\tilde{V}\to\infty$. В этом случае получаем значения максимально возможной температуры инверсии (правая крайняя точка искомой кривой)

$$\tilde{P}_R=\lim_{\tilde{V}\to\infty}\tilde{P}_i(\tilde{V})=0, \qquad \tilde{T}_R=\lim_{\tilde{V}\to\infty}\tilde{T}_i(\tilde{V})=\left(\frac{5}{6\xi^2}\right)^{2/3}=5.33856. \tag{13}$$

Для расчета значения минимальной температуры инверсии $\tilde{T}_L$ (крайняя левая точка искомой кривой) найдем вначале значение приведенного объема, при котором величина приведенного давления равна нулю $\tilde{P}(\tilde{V}_L)=0$. На основании (12) получаем

$$\tilde{V}_L=\frac{\xi}{5}\left(2+\sqrt{29}\right)=0.383912, \tag{14}$$

тогда с учетом (7) этому состоянию соответствует значение температуры

$$\tilde{T}_L=\tilde{T}(\tilde{V}_L)=\left(\frac{\tilde{V}_L-\xi}{3\xi\tilde{V}_L(\tilde{V}_L+\xi)}\right)^{2/3}=\left[\frac{5\left(\sqrt{29}-3\right)}{3\xi^2\left(\sqrt{29}+2\right)\left(\sqrt{29}+7\right)}\right]^{2/3}=0.745215. \tag{15}$$

График параметрических зависимостей $\tilde{P}_i(\tilde{V})$, $\tilde{T}_i(\tilde{V})$ в безразмерных (приведенных) координатах и вычисленные параметры представлены на рисунке 1.

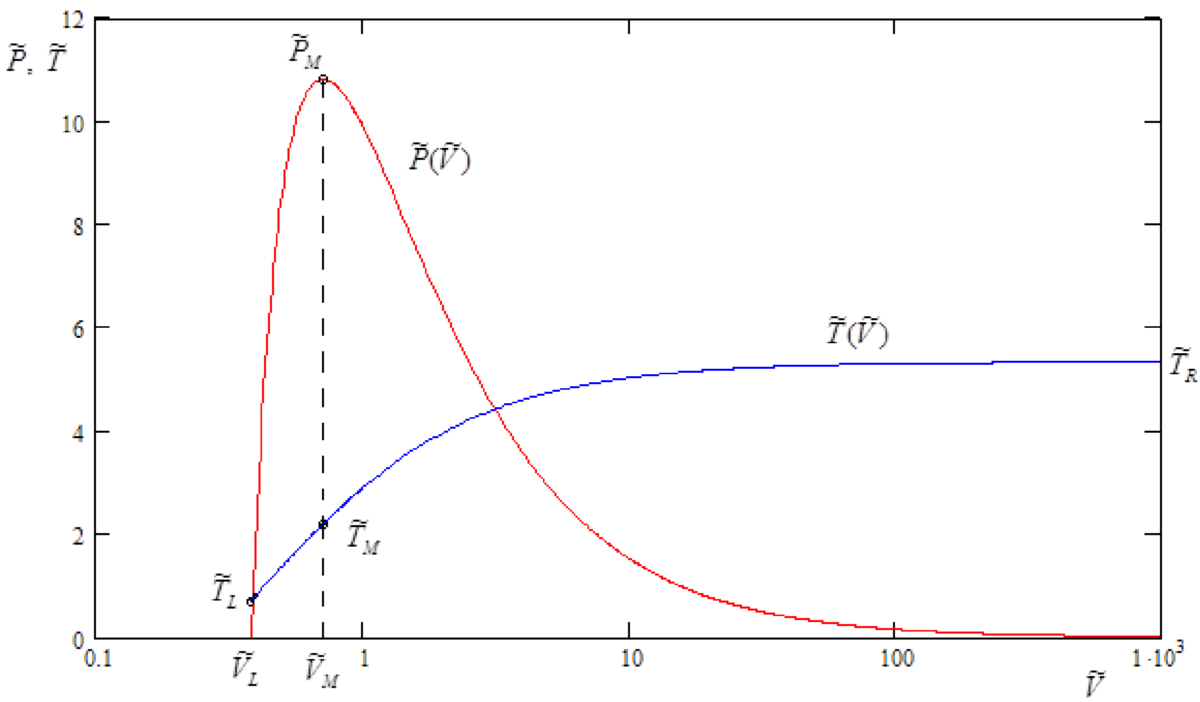



Рисунок 1 – Графики $\tilde{P}_i(\tilde{V})$, $\tilde{T}_i(\tilde{V})$ в приведенных координатах

Для вычисления параметров точки максимума $\widetilde{P}_M$, $\widetilde{T}_M$ инверсионной кривой $\widetilde{P}(\widetilde{T})$ нами было использовано соотношение Максвелла, записанное в приведенных переменных $\left(\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial\widetilde{T}}\right)_{\widetilde{V}} = -\left(\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial\widetilde{V}}\right)_{\widetilde{T}}\left[\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\widetilde{V}}\right)_{\widetilde{P}}\right]^{-1}$, на основании которого положение максимума определяется не только условием $\left(\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial\widetilde{T}}\right)_{\widetilde{V}} = 0$, но и условием $\left(\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial\widetilde{V}}\right)_{\widetilde{T}} = 0$. Выполняя дифференцирование соотношения (12), получаем нелинейное уравнение, определяющее значение приведенного объема, соответствующего состоянию инверсии с максимальным приведенным давлением

$$75\widetilde{V}^5 - 140\xi\widetilde{V}^4 - 200\xi^2\widetilde{V}^3 + 14\xi^3\widetilde{V}^2 + 93\xi^4\widetilde{V} + 30\xi^5 = 0. \quad (16)$$

Единственный корень уравнения (16) в области $\widetilde{V} > \widetilde{V}_L$ равен $\widetilde{V}_M = 0.713764$. Далее на основании формул (11), (12) вычисляем параметры точки максимума инверсионной кривой в приведенных координатах $\widetilde{P}_M = 10.817733$, $\widetilde{T}_M = 2.201010$.

Для построения графика кривой инверсии значение приведенного объема $\widetilde{V}$ изменялось с малым шагом от значения $\widetilde{V} = \widetilde{V}_L$ до значений порядка $\widetilde{V} = 10^3$, по формулам (11), (12) вычислялись приведенные температура и давление состояния инверсии, и полученные точки отображались в плоскости $\left(\widetilde{P}, \widetilde{T}\right)$ (см. рисунок 2).

В работе [7] на основе обработки большого числа экспериментов методом наименьших квадратов и с учетом принципа соответственных состояний построена обобщенная экспериментальная кривая инверсии в приведенных координатах для веществ с малым фактором ацентричности (аргона, метана, азота, кислорода, ксенона, криптона, окиси углерода) вида:

$$\widetilde{P} = \sum_{k=0}^{6} \beta_k \widetilde{T}^k . \quad (17)$$

Параметры обобщенной кривой: $\beta_0 = -32.5209374$, $\beta_1 = 65.6922312$, $\beta_2 = -39.738430$, $\beta_3 = 12.9300299$, $\beta_4 = -2.46176904$, $\beta_5 = 0.25378553$, $\beta_6 = -0.0109865$.

Исследуемая в данной работе инверсионная кривая для уравнения Редлиха – Квонга, а также инверсионные кривые для уравнений Ван-дер-Ваальса, Бертло и Дитеричи-I, построенные в приведенных координатах в работе [8], сопоставлены с обобщенной экспериментальной кривой инверсии (17) на рисунке 2. Каждая кривая ограничивает свою область положительности эффекта сверху, что, например, для уравнения Редлиха – Квонга строго следует из (10).

Наилучшее согласие с экспериментом наблюдается у теоретической кривой инверсии, полученной на основе уравнения Редлиха – Квонга. Можно также отметить практически правильное поведение кривой инверсии Бертло в низкотемпературной области вплоть до значения приведенного давления $\widetilde{P} \cong 8$. Поведение же инверсионных кривых Ван-дер-Ваальса и Дитеричи-I существенно отличается от экспериментальных данных [7] в высокотемпературной области.

Таким образом, уравнение Редлиха – Квонга позволяет получить теоретическую кривую инверсии, в наибольшей степени соответствующую экспериментальным данным. Это позволяет использовать полученные формулы (11)–(16) при приближенном расчете коэффициента Джоуля – Томсона для веществ, обладающих малым фактором ацентричности, в случае отсутствия для них экспериментальных данных.

Полученные в работе результаты позволяют также сделать вывод о том, что исследование кривой инверсии для конкретного уравнения состояния реального газа является одним из достаточно строгих критериев его применимости. Кроме того, проведенное рассмотрение свойств уравнения Редлиха – Квонга позволяет сделать вывод о необходимости его изучения в курсе «Термодинамика и статистическая физика».

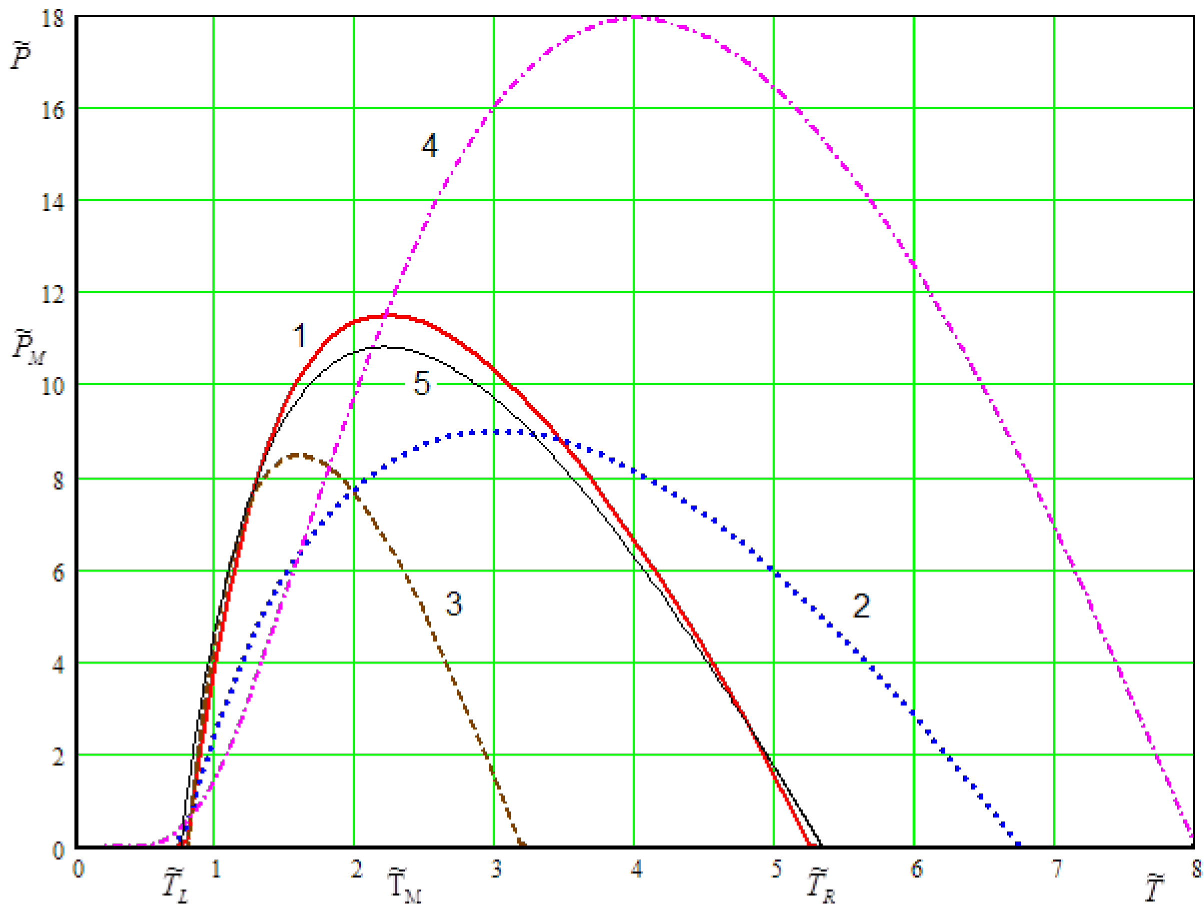



Рисунок 2 – Экспериментальная кривая (1) и кривые инверсии для уравнений состояния Ван-дер-Ваальса (2), Бертло (3), Дитеричи-I (4) и Редлиха-Квонга (5)

## Литература


1. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – 2-е изд. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.
2. Базаров, И.П. Термодинамика / И.П. Базаров. – 4-е изд. – М. : Высш. шк., 1991. – 376 с.
3. Кириченко, П.А. Термодинамика, статистическая и молекулярная физика / П.А. Кириченко. – 3-е изд. – М. : Физматкнига, 2005. – 176 с.
4. Баталин, О.Ю. Фазовые равновесия в системах природных углеводородов / О.Ю. Баталин, А.И. Брусиловский, М.Ю. Захаров. – М. : Недра, 1992. – 272 с.
5. Castillo, M.G. Three-Parameter Corresponding-States Correlations for Joule-Thomson Inversion Curves / M.G. Castillo // Int. J. Thermophysics. – 1999. – Vol. 20, № 6. – P. 1737–1751.
6. Abbas, R. Joule-Thomson coefficients and Joule-Thomson inversion curves for pure compounds and binary systems predicted with the group contribution equation of state VTPR / R. Abbas // Fluid Phase Equilibria. – 2011. – Vol. 306. – P. 181–189.
7. Hendricks, R.C. Joule-Thomson Inversion Curves and Related Coefficients for Several Simple Fluids / R.C. Hendricks, I.C. Peller, A.K. Baron // NASA Technical Note TN D-6807. – NASA, 1972. – 59 p.
8. Дей, Е.А. Кривые инверсии процесса Джоуля – Томсона в приведенных переменных / Е.А. Дей, Г.Ю. Тюменков, П.В. Астахов // Чрезвычайные ситуации: образование и наука. – 2012. – Т. 7, № 1. – С. 101–105.


Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 02.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 521.1; 524.3*

# Моделирование периодических орбит в общей задаче трёх тел небесной механики

В.В. Диндиков, Г.Ю. Тюменков

В работе в рамках общей задачи трёх тел небесной механики решаются динамические уравнения для нерелятивистской системы с ньютоновским потенциалом и моделируются две новые периодические орбиты. Используются принцип наименьшего действия, Фурье-анализ и возможности компьютерной симуляции пакета Mathematica.
**Ключевые слова:** система трех тел, гравитационное взаимодействие, функционал действия, периодическая орбита, ряд Фурье, компьютерное моделирование.

In the paper in framework of the general three-body problem of celestial mechanics the dynamic equations for nonrelativistic system with Newtonian potential are solved and two new periodic orbits are simulated. The principle of the least action, Fourier analysis and Mathematica possibilities of computer simulation were used.
**Keywords:** three-body system, gravitational interaction, action functional, periodic orbit, Fourier series, computer simulation.

Известно, что общая задача трёх тел небесной механики до настоящего времени не имеет точных аналитических решений, поэтому часто изучаются её частные случаи, например, ограниченная задача трех тел. Особый интерес в рамках общей задачи представляет поиск периодических орбит, то есть совокупностей замкнутых траекторий, по которым перемещаются компоненты системы при условии равенства периодов обращения каждой. Первые точные периодические решения для тел равной массы были найдены в своё время Эйлером и Лагранжем. Последующие же продуктивные исследования в данном направлении стали возможными только с развитием вычислительных технологий в XX веке.

Пуанкаре для нахождения периодических орбит предложил использовать принцип наименьшего действия. В дальнейшем же независимо от него эта идея была продуктивно развита Муром [1], рассмотревшим обобщенный потенциал взаимодействия между телами вида $V \propto r^{\alpha}$, который при $\alpha = -1$ соответствует гравитационному потенциалу Ньютона. Им было показано, что периодические орбиты действительно соответствуют минимуму функционала действия

$$S = \int_0^T (K - V)\,d\tau\,, \tag{1}$$

где $K$ – кинетическая энергия, а $V$ – потенциальная энергия системы $N$ тел в системе центра инерции, $T$ – общий период обращения компонентов системы, $\tau \in (0,\ T)$. Традиционно для упрощения дальнейшего анализа в функционале (1) используют угловую переменную $t = (2\pi/T)\cdot\tau$, меняющуюся в пределах $t \in (0,\ 2\pi)$. Это удобно, например, при использовании элементов Фурье-анализа, что характерно для данной работы и что без потери качества приводит к переопределению функционала вида $A = (2\pi/T)S$.

В данной работе в рамках общей задачи трёх тел небесной механики на основе использования принципа наименьшего действия, элементов Фурье, анализа и возможностей компьютерной симуляции с использование пакета Mathematica решаются динамические уравнения для нерелятивистской системы трёх тел с ньютоновским потенциалом и моделируются новые периодические орбиты. Для проверки достоверности используемого алгоритма предварительно на его основе моделируются ранее хорошо известные классические периодические орбиты.

В общем случае для системы $n$ тел с массами $m_j$ обозначим $z_j$ координаты положения $j$-го тела в момент времени $\tau$ с соответствующим значением аргумента $t$. Тогда для $n$ тел с траекториями $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$ функционал действия $A$ запишется в виде [2]:

$$A = \int_0^{2\pi} \left( \sum_j \frac{m_j}{2} \left|\dot{z}_j\right|^2 + \sum_{j,k;k<j} \frac{m_j m_k}{\left|z_j - z_k\right|} \right) dt\,. \tag{2}$$

Далее используем разложение траекторий в ряды Фурье

$$z_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt}, \quad \gamma_k \in X. \tag{3}$$

Задачу трёх тел рационально полагать плоской, поэтому траектории для такой задачи будут двухкомпонентными $z_j(t) = \{x_j(t), y_j(t)\}$ с $\gamma_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$, представимыми, следуя (3), в виде рядов

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^c \cos(kt) + a_k^s \sin(kt)) \\ y(t) &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^c \cos(kt) + b_k^s \sin(kt)), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$a_0 = \alpha_0, \quad a_k^c = \alpha_k + \alpha_{-k}, \quad a_k^s = \beta_{-k} - \beta_k,$$
$$b_0 = \beta_0, \quad b_k^c = \beta_k + \beta_{-k}, \quad b_k^s = \alpha_k - \alpha_{-k}.$$

Вначале рассмотрим плоское движение трёх тел равной массы. Так как функционал действия в пространстве параметров $a_0, a_k^c, a_k^s, b_0, b_k^c, b_k^s$ имеет множество локальных минимумов, то должно существовать множество периодических орбит, среди которых присутствуют как известные, так и новые, нахождение которых определяется уровнем качества и точностью метода исследования.

Моделирование периодических орбит и определение областей их устойчивости осуществляется путем численного интегрирования динамических уравнений [3]–[4] для системы трёх тел

$$m_j \ddot{z}_j^\alpha = \sum_{k:k\neq j} m_j m_k \frac{z_j^\alpha - z_k^\alpha}{\left|z_j - z_k\right|^3}; \qquad j = 1, 2, 3, \qquad \alpha = 1, 2; \tag{5}$$

с учетом минимизации функционала (2), использованием разложений (4) и заданием начальных положений компонентов системы.

Для нахождения минимумов функционала действия используем встроенный в среду Mathematica инструмент *Findminimum,* который находит локальные минимумы в зависимости от начальных значений параметров. Поэтому найденные решения сильно зависят от выбора последних, что в нашем случае производилось случайным образом. Стандартной точности вычисления для нашего случая было недостаточно, поэтому параметр *MaxIterations* был увеличен до значения 100. Этот уровень точности потребовал учёта семи слагаемых рядов Фурье, что довело число параметров до 90. Дальнейшее увеличение точности приводит к резкому линейному росту расхода оперативной памяти компьютера. После нахождения локального минимума мы имеем новый набор значений параметров, который записывается в файл для возможности их дальнейшего исследования и построения орбит.

В рамках изложенной выше методики для системы трёх тел одинаковой массы были построены две ранее известные, тестовые для нас орбиты – «восьмерка» и орбита Хилла (рисунок 1).

Это подтвердило корректность метода исследования. Также на орбитах указаны определяющие их форму начальные положения тел. Следует заметить, что орбита «восьмерка» относится к интересному классу, называемому «хореографии». Этот класс предполагает совпадение орбит всех компонентов системы.

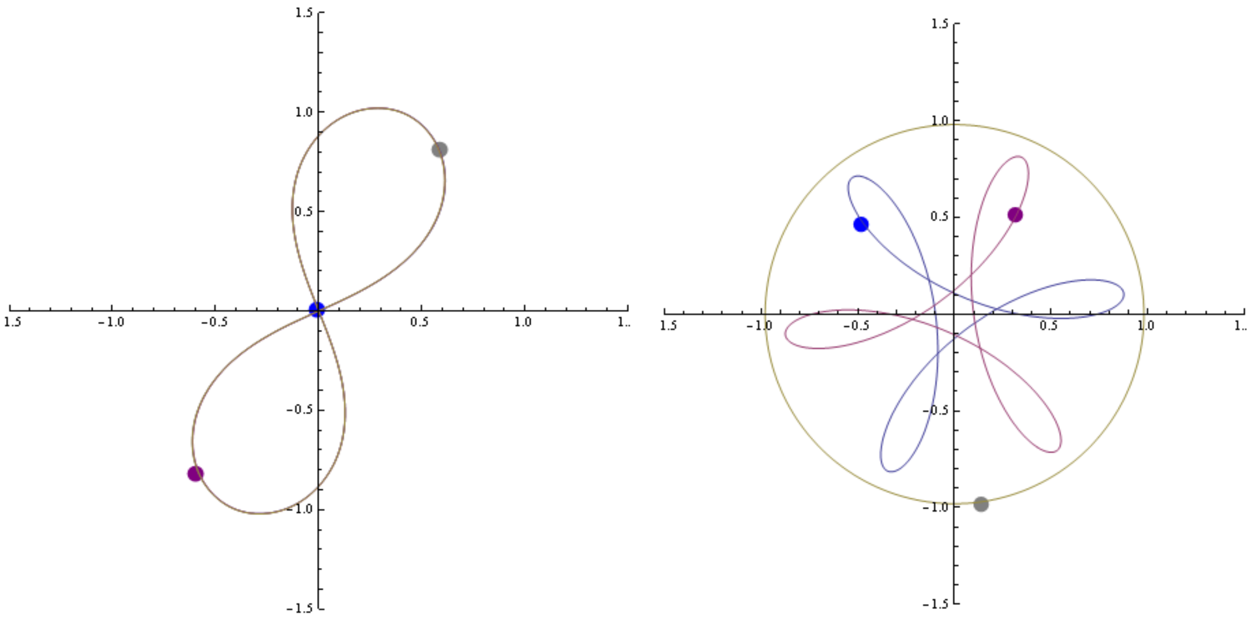


Рисунок 1 – Орбита «восьмерка» (слева) и орбита Хилла (справа)

Если коснуться проблемы устойчивости периодических орбит, то её можно продемонстрировать работой [1] на примере «восьмерки» (рисунок 2). В ней показано, что даже на уровне использования десяти слагаемых ряда Фурье существует область устойчивого движения по орбитам, очень близким к «восьмерке» на некотором интервале времени.

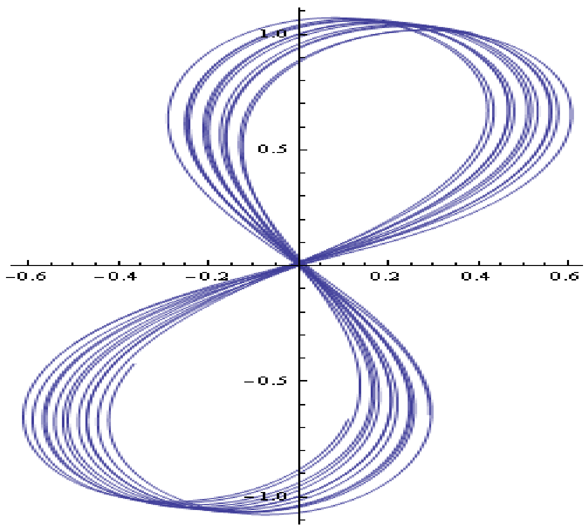


Рисунок 2 – Область устойчивого движения по орбитам, близким к «восьмерке»

Далее в рамках проверенной методики была найдена новая периодическая орбита (в дальнейшем – Новая I) для трёх тел равной массы, представленная на рисунке 3. Два тела двигаются по симметричным замкнутым кривым, а третье тело совершает движение вдоль вытянутой восьмерки, очень близкой к горизонтальной оси. Концы этой восьмерки практически «острые», так как тело в моменты нахождения в крайней точке резко приобретает нулевую скорость. В начальный момент времени все три тела расположены на одной прямой, причем скорость третьего тела равна нулю, а второе и первое тело имеют одинаковые по модулю, но противоположные по направлению скорости, перпендикулярные этой прямой. Через промежуток времени $\tau = T/4$ тела снова выстраиваются в линию, причем третье тело в этот момент времени находится в центре масс системы.

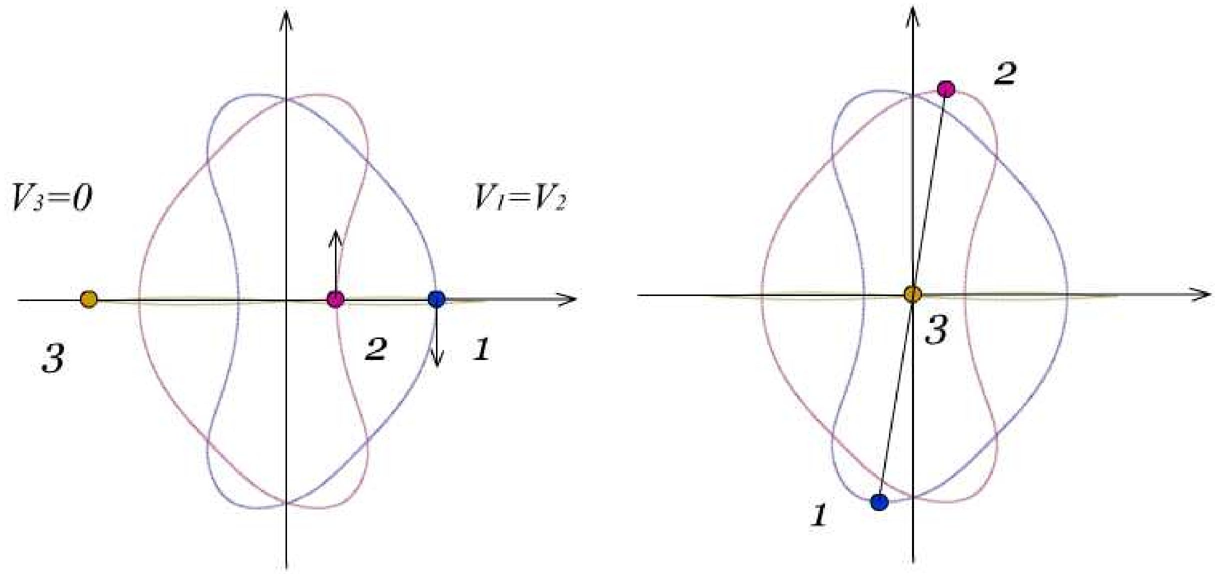



Рисунок 3 – Положения тел на орбите Новая I при $\tau = 0$ (слева) и $\tau = T/4$ (справа)

Часто для анализа и дополнительной визуализации орбит используются диаграммы, изображающие «косы» из *n* «прядей», которые строятся в трехмерном пространстве при движении *n* тел на плоскости [5]. Диаграммы показывают на протяжении одного периода для каждого из тел изменение одной из пространственных координат (ось абсцисс) со временем (ось ординат), а также то, какая из «прядей» при их пересечении проходит выше (с учетом второй координаты). Диаграммы для полученной нами орбиты Новая I приведены ниже.

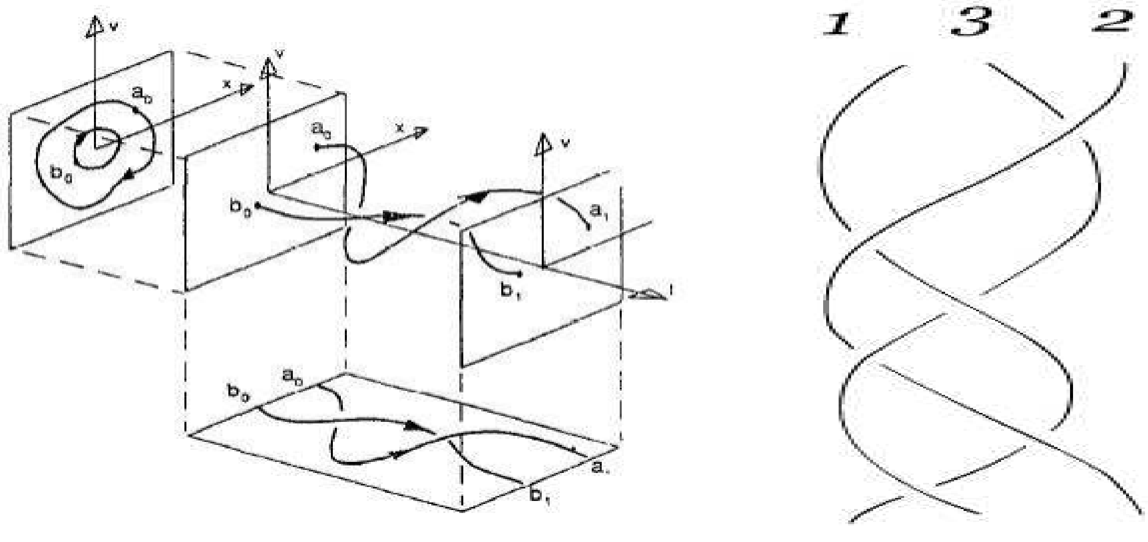



Рисунок 4 – Пример трехмерного формирования диаграммы «коса» (слева)
и ее явный вид для орбиты Новая I (справа)

Также был исследован интересный частный случай системы, состоящей из трёх тел, имеющих различные массы, отношение между которыми определяется так называемым «золотым сечением»:

$$m_1 = 1{,}5(5^{0,5} - 1)m; \qquad m_2 = 0{,}5(5^{0,5} - 1)[3 - 1{,}5(5^{0,5} - 1)]m;$$

$$m_3 = 3 - 1{,}5(5^{0,5} - 1) - 0{,}5(5^{0,5} - 1)\,[3 - 1{,}5(5^{0,5} - 1)]m.$$

И получена соответствующая периодическая орбита – Новая II.

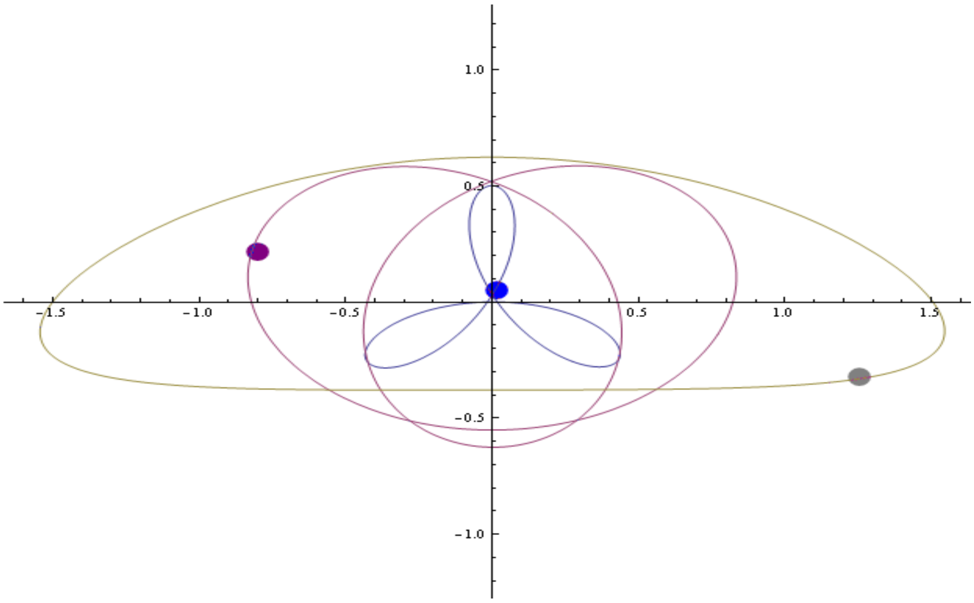



Рисунок 6 – Периодическая орбита Новая II для частного случая неравных масс

Вид траекторий и начальные положения тел показаны на рисунке 6. Появление новых параметров задачи за счет двух дополнительных массовых степеней свободы значительно усложняет анализ, но не лишает теоретической привлекательности. Поэтому исследование области устойчивости и установление вида диаграммы «коса» для орбиты Новая II будет проведено в ближайшем будущем, и хочется надеяться, с использованием более мощной компьютерной техники и новейшего программного обеспечения. То же самое в значительной степени касается и корректного определения области устойчивости орбиты Новая I.

**Литература**

1. Moore, C. Braids in classical dynamics / C. Moore // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 70. – P. 3675–3683.

2. Vanderbei, R.J. New orbits for the n-body problem / R.J. Vanderbei // Annals of the New York Academy of Sciences. – 2004. – Vol. 1017. – P. 422–430.

3. Рой, А. Движение по орбитам / А. Рой. – М. : Мир, 1981. – 545 с.

4. Орлов, В.В. Периодические орбиты в задаче N тел / В.В. Орлов, А.В. Рубинов, А.И. Мартынов // Физика Космоса. – Екатеринбург : УГУ, 2010. – С. 108–121.

5. Hinks, J. Knot Theory and Dynamics / J. Hinks. – Cornell University : MATH 4530, 2009. – 10 c.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 539.12.01*

# Relativistic two-particle Sturm-Liouville problems for *p*-states: exact and numerical solutions in the momentum representation

V.N. KAPSHAI, S.I. FIALKA

Релятивистские связанные состояния двухчастичных систем с орбитальным моментом $l=1$ (*p*-состояния) исследуются в специальном случае оператора взаимодействия, который допускает эквивалентную интегральному уравнению формулировку в виде задач Штурма-Лиувилля непосредственно в импульсном представлении. Численно найден вид условий квантования для *p*-состояний и решений задач Штурма-Лиувилля, а также вид волновых функций. В предельном случае нулевой массы связанного состояния численные решения сравниваются с точными аналитическими, которые также найдены.
**Ключевые слова**: релятивистская двухчастичная система, связанное состояние, интегральное уравнение, парциальное разложение, задача Штурма-Лиувилля.

Relativistic two-particle system bound states with orbital momentum $l=1$ (*p*-states) are being investigated in a special case of the interaction operator, which allows the formulation in the form of Sturm-Liouville problems, equivalent to the integral equation, directly in the momentum representation. The quantization conditions for *p*-states, solutions of the Sturm-Liouville problems, and behaviors of the wave functions are found numerically. In the limiting case of the zero bound state mass the numerical solutions are compared with exact analytical ones, which are also found.
**Keywords**: relativistic two-particle system, bound state, integral equation, partial decomposition, Sturm-Liouville problem.

### *Introduction*

Description of relativistic two-particle bound states can be realized with the help of the dynamic equations of local quantum field theory, commonly used examples of which include quasipotential equations by Logunov-Tavkhelidze [1] and Kadyshevsky [2]. It is important to note that quasipotential equations in the momentum representation can be reduced to one-dimensional integral equations for the majority of quasipotentials used in applications, where quasipotentials have the property of spherical symmetry in the relativistic configuration representation [3], [4]. The kernels of three-dimensional dynamic equations (quasipotentials), which are local in the Lobachevski momentum space [3], are relativistic generalizations of the nonrelativistic quantum-mechanical potentials recorded in the momentum representation. This allows for the use of conventional non-relativistic quantum mechanical considerations in the construction of quasipotential interactions and the investigation of two-particle systems with such interactions [4]. One method for solving integral quasipotential equations is based on reducing these equations to differential ones in the rapidity space [5].

### *Partial decomposition of integral quasipotential equations*

Consider the integral quasipotential equations for the bound states of a system of two relativistic spinless particles of mass *m* each [5]

$$G_{0,j}^{-1}(E,E_p)\psi_j(\vec{p}) = \int V(E,\vec{p},\vec{k})\psi_j(\vec{k})\, m\frac{d\vec{k}}{E_k}, \tag{1}$$

where $\psi_j(\vec{p})$ are the relative motion wave functions, $\vec{p}$ and $\vec{k}$ are the initial and final relative momenta of the particles in the center-of-mass system, $E_p=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ and $E_k=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ are the initial and final energies of the particles respectively, $2E$ is the two-particle system energy, $G_{0,j}^{-1}$ are the inverse Green functions of the Logunov-Tavkhelidze ($j=1$) and Kadyshevsky ($j=2$) equations and of their modified versions ($j=3$, $j=4$):

$$G_{0,1}^{-1}(E,E_p)=E^2-E_p^2; \qquad G_{0,2}^{-1}(E,E_p)=E_p(E-E_p);$$
$$G_{0,3}^{-1}(E,E_p)=m(E^2-E_p^2)/E_p; \quad G_{0,4}^{-1}(E,E_p)=m(E-E_p). \tag{2}$$

If one makes the partial decomposition of a local in the Lobachevski momentum space quasipotential $V(E,\vec{p},\vec{k})=V(E,\vec{p}(-)\vec{k})$ and chooses the wave function in the form of $\psi_j(\vec{p})=\psi_{j,l}(p)Y_l^{\mu}(\vec{n}_p)$, then the three dimensional equation (1), after applying the addition theorem for Legendre polynomials and spherical harmonics reduction, will be reduced to the one-dimensional equation

$$G_{0,j}^{-1}(E,E_p)\psi_{j,l}(p)=\frac{4\pi}{2l+1}m\int_0^{\infty}V_l(E,p,k)\psi_{j,l}(k)\,k^2\frac{dk}{E_k}, \tag{3}$$

where

$$V_l(E,p,k)=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}V(E,p,k,\cos\theta_{pk})P_l(\cos\theta_{pk})\sin\theta_{pk}\,d\theta_{pk}\,. \tag{4}$$

As an example of relativistic potential $V(E,\vec{p},\vec{k})$, consider a generalization [5] of the non-relativistic quantum mechanical potential $V(\vec{p},\vec{k})=-\lambda\left(4\pi\left|\vec{p}-\vec{k}\right|\right)^{-1}$, namely:

$$V(\vec{p},\vec{k})=V(\vec{p}(-)\vec{k})=-\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{\Delta}_{p,k}\right|}=-\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{p}(-)\vec{k}\right|}=-\frac{\lambda}{4\pi}\frac{m}{\sqrt{\left(E_pE_k-\vec{p}\,\vec{k}\right)^2-m^4}}\,. \tag{5}$$

Using the explicit form of potential (5) in the partial potential definition (4), introducing the notations $\alpha=E_pE_k-p\,k$, $\beta=E_pE_k+p\,k$, and making the substitution $y=E_pE_k-p\,k\cos\theta_{pk}$, one obtains

$$V_l(p,k)=-\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\lambda m}{2}\frac{1}{p\,k}\int_{\alpha}^{\beta}P_l\left(\frac{\beta+\alpha-2y}{\beta-\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{y^2-m^4}}dy \tag{6}$$

Then, substituting the partial potentials (6) into equation (3), one obtains

$$G_{0,j}^{-1}(E,E_p)p\psi_{j,l}(p)=-\lambda m^2\int_0^{\infty}\widetilde{V}_l(p,k)k\psi_{j,l}(k)\frac{dk}{E_k}, \tag{7}$$

where

$$\widetilde{V}_l(p,k)=-\frac{4\pi}{2l+1}\frac{p\,k}{\lambda m}V_l(p,k)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}P_l\left(\frac{\beta+\alpha-2y}{\beta-\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{y^2-m^4}}dy\,. \tag{8}$$

Let us introduce the parameterizations $E=m\cos w$, $p=m\sinh\chi_p$, $k=m\sinh\chi_k$, where $w\in[0;\pi/2]$; and $\chi_p$, $\chi_k$ are rapidities, and let us also denote $p\psi_{j,l}(p)=\phi_{j,l}(\chi_p)$ and $\widetilde{V}_l(p,k)=I_l(\chi_p,\chi_k)$. Then it is clear that $\alpha=m\cosh(\chi_p-\chi_k)$, $\beta=m\cosh(\chi_p+\chi_k)$ and partial quasipotential equations (7) take the form

$$G_{0,j}^{-1}(m\cos w,m\cosh\chi_p)\phi_{j,l}(\chi_p)=-\lambda m^2\int_0^{\infty}I_l(\chi_p,\chi_k)\phi_{j,l}(\chi_k)\,d\chi_k\,. \tag{9}$$

In order to find the kernels of integral equations explicitly (9), it is necessary to carry out the calculation of values (8).

***Partial equations for the p-states***

Further in this paper we consider the case $l=1$ (*p*-states), for which formula (8) takes the form

$$I_1(\chi_p,\chi_k)=\frac{1}{2}\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\beta+\alpha-2y}{\sqrt{y^2-m^4}}dy\,. \tag{10}$$

Implementing the integration in (10) one obtains:

$$I_1(\chi_p,\chi_k)=\begin{cases}\coth\chi_k\left(\chi_p\coth\chi_p-1\right), & \chi_k\ge\chi_p;\\ \coth\chi_p\left(\chi_k\coth\chi_k-1\right), & \chi_k\le\chi_p.\end{cases} \tag{11}$$

It is clear from (11) that the quantity $I_1(\chi_p,\chi_k)$ can be interpreted as the Green function of a homogeneous boundary value problem. Therefore, using the derivations of equations (9) with the kernel (11) with respect to the parameter $\chi_p$ one can see that the functions $F_{j,1}(\chi_p)=G_{0,j}^{-1}(m\cos w, m\cosh\chi_p)\phi_{j,1}(\chi_p)$ are solutions of boundary value problems containing differential equations, which are similar to the Schrodinger equation (with zero energy):

$$F''_{j,1}(\chi)-\frac{2}{\sinh^2\chi}F_{j,1}(\chi)-\lambda m^2 G_{0,j}(m\cos w, m\cosh\chi)F_{j,1}(\chi)=0\,, \tag{12}$$

where, for all $j$, the boundary conditions take the form

$$F_{j,1}(0)=0;\qquad F'_{j,1}(\infty)=0\,. \tag{13}$$

At first consider the Sturm-Liouville problems (12), (13) at $w=\pi/2$, where $E=0$, and differential equations (12) at $j=1$ and $j=2$ take the form

$$F''_{1,2;1}(\chi)-2\sinh^{-2}\chi\, F_{1,2;1}(\chi)+\lambda\cosh^{-2}\chi\, F_{1,2;1}(\chi)=0\,. \tag{14}$$

Taking into account boundary conditions (13) at point $\chi=0$, solution of equations (14) yields the functions $F_{1,2;1}(\chi)$ in the form of the hypergeometric series [6]:

$$F_{1,2;1}(\chi)=A_{1,s}\tanh^2\chi\;{}_2F_1\left(1-s;\frac{3}{2}+s;\frac{5}{2};\ \tanh^2\chi\right), \tag{15}$$

where the notation $\lambda=2s(2s+1)$ is introduced.

Then from the boundary conditions at infinity one gets

$$s=n+1\,,\quad \lambda=(2n+2)(2n+3)\,,\quad n=0,1,2,\ldots\,. \tag{16}$$

Thus, (15) and (16) are the exact analytical solutions of problems (12), (13) in the limiting case when the mass of the bound state $2E$ is equal to zero.

At other values of the bound state mass we find solutions to problems (12), (13) numerically. Values of the coupling constant $\lambda$ can be obtained from the integral equations (9). If one uses the above introduced notation for $F_{j,1}(\chi_p)$, and the notation $f=-\lambda^{-1}$, then equation (9) can be written as

$$m^2\int_0^\infty I_1(\chi_p,\chi_k)G_{0,j}(m\cos w, m\cosh\chi_k)F_{j,1}(\chi_k)\,d\chi_k=f\,F_{j,1}(\chi_p)\,. \tag{17}$$

After choosing a sufficiently large but finite upper limit of integration let us divide the integration domain into elementary segments $[\chi^{i-1};\chi^i=ih]$. Then, replacing the integrals with the composite trapezoidal quadrature formula and introducing the notation

$$\chi_p^i=ih;\qquad F_{j,1}^i=F_{j,1}(\chi_p^i);\quad F_{j,1}^q=F_{j,1}(\chi_k^q);$$

$$T^{i,q}=\coth\chi_p^i\left(\chi_k^q\coth\chi_k^q-1\right);\quad B^{i,q}=\coth\chi_k^q\left(\chi_p^i\coth\chi_p^i-1\right);$$

$$K_j^q(m\cos w)=G_{0,j}(m\cos w, m\cosh\chi_k^q)\,,$$

one obtains a matrix eigenvalue problem $MF_{j,1}=fF_{j,1}$, or in the index form:

$$M_{i,q}F_{j,1}^q=fF_{j,1}^i \tag{18}$$

where

$$M_{i,q}=\begin{cases}m^2hT^{i,q}K_j^q(m\cos w), & q\ge i;\\ m^2hB^{i,q}K_j^q(m\cos w), & q<i.\end{cases} \tag{19}$$

Eigenvalues of matrix (19) were found with the help of the computer algebra system Mathematica [7]. The resulting solutions to problem (18), namely the quantities $\lambda = -f^{-1}$, were verified using the Richardson extrapolation [8]. Then, after solving differential equations (12) in the Mathematica package, the eigenfunctions $F_{j,1}(\chi)$ were determined.

As in the case $l = 0$ [9], values of the coupling constant $\lambda$ obtained numerically, have up to eight correct significant digits. The maximum absolute error of the numerical solution of differential equations with $j$ =1,2 at $w = \pi/2$, for which there exists an analytical solution, is on the order of $10^{-13}$. It should be noted that the values of the constant $\lambda$ for $j = 3$ and $j = 4$, as well as for $j = 1$ and $j = 2$, coincide at $w = \pi/2$. Also, the values of the constant $\lambda$ for $j = 1$ and $j = 2$, obtained numerically, coincide with the exact values (16).

Figures 1–4 illustrate the dependence of the coupling constant $\lambda$, as well as of $F(\chi)$ and $\psi(p)$, on parameter $w \in (0; \pi/2]$, for $j$ = 1:4.

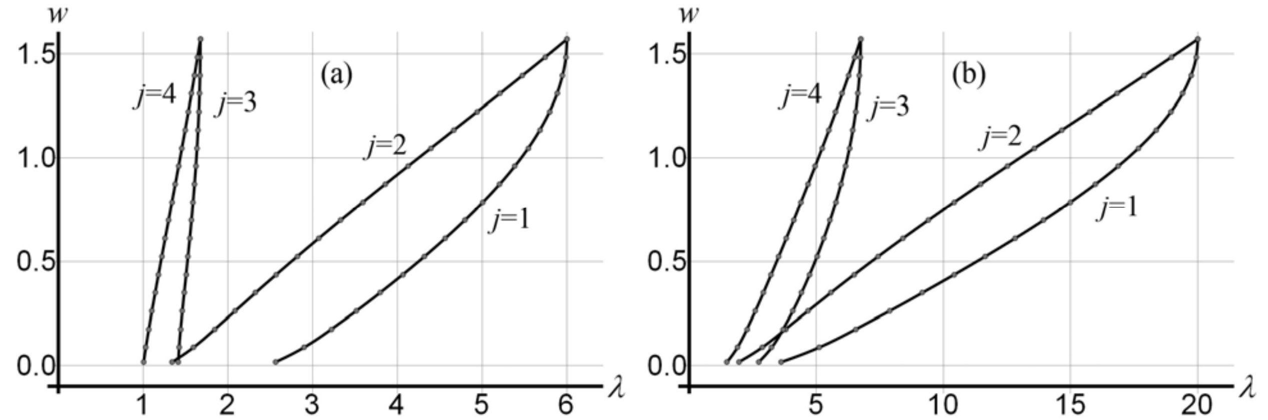



Figure 1 – The dependence of the coupling constant $\lambda$ on parameter *w* for the ground (a) and the first excited (b) states

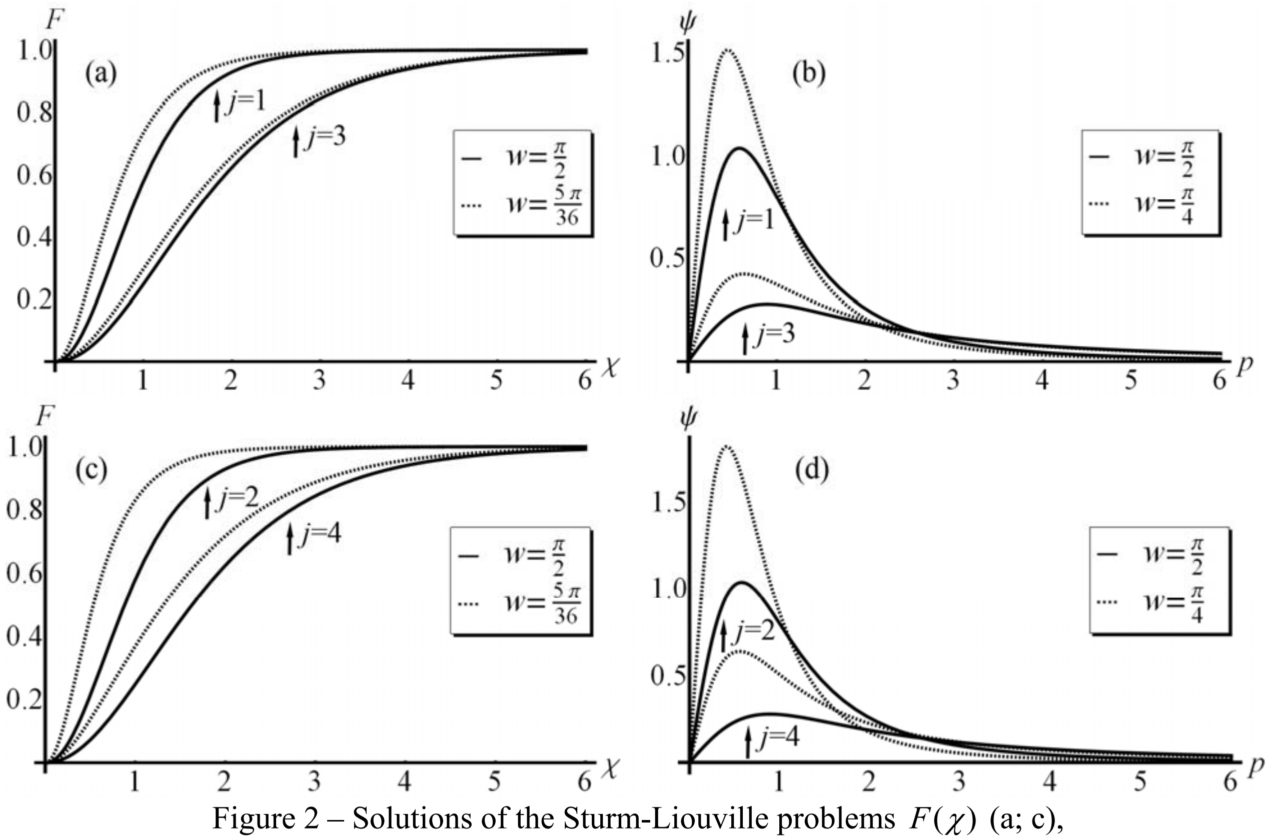



Figure 2 – Solutions of the Sturm-Liouville problems $F(\chi)$ (a; c), and of the integral equations $\psi(p)$ (b; d) for the ground state at $j$ = 1–4

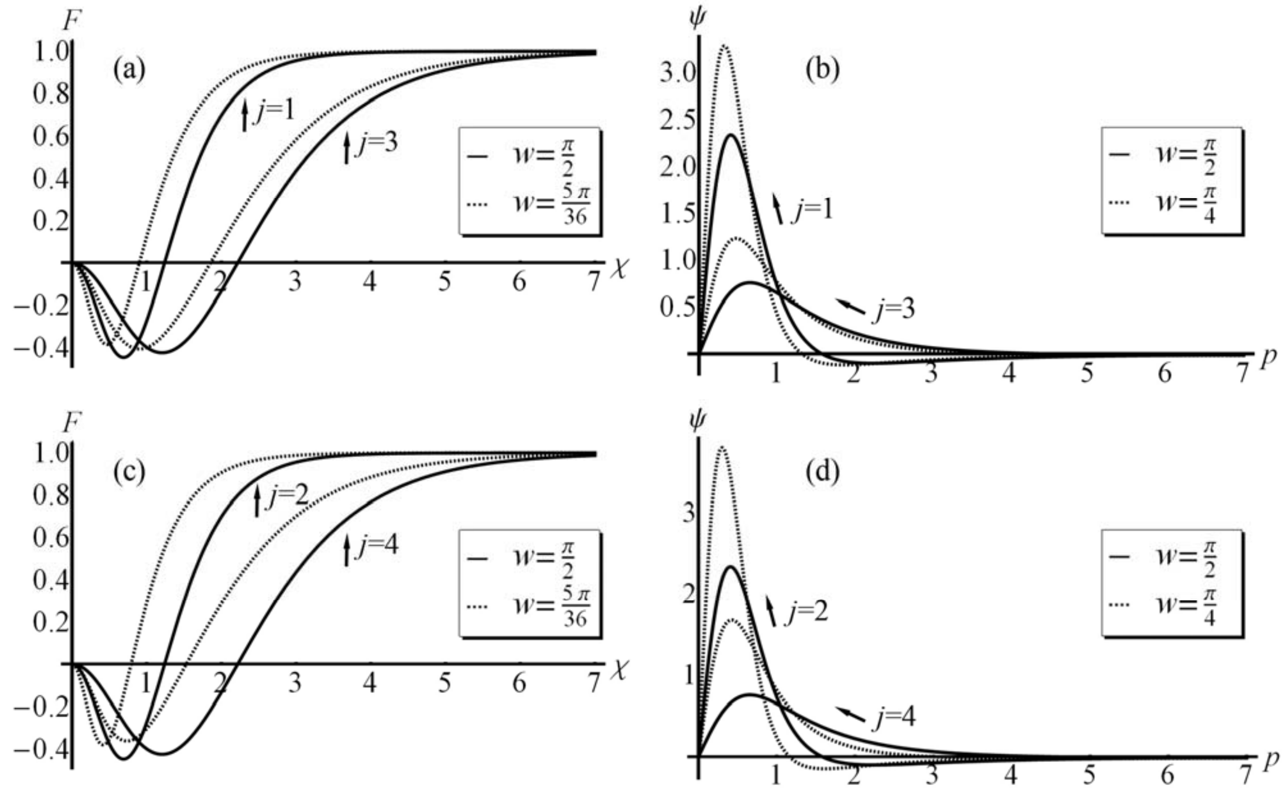



Figure 3 – Solutions of the Sturm-Liouville problems $F(\chi)$ (a; c),
and of the integral equations $\psi(p)$ (b; d) for the first excited state at $j$ = 1–4

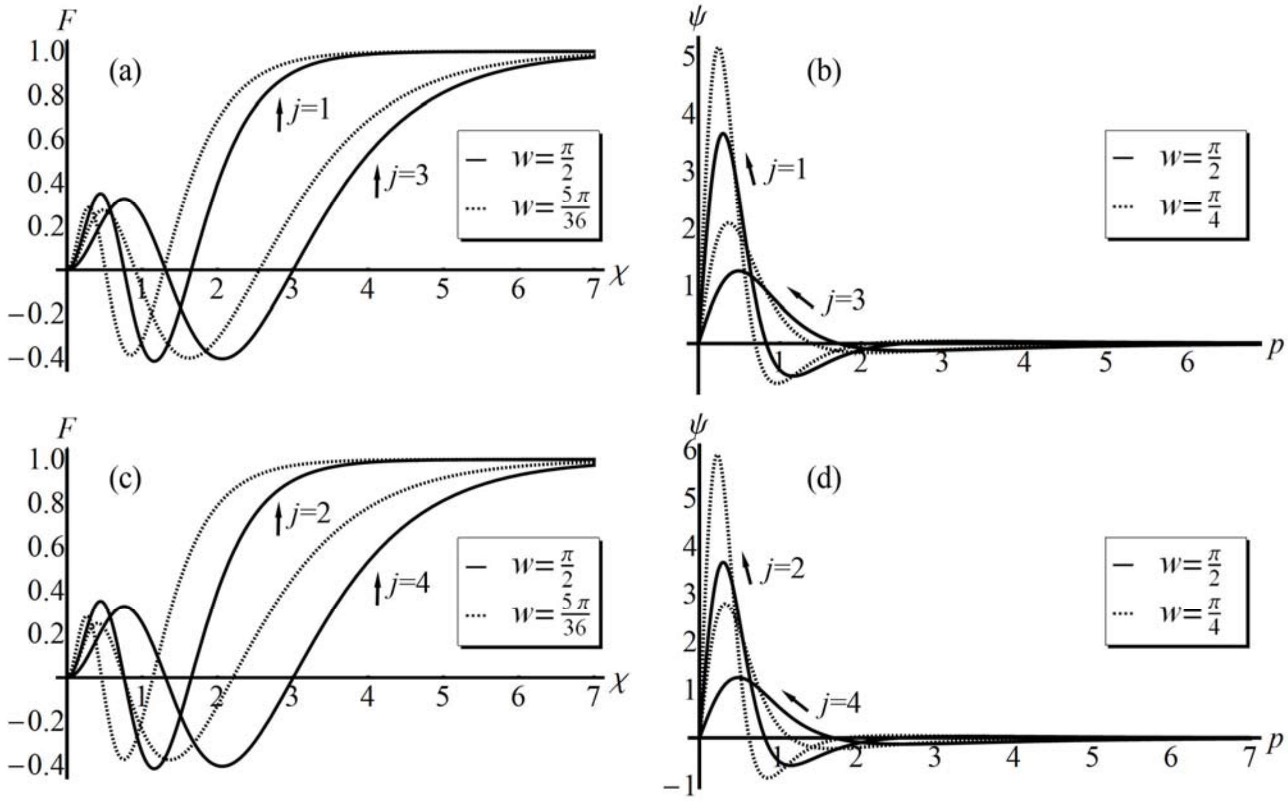



Figure 4 – Solutions of the Sturm-Liouville problems $F(\chi)$ (a; c),
and of the integral equations $\psi(p)$ (b; d) for the second excited state at $j$ = 1–4

Dependence of the coupling constant $\lambda$ on parameter *w* and corresponding solutions of the Sturm-Liouville problems and integral equations have also been determined in our calculations for larger values of the principal quantum number (up to $n = 5$). These solutions are not represented here due to the limited volume of this article.

It has to be noted that for all four types of quasipotential equations the found functions $F(\chi)$ and wave functions $\psi(p)$ have the number of zeros (except zero at $\chi = 0$), coinciding with the principal quantum number *n*.

***Conclusion***

In this paper the three dimensional integral quasipotential equations are reduced to one-dimensional equations in the case of the orbital angular momentum $l = 1$ for the potential $V(\vec{p},\vec{k}) = -\lambda\ (4\pi\left|\vec{\Delta}_{p,k}\right|)^{-1}$, which is a relativistic generalization of the nonrelativistic quantum mechanical potential $V(\vec{p},\vec{k}) = -\lambda\left(4\pi\left|\vec{p}-\vec{k}\right|\right)^{-1}$. It is shown that one-dimensional integral equations are equivalent to Sturm-Liouville problems in the momentum or rapidity space. Numerical solutions of the quasipotential equations considered are obtained for the cases of zero and non-zero mass of bound states. In the strong coupling limit of $2E = 0$, exact analytical solutions of the discussed Sturm-Liouville problems are also found. Correspondence between numerical and exact solutions in this limiting case is verified.

**References**

1. Logunov, A.A. Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // NuovoCimento. – 1963. – Vol. 29. – P. 380–399.

2. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.

3. Кадышевский, В.Г. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

4. Саврин, В.И. Метод квазипотенциала в теории связанных состояний / В.И. Саврин // Самара : Изд-во «Самарский университет», 2006. – 135 с.

5. Капшай, В.Н. Об одном классе точных решений квазипотенциальных уравнений / В.Н. Капшай, С.П. Кулешов, Н.Б. Скачков // ТМФ. – 1983. – 55:3. – С. 349–360.

6. Капшай, В.Н. Точные решения квазипотенциальных уравнений с орбитальным моментом $l = 1$ / В.Н. Капшай, Д.А. Бочкарев-Комин // Изв. вузов. Физика. – 1990. – № 5. – С. 74–78.

7. Дьяконов, В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В.П. Дьяконов. – М. : «ДМК Пресс», 2009. – 624 с.

8. Сальвадори, М.Дж. Численные методы в технике / М.Дж. Сальвадори. – М. : ИЛ, 1955. – 247 с.

9. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle Sturm-Lioville problem in the momentum representation: exact and numerical solutions / V.N. Kapshai, S.I. Fialka, L.D. Korsun // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2011. – № 6(69). – С. 75–79.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 18.07.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 539.12*

# Numerical solutions of relativistic two-particle equations with a superposition of one-boson exchange potential and $r^{-2}$ potential

V.N. Kapshai, Yu.A. Grishechkin, M.S. Danilchenko

В работе найдены численные решения релятивистских уравнений квантовой теории поля, описывающих связанные $s$-состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы в случае суперпозиции потенциала однобозонного обмена и потенциала, пропорционального $r^{-2}$, который аналогичен центробежному. Решения получены в импульсном представлении и в релятивистском конфигурационном представлении, проведен их анализ. Показано, что число нулей волновых функций равно номеру состояния минус один, а сами они удовлетворяют условию ортогональности.
**Ключевые слова:** релятивистское двухчастичное уравнение, потенциал однобозонного обмена, функция Грина, собственное значение энергии, волновая функция, условие ортогональности.

Numerical solutions of quantum field theory equations describing bound $s$-states of two scalar particles of equal mass are found in the case of superposition of one-boson exchange potential and potential $r^{-2}$ which is analogous to the centrifugal one. The solutions are obtained in the momentum representation and in the relativistic configurational representation. The analysis of obtained results is performed. It is shown that the number of wave function zeros is equal to the “number of quantum state minus one” and the wave functions satisfy an orthogonality condition.
**Keywords:** relativistic two-particle equation, one-boson exchange potential, Green function, energy eigenvalue, wave function, orthogonality condition.

## *Introduction*

The relativistic two-particle quasipotential equations and their interaction operators were first obtained in the momentum representation (MR) [1], [2]. Later these equations were formulated in the so-called relativistic configurational representation (RCR) in the integral and differential forms [3]. Actually, the RCR is a relativistic generalization of the ordinary coordinate representation of quantum mechanics. The RCR has a number of advantages. For example, by analogy with quantum mechanics, the behavior of a potential in the RCR allows one to assume or even conclude that the bound and/or resonant states exist for this potential. The transition into the RCR can simplify numerical solution of integral equations, at least in some cases, i.e. the RCR is a convenient alternative for the momentum representation. However, the potentials received in the MR initially are often nonlocal and their analytical representation in the RCR is not always possible. Therefore, the potentials which allow an analytic representation in RCR are particularly interesting.

## *Equations in the momentum and relativistic configurational representations*

In this paper numerical solutions are discussed for quantum field theory equations describing bound $s$-states of two scalar particles of equal mass in the case of superposition of one-boson exchange potential and centrifugal potential [4].The solutions are found in the MR and in the RCR. In the momentum representation relativistic two-particle equations for the spherically symmetric wave functions have the form [1]–[3]

$$\psi_{(j)}(2E,p)=\frac{-2\lambda m}{\pi}G_{(j)}(2E,p)\int\limits_0^\infty \frac{dk}{E_k}V(2E,p,k)\psi_{(j)}(2E,k), \quad E_k=\sqrt{k^2+m^2}, k=|\boldsymbol{k}|, \quad (1)$$

where the index $j$ corresponds to four quasipotential equation types: $j=1$ ($j=3$) – Logunov-Tavkhelidze equation (modified), $j=2$ ($j=4$) – Kadyshevsky equation (modified). The value $2E$ in equations (1) is the energy of two-particle systems ($0 \le 2E < 2m$), $m$ is the mass of each particle, $\psi_{(j)}(2E,p)$ is the wave function, $\lambda > 0$ is the coupling constant, $V(2E,p,k)$ is the potential which is generally dependent on energy, and $G_{(j)}(2E,p)$ is Green function (GF) of the $j$-*th* equation. GFs have the following form [1]–[3]:

$$G_{(1)}(2E,p)=\frac{1}{E_p^2-E^2};\qquad G_{(2)}(2E,p)=\frac{1}{2E_p\left(E_p-E\right)};$$

$$G_{(3)}(2E,p)=\frac{1}{E_p^2-E^2}\frac{E_p}{m};\quad G_{(4)}(2E,p)=\frac{1}{2\left(E_p-E\right)}\frac{1}{m};\quad E_p=\sqrt{m^2+p^2},\, p=|\boldsymbol{p}|.$$

Let us consider one possibility of three-dimensional one-boson exchange potential which was obtained in the article [2] based on the diagram technique of the Hamilton field theory formulation (mass of the scalar exchange boson is equal to zero):

$$V\left(2E,\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\right)=\frac{-4\pi}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}|\left(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}|+E_p+E_k-2E\right)}. \tag{2}$$

This potential is non-local, i.e. it depends not only on the momentum difference $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$ but also on the values of $E_p$ and $E_k$. In the spherically symmetric case, after integration over angles, expression (2) takes the form:

$$V(2E,p,k)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{m^2+p^2}+\sqrt{m^2+k^2}+|p-k|-2E}{\sqrt{m^2+p^2}+\sqrt{m^2+k^2}+p+k-2E}\right). \tag{3}$$

It was shown in [4] that the potential (3) at $2E=0$ is equivalent to a superposition of one-boson exchange potential, obtained in the approach based on the use of a quasipotential equation for the scattering amplitude given by Feynman diagrams, and the potential which has the form $r^{-2}$ in RCR. Two-particle integral equations (1) in the relativistic configurational representation, for the case of local, energy independent potentials, have the form [5]

$$\psi_{(j)}(2E,r)=\lambda\int_0^\infty G_{(j)}(2E,r,r')V(r')\psi_{(j)}(2E,r')dr'. \tag{4}$$

The wave functions, potentials, and Green's functions in the MR are associated with the corresponding values in the RCR by the following relations:

$$\psi_{(j)}\left(2E,r\right)=\int_0^\infty \sin\left(\chi mr\right)\psi_{(j)}\left(2E,m\sinh\chi\right)d\chi;$$

$$G_{(j)}\left(2E,r,r'\right)=\frac{-2}{\pi m}\int_0^\infty \sin\left(\chi mr\right)G_{(j)}\left(2E,m\sinh\chi\right)\sin\left(\chi mr'\right)d\chi; \tag{5}$$

$$V\left(2E,p,k\right)=\int_0^\infty \sin\left(\chi mr\right)V\left(r\right)\sin\left(\chi' mr\right)dr, \tag{6}$$

where $\chi$ is rapidity related to momentum $p$ through $p=m\sinh\chi$ ($k=m\sinh\chi'$).

Direct integration of transformations (5) gives the following expressions for the Green functions in the RCR ($2E=2m\cos w,\ 0<w\le\pi/2$) [5], [6]:

$$G_{(j)}(w,r,r')=G_{(j)}(w,r-r')-G_{(j)}(w,r+r');$$

$$G_{(1)}(w,r)=\frac{-1}{m\sin 2w}\frac{\sinh(\pi/2-w)mr}{\sinh\pi mr/2};\quad G_{(3)}(w,r)=\frac{-1}{2m\sin w}\frac{\cosh(\pi/2-w)mr}{\cosh\pi mr/2};$$

$$G_{(2)}(w,r)=\frac{(4m\cos w)^{-1}}{\cosh\pi mr/2}-\frac{1}{m\sin 2w}\frac{\sinh(\pi-w)mr}{\sinh\pi mr};\ G_{(4)}(w,r)=\frac{-1}{2m\sin w}\frac{\sinh(\pi-w)mr}{\sinh\pi mr}.$$

Computation of the inverse transformation to (6) gives the following expression in the RCR for potential (3) at $2E=0$:

$$V\left(r\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\pi mr}-\frac{1}{\sinh\left(\pi mr\right)}\right). \tag{7}$$

Clearly, this is an energy independent expression, and can be discussed as an approximation for the potential (2), (3).

***Numerical solutions in the momentum and relativistic configurational representations***

Now let us consider the equations in the MR and the RCR with energy-independent potential (7). The quadrature method was used to solve the integral equations [7], [8]. The infinite integration limit was replaced by a large finite value. The kernel of equations (1) has a singularity of the form $|p-k|$. This significantly slows the convergence of numerical solutions to exact ones for increasing number of nodes. Taking this into account the rectangles method was used for solving the equations on three grids with the number of nodes $N$, $2N$, $4N$. Then, the Aitken extrapolation process [7] was applied to values $\lambda$ and $\psi$, obtained on these three grids.

The equations in the RCR, in contrast to the equations in the MR, do not have such singularity and solutions can therefore be obtained without using the extrapolation procedures. Solutions to (4) were obtained by the composite Gauss quadrature method [8]. This method is based on the partition of the integration range into $N$ small pieces $r \in [r_i; r_{i-1}]$, $i = 1,2,...N$; $(r_1 = 0)$ of length $h$. The linear change of variables $r = (r_i - r_{i-1})x/2 + (r_i + r_{i-1})/2$ then leads each of these segments to the interval $x \in [-1;1]$, to which the Gauss quadrature formula is then applied.

Figures 1–4 show the results of numerical solutions obtained in the MR and the RCR. Solving equations in the two representations in parallel allows for additional control over the accuracy of obtained results.

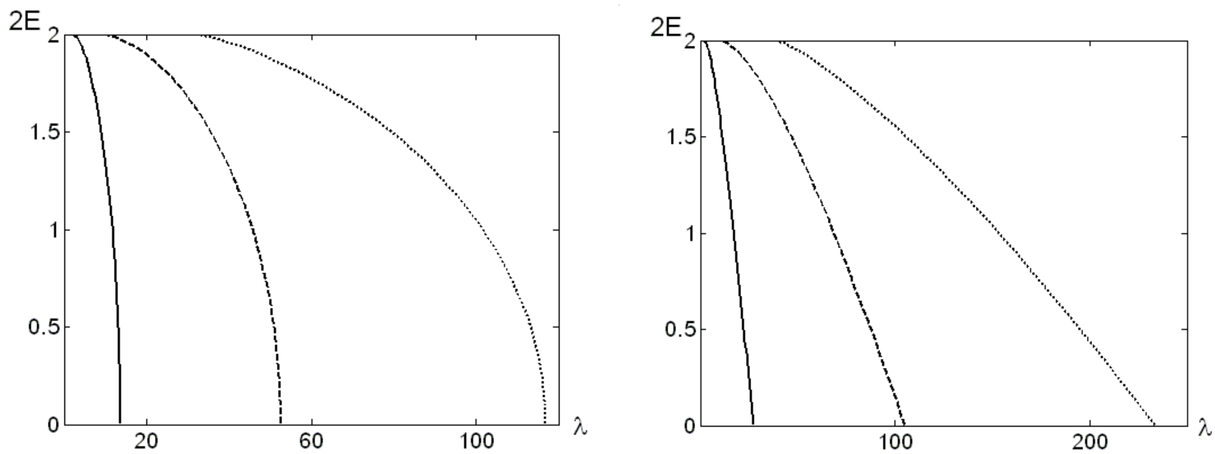



Figure 1 – The eigenvalues of system energy for: a) $j=1$; b) $j=2$

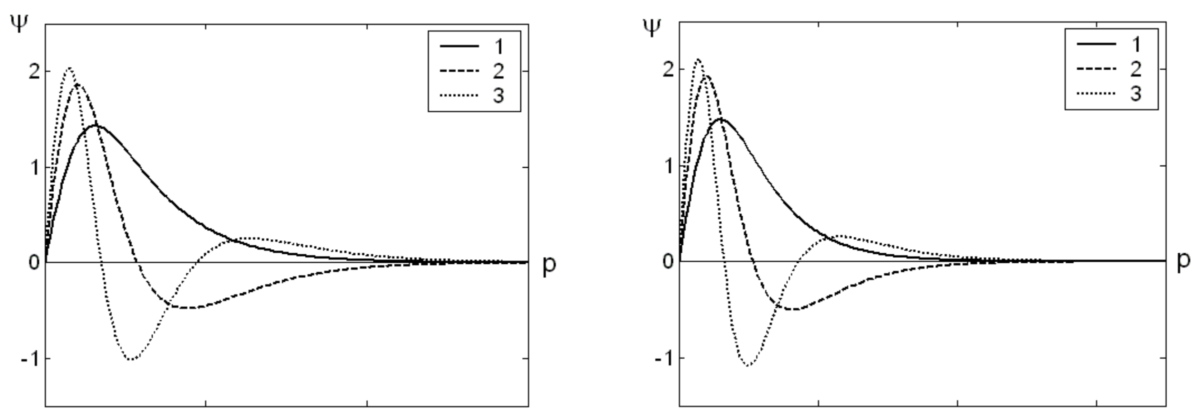



Figure 2 – The MR wave functions of the first three states at $2E = 1.8$
(the number of a curve corresponds to the number of the state): a) $j=1$; b) $j=2$

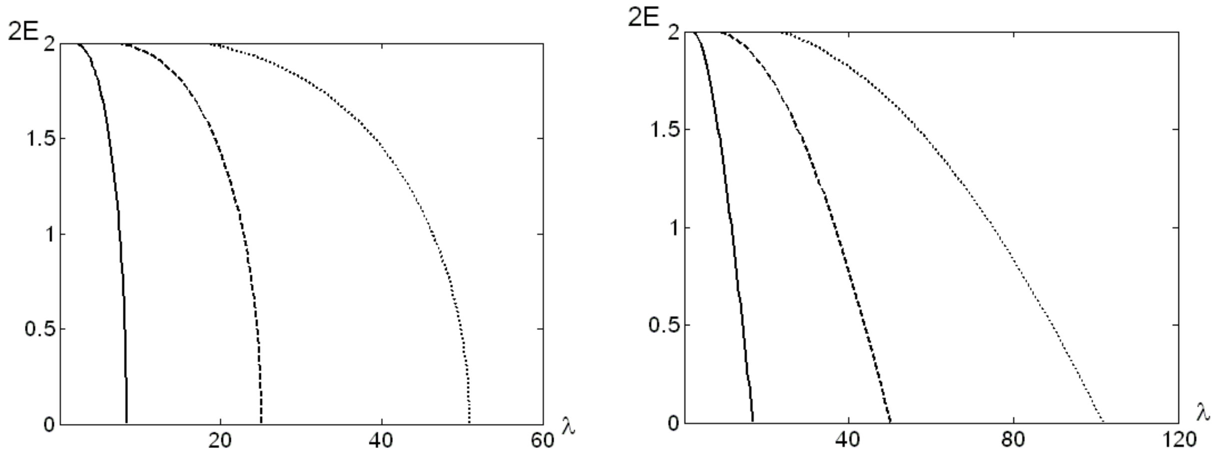



Figure 3 – The eigenvalues of system energy for: a) $j = 3$; b) $j = 4$

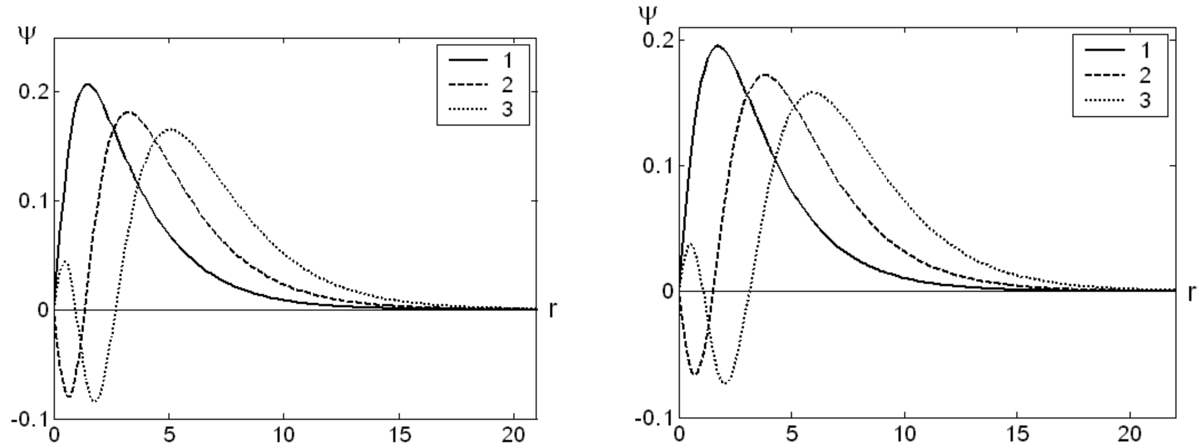



Figure 4 – The RCR wave functions of the first three states for $2E = 1.8$
(the number of a curve corresponds to the number of the state): a) $j = 3$; b) $j = 4$

Figures 2 and 4 show that the number of wave functions zeros (except at $p \neq 0$ ($r \neq 0$)), is equal to the "number of the state minus one" in both the MR and the RCR. In addition, these figures demonstrate that with increasing state number the maxima of the wave functions are moving away from the origin in the RCR and towards the origin in the MR.

Numerical calculations also show that the wave functions corresponding to different states (different eigenvalues $\lambda_n$ for fixed $2E$) satisfy the orthogonality conditions which are the same for all $j$ in the MR:

$$\int_0^\infty \frac{dp}{E_p} \psi_{(j)n}(2E,p) G_{(j)}^{-1}(2E,p) \psi_{(j)m}(2E,p) = 0, \quad n \neq m,$$

and in the RCR:

$$\int_0^\infty dr \psi_{(j)n}(2E,r) V(r) \psi_{(j)m}(2E,r) = 0, \quad n \neq m.$$

These conditions can be derived directly from equations (1) and (4).

### *Conclusion*

In this paper numerical solution of quantum field theory equations, describing bound *s*-states of two scalar particles with equal mass, are found in the case of superposition of one-boson exchange potential and potential $r^{-2}$ in the RCR. The number of wave functions zeros is shown to be equal to the "number of the state minus one". Numerical calculations show that the wave functions obtained satisfy orthogonality conditions.

**References**

1. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

2. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.

3. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

4. Дей, Е.А. Точные решения класса квазипотенциальных уравнений для суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена / Е.А. Дей, В.Н. Капшай, Н.Б. Скачков. – ТМФ, 1990. – Т. 82, № 2. – С. 188–198.

5. Alferova, T.A. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems : Proced. of the Sixth Annual Seminar NPCS'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.

6. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A : Math. Gen. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

7. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

8. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 6-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 303.22*

# Применение персонального компьютера в лабораторных работах по физике

А.А. Ковалев, А.А. Давиденко, И.Н. Яковцов

В статье рассматривается применение персонального компьютера в качестве универсального измерительного комплекса. Показано применение звуковой карты персонального компьютера в качестве низкочастотного осциллографа на примере измерения входного и выходного напряжения в цепи с конденсатором и катушкой индуктивности.
**Ключевые слова:** персональный компьютер, звуковая карта, виртуальный измерительный прибор, осциллограф.

The article discusses the use of a personal computer as a universal measurement system. It shows the use of a PC sound card as an example of a low-frequency oscilloscope to measure the input and output voltage of the circuit with the capacitor and the inductor.
**Keywords:** personal computer, sound card, virtual measurement instrument, oscilloscope.

В наши дни компьютеры – уже не только вычислительные средства, но и универсальные измерительные приборы. Измерительные устройства, построенные на базе персонального компьютера (т. н. виртуальные приборы), в ряде случаев позволяют заменить стандартные измерительные приборы: вольтметры, осциллографы, спектроанализаторы и т. д.

Виртуальные измерительные приборы сочетают в себе вычислительные и графические возможности персонального компьютера с точностью аналогово-цифровых (АЦП) и цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП). Они выполняют измерения амплитудных, частотных, временных характеристик различных физических величин с точностью примененных АЦП и ЦАП.

Такая система состоит из источников сигналов, АЦП или ЦАП и программного обеспечения (рисунок 1).

Причем программная часть виртуального прибора может эмулировать переднюю управляющую панель стационарного измерительного устройства.


Рисунок 1 – Блок-схема измерительной системы, построенной на базе персонального компьютера

Панель, сформированная на экране дисплея, становится панелью управления виртуального прибора. В отличие от реальной панели управления стационарного прибора такая виртуальная панель может быть многократно реконфигурирована в процессе работы для адаптации к конкретным условиям эксперимента. Теперь для проведения эксперимента и измерений необходимо только наличие компьютера, а все остальные программно-аппаратные средства определяются исходя из технических требований эксперимента [1].

Важную роль в создании виртуальных приборов играет выбор платы сбора данных с необходимыми метрологическими характеристиками для решаемой измерительной задачи: быстродействием аналогово-цифрового канала (АЦК), разрядностью АЦП, динамическими погрешностями АЦК.

Не менее существенное значение имеет использование быстрых и эффективных алгоритмов обработки измеряемой информации, а также удобной программы сбора и отображения данных под наиболее распространенные операционные системы.

В качестве аналогово-цифрового преобразователя, как альтернативу дорогостоящим устройствам обработки информации, можно эффективно использовать звуковую карту персонального компьютера.

При соответствующей ее доработке и применении специального программного обеспечения сферу ее применения можно расширить: от обычного аналогово-цифрового преобразователя до осциллографа.

Использование звуковой карты для отображения формы сигнала ограничено частотой следования дискретов. Для формирования сигнала, который отображается на экране ПК, используется аппроксимация ступенчатой функции, и практика показывает, что для наблюдения формы сигнала необходимо не менее 20 дискретов на период, что определяет максимальную частоту наблюдаемого сигнала. Минимальная частота ограничена разделительным конденсатором. Таким образом, частотный диапазон осциллографа, построенного на базе звуковой карты, может быть определен от 50 Гц до 2000 Гц.

Входное сопротивление стандартной звуковой карты составляет около 40 кОм, чего явно недостаточно для измерительного осциллографа, и его желательно увеличить до 1 Мом, как у специализированных осциллографов. Наиболее простым решением является добавочное сопротивление 1 Мом в сигнальном проводе. Чувствительность АЦП звуковой карты достаточна для работы с таким делителем напряжения [2].

Схема подключения звуковой карты к исследуемому четырехполюснику приведена на рисунке 2.

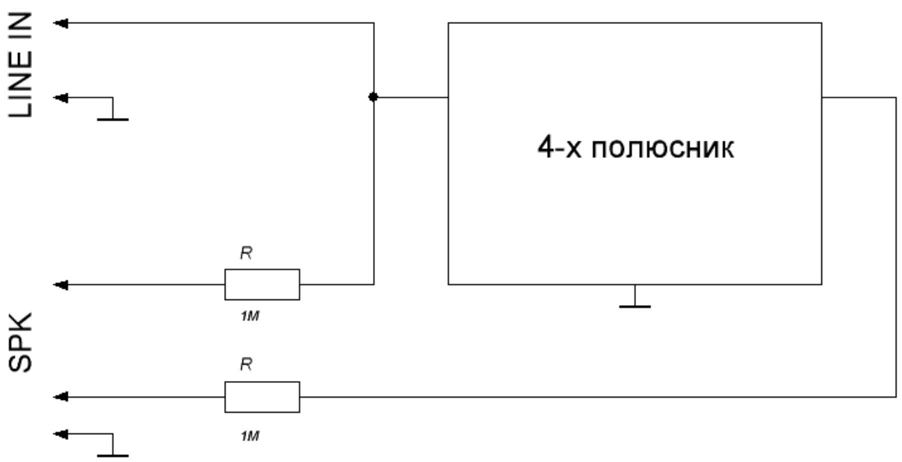



Рисунок 2 – Схема адаптера

Существует большое количество программного обеспечения, отличающегося сервисными возможностями, позволяющего превратить персональный компьютер в низкочастотный осциллограф. Рассмотрим одну из наиболее удобных бесплатно распространяемых программ Osci ver. 2.0.

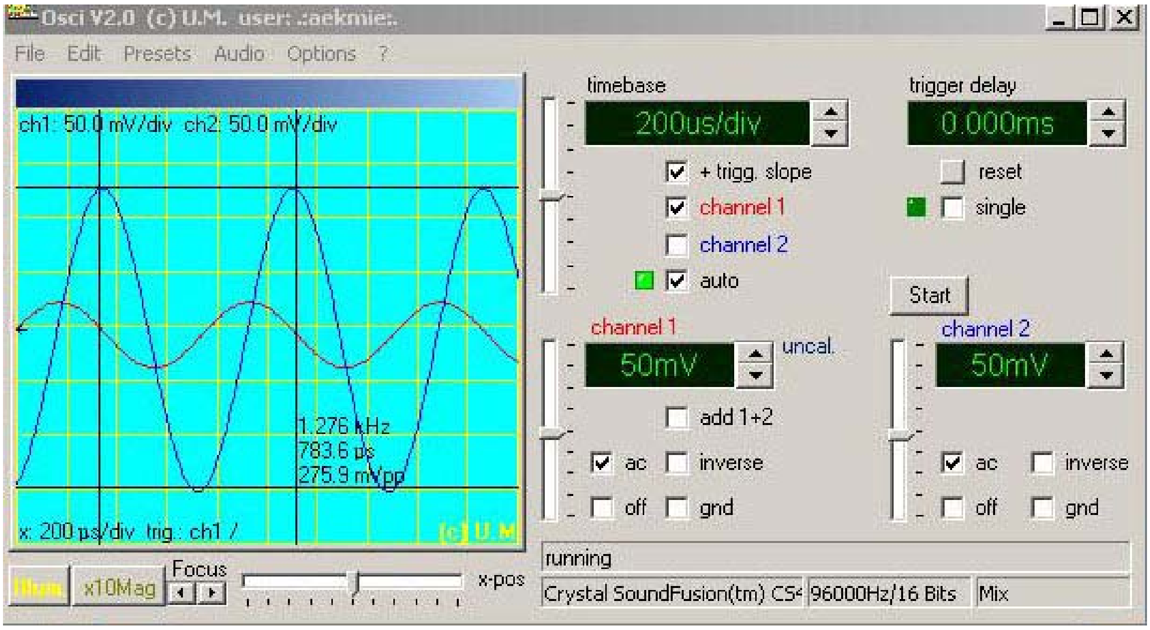



Рисунок 3 – Внешний вид пользовательского интерфейса программы Osci
и отображение входного и выходного сигналов исследуемой схемы

Программа реализует следующие возможности:
- 14 пределов измерения амплитуды сигнала: 100 мкВ – 2 В/дел;
- диапазон измерения периода сигнала: 20 мкс – 200 мс;
- режим X/Y ~ режим двулучевого осциллографа;
- возможность калибровки;
- сложение и инвертирование сигналов;
- показ всех параметров входного сигнала на осциллограмме;
- печать осциллограмм;
- сохранение осциллограмм в буфер обмена;
- сохранение осциллограммы в текстовом файле;
- измерение параметров сигнала на осциллограмме с помощью реперной системы.

На экране отображаются две осциллограммы (входного и выходного сигналов), наглядно демонстрирующие резонанс напряжений в исследуемой схеме, представленной на рисунке 4.

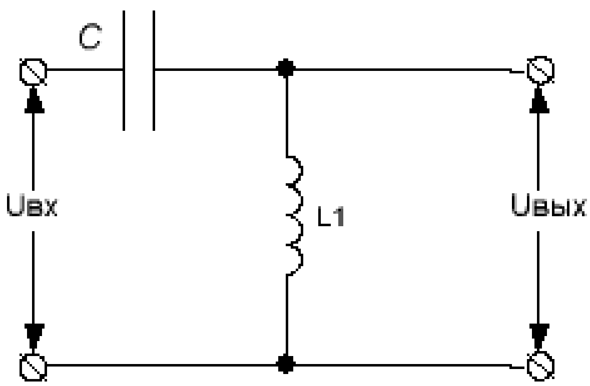



Рисунок 4 – Исследуемая схема
(снятие сигнала с катушки индуктивности)

Также можно наблюдать резонанс напряжений и сдвиг сигналов друг относительно друга при снятии выходного напряжения с конденсатора (рисунок 5).

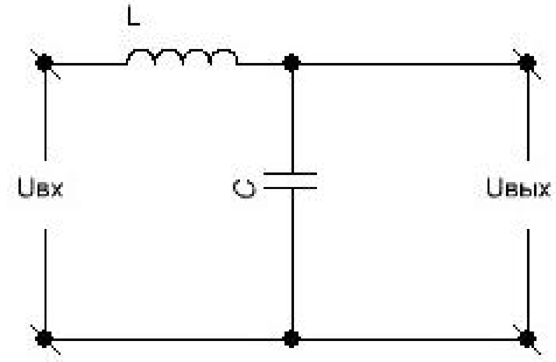



Рисунок 5 – Исследуемая схема, в которой
снятие сигнала происходит с конденсатора

Из осциллограммы, приведенной выше, видно, что в зависимости от того, на каком элементе снимается сигнал, происходит сдвиг фазы выходного сигнала относительно входного, а при использовании реперной системы можно легко вычислить добротность контура, которая определяется как отношение входного сигнала к выходному при резонансной частоте.

Применение звуковой карты в качестве цифрового осциллографа, а персонального компьютера – для обработки данных открывает широкие возможности его использования для представления, обработки и хранения данных.

На базе звуковой карты персонального компьютера и соответствующего программного обеспечения можно создавать как учебные стенды для лабораторных работ по радиоэлектронике и электричеству, так и системы для обработки экспериментальных данных.

**Литература**

1. Дворяшин, Б.В. Основы метрологии и радиоизмерений : уч. пособие для ВУЗов / Б.В. Дворяшин. – М. : Радио и связь, 1993. – 320 с.

2. Гель, П. Как превратить компьютер в измерительный комплекс / П. Гель ; пер. с фр. – 2-е изд., испр. – М. : ДМК Пресс, 2001. – 144 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 535.33:661.682*

# Формирование золь-гель методом просветляющих двухслойных $TiO_2$-$SiO_2$ покрытий

Д.Л. Коваленко, В.Е. Гайшун, В.В. Васькевич,
Н.А. Алешкевич, А.М. Гришкевич

В работе представлен способ получения золь-гель методом просветляющих $TiO_2$-$SiO_2$ покрытий на основе различных металлоорганических соединений титана и кремния. Представлена методика синтеза и описаны оптимальные параметры, влияющие на свойства синтезированных покрытий. Исследованы механические свойства стойкости к истиранию покрытий, сформированных на поверхности стеклянных линз. Проведен теоретический расчет коэффициента отражения двухслойных $TiO_2$-$SiO_2$ покрытий. Представлен спектр пропускания полученных покрытий.
**Ключевые слова:** золь-гель технология, просветляющие покрытия, коэффициент отражения.

The method of synthesis of sol-gel $TiO_2$-$SiO_2$ antireflective coatings based on various organometallic compounds of titanium and silicon is presented at the article. It is also described the way of synthesis and the optimal parameters which affect the properties of the obtained coatings. The mechanical resistance to the abrasion of coatings formed on the surface of the glass lenses was studied. The theoretical calculation of reflection coefficient of double-layer $TiO_2$-$SiO_2$ coatings was also made. The article shows the transmission spectrum of obtained coatings as well.
**Keywords:** sol-gel technology, antireflective coatings, reflection coefficient.

## *Введение*

Просветляющие оптические покрытия являются важной составляющей оптических систем, состоящих из большого количества линз или других оптических компонентов, где необходима максимально возможная энергия света. Просветляющие покрытия помогают производить более яркие изображения. Просветляющие покрытия также уменьшают интенсивность паразитных изображений, которые иногда возникают в оптических системах многократными отражающими поверхностями. Основная задача просветляющих покрытий – увеличение спектрального диапазона и уменьшение остаточного отражения [1].

В настоящее время просветление линз осуществляется с помощью покрытий, получаемых вакуумными методами (PVD, CVD). В роли таких покрытий выступают однослойные алмазоподобные покрытия или покрытия на основе фтористого магния $MgF_2$, а также двухслойные покрытия, нижним слоем которых является двуокись кремния, защищенная алмазоподобным верхним слоем. Вакуумные покрытия формируются при температурах свыше $1000^oC$. Более экономичным и энергетически выгодным является золь-гель метод нанесения просветляющих покрытий. Тонкие пленки могут быть получены на основе синтеза пленкообразующего раствора на основе различных металлоорганических соединений кремния, титана, циркония и др. [2]–[3].

При помощи золь-гель технологии можно получить двухслойное просветляющее покрытие. Причем для снижения коэффициента отражения можно синтезировать системы двух типов. В одном случае многослойная просветляющая система состоит из слоёв с чередующимися показателями преломления, толщины которых могут быть одинаковыми. В другом случае система состоит из слоёв с разными показателями преломления, но толщины таких слоёв кратны.

## *Синтез просветляющих двухслойных золь-гель $TiO_2$-$SiO_2$ покрытий*

Схема синтеза покрытий представлена на рисунке 1.

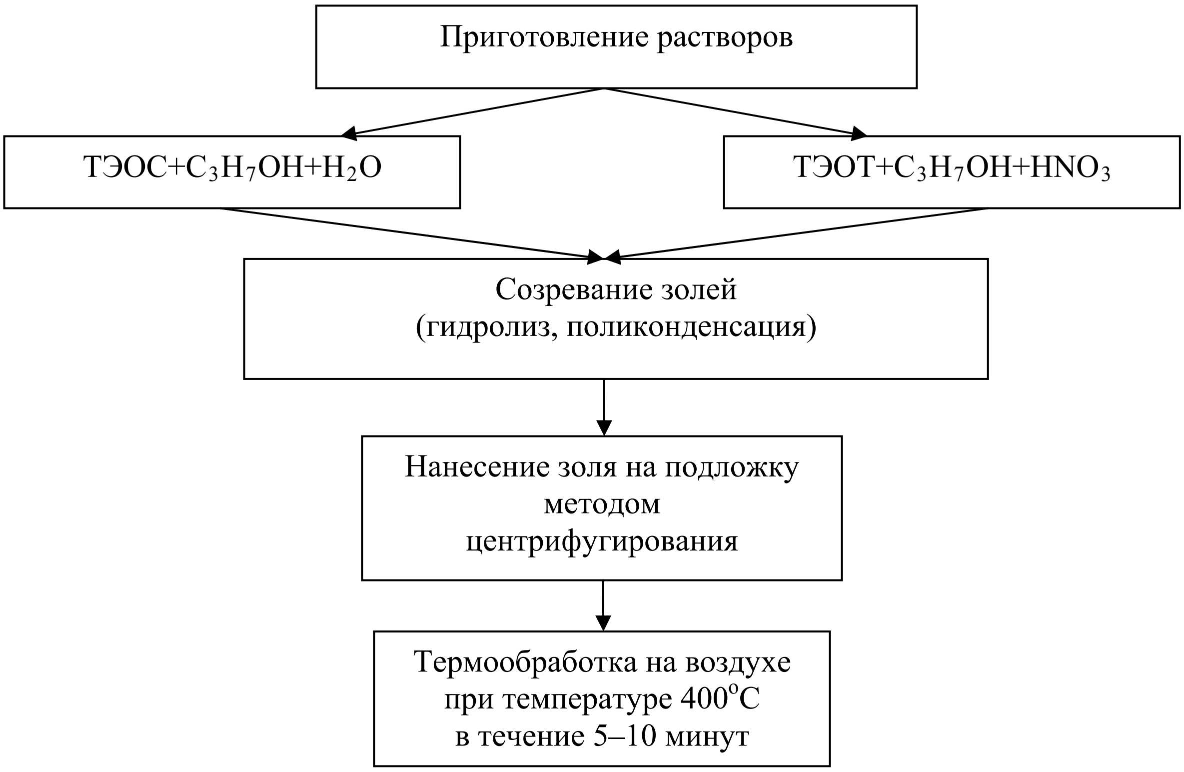



Рисунок 1 – Схема синтеза покрытий

Пленкообразующие растворы были приготовлены следующим образом. Требуемое количество тэтроэтилортосиликата и метилтриэтоксисилана заливали изопропиловым спиртом и перемешивали. Затем добавляли 0,1N водный раствор $HNO_3$. Важно учесть факт, что при взаимодействии титана с водой образуется гидрооксид титана, поэтому приготовление золей с титаном производили без воды. Полученные смеси перемешивали. Приготовленные золи перед нанесением на подложку помещаются в ультразвуковую ванну на 20 минут.

Для просветляющего покрытия золи наносились друг на друга. В качестве нижнего слоя служит покрытие на основе титана, а верхнего – покрытие на основе диоксида кремния. Чтобы определить оптимальный расход золя, были проведены исследования и установлено минимальное количество пленкообразующего раствора, необходимое для формирования покрытия на подложках различного размера. В среднем расход раствора при обработке одного м$^2$ составлял порядка 0.03 м$^3$ (таблица 1).

Таблица 1 – Расход раствора

| Диаметр детали, м | Количество раствора, $10^{-4}$ м$^3$ |
|---|---|
| 0.1 | 0,5–1 |
| 0.1–0.2 | 1–3 |
| 0.2–0.3 | 3–5 |
| 0.4–0.45 | 10–12 |
| 0.65–0.7 | 25–28 |
| 0.8–1 | 40–60 |

После нанесения золя подложку помещали в муфельную печь для термообработки. Образцы нагревали до температуры 300–500$^{o}$C. Время выдержки составляло 30 минут.

***Исследование механической стойкости к истиранию полученных покрытий***

Наиболее подходящими методами определения механической прочности тонких диэлектрических пленок являются те, которые основаны на определении прочности пленок к истиранию. Для определения механической прочности тонких прозрачных покрытий чаще всего применяют метод истирания. Это ближе к реальным условиям как изготовления разнообразных изделий с тонкими покрытиями, так и их эксплуатации.

В данной работе механическая прочность полученных двухслойных $TiO_2$-$SiO_2$ тонких золь-гель пленок, нанесенных на линзу, может быть охарактеризована сопротивляемостью к истиранию. Прочность покрытий определялась методом истирания резиновым наконечником, изготовленным из резины средней плотности, через батистовую прокладку при следующих параметрах:

плотность резины, кг/м$^3$ …………………………………….. 1200–1500,
частота вращения, мин$^{-1}$ ………………………………………30–100,
число оборотов ………………………………………………………. 3000,
нагрузка на наконечник, г ……………………………………………. 200,
расстояние от оси вращения, мм …………………………………….. 5.

Результаты исследования показывают, что полученные просветляющие двухслойные $TiO_2$-$SiO_2$ покрытия устойчивы к истиранию (более 3000 циклов) и могут применяться в оптической промышленности.

***Теоретический расчет коэффициента отражения $TiO_2$-$SiO_2$ покрытий***

Для расчета коэффициента отражения R была построена модель системы **Стекло – $TiO_2$-$SiO_2$ – Воздух** (рисунок 2). Нижним слоем выступает покрытие на основе диоксида титана, а верхним слоем – покрытие на основе диоксида кремния.

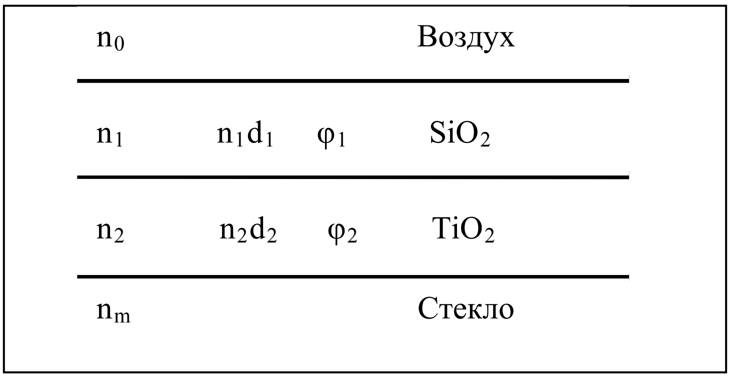



Рисунок 2 – Структурная схема двухслойного покрытия

Для расчетов коэффициента отражения двухслойных покрытий брали следующие значения:

$\mathbf{n_0}$ = 1
$\mathbf{n_1}$ = 1,512
$\mathbf{n_2}$ = 1,687
$\mathbf{n_m}$ = 1,4 (для стекла)
$\mathbf{d_1}$ = 7,982 нм, рассчитано $\mathbf{n_2d_2}$ = 12,707344
$\mathbf{d_2}$ = 5,305 нм, рассчитано $\mathbf{n_2d_2}$ = 8,949535
$\mathbf{d_3}$ = 5,305 нм, рассчитано $\mathbf{n_3d_3}$ = 8,949535

Проведем расчет коэффициента отражения двухслойных покрытий [1].

Определим фазовые толщины слоев по формулам:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi n_1 d_1}{\lambda},$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi n_2 d_2}{\lambda}.$$

Волновой фронт падающего излучения плоский. Показатели преломления от толщины не зависят, и толщины слоёв постоянны вдоль всей границы раздела.

В нашем случае матрица интерференции двухслойной системы описывается как произведение матриц двух слоёв:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & i\dfrac{1}{n_1}\sin\varphi_1 \\ in_1\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & i\dfrac{1}{n_2}\sin\varphi_2 \\ in_2\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Толщины слоёв не совпадают, и показатели преломления их также различаются. Напишем элементы результирующей матрицы интерференции:

$$\begin{cases} m_{11} = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \dfrac{n_2}{n_1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ m_{12} = \dfrac{1}{n_1}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \dfrac{1}{n_2}\sin\varphi_2\cos\varphi_1 \\ m_{21} = n_1\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + n_2\sin\varphi_2\cos\varphi_1 \\ m_{22} = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \dfrac{n_1}{n_2}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \end{cases}$$

Диагональные матричные элементы, как и элементы первой матрицы, – это безразмерные элементы относительно показателя преломления, относительно фазовой толщины они все имеют размерность. Первый элемент второго столбца имеет размерность обратную показателю преломления, второй элемент первого столбца имеет размерность пропорциональную показателю преломления. Детерминант матрицы равен единице.

Определим величину амплитудного коэффициента отражения такой плёночной системы, а дальше будем исследовать его свойства и оценим возможности его изменений. Амплитудный коэффициент отражения такой системы:

$$r = \frac{(n_0m_{11} - n_mm_{22}) - i\left(n_0n_mm_{12} - m_{21}\right)}{\left(n_0m_{11} + n_mm_{22}\right) + i\left(n_0n_mm_{12} + n_1m_{21}\right)}.$$

С учётом ранее полученных значений элементов матрицы можно записать выражения для коэффициента отражения в следующем виде:

$$r = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}, \qquad \text{где}$$

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} = \left(n_0 \mp n_m\right)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \left(\frac{n_0n_2}{n_1} \mp \frac{n_mn_1}{n_2}\right)\sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$

$$\left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right\} = \left(\frac{n_0n_m}{n_1} \mp n_1\right)\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \left(\frac{n_0n_m}{n_2} \mp n_2\right)\sin\varphi_2\cos\varphi_1.$$

Таким образом, мы получили выражение для амплитудного коэффициента отражения. Энергетический коэффициент отражения есть квадрат модуля амплитудного коэффициента отражения. Это есть сумма квадратов действительной и мнимой части числителя и знаменателя:

$$R = \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Коэффициент отражения будет периодической функцией, если $\varphi_1$ и $\varphi_2$ будут кратны друг другу, тогда легко определяется период этой функции. Здесь можно сказать, что период этой функции не всегда будет равен $\pi$, как это было в случае одного слоя. Это зависит от того, как соотносятся оптические толщины $\varphi_1$ и $\varphi_2$.

Ниже приведем таблицу рассчитанных значений фазовых толщин и коэффициента отражения для видимой области. Результаты рассчитанных значений фазовых толщин и коэффициента отражения приведены в таблице 2.

Таблица 2 – рассчитанные теоретически значения фазовых толщин и коэффициент отражения для видимой области

| Длина волны, $\lambda$ | Фазовая толщина, $\varphi_{SiO_2}$ | Фазовая толщина, $\varphi_{TiO_2}$ | Коэффициент отражения, $R$ |
|---|---|---|---|
| **300** | 0,187344 | 0,106986 | 3,51% |
| **350** | 0,16058 | 0,091702 | 3,43% |
| **400** | 0,140508 | 0,080239 | 3,37% |
| **450** | 0,124896 | 0,071324 | 3,33% |
| **500** | 0,112406 | 0,064191 | 3,30% |
| **550** | 0,102187 | 0,058356 | 3,28% |
| **600** | 0,093672 | 0,053493 | 3,27% |
| **650** | 0,086466 | 0,049378 | 3,25% |
| **700** | 0,08029 | 0,045851 | 3,24% |
| **750** | 0,074937 | 0,042794 | 3,23% |
| **800** | 0,070254 | 0,04012 | 3,23% |
| **850** | 0,066121 | 0,03776 | 3,22% |
| **900** | 0,062448 | 0,035662 | 3,21% |

Из таблицы видно, что коэффициент отражения в видимой области изменяется от 3,2% до 3,5%. Это значит, что данные двухслойные покрытия с нижним слоем на основе титана и верхним слоем на основе кремния можно считать просветляющими в видимом диапазоне света.

***Исследование спектров пропускания $SiO_2$-$TiO_2$ покрытий***

На рисунке 3 представлен спектр пропускания в видимой области $TiO_2$ покрытия и двухслойного $TiO_2$-$SiO_2$ покрытия, нанесенных на линзы ОАО «Завод-Оптик».

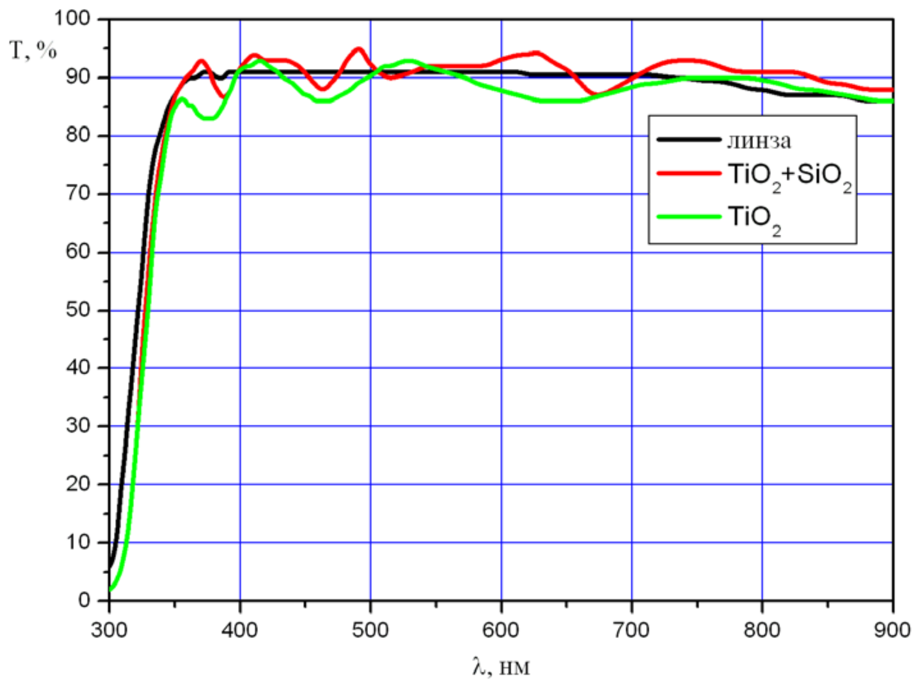



Рисунок 3 – Спектр пропускания $TiO_2$, $TiO_2$-$SiO_2$ покрытий, нанесенных на линзы

Из графика видно, что двухслойное $TiO_2$-$SiO_2$ покрытие является просветляющим и имеет вид кривой с чередующимися максимумами (94–96%) и минимумами (85–87%). Покрытие имеет интерференционный вид, что присуще просветляющим покрытиям. Данный график согласуется с рассчитанными ранее коэффициентами отражения.

Однослойное покрытие $TiO_2$ также имеет интерференционный вид, но положение максимумов и минимумов ниже, чем у двухслойного покрытия.

***Заключение***

Золь-гель методом получены просветляющие двухслойные $TiO_2$-$SiO_2$ покрытия, сформированные на поверхности очковых линз ОАО «Завод-Оптик». Исследование механической стойкости показало, что двухслойные просветляющие $TiO_2$-$SiO_2$ покрытия отвечают оптическим стандартам прочности покрытий.

Теоретический расчет коэффициентов отражения $TiO_2$-$SiO_2$ покрытий на поверхности стеклянной линзы показал, что при толщине пленки 0,1 мкм и показателях преломления подложки $n = 1{,}45$ и пленок $n_1 = 1{,}512$, $n_2 = 1{,}687$ данные покрытия обладают пропусканием 95–97% в видимой области. Коэффициент отражения данных пленок составляет от $R = 0{,}032$ до $R = 0{,}035$, что согласуется с представленным оптическим спектром пропускания данных покрытий в видимой области спектра.

**Литература**

1. Путилин, Э.С. Оптические покрытия : уч. пос. по курсу «Оптические покрытия» / Э.С. Путилин. – СПб. : Государственный университет «ИТМО», 2005. – 201 с.

2. Борисенко, А.И. Тонкопленочные стеклоэмалевые и стеклокерамические покрытия / А.И. Борисенко, А.В. Николаев. – Л. : Наука, 1970.

3. Петровский, Г.Т. Основные направления золь-гель синтеза стеклообразованных материалов для оптики из коллоидных форм кремнезёма / Г.Т. Петровский, В.С. Шашкин, А.К. Яхкинд // Физика и химия стекла. – 1997. – Т. 23, № 1. – С. 43–54.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 31.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 621.396.67*

# Электродинамический анализ двумерно-периодических решеток из проволочных структур

В.П. Кудин

Предложен метод расчета бесконечных плоских фазированных антенных решеток и частотно-селективных поверхностей, состоящих из проволочных структур. Каждая структура содержит прямолинейные элементы, произвольным образом ориентированные в пространстве.
**Ключевые слова**: двумерно-периодические структуры, интегральные уравнения, проволочные антенны, функции Грина, численные методы.

A method for the calculation of the infinite planar phased arrays and frequency-selective surfaces consisting of wire structures is proposed in the article. Each structure is composed of arbitrary oriented linear wire elements.
**Keywords**: two-dimensional periodic structures, integral equations, wire antennas, Green functions, numerical methods.

### *Введение*

Анализ многоэлементных фазированных антенных решеток (ФАР) и частотно-селективных поверхностей в большинстве случаев проводится на модели бесконечной решетки. Если элементы бесконечной решетки возбуждаются равноамплитудно с прогрессивным фазовым набегом (режим ФАР), то такому условию подчиняются и поля решетки, в частности, токи на излучателях (теорема Флоке [1]). Таким образом, достаточно определить распределение токов или полей на одном излучателе. Следовательно, по своей размерности задачи о бесконечной ФАР и единичном излучателе эквивалентны. Математически различие заключается лишь в используемой функции Грина. В случае двумерно-периодической решетки функция Грина представляет собой пространственный двумерный ряд, который сходится довольно медленно. Применение преобразования Пуассона приводит к широко используемому двумерному спектральному ряду, сходимость которого также достаточно медленная и сопоставима со сходимостью пространственного ряда. В литературе известны различные способы ускорения сходимости: метод Эвальда [2], методы, основанные на преобразовании Шанкса [3]–[5] и Куммера [6], [7]. Известны и более сложные схемы [8].

Вместе с тем необходимо отметить, что конечной целью является решение граничной задачи электродинамики, которая формулируется в общем случае в виде набора интегро-дифференциальных уравнений относительно полей или токов на излучателе. Применительно к проволочным излучателям следует говорить о решении интегральных уравнений типа Поклингтона [9] или Мэя [10] относительно осевого тока на проводниках. В указанных уравнениях присутствуют линейные интегральные операторы, содержащие первую и вторую производные от функции Грина. Применение метода моментов для решения этих уравнений приводит к тому, что матричные элементы выражаются в виде двойных интегралов, которые должны быть найдены численно, и ввиду их большого количества данная процедура требует серьезных вычислительных затрат. Эти обстоятельства фактически сводят на нет преимущества, полученные от ускорения сходимости рядов для функции Грина, и на практике приводят к невозможности решить задачу для излучателей, отличающихся от простейших.

В данной работе на основе Фурье-представления функции Грина получены аналитические представления для элементов матрицы взаимных импедансов, что позволяет существенно сократить вычислительные затраты при последующем их расчете.

### *Функция Грина бесконечной плоской ФАР*

Рассматривается бесконечная плоская решетка проволочных структур произвольной формы, расположенных в узлах косоугольной сетки (рисунок 1).

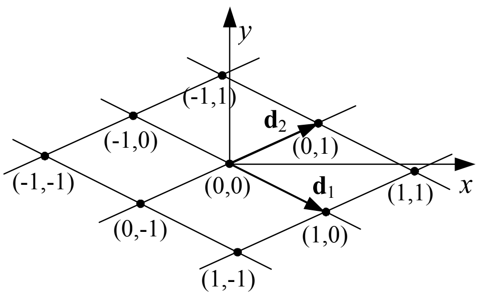



Рисунок 1 – Косоугольная сетка размещения излучателей

Сетка определяется векторами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$, которые для определенности будем считать параллельными плоскости $0xy$.

Функция Грина бесконечной ФАР есть

$$G^{\infty}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{r}_{mn}\right)\exp\left(-im\psi_1-in\psi_2\right), \tag{1.1}$$

где функция Грина одиночного излучателя в свободном пространстве выражается формулой

$$G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)=\frac{\exp\left(-ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}, \tag{1.2}$$

а $\psi_1$ и $\psi_2$ являются разностями фаз между комплексными амплитудами возбуждения соседних элементов вдоль соответствующих осей, вектор $\mathbf{r}_{mn}=m\mathbf{d}_1+n\mathbf{d}_2$ определяет узлы косоугольной сетки, $k$ – волновое число.

Получим выражение для функции Грина плоской решетки в требуемой форме. Для этого функцию Грина (1.2) в соответствии с [11] представим в спектральном виде

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{(2p)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}^2-k^2}\exp\left[-i\boldsymbol{\kappa}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\right]d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3. \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\kappa}=\left(\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3\right)^{\mathrm{T}}$. Подставив (1.3) в (1.1), поменяв порядок суммирования и интегрирования, применив формулу суммирования Пуассона, проделав замену переменных и используя фильтрующие свойства дельта-функции Дирака, после преобразований получим искомое выражение

$$G^{\infty}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)=\frac{1}{2\pi A}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}_{pq}^{\ 2}-k^2}\exp\left[-i\boldsymbol{\kappa}_{pq}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\right]d\kappa_3\,, \tag{1.4}$$

где

$$\boldsymbol{\kappa}_{pq}=\boldsymbol{\kappa}_{pq}^{\perp}+\mathbf{z}\kappa_3\,,\quad \boldsymbol{\kappa}_{pq}^{\perp}=\left(p+p_0\right)\boldsymbol{\kappa}_1+\left(q+q_0\right)\boldsymbol{\kappa}_2\,,$$

$A=\mathbf{z}\left[\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2\right]$ – площадь единичной ячейки, $\mathbf{z}$ – орт вдоль соответствующей оси, а вектор $\boldsymbol{\kappa}_{pq}^{\perp}$ является проекцией пространственного волнового вектора $\boldsymbol{\kappa}_{pq}$ порядка $pq$ на плоскость решетки. Векторы $\boldsymbol{\kappa}_1=2\pi\left[\mathbf{d}_2,\mathbf{z}\right]/A$ и $\boldsymbol{\kappa}_2=2\pi\left[\mathbf{z},\mathbf{d}_1\right]/A$ образуют базис на плоскости волновых чисел. Величины $p_0=\psi_1/2\pi=\mathbf{k}\mathbf{d}_1/2\pi$ и $q_0=\psi_2/2\pi=\mathbf{k}\mathbf{d}_2/2\pi$ суть межэлементные нормированные фазовые сдвиги вдоль соответствующих осей, волновой вектор $\mathbf{k}=k\left(\sin\theta_0\cos\varphi_0 \quad \sin\theta_0\sin\varphi_0 \quad \cos\theta_0\right)^T$, где углы ($\theta_0$, $\varphi_0$) определяют направление фазирования в сферической системе координат.

Обычно вместо (1.3) используется следующее выражение для функции Грина [11]:

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i\kappa_1\left(x-x'\right)-i\kappa_2\left(y-y'\right)-\gamma\left|z-z'\right|\right]}{\gamma}d\kappa_1 d\kappa_2\,, \tag{1.5}$$

которое получается из (1.3), если по одной из переменных провести интегрирование. На основе (1.5) получается широко известное выражение для функции Грина плоской бесконечной решетки

$$G^{\infty}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{2A}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i\boldsymbol{\kappa}_{pq}^{\perp}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\gamma_{pq}|z-z'|\right]}{\gamma_{pq}}. \tag{1.6}$$

В приведенных формулах $\gamma=\sqrt{\kappa_1{}^2+\kappa_2{}^2-k^2}$ и $\gamma_{pq}=\sqrt{\left(\boldsymbol{\kappa}_{pq}^{\perp}\right)^2-k^2}$.

Выражение (1.6) содержит модуль разности координат, что, как уже упоминалось, приводит к трудностям нахождения полей и последующего вычисления матричных элементов.

***Сведение задачи к системе линейных алгебраических уравнений***

Полученные выше соотношения являются совершенно общими, и в них никак не конкретизирована геометрия излучателя.

В качестве элемента решетки рассмотрим проволочную систему, состоящую из набора тонких криволинейных проводников. В соответствии с моделью осевого тока будем полагать, что электрическое поле создается линейным током $\mathbf{I}(s')=\mathbf{s}'(s')I(s')$, сосредоточенным на оси проводника, где $s'$ – криволинейная координата, $\mathbf{s}'(s')$ – единичный вектор, касательный к линии тока.

Электрическое поле, порожденное таким током, выражается формулой [11]

$$\mathbf{E}^{\infty}(\mathbf{r})=\frac{W}{ik}\left(k^2+\mathrm{grad\,div}\right)\mathbf{A}^{\infty}(\mathbf{r}), \tag{1.7}$$

где $\mathbf{A}^{\infty}(\mathbf{r})=\int\mathbf{s}'(s')I(s')G^{\infty}\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}'(s')\right]ds'$ – векторный потенциал, а $W=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – волновое сопротивление свободного пространства. В данном случае векторная функция $\mathbf{r}'(s')$ определяет осевую линию проводника.

Проецируя поле (1.7) на единичный вектор $\mathbf{s}(s)$, касательный боковой поверхности проводника, подставляя выражение для векторного потенциала, внося дифференциальный оператор под знак интеграла и учитывая, что функция Грина зависит от разности векторов, после несложных преобразований получим

$$\mathbf{E}^{\infty}(s)\mathbf{s}(s)=\frac{W}{ik}\int_{L'}\left[k^2\mathbf{s}(s)\mathbf{s}'(s')G^{\infty}(s,s')-\frac{\partial^2}{\partial s\partial s'}G^{\infty}(s,s')\right]I(s')ds'.$$

Здесь обозначено $G^{\infty}(s,s')=G^{\infty}\left[\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}'(s')\right]$, а векторная функция $\mathbf{r}(s)$ описывает боковую поверхность проводника.

Согласно граничному условию в модели осевого тока продольная касательная полного поля на боковой поверхности проводника равна нулю. Таким образом, имеем интегральное уравнение для тока $I(s')$:

$$\frac{iW}{k}\int_{L'}\left[k^2\mathbf{s}(s)\mathbf{s}'(s')G^{\infty}(s,s')-\frac{\partial^2}{\partial s\partial s'}G^{\infty}(s,s')\right]I(s')ds'=\mathbf{E}^{\text{пад}}(s)\mathbf{s}(s), \tag{1.8}$$

где $\mathbf{E}^{\text{пад}}(s)$ – падающее поле (поле сторонних источников) на боковой поверхности проводника.

Для нахождения распределения тока $I(s')$ применим метод моментов [12]. Следуя стандартной процедуре, разложим искомый ток по системе базисных функций $\{u_n(s'),\ n\in 1,\ 2,\ \dots,\ N\}$:

$$I(s')=\sum_{n=1}^{N}I_n u_n(s'). \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.8) и проецируя последнее уравнение на систему весовых функций $\{\psi_m(s'),\ m\in 1,\ 2,\ \dots,\ N\}$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{N}Z_{mn}I_n=V_m,\quad m=1,2,\dots,N.$$

Здесь матричные элементы $Z_{mn}$ имеют смысл взаимного импеданса между двумя линейными токами с распределениями $u_n(s')$ и $\psi_m(s)$. Для них имеет место формула

$$Z_{mn}=\frac{iW}{k}\int\limits_{L'}\int\limits_{L}\left[k^2\mathbf{s}(s)\mathbf{s}'(s')G^{\infty}(s,s')-\frac{\partial^2}{\partial s\partial s'}G^{\infty}(s,s')\right]\psi_m(s)\varphi_n(s')dsds'\,. \qquad (1.10)$$

Элементы столбца правой части вычисляются по формуле

$$V_m=\int\limits_L \mathbf{E}^{\text{пад}}(s)\mathbf{s}(s)\psi_m(s)ds\,,\quad m=1,2,\ldots,N.$$

Примем, что базисные и весовые функции на концах проводников, а в случае использования базиса подобластей и на концах сегментов, обращаются в ноль. Тогда, преобразуя интеграл от второго слагаемого в (1.10) интегрированием по частям, получим

$$Z_{mn}=\frac{iW}{k}\int\limits_{L'}\int\limits_{L}\left[k^2\mathbf{s}(s)\mathbf{s}'(s')\psi_m(s)\varphi_n(s')-\frac{d\psi_m(s)}{ds}\frac{d\varphi_n(s')}{ds'}\right]G^{\infty}(s,s')dsds'.$$

Подставив в эту формулу выражение (1.4) для функции Грина, окончательно будем иметь

$$Z_{mn}^{\infty}=\frac{iW}{k}\frac{1}{2\pi A}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}_{pq}{}^2-k^2}\widetilde{Z}_{mn}(\boldsymbol{\kappa}_{pq})\,d\kappa_3\,, \qquad (1.11)$$

причем

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_{mn}(\boldsymbol{\kappa}_{pq})&=k^2\int\limits_L \mathbf{s}_m(s)\psi_m(s)\exp[-i\boldsymbol{\kappa}_{pq}\mathbf{r}(s)]ds\int\limits_{L'}\mathbf{s}_n(s')\varphi_n(s')\exp[i\boldsymbol{\kappa}_{pq}\mathbf{r}'(s')]ds'-\\&-\int\limits_L\frac{d\psi_m(s)}{ds}\exp[-i\boldsymbol{\kappa}_{pq}\mathbf{r}(s)]ds\int\limits_{L'}\frac{d\varphi_n(s')}{ds'}\exp[i\boldsymbol{\kappa}_{pq}\mathbf{r}'(s')]ds'\,.\end{aligned} \qquad (1.12)$$

***Вычисление элементов матрицы взаимных импедансов***

В дальнейшем рассмотрим проволочные структуры, состоящие из прямолинейных отрезков (сегментов). В этом случае области определения базисных и весовых функций включают несколько сегментов, и интегралы в (1.12) распадаются на сумму интегралов по этим сегментам. В каждом интеграле единичные векторы $\mathbf{s}(s)$ и $\mathbf{s}'(s')$ не зависят от переменной интегрирования и могут быть вынесены за знак интеграла.

Теперь о выборе базисных и весовых функций.

Для структур, содержащих разветвления, был предложен базис [13], автоматически удовлетворяющий условию Кирхгофа в узле (равенству нулю полного тока). В узле вводятся векторные функции, состоящие из двух ветвей, расположенных на разных проводниках, сходящихся к данному узлу. Если в узле сходится $M$ проводников, то достаточно ввести ($M$-1) подобных функций. В [13] описан универсальный алгоритм с использованием введенных функций для анализа произвольных проволочных структур. Поскольку, как отмечалось ранее, задачи об одиночной структуре и в бесконечной решетке отличаются лишь используемой функцией Грина, то алгоритм [13] полностью применим и к анализу плоских ФАР. Для этого достаточно использовать выражение (1.11) для нахождения матричных элементов.

Легко видеть, что для базисных и весовых функций полиномиального или тригонометрического вида (наиболее употребительных на практике) интегралы в (1.12) вычисляются аналитически. Более того, оказывается, что в этом случае интеграл в (1.11) также вычисляется аналитически. Это означает, что матричные элементы фактически представляются в виде характерных для спектрального подхода двойных рядов, состоящих из замкнутых аналитических выражений.

Ниже описанная процедура будет проведена для часто используемых кусочно-синусоидальных базисных и весовых функций.

Поскольку каждая кусочно-синусоидальная функция состоит из двух синусоидальных полугармоник вида

$$\phi_j(s)=\frac{\sin k(\Delta_j-s)}{\sin k\Delta_j}\,,\quad j=1,2\,,\quad 0\le s\le\Delta_j\,,$$

где $\Delta_j$ есть длина соответствующего сегмента, то (1.12) и, следовательно, (1.11) являются комбинацией четырех слагаемых.

Для каждого слагаемого в (1.12) после несложных, но громоздких вычислений и преобразований получим

$$\widetilde{Z}_{12}(\boldsymbol{\kappa}_{pq}) = -\frac{k^2 \exp[i\boldsymbol{\kappa}_{pq}(\mathbf{r}_2^{\text{ср}} - \mathbf{r}_1^{\text{ср}})]}{\sin k\Delta_1 \sin k\Delta_2} \times$$
$$\times \left\{(1+\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\left[e^+ S_1^+ S_2^- + (e^+)^* S_1^- S_2^+\right] + (1-\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\left[e^- S_1^+ S_2^+ + (e^-)^* S_1^- S_2^-\right]\right\},$$

где введены обозначения

$$e^{\pm} = \exp\left(ik\frac{\Delta_1 \pm \Delta_2}{2}\right), \quad S_j^{\pm} = \frac{\sin(k \pm \boldsymbol{\kappa}_{pq}\mathbf{s}_j)\dfrac{\Delta_j}{2}}{k \pm \boldsymbol{\kappa}_{pq}\mathbf{s}_j},$$

а вектор $\mathbf{r}_j^{\text{ср}}$ есть середина ветви, на которой расположено плечо синусоидальной гармоники. Индексы 1 и 2 относятся к весовой и базисной функциям соответственно.

Аналогично матричные элементы будут состоять из слагаемых вида

$$Z_{12}^{\infty} = -i\frac{15}{k^2 A}\frac{k\Delta_1}{\sin k\Delta_1}\frac{k\Delta_2}{\sin k\Delta_2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\exp[i\boldsymbol{\kappa}_{pq}^{\perp}(\mathbf{r}_2^{\text{ср}} - \mathbf{r}_1^{\text{ср}})_{\perp}] \times$$
$$\times \left\{(1+\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\left[e^+\widetilde{I}_1 + (e^+)^*\widetilde{I}_2\right] + (1-\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\left[e^-\widetilde{I}_3 + (e^-)^*\widetilde{I}_4\right]\right\}. \tag{1.13}$$

В данной формуле

$$\widetilde{I}_1 = I(a,b,c_1,t_1^+,c_2,t_2^-), \quad \widetilde{I}_2 = I(a,b,c_1,t_1^-,c_2,t_2^+),$$
$$\widetilde{I}_3 = I(a,b,c_1,t_1^+,c_2,t_2^+), \quad \widetilde{I}_4 = I(a,b,c_1,t_1^-,c_2,t_2^-),$$

$$a = k\left[\left(r_2^{\text{ср}}\right)_z - \left(r_1^{\text{ср}}\right)_z\right], \quad b = \frac{\gamma_{pq}}{k}, \quad c_j = \frac{k\Delta_j}{2}\left(s_j\right)_z, \quad t_j^{\pm} = (\mp k - \boldsymbol{\kappa}_{pq}^{\perp}\mathbf{s}_j^{\perp})\frac{\Delta_j}{2}, \quad j = 1,2,$$

а функция $I(a,b,c_1,t_1,c_2,t_2)$ есть

$$I(a,b,c_1,t_1,c_2,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(iat)}{t^2+b^2}\frac{\sin(c_1 t - t_1)}{c_1 t - t_1}\frac{\sin(c_2 t - t_2)}{c_2 t - t_2}dt.$$

Данный интеграл может быть вычислен в замкнутом виде. Для этого, используя представление синусоидальной функции через две показательные, запишем его в виде суммы четырех слагаемых $I = I_1 + I_2 - I_3 - I_4$, где

$$I_1 = \bar{I}\left(a - c_1 + c_2, t_2 - t_1, b, c_1, t_1, c_2, t_2\right), \quad I_2 = \bar{I}\left(a + c_1 - c_2, t_1 - t_2, b, c_1, t_1, c_2, t_2\right),$$
$$I_3 = \bar{I}\left(a + c_1 + c_2, t_1 + t_2, b, c_1, t_1, c_2, t_2\right), \quad I_4 = \bar{I}\left(a - c_1 - c_2, -t_1 - t_2, b, c_1, t_1, c_2, t_2\right),$$

а введенная функция есть

$$\bar{I}\left(\bar{c},\bar{t},b,c_1,t_1,c_2,t_2\right) = \frac{\exp(-i\bar{t})}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\bar{c}t)}{\left(t^2+b^2\right)\left(c_1 t - t_1\right)\left(c_2 t - t_2\right)}dt.$$

Последний интеграл вычисляется с помощью теории вычетов. После всех преобразований окончательно получим для $\bar{c} \ge 0$ и $\bar{c} \le 0$ соответственно

$$\bar{I}\left(\bar{c},\bar{t},b,c_1,t_1,c_2,t_2\right) = \frac{\pi}{4}\exp(-i\bar{t})\left\{\frac{\exp(-b\bar{c})}{b\left(t_1 - ibc_1\right)\left(t_2 - ibc_2\right)} - \right.$$
$$\left. -\frac{2i}{c_1 t_2 - c_2 t_1}\left[\frac{\exp\left(i\bar{c}\dfrac{t_1}{c_1}\right)}{\left(\dfrac{t_1}{c_1}\right)^2 + b^2}\theta\left(-\frac{t_1}{c_1}\right) - \frac{\exp\left(i\bar{c}\dfrac{t_2}{c_2}\right)}{\left(\dfrac{t_2}{c_2}\right)^2 + b^2}\theta\left(-\frac{t_2}{c_2}\right)\right]\right\},$$

$$\bar{I}\left(\bar{c},\bar{t},b,c_1,t_1,c_2,t_2\right) = \frac{\pi}{4}\exp(-i\bar{t})\left\{\frac{\exp(b\bar{c})}{b\left(t_1 + ibc_1\right)\left(t_2 + ibc_2\right)} + \right.$$

$$+\frac{2i}{c_1t_2-c_2t_1}\left[\frac{\exp\left(i\bar{c}\dfrac{t_1}{c_1}\right)}{\left(\dfrac{t_1}{c_1}\right)^2+b^2}\theta\left(\frac{t_1}{c_1}\right)-\frac{\exp\left(i\bar{c}\dfrac{t_2}{c_2}\right)}{\left(\dfrac{t_2}{c_2}\right)^2+b^2}\theta\left(\frac{t_2}{c_2}\right)\right]\Bigg\}.$$

Здесь использована функция $\theta(x)$, представляющая собой единичный скачок

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{при} \quad x<0\end{cases}.$$

Итак, взаимосвязь двух синусоидальных полугармоник в бесконечной плоской ФАР представляется в виде двойного ряда (1.13), члены которого являются замкнутыми аналитическими выражениями. Матричные элементы (элементы матрицы взаимных импедансов) будут состоять из четырех слагаемых вида (1.13), содержащих характерные спектральные двойные ряды. В этом заключается основной результат предлагаемого метода: взаимный импеданс произвольно ориентированных синусоидальных токовых гармоник для проволочной структуры в составе бесконечной плоской ФАР представляется в виде стандартных спектральных двойных рядов.

В остальном алгоритм остается тем же, что и описанный в [13]. Таким образом, переход от одиночной структуры к плоской решетке структур заключается в замене формул, используемых для вычисления взаимной связи полугармоник: вместо выражений из [13] следует использовать формулу (1.13).

***Заключение***

Таким образом, в данной работе предложен метод расчета характеристик проволочных излучателей в составе бесконечной плоской ФАР с косоугольной сеткой. Каждый излучатель может состоять из набора произвольным образом ориентированных в пространстве прямолинейных проволочных отрезков, включая разветвления, петли и т. д. Для элементов матрицы взаимных импедансов получены двойные спектральные ряды из замкнутых аналитических выражений.

**Литература**

1. Амитей, Н. Теория и анализ фазированных антенных решеток / Н. Амитей, В. Галиндо, Ч. Ву. – М. : Мир, 1974. – 456 с.

2. Ewald, P. Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale / P. Ewald // Ann. Phys. – 1921. – Vol. 64. – P. 253–287.

3. Singh, S. Application of transforms to accelerate the summation of periodic free-space Green’s functions / S. Singh, R. Singh // IEEE Transactions. – 1990. – Vol. MTT-38, № 11. – P. 1746–1748.

4. Singh, S. On the use of Shanks’s transform to accelerate the summation of slowly converging series / S. Singh, R. Singh // IEEE Transactions. – 1991. – Vol. MTT-39, № 3. – P. 608–610.

5. Singh, S. On the use of ρ-algorithm in series acceleration / S. Singh, R. Singh // IEEE Transactions. – 1991. – Vol. AP-39, № 10. – P. 1514–1517.

6. Иванишин, М.М. Модификация метода Куммера для эффективного вычисления функции Грина двумерно-периодических структур / М.М. Иванишин, С.П. Скобелев // Радиотехника. – 2008. – № 10. – С. 31–36.

7. Skobelev, S.P. A modification of the Kummer’s method for efficient computation of the 2-D and 3-D Green’s functions for 1-D periodic structures / S.P. Skobelev // IEEE Transactions. – 2012. – Vol. AP-60, № 1. – P. 412–416.

8. Malyuskin, O. Convergence acceleration of the doubly periodic Green’s function for the analysis of thin wire arrays / O. Malyuskin, V. Fusco, A. Schuchinsky // IET Microw. Antennas Propag. – 2008. – Vol. 2, № 5, P. 410–417.

9. Pocklington, H.C. Electrical oscillations in wires / H.C. Pocklington // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1897. – Vol. 9, № 7. – P. 324–332.

10. Mei, K.K. On the integral equations of thin wire antennas / K.K. Mei // IEEE Transactions. – 1965. – Vol. AP-13, № 3. – P. 374–378.

11. Марков, Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1983. – 296 с.

12. Harrington, R.F. Field computation by moment methods / R.F. Harrington. – New York : Machmillan, 1968. – 240 p.

13. Кудин, В.П. Алгоритмизация задач возбуждения проволочных структур / В.П. Кудин, А.П. Рубан // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1986. – Т. 29, № 8. – С. 10–15.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 6211.385*

# Коаксиальные гироклинотроны

А.А. Кураев, Д.В. Лукашонок, А.К. Синицын, И.Н. Цырельчук

Приведены результаты оптимизации коаксиальных гироклинотронов. В таких приборах за счет коаксиально конической конфигурации резонатора образуется наклон зеркал резонатора («клин») относительно продольного движения электронов. В результате, при достаточной длине области взаимодействия и оптимальной конфигурации резонатора все радиальные слои электронного потока оказываются в одинаковых условиях взаимодействия с полем резонатора. Приведенные в статье результаты численного моделирования и оптимизации конструкций коаксиальных гироклинотронов свидетельствуют об их реализуемости и перспективности в отношении повышения мощности и КПД коротковолновых гиротронов.
**Ключевые слова:** циклотронный резонанс, резонатор, гиротрон, численное моделирование.

The article provides the results of optimization of coaxial gyroklinotrons. In such devices the slope of the resonator glass (“wedge”) on the longitudinal motion of electrons is formed by coaxial conical configuration of the resonator. As a result, at sufficiently large length of the interaction region and the optimal configuration of the resonator all radial layers of the electron beam cross an equal amount of the surface of the resonator field. The results of numerical modelling and design optimization of coaxial gyroklinotrons given in the article are the evidence of their feasibility and prospects for a substantial increase in power and efficiency of short-wave gyrotrons.
**Keywords:** cyclotron resonance, resonator, gyrotron, numerical modeling.

***Введение***

Современное развитие электроники СВЧ требует проработки новых подходов к генерации электромагнитного поля. Это требует использования эффективных математических и вычислительных методов при формировании модели. Исследуемый электронный прибор – коаксиальный гироклинотрон – может предоставить возможность преодолеть известные недостатки коротковолновых гиротронов.

Суть проблемы заключается в динамическом расслоении широкого электронного потока (ЭП) в поперечно-неоднородном поле резонатора. Проблема может быть решена в гироклинотроне, предложенном в 1969 г. в [1]. В этом приборе широкий спирализованный ЭП проходит наклонно (под углом φ) относительно плоскостей зеркал двухзеркального открытого резонатора. Благодаря этому при оптимизированном φ каждый слой ЭП при достаточной протяженности резонатора имеет в среднем одинаковые условия взаимодействия, и невзаимодействующих слоев (в узлах поля в обычном гиротроне) нет. В [2]–[4] на основе уточненной модели открытого резонатора было показано, что в таком приборе при правильном выборе угла наклона (φ~0,9 рад) КПД взаимодействия достигает 55% при разбросе по слоям до 9%. Т. е. эффективность гироклинотрона с толстым пучком не уступает максимальному КПД обычных гиротронов с тонким ЭП.

В настоящей работе показаны результаты расчета коаксиальных гироклинотронов на рабочих модах $H_{041}$ и $H_{081}$.

***Устройство коаксиального гироклинотрона***

Коаксиальный гироклинотрон отличается от классического гиротрона тем, что электродинамическая система выполнена в виде коаксиально-конусного резонатора, имеющего наклон зеркал относительно оси электронного пучка [5].

В основе механизма генерации рассматриваемого гироклинотрона лежит явление циклотронного резонанса:

$$(1-\frac{v_z}{v_\phi})\omega \approx k\Omega \ ,$$

где $v_z$ – продольная скорость электрона, $c$ – скорость света в пустоте, $v_ф$ – фазовая скорость попутной парциальной волны стоячего поля (в нашем случае $v_ф = c/\sin\varphi$), $\omega$ – частота генерации, $k$ = 1, 2, 3… – гармоника циклотронной частоты, $\Omega$ – циклотронная частота ($\Omega = e/m\,B_0$), $e$ – заряд электрона, $m$ – масса электрона, $B_0$ – индукция статического фокусирующего магнитного поля. Далее используется безразмерная функция магнитного поля $F_0 = \dfrac{\Omega_0}{\omega} = \dfrac{eB_0}{m_0 c}$, где $m_0$ – масса покоя электрона, $e$ – заряд электрона, $c$ – скорость света в пустоте.

***Расчет поля резонатора***

Рассмотрим симметричное (азимутально-однородное) электромагнитное Н-поле в коаксиальном волноводе, геометрия которого представлена на рисунке 1 [5]:

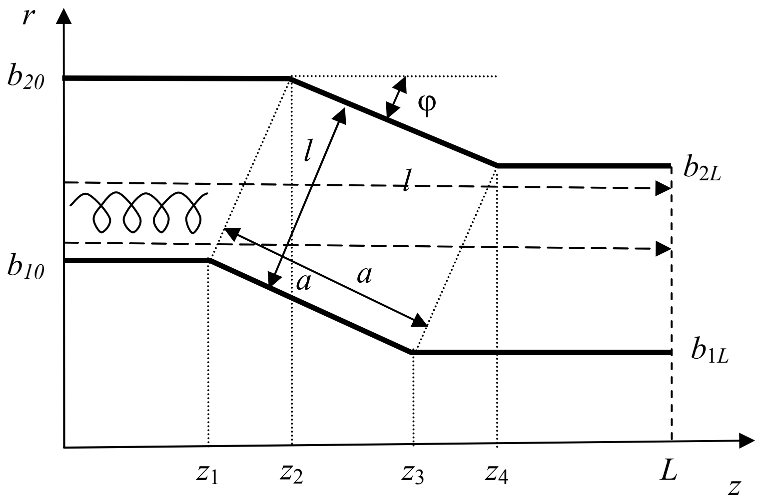



Рисунок 1 − Сечение генератора

В такой геометрии при определенном соотношении размеров возможно запирание волны $H_{0i}$ в области [$z_1$,$z_4$]. При этом получается резонатор на рабочем колебании $H_{0i1}$ за счет того, что распространяющаяся на участке [$z_1$,$z_4$] волна $H_{0i}$ на регулярных участках [0,$z_1$] и [$z_4$,L] оказывается закритической за счет уменьшения соответствующих сечений. При этом волны $H_{0j}$ с индексами j<i остаются распространяющимися. В результате этого рассматриваемый резонатор обладает хорошими селективными свойствами по отношению к высшей *i*-моде.

В качестве исходных параметров можно принять: $\varphi$, $z_1$, $b_{1L}$, $a$, $\alpha_L = b_{2L}/b_{1L}$. Тогда остальные параметры пересчитываются при помощи следующих выражений:

$b_{2L} = b_{1L}\cdot\alpha_L;$

$l = (b_{2L} - b_{1L})/\cos\varphi;$

$z_2 = z_1 + l\cdot\sin\varphi;\ z_3 = z_1 + a\cdot\cos\varphi;\ z_4 = z_2 + a\cdot\cos\varphi;$

$L = z_4 + z_1;$

$b_{10} = b_{1L} + a\cdot\sin\varphi;\ b_{20} = b_{10} + l\cdot\cos\varphi;$

$\alpha_0 = b_{20}/b_{10}.$

Решение уравнений Максвелла для симметричного Н-поля может быть сведено к решению скалярного дифференциального уравнения Гельмгольца для комплексной функции двух переменных $u(r,z)$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + W^2\frac{u}{r} = 0. \qquad (1)$$

Граничные условия для уравнения (1) ставятся следующим образом:

при $r = b_1(z)$ и $b_2(z)$: $u = 0$

при $z = 0$:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{jk_{z0}^{м}}{r}u=2jk_{z0}^{м}A_0e^{+}(r)\,,k_{z0}^{м}=\sqrt{W^2-\chi_{0i}^2/b_{10}^2}\;\; e_0^{+}(r)=\frac{J_1(\chi_{0i}r/b_{10})}{J_1(\chi_{0i})}-\frac{Y_1(\chi_{0i}r/b_{10})}{Y_1(\chi_{0i})},$$

где $\chi_{0i}$ – $i$-й корень дисперсионного уравнения для входного волновода $J_1(\chi_{0i})Y_1(\chi_{0i}\alpha)-J_1(\chi_{0i}\alpha)Y_1(\chi_{0i})=0$, $\alpha_0=b_{20}/b_{10}$;

при z = L:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{jk_{zL}^{м}}{r}u=2jk_{z0}^{м}A_Le^{-}(r)\,,\; k_{zL}^{м}=\sqrt{W^2-\chi_{Li}^2/b_{1L}^2}\,,\; e_0^{-}(r)=\frac{J_1(\chi_{Li}r/b_{10})}{J_1(\chi_{Li})}-\frac{Y_1(\chi_{Li}r/b_{10})}{Y_1(\chi_{Li})},$$

где $\chi_{Li}$ – $i$-й корень дисперсионного уравнения для выходного волновода $J_1(\chi_{Li})Y_1(\chi_{Li}\alpha)-J_1(\chi_{Li}\alpha)Y_1(\chi_{Li})=0$, $\alpha_L=b_{2L}/b_{1L}$.

Для распространяющихся волн: $W^2-\chi_{0Li}^2/b_{10L}^2>0$ и $k_{z0L}^{м}$ – действительные волновые числа, для закритических волн: $W^2-\chi_{0Li}^2/b_{10L}^2<0$ и $k_{z0L}^{м}$ – чисто мнимые волновые числа.

Компоненты Н-поля выражаются через потенциал $u$ по формулам:

$$\dot{B}_z=\frac{j}{W}\frac{\partial u}{r\partial r};\; \dot{B}_r=-\frac{j}{W}\frac{\partial u}{r\partial z};\; \dot{E}_\varphi=\frac{u}{r}. \qquad (2)$$

Здесь введены безразмерные геометрические параметры как отношение размерного значения параметра к коэффициенту $k=\lambda_0/2\pi$ ($\lambda_0=2\pi c/\omega_0$, $c$ – скорость света в пустоте, $\omega_0$ – опорная частота). Размерные величины, имеющие одинаковое написание с безразмерными, помечены штрихом. $W=\omega/\omega_0$, $\omega$ – рабочая частота, $\vec{E}=\vec{E}'/E_m$, $\vec{B}=\vec{B}'c/E_m$ – электрическая и магнитная составляющие СВЧ поля, $E_m=\frac{m_0\omega_0 c}{e}$, $m_0$, $e$ – масса покоя и заряд электрона.

Решение выше приведенной краевой задачи осуществлялось в системе математического программирования MATLAB. С использованием оптимизационной процедуры удалось подобрать геометрические параметры для двух вариантов резонатора. В первом варианте реализован резонатор с рабочей модой $H_{041}$ (рисунок 2), второй вариант рассчитан для моды $H_{081}$ (рисунок 3).

В первом варианте для моды $H_{041}$ удалось реализовать условия запирания только одной высшей (4-й) моды. При этом, однако, угол наклона $\varphi=0,57$ далек от оптимального $\varphi\approx0,9$ [4]. Однако при значении угла $\varphi\approx0,91$ в рассматриваемой геометрии (рисунок 1) не удается запереть только одну высшую моду (i=8), т. к. наряду с ней запертыми оказываются и моды i=5, i=6, i=7. В результате, хотя во втором варианте получен угол, близкий к оптимальному, и длина области взаимодействия увеличена вдвое, однако заметно присутствие паразитных мод значительной амплитуды.

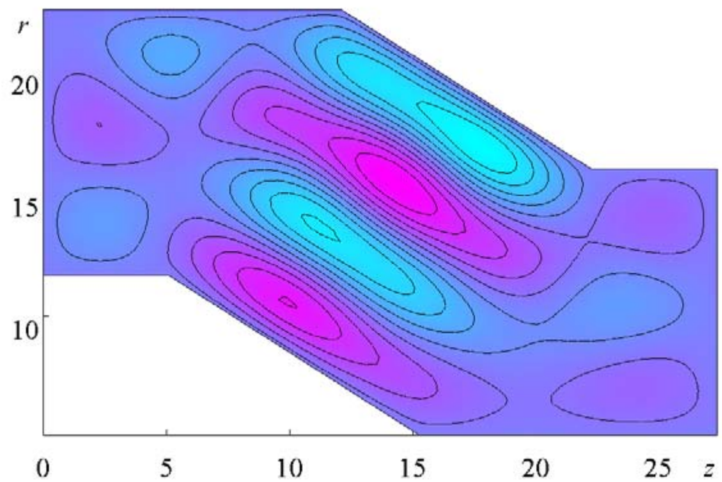



Рисунок 2 – Уровни потенциала u(r,z) для моды $H_{041}$
$\varphi=0,56$, $z_1=b_{1L}=5,1$, $a=14,1$, $\alpha_L=3,67$

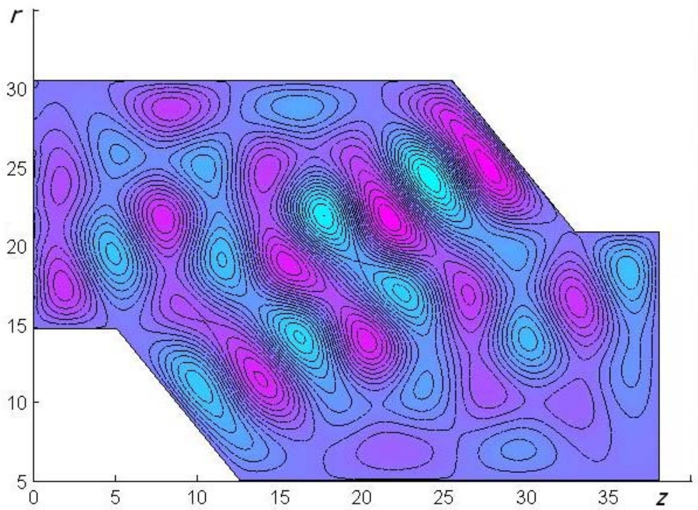



Рисунок 3 – Уровни потенциала $u(r,z)$ для моды $H_{081}$
$\varphi=0{,}91,\ z_1=b_{1L}=5{,}1,\ a=12{,}2,\ \alpha_L=4{,}09$

Взаимодействие электронного пучка с СВЧ полем моделировалось на основе метода крупных частиц. Начало координат ($z = 0$) совместим с началом резонатора $z_1$, ось $z$ направим по ходу движения электронов. Безразмерные релятивистские уравнения движения крупных частиц запишем в виде [6]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,P_{ri}}{dz} = \dfrac{1}{\beta_{zi}}\left(\dfrac{\gamma_i \beta_{\varphi i}^2}{r_i} - \beta_{\varphi i} B_z\right); \\ \dfrac{d\,P_{\varphi i}}{d\,z} = \dfrac{1}{\beta_{zi}}\left(-\dfrac{\gamma_i \beta_{ri} \beta_{\varphi i}}{r_i} - E_\varphi - \beta_{zi} B_r + \beta_{ri} B_z\right); \\ \dfrac{d\,P_{zi}}{d\,z} = \dfrac{1}{\beta_{zi}} \beta_{\varphi i} B_r; \\ \dfrac{d\,r_i}{d\,z} = \dfrac{\beta_{ri}}{\beta_{zi}}; \quad \dfrac{d\theta_i}{d\,z} = \dfrac{1}{\beta_{zi}}; \ \vec{P}_i = \gamma_i \vec{\beta}_i; \quad \gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}_i^2}} = \sqrt{1 + {P_{ri}}^2 + P_{\varphi i}^2 + P_{zi}^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Начальные условия имеют вид:

$$\theta_i(0) = \frac{2\pi}{N}(i+0.5); \ r_i(0) = (b_{1l} + b_{20}) \cdot 0{,}5 + r_0 + d_{r0};$$

$$P_{rli}(0) = 0; \ P_{zi}(0) = \gamma_i \frac{\beta_{e0}}{\sqrt{1+q^2}} \ P_{\varphi i}(0) = \gamma_i \frac{\beta_{e0} \cdot q}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Здесь $i$ – номер частицы, $r_0$ – радиус ларморовской орбиты, $d_{r0}$ – сдвиг по вертикали оси пучка от центра резонатора, $\vec{\beta}_i = \vec{v}_{ei}/c$, $\theta_i = \omega t_i$, $t_i$ – относительная скорость и время пролета частицей сечения $z$, $q$ – питч фактор. $F = \dfrac{eB_0}{m_0\omega}$, где $B_0$ – индукция направляющего магнитного поля. Компоненты $B_z$, $B_r$, $E_\varphi$ электромагнитного поля, входящие в уравнение (3), вычислялись следующим образом. После решения уравнения (1) находилось распределение нормированных компонент поля резонатора в области электронного пучка $D$:

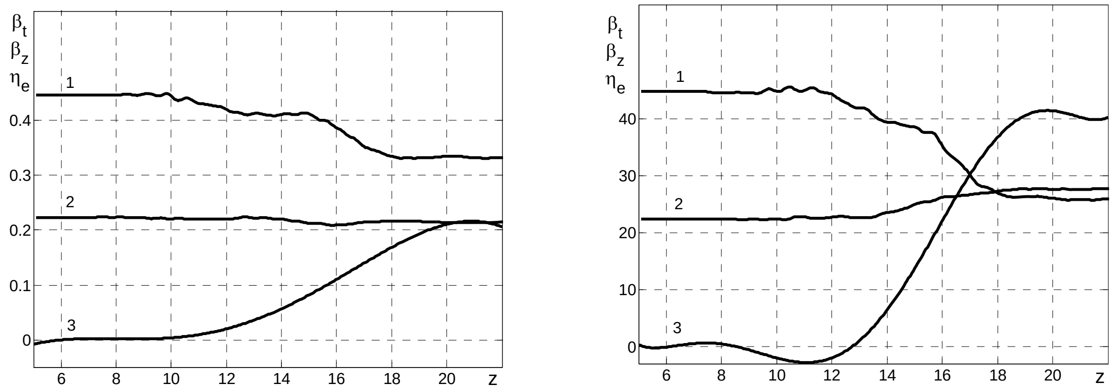
$$E_{\max} = \max_{r,z\in D} \operatorname{real} \frac{u(r,z)}{r};$$

$$E_\varphi^0\,(r,z) = \operatorname{real}\frac{u(r,z)}{r}\Big/E_{\max}; \ B_r^0\,(r,z) = -\operatorname{real}\frac{j}{W}\frac{\partial u}{r\partial z}\Big/E_{\max}; \quad B_z^0 = \operatorname{real}\frac{j}{W}\frac{\partial u}{r\partial r}\Big/E_{\max}.$$

Затем вычислялись компоненты $E_\varphi = A \cdot E_\varphi^0$; $B_r = A \cdot B_r^0$; $B_z = A \cdot B_z^0$ , где $A$ – безразмерная амплитуда поля в резонаторе, которая связана с размерной амплитудой $E_m'^A$ соотношением $E_m'^A = A \cdot E_m$.

Суммарный электронный КПД рассчитывался по формуле

$$\eta_e(z) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s}\frac{\gamma_0 - \gamma_{li}(z)}{\gamma_0 - 1}.$$




а) – $H_{04}$ мода б) – $H_{08}$ мода

Рисунок 4 − Характеристики коаксиального гироклинотрона:
1 – $\beta_t(z)$; 2 – $\beta_z(z)$; 3 – $\eta_e(z)$

Для первого варианта резонатора был получен максимальный электронный КПД 22% при следующих значениях параметров: $F_0 = 0{,}9549$; $A = 0{,}6968$; $q = 2$; $\beta_0 = 0{,}5$. Расчет производился $N_{es} = 8$. На рисунке 4 а) представлены графики зависимостей КПД, средних $\beta_t$, $\beta_z$ от координаты $z$.

Для моды $H_{08}$ получен максимальный (при $dr_0 = dr_{opt}$) электронный КПД 27% при следующих значениях параметров: $F_0 = 0{,}8884$; $A = 0{,}6938$; $q = 2$; $\beta_0 = 0{,}5$. Расчет производился $N_{es} = 8$. На рисунке 4 б) представлены графики зависимостей КПД, средних $\beta_t$, $\beta_z$ от координаты $z$.

Как видно из полученных результатов, при приближении к оптимальному углу $\varphi \approx 0{,}9$ электронный КПД возрастает. Однако, для уменьшения амплитуды $A$ высокочастотного поля следует увеличивать длину области взаимодействия, что возможно лишь при переходе на большие поперечные индексы рабочей моды. Изображение поля на рисунке 3 показывает, что в этом варианте геометрии резонатора, кроме рабочей $H_{081}$ моды, возбуждается на той же частоте целый спектр паразитных мод. Для очистки спектра следует использовать несколько модифицированную конфигурацию конического резонатора, например, изображенную на рисунке 5.

***Заключение***

В результате проведенной работы были найдены два варианта коаксиально-конического резонатора и приведены распределения поля их рабочих мод. Решение задачи электроники позволило определить максимально достижимые значения КПД гиротрона для найденных вариантов резонатора. Несмотря на присутствие паразитных гармоник, расчет гироклинотрона для моды $H_{081}$, наклоненной под оптимальным углом, показал достаточно высокий уровень электронного КПД, который составил 37%. Дальнейшее улучшение характеристик описанного гироклинотрона возможно при модификации конструкции резонатора, приводящей к очистке паразитных мод, увеличению его геометрических размеров $l$, $a$ и, как следствие, длины области взаимодействия.

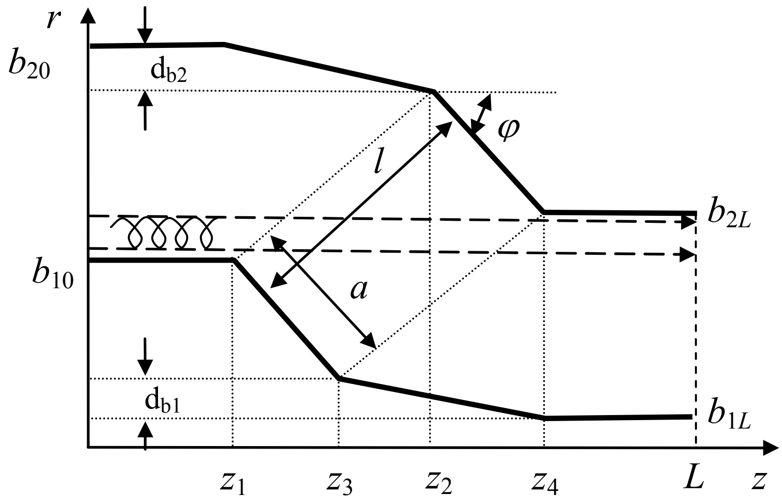



Рисунок 5 – Модификация конического резонатора

## Литература

1. Кураев, А.А. МЦР – монотрон с широким электронным потоком и наклонным относительно оси резонатора магнитным полем / А.А. Кураев // Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14, № 9. − С. 1614−1622.

2. Kurayev, A.A. Gyroklinotron's Efficiency / A.A. Kurayev, A.K. Sinitsyn // Proceeding of the First IEEE International Vacuum Electronic Conference, April 27–29, 2004, Monterey, USA. − P. 2–5.

3. Кураев, А.А. Расчет и оптимизация по КПД гироклинотрона / А.А. Кураев, А.К. Синицын // 14 международная конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии», 13–17 сентября 2004 г., Севастополь, Крым, Украина. − С. 215−217.

4. Кураев, А.А. Перспективы повышения мощности коротковолновых гиротронов / А.А. Кураев, А.К. Синицын // Радиотехника. − 2004. − № 9. − С. 48−53.

5. Кураев, А.А. Коаксиальный гироклинотрон / А.А. Кураев, Д.В. Лукашонок, А.К. Синицын // Доклады БГУИР. – № 1(55). − 2011. − С. 85–90.

6. Батура, М.П. Основы теории расчета и оптимизации современных приборов СВЧ / М.П. Батура, А.А. Кураев, А.К. Синицын. – Минск : БГУИР, 2006. − 275 с.

Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники

Поступило 12.11.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 621.396*

# Преобразование поляризации при отражении СВЧ волны от плоской двухслойной структуры на основе омега-элементов оптимальной формы

М.А. Подалов, И.В. Семченко

Создана плоская двухслойная структура на основе омега-элементов оптимальной формы. Рассчитано оптимальное расстояние между слоями. Экспериментально исследовано преобразование поляризации электромагнитной волны при отражении СВЧ излучения от плоской двухслойной решетки. Полученная искусственная структура обладает поляризационными характеристиками, превосходящими характеристики плоских двумерных однослойных решеток, образованных оптимальными омега-элементами. Показано, что такие структуры могут применяться для создания преобразователей поляризации в определенном диапазоне электромагнитных волн.
**Ключевые слова:** омега-элемент, метаматериал, СВЧ излучение, преобразователь поляризации, двухслойная структура.

Flat bilayer structure is created on the basis of the optimum form omega-elements. The optimal distance between the layers is calculated. The experimental research of the transformation of polarization of an electromagnetic wave by reflection of microwave radiation from a flat two-layer lattice is carried. The obtained artificial structure possess polarization characteristics exceeding the performance of flat two-dimensional single layered lattices formed of optimal omega-elements. It is shown that such structures can be applied to creation of converter of polarization in certain range of electromagnetic waves.
**Keywords:** omega-element, metamaterial, microwave radiation, converter of polarization, bilayer structure.

За последние 20 лет было проведено большое количество исследований гиротропных свойств искусственных композитных сред в микроволновом диапазоне, созданных на основе спиральных и омега-элементов [1]–[8].

Задачей нашей работы является исследование взаимодействия электромагнитного излучения микроволнового диапазона с плоской двухслойной решеткой, состоящей из омега-элементов с предварительно рассчитанными оптимальными параметрами [9]. Целью является демонстрация того, что такие структуры могут иметь большое число потенциальных применений, в частности, они могут использоваться для преобразования поляризации электромагнитных волн микроволнового диапазона, например, получения циркулярно-поляризованной волны.

В способе, рассмотренном в данной работе, преобразование поляризации электромагнитной волны из линейной в круговую происходит вне зависимости от ориентации плоскости линейной поляризации падающей электромагнитной волны при заданном направлении распространения падающей волны.

Формирование циркулярно-поляризованной волны происходит благодаря излучению связанных между собой электрического дипольного момента и магнитного момента каждого омега-элемента, которые дают равные по абсолютной величине вклады в отраженную волну. Преимущество использования плоской двухслойной омега-структуры для получения циркулярно-поляризованной волны заключается в простоте изготовления и масштабирования. Омега-структура является плоской, следовательно, производить её можно, например, методом травления на печатной плате, практически в любом доступном масштабе.

Схема проведения эксперимента на отражение электромагнитной волны от плоской двумерной решетки, состоящей из упорядоченных омега-элементов, подробно описана нами ранее [10], [11]. Плечи омега-элементов лежат перпендикулярно к плоскости колебания вектора напряжённости электрического поля падающей волны. В этом случае омега-элементы активируются магнитным полем падающей волны. Плоскость образца расположена под углом $\alpha = 45^0$ к волновому вектору падающей волны. С целью уменьшения отражения от стен и создания условий, приближающихся к условиям «свободного пространства», исследования проводятся в безэховой камере.

Ранее была установлена оптимальная форма омега-элемента на основе анализа возбуждаемых в нем электромагнитных колебаний. При этом были рассмотрены три модели распределения тока в омега-элементе [9]–[11]. Найденные оптимальные параметры омега-элемента используются в данной работе. Изготовлена плоская периодическая двухслойная решетка на основе омега-элементов с оптимальными параметрами. Осуществлен эксперимент по преобразованию линейно-поляризованной СВЧ волны в циркулярную.

При расчетах мы использовали модель гармонического тока, в рамках которой выражения для $p$ и $m$ являются приближенными.

В то же время условие, когда электрический дипольный момент и магнитный момент омега-включения дают одинаковые по абсолютной величине вклады в излучаемую электромагнитную волну, выполняется точно, поскольку величины $p$ и $m$ взаимозависимы (рисунок 1).

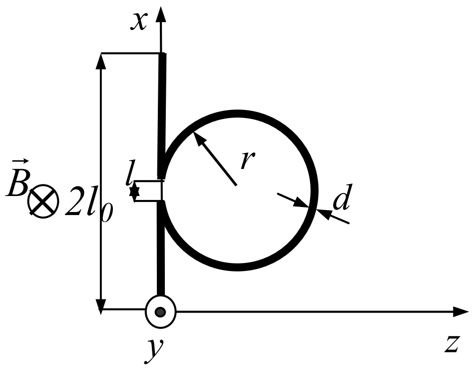



Рисунок 1 – Омега-элемент в поле падающей электромагнитной волны

Это условие имеет вид:

$$\left|p_x^{(1)} + p_x^{(2)}\right| = \frac{\left|m_y\right|}{c}. \tag{1}$$

Характеристики электромагнитного излучения, рассеянного на омега-элементе, зависят от соотношения геометрических размеров элемента и длины волны. В случае, когда линейные геометрические размеры омега-элемента меньше длины волны, можно применить дипольное приближение теории излучения [9].

Для создания плоской двухслойной решетки на основе омега-элементов оптимальной формы, способных эффективно преобразовывать поляризацию волны, следует вычислить геометрические параметры омега-структуры.

Для вычисления оптимальных геометрических параметров двухслойной плоской решетки использовалось условие Брэгга-Вульфа, при котором имеет место максимум отражения волны

$$2d \cdot \sin\phi = m\lambda. \tag{2}$$

Здесь $d$ – межплоскостное расстояние; $\varphi$ – угол скольжения, т. е. угол между отражающей плоскостью и падающим лучом; $\lambda$ – длина волны электромагнитного излучения и $m$ – так называемый порядок отражения, т. е. положительное целое число. Из (2) получаем

$$d = \frac{m\lambda}{2\sin\phi}, \tag{3}$$

отсюда при $m = 1$ следует

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\phi}. \tag{4}$$

Если угол падения электромагнитной волны равен

$$\phi = \frac{\pi}{4}, \tag{5}$$

тогда

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Откуда легко найти искомое $d$ в случае резонансной длины волны $\lambda$ = 10 см:

$$d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \approx 7.07 см. \tag{7}$$

Для проверки теоретических расчетов был изготовлен экспериментальный образец плоской двухслойной решетки на основе радиопрозрачного материала (пенопласта), содержащий металлические (медные) омега-элементы с ранее рассчитанными оптимальными параметрами:

$$r = 5\cdot10^{-3}\ м,\ L = 5\cdot10^{-2}\ м,\ d = 0{,}85\cdot10^{-3}\ м,\ l = 2\cdot10^{-3}\ м,\ l_0 = 9.29\cdot10^{-3}\ м,$$

где $r$ – радиус витка; $L$ – длина проволоки, из которой изготовлен омега-элемент; $d$ – диаметр медной проволоки; $l$ – расстояние между плечами; $l_0$ – длина плеча. Внешний вид образца показан на рисунках 2 и 3.

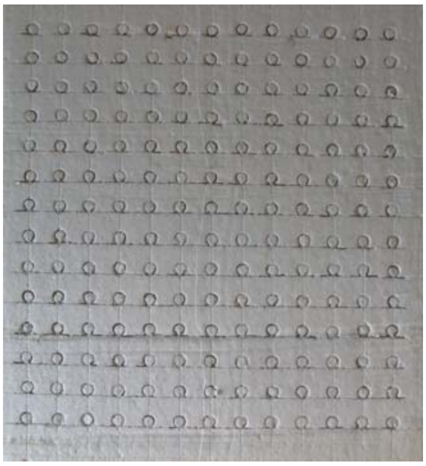


Рисунок 2 – Общий вид плоской двухслойной омега-структуры

Рисунок 3 – Вид сбоку плоской двухслойной омега-структуры

Предварительно был изготовлен специальный шаблон, с помощью которого были получены омега-элементы. Таким образом, была достигнута повторяемость формы и размеров омега-элементов.

Для измерения поляризационной характеристики в работе применяется метод, основанный на использовании антенны с линейной поляризацией поля (рупорная антенна).

В работе проведены исследования коэффициента эллиптичности электромагнитной волны, отраженной от образца двухслойной решетки, в зависимости от частоты подающего излучения. Измерения выполнялись в частотном интервале 2.6 … 3.9 ГГц.

Коэффициент эллиптичности $K$ отраженной волны вычислялся из поляризационной диаграммы как результат извлечения квадратного корня из отношения минимального и максимального значения уровня сигнала, которые определялись по показаниям индикатора приемника.

Результаты исследования приведены на рисунке 4.

В результате проведённых экспериментов в безэховой камере была получена зависимость коэффициента эллиптичности $K$ отражённой волны от частоты падающей волны. Вектор напряжённости электрического поля колеблется перпендикулярно плечам омега-элементов, при этом омега-элементы расположены в плоскости образца с двух сторон радиопрозрачного материала, образуя двухслойную омега-структуру из 364 включений (образец

№ 2). Результаты исследования приведены в сравнении с экспериментальным исследованием поляризационной селективности плоской двумерной однослойной решетки, образованной 182 омега-элементами с оптимальной формой (образец № 1) [9]. В образце № 1 вектор напряжённости электрического поля также колеблется перпендикулярно плечам омега-элементов.

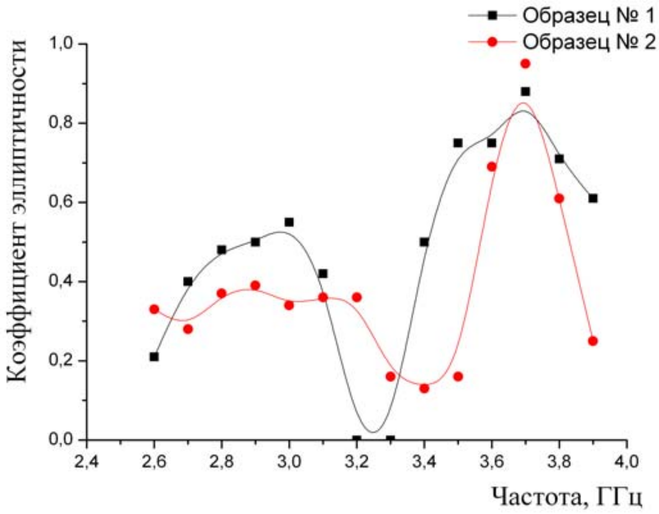



Рисунок 4 – График зависимости коэффициента эллиптичности K отражённой волны от частоты падающей волны для образцов № 1 и № 2

Как видно из графика (рисунок 4), коэффициент эллиптичности достигает значения $K = 0.88$ на частоте 3.7 ГГц для первого образца, для второго образца $K = 0.95$ на частоте 3.7 ГГц. Кривые зависимостей имеют практически одинаковую форму вдали от резонансной частоты. Для двухслойной структуры резонанс наблюдается в более узкой полосе частот. Это свойство объясняется взаимодействием волны с обоими слоями омега-элементов. При удалении от резонансной частоты коэффициент эллиптичности уменьшается. Данный эффект объясняется нарушением условия главного резонанса, для которого рассчитаны оптимальные параметры омега-элементов.

На основе проведённых исследований можно сделать заключение о том, что в зависимости от параметров омега-элементов искусственные двухслойные структуры на основе омега-включений оптимальной формы могут проявлять различные свойства и соответственно использоваться для преобразования поляризации электромагнитных волн микроволнового диапазона, в частности, для получения циркулярно-поляризованной волны.

## Литература

1. Advances in Complex Electromagnetic Materials / A. Priou [at al.] // Kluwer Academic Publishers, 1997. – Vol. 28. – P. 32–37.

2. Serdyukov, A.N. Electromagnetics of bi-anisotropic materials : theory and applications / A.N. Serdyukov, I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A. Sihvola // Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 2001. – P. 308–321.

3. Whites, K.W. Composite uniaxial bianisotropic chiral materials characterization : comparison of predicted and measured scattering / K.W. Whites, C.Y. Chang // J. Electromagn. Waves Applic. – 1997. – Vol. 11. – P. 371–394.

4. Tretyakov, S.A. Influence of chiral shapes of individual inclusions on the absorption in chiral composite coatings / S.A. Tretyakov, A.A. Sochava, C.R. Simovski // Electromagnetics. – 1996. – Vol. 16. – P. 113–127.

5. Cloete, J.H. The role of chirality in synthetic microwave absorbers / J.H. Cloete, M. Bingle, D.B. Davidson // Proc. Int. Conf. Electromagnetics in Advanced Application. – 1999. – P. 55–58.

6. Tretyakov, S.A. Proposed composite material for nonreflecting shields and antenna radomes / S.A. Tretyakov, A.A. Sochava // Electron. Lett. – 1993. – Vol. 29. – P. 1048–1049.

7. Семченко, И.В. Использование парных спиралей оптимальной формы для создания слабоотражающих покрытий в СВЧ диапазоне / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов // Проблемы физики, математики и техники. – 2009. – № 1. – С. 33–39.

8. Семченко, И.В. Создание и экспериментальное исследование слабо отражающих структур на основе Ω-элементов оптимальной формы / И.В. Семченко, М.А. Подалов, А.Н. Годлевская // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 6. – С. 118–124.

9. Подалов, М.А. Оптимальная форма омега-включений для метаматериалов / М.А. Подалов, И.В. Семченко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 4, ч. 2. – С. 172–176.

10. Семченко, И.В. Получение циркулярно-поляризованной отраженной СВЧ волны с помощью плоской периодической структуры на основе омега-элементов / И.В. Семченко, М.А. Подалов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6, ч. 2. – С. 40–43.

11. Семченко, И.В. Излучение циркулярно-поляризованных СВЧ волн плоской периодической структурой из Ω-элементов / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, М.А. Подалов, С.А. Третьяков // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 9. – С. 1084–1088.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 621.396.67*

# Численное моделирование поворота плоскости поляризации при отражении СВЧ волны от двумерной решетки на основе металлических спиралей

И.А. Фаняев, А.Л. Самофалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов

Проведен теоретический расчет параметров спирали, основанный на молекулярной теории естественной оптической активности. При помощи компьютерного моделирования в СВЧ диапазоне проведено исследование одиночной спирали с оптимальной формой и решетки размерностью 3×3, состоящей из металлических спиралей. Показано, что расстояние между спиралями в решетке не влияет на поворот плоскости поляризации отраженной волны. Экспериментальные данные, полученные для двумерной решетки, хорошо согласуются с результатом моделирования.
**Ключевые слова:** моделирование, решетка, спираль, угол поворота плоскости поляризации.

The theoretical calculation of parameters of the helix based on the molecular theory of natural optical activity is carried out. A single helix of optimal form and lattice with dimension 3×3 consisting of metal helices are investigated by computer simulation in the microwave range. It is shown that the distance between the helices in the lattice does not influence the rotation of the polarization plane of the reflected wave. The experimental data obtained for the 2D lattice are in good agreement with the simulation results.
**Keywords:** modelling, lattice, helix, angle of rotation of polarization plane.

***Введение***

В природе существуют такие среды, которые способны поворачивать плоскость поляризации падающей волны в оптическом диапазоне. Такие среды называются гиротропными или киральными [1], [2]. В СВЧ диапазоне такую среду можно создать искусственно, например, поместив металлические спиральные элементы с рассчитанными оптимальными параметрами в диэлектрический слой. В работах [3], [4] исследована возможность использования спиральной модели молекул для описания взаимодействия электромагнитных волн с искусственными киральными средами. Полученная аналитическая модель позволяет вычислить электрический дипольный и магнитный моменты, возникающие в спирали при взаимодействии с падающей линейно поляризованной электромагнитной волной с учетом входного сопротивления металлической спирали.

Теоретический анализ, проведенный в данной работе, основан на молекулярной теории естественной оптической активности. Проводится аналогия между спиралевидной молекулой и металлической спиралью без учета зависимости входного сопротивления спирали от угла подъема.

***Определение оптимального угла подъема спирали на основании модели молекулярной оптической активности***

Проведем оптимизацию параметров спиральных элементов, основываясь на модели молекулярной оптической активности. В работе [5] получена зависимость оптической вращательной способности $\vartheta$ от параметров спиральных молекул среды:

$$\vartheta = A\frac{r^2 s}{r^2 + s^2}, \qquad (1)$$

где $r$ – радиус витка спирали, $|s| = \dfrac{h}{2\pi}$ − приведенный шаг спирали, $h$ − шаг спирали.

Коэффициент пропорциональности $A$ в формуле (1) не зависит от геометрических параметров спиральных траекторий, поэтому его явное выражение можно не учитывать при оптимизации геометрии спиральных элементов.

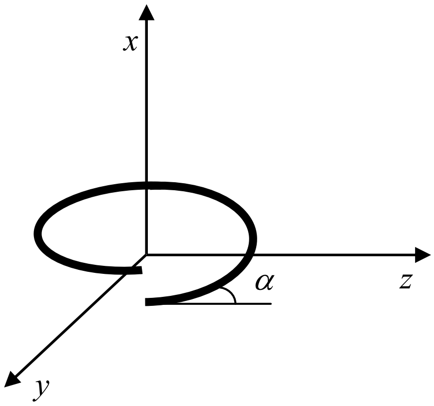



Рисунок 1 − Одновитковая спираль с правосторонним закручиванием ($q > 0$)

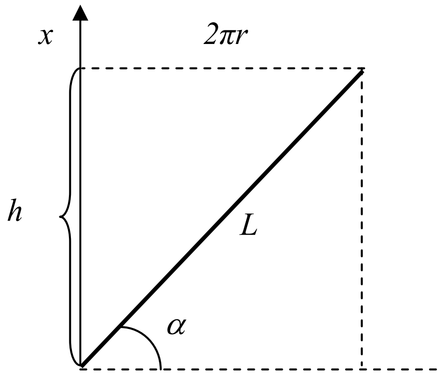



Рисунок 2 – Одновитковая спираль в развернутом виде

Проведем замену $s = \frac{1}{q}$, где $|q| = \frac{2\pi}{h}$ − удельное кручение спирали, тогда

$$\vartheta = A\frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1}. \tag{2}$$

Исследуем зависимость $\vartheta$ от параметров спирали и определим оптимальное значение угла подъема спирали $\alpha$ и число витков $N$ (рисунок 1), при котором $\vartheta$ будет иметь максимальное значение.

Можно показать, что в качестве множителя коэффициент $A$ содержит количество витков спирали $N = \frac{L}{L_в}$, где $L$ – длина проволоки, из которой изготовлена спираль, $L_в$ – длина одного витка. Тогда можно записать

$$\vartheta = A_0 N \frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1}, \tag{3}$$

где $A_0$ – коэффициент пропорциональности, характеризующий одновитковую спираль.

Из геометрических параметров спирали (рисунок 2) выразим $L_в$:

$$L_в = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} = 2\pi\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = 2\pi\sqrt{r^2 + \frac{1}{q^2}} = \frac{2\pi}{q}\sqrt{r^2 q^2 + 1}. \tag{4}$$

Преобразуем выражение (3) с учетом $N$ и $L_в$:

$$\vartheta = A_0 N \frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1} = A_0 \frac{q}{\sqrt{r^2 q^2 + 1}} \cdot \frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1} \cdot \frac{L}{2\pi} = A_0 \frac{r^2 q^2}{\left(r^2 q^2 + 1\right)^{3/2}} \cdot \frac{L}{2\pi}. \tag{5}$$

Исследуем полученную зависимость на экстремум, найдем производную $\frac{\partial \vartheta}{\partial q}$ и приравняем ее к нулю. После математических преобразований получим:

$$1 - \frac{1}{2} r^2 q^2 = 0, \tag{6}$$

откуда следует, что $qr = \sqrt{2}$.

Найдем максимальное значение $\vartheta$, подставив $qr$ в (5):

$$\vartheta = \frac{A_0 L}{3\sqrt{3}\pi}, \quad \vartheta = A_0 \cdot 0{,}0613L. \tag{7}$$

Найдем значение угла подъема спирали $\alpha$, при котором $\vartheta$ принимает максимальное значение, то есть при условии $qr = \sqrt{2}$.

Из рисунка 2 найдем $tg\alpha = \dfrac{Nh}{2\pi rN} = \dfrac{2\pi}{q\cdot 2\pi r} = \dfrac{1}{qr} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Отсюда следует $tg\alpha = 0{,}7071$ или $\alpha \approx 35°16'$.

*Рассмотрим несколько частных случаев:*

1) число витков спирали $N = 1$, и длина спирали соответствует условию главного частотного резонанса (длина проволоки равняется половине длины волны подающего излучения $L = \dfrac{\lambda}{2}$).

Из формулы (4) получим $\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{2\pi}{q}\sqrt{r^2q^2+1}$, затем путем математических преобразований выразим $r^2q^2$ и $r^2q^2+1$:

$$r^2q^2 = \frac{\lambda^2q^2 - 16\pi^2}{16\pi^2}, \tag{8}$$

$$r^2q^2+1 = \frac{\lambda^2q^2}{16\pi^2}. \tag{9}$$

Подставим полученные выражения в (3)

$$\vartheta = A_0\frac{r^2q}{r^2q^2+1} = A_0\frac{\lambda^2q^2-16\pi^2}{\lambda^2q^3}. \tag{10}$$

Исследуем уравнение (10) на экстремум: $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial q} = 0$. В итоге получим $q = \dfrac{4\pi}{\lambda}\sqrt{3}$. Тогда

$$\vartheta\left(\frac{4\pi}{\lambda}\sqrt{3}\right) = A_0\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{\pi\cdot 3\sqrt{3}} = A_0 0{,}0613L, \tag{11}$$

что полностью соответствует случаю $\alpha \approx 35°16'$ согласно (7).

2) пусть $N \neq 1$, тогда условие главного резонанса принимает вид

$$L_в = \frac{\lambda}{2N},$$

следовательно,

$$\vartheta = A_0N\frac{\lambda^2q^2 - 16\pi^2N^2}{\lambda^2q^3}. \tag{12}$$

Здесь мы учитываем, что в качестве множителя $\vartheta$ содержит число витков *N*, поскольку в условиях главного резонанса волны, излучаемые всеми витками спирали, согласованы по фазе.

При условии $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial q} = 0$ получаем $q = \dfrac{4\pi N\sqrt{3}}{\lambda}$.

Значит,

$$\vartheta\left(\frac{4\pi N\sqrt{3}}{\lambda}\right) = \vartheta_{\max} = A_0N\frac{\lambda}{2N}\frac{1}{\pi\cdot 3\sqrt{3}} = A_0 0{,}0613L. \tag{13}$$

Следовательно, результат совпадает с (7).

Как видно из полученного выражения, $\vartheta_{\max}$ не зависит от числа витков *N*.

Из проведенных исследований можно сделать вывод, что максимальное значение удельной вращательной способности соответствует углу подъема спирали $\alpha \approx 35°$ и может быть достигнуто при числе витков $N = 1$.

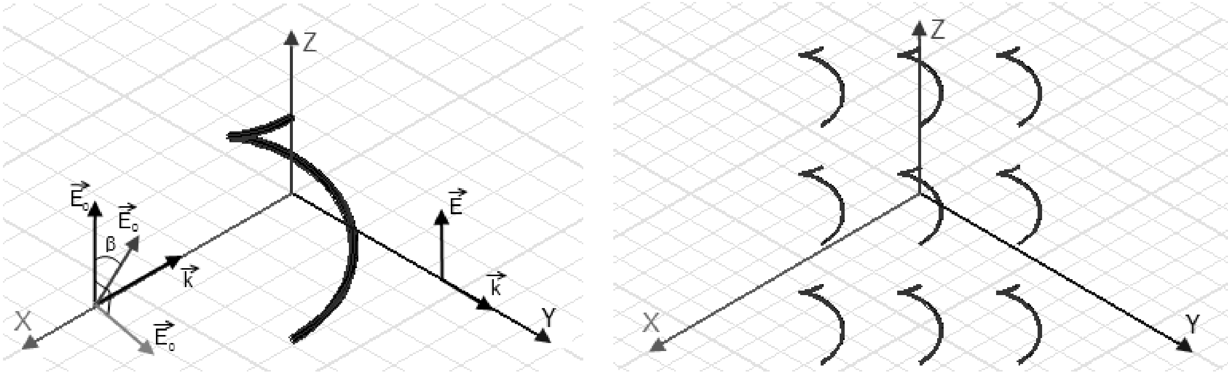
***Компьютерное моделирование***

При помощи компьютерного моделирования, основанного на использовании метода моментов (*MOM*) и метода конечных элементов, исследованы одновитковая спираль с углом подъема 35° и решетка из таких спиралей размерностью 3×3 элемента. Спираль имеет следующие параметры:

$$N = 1;\ \alpha = 35°;\ L = 0{,}05\ \text{м};\ r = 6{,}5\cdot10^{-3}\ \text{м};\ h = 28{,}8\cdot10^{-3}\ \text{м};\ d = 0{,}9\cdot10^{-3}\ \text{м},$$

где $N$ – число витков спирали; $\alpha$ – угол подъема спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали; $L$ – длина проволоки, из которой изготовлена спираль; $r$ – радиус витка; $h$ – шаг спирали; $d$ – диаметр проволоки.

Вся структура рассматривается в вакууме. Спираль является идеальным проводником (*PEC*). На рисунке 3 показана одиночная спираль и решетка размерностью 3×3, возбуждаемые падающей линейно поляризованной электромагнитной волной с различной поляризацией, задаваемой углом β.




а) б)

Рисунок 3 − Исследуемые модели в системе координат:
а) одиночная спираль; б) двумерная решетка

При моделировании угол поворота плоскости поляризации отраженной волны рассчитывается в дальней зоне в диапазоне частот 2,7–3,7 ГГц. Моделирование показало, что для одиночной спирали резонанс тока находится на частоте 2,85 ГГц, а для решетки – на частоте 2,8 ГГц. На рисунке 4 показана частотная зависимость угла поворота плоскости поляризации при различной ориентации вектора $\vec{E}_0$ падающей волны для одиночной спирали. Угол наклона вектора напряженности падающей волны (β) отсчитывается от оси $Oz$ по часовой стрелке (см. рисунок 3 а)).

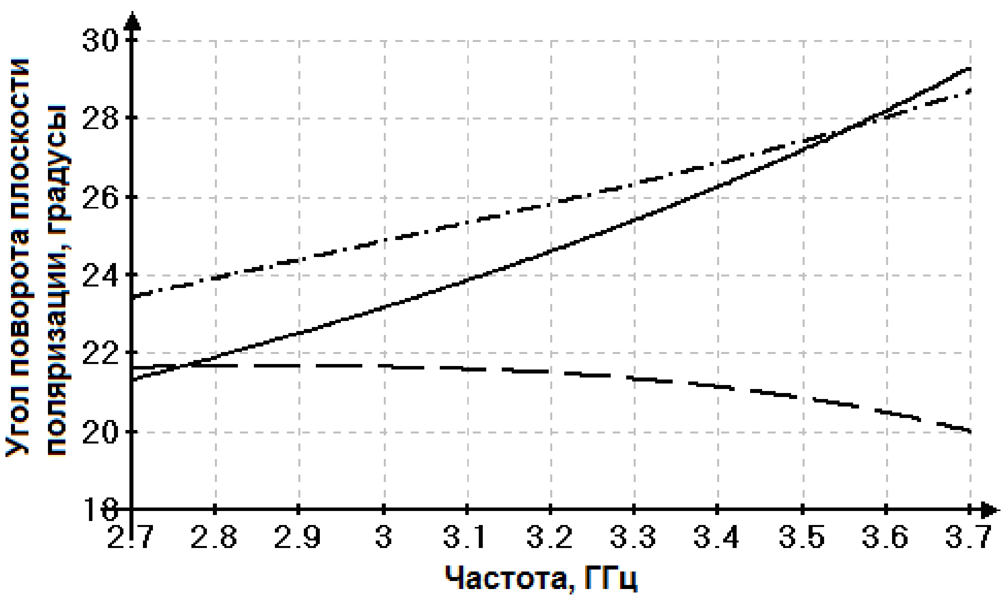



Рисунок 4 − График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации для одиночной спирали (β = 0º – сплошная линия; β = 45º – штриховая линия; β = 90º – штрихпунктирная линия)

Из рисунка 4 видно, что угол поворота плоскости поляризации лежит в пределах от 20 до 30 градусов при различной поляризации падающей волны на резонансной частоте в пределах от 21 до 24 градусов. На рисунке 5 приведена частотная зависимость угла поворота плоскости поляризации для решетки с размерностью 3×3 элемента.

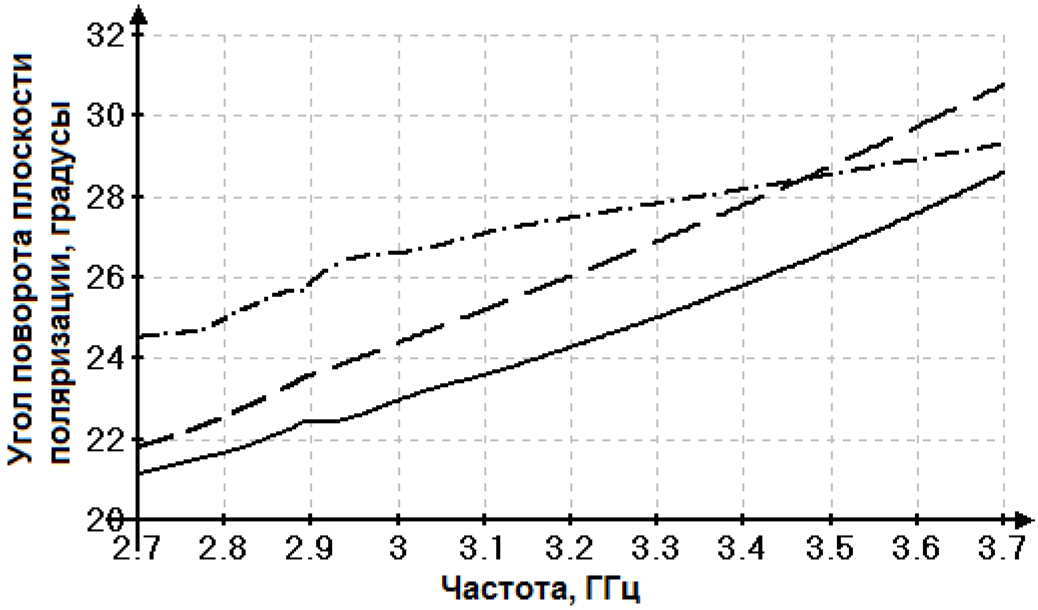



Рисунок 5 − График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации для решетки размерностью 3×3 элемента (β = 0º – сплошная линия; β = 45º – штриховая линия; β = 90º – штрихпунктирная линия)

На рисунке 6 маркером показаны экспериментальные значения, полученные ранее в работе [6] для искусственной двумерной решетки. По полученным экспериментальным точкам построены аппроксимирующие графики, которые показывают линейную зависимость угла поворота от частоты.

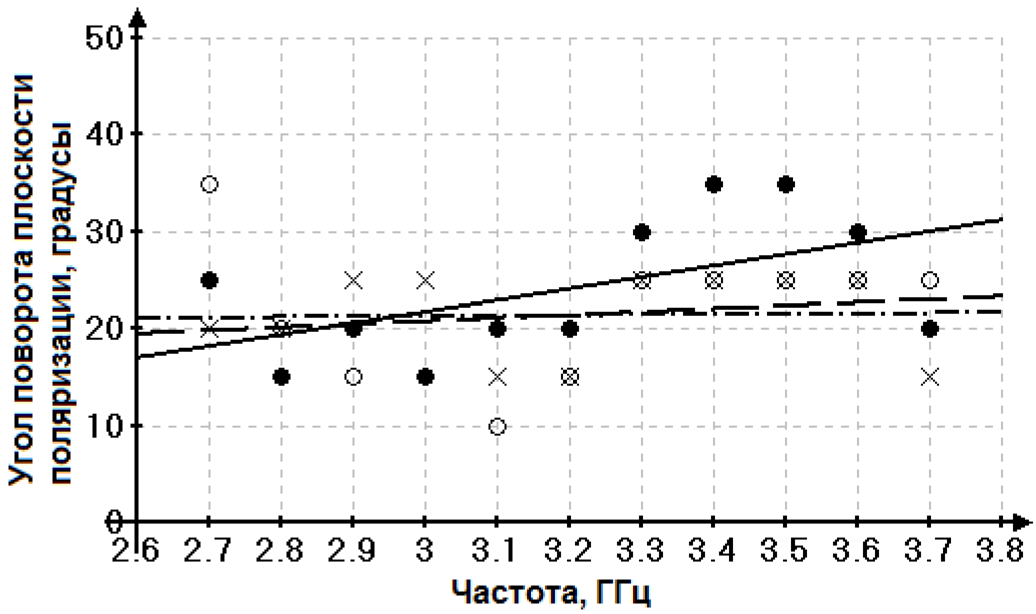



Рисунок 6 − График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации, построенный по экспериментальным данным (β = 0º – сплошная линия;
● – экспериментальные точки; β = 45º – штриховая линия;
○ – экспериментальные точки; β = 90º – штрихпунктирная линия;
× – экспериментальные точки)

Из рисунка 5 видно, что для решетки в заданном частотном диапазоне угол поворота находится в пределах от 21 до 31 градуса, что полностью соответствует результату моделирования для одиночной спирали. Из экспериментальных данных следует, что значения угла поворота находятся в более широком диапазоне (от 10 до 35 градусов). Значительное отклонение экспериментальных точек от аппроксимирующей кривой обусловлено погрешностью измерений (относительная погрешность измерений не превышает 12%).

На рисунке 7 показана частотная зависимость угла поворота плоскости поляризации при различном периоде решетки для вертикальной поляризации падающей волны (β = 0°).

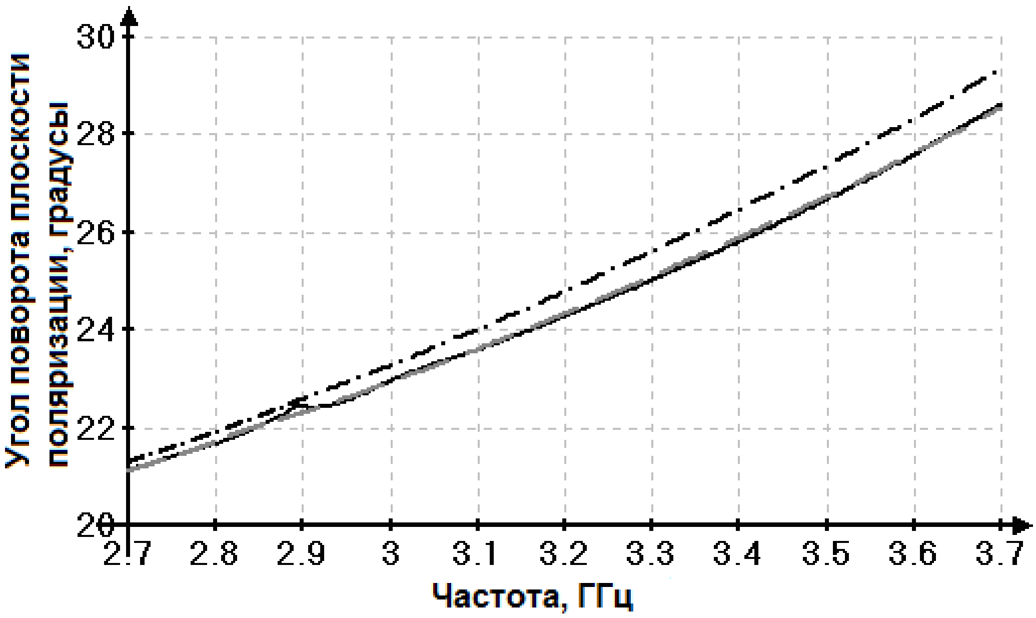



Рисунок 7 − График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации электромагнитной волны при различном периоде решетки (период решетки: 3 см – сплошная линия; 5 см – штриховая линия; 10 см – штрихпунктирная линия)

Из рисунка 7 видно, что угол поворота плоскости поляризации не зависит от периода решетки. Следовательно, взаимное влияние спиралей в решетке несущественно влияет на поворот плоскости поляризации отраженной волны.

***Заключение***

Из полученных данных следует, что для одиночной спирали и решетки, возбуждаемых падающей электромагнитной волной с различной ориентацией плоскости поляризации, угол поворота плоскости поляризации отраженной волны находится в пределах от 20 до 30 градусов. На резонансной частоте угол поворота приблизительно равен 23 градуса. Показано, что расстояние между спиралями в решетке не влияет на поворот плоскости поляризации отраженной волны. Экспериментальные данные, полученные для двумерной решетки, хорошо согласуются с результатом моделирования.

**Литература**

1. Ландсберг, Г.С. Оптика / Г.С. Ландсберг. – 6-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с.

2. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.

3. Semchenko, I.V. Effective electron model of the wire helix excitation at microwaves: first step to optimization of pitch angle of helix / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, E.A. Fedosenko //

In Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials. NATO Science Series II, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. – 2002. − Vol. 89. − P. 245−256.

4. Semchenko, I.V. Polarization Plane Rotation of Electromagnetic Waves by the Artificial Periodic Structure with One-Turn Helical Elements / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // Electromagnetics. – 2006. – Vol. 26. – P. 119–233.

5. Козман, У. Введение в квантовую химию / У. Козман. − М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 615 с.

6. Самофалов, А.Л. Использование спиральных излучателей для преобразования поляризации электромагнитных волн / А.Л. Самофалов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 4(55), ч. 2. – С. 176−183.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 681.32*

# Формирование трёхмерных токопроводящих микроструктур на поверхности кремния

А.А. Хмыль, Н.Н. Федосенко, А.Н. Купо

Предложен метод формирования межслойных медных соединений на поверхности кремния в слое фоторезиста, комбинирующий резистивное напыление в вакууме, с последующим электрохимическим осаждением при облучении ультрафиолетовым излучением. Проведены исследования полученных структур методами атомно-силовой микроскопии и электронно-растровой микроскопии. Показано, что полученные межсоединения обладают плотноупакованной структурой и химически однородны, что обуславливает высокие эксплуатационные характеристики.
**Ключевые слова:** микроэлектроника, медные межсоединения, атомно-силовая микроскопия.

The article studies the method of forming copper wiring on the surface of silicon in the photoresist layer, combining the resistive coating in a vacuum, followed by electrochemical deposition under ultraviolet light. The article studies the obtained structures with the help of atomic force microscopy and scanning electron microscopy. It shows that the wiring has packed structure and chemical homogeneity, which leads to high operational features.
**Keywords:** microelectronics, copper wiring, atomic force microscopy.

## *Введение*

Центральное место в современной технологии изготовления изделий электронной техники, в частности, формирования сквозных проводящих каналов (межсоединений), занимает фотолитография. На ее долю приходится более половины производственных затрат [1].

Высоким разрешением обладают поверхностные структуры, сформированные фотолитографическим методом на поверхности кремния, покрытой слоем фоторезиста. Используемые фоторезисты должны обладать высокой чувствительностью к действию излучения, высокой стойкостью к плазмохимическому травлению, малой дефектностью, высокой контрастностью, низкой чувствительностью к изменению параметров фотолитографического процесса (т. е. большой технологической широтой) и т. п. [2]–[5].

В качестве материала для формирования межсоединений элементов интегральных микросхем, как правило, используется электроосаждённая медь, которая имеет низкое сопротивление (1,67 мкОм·см), более высокую токонесущую способность, возможность дальнейшего масштабирования (т. е. уменьшения топологических размеров) [6], [7]. Медные микро и нано контакты выдерживают высокие плотности тока, что актуально при переходе к более компактным нанометровым межсоединениям. В связи с этим разработка технологии создания таких межсоединений является актуальной задачей [8].

## *Техника эксперимента*

Получена серия образцов, представляющих собой трёхмерные токопроводящие структуры на поверхности кремниевых пластин. Образцы изготавливались следующим образом: на поверхность кремния методами вакуумной металлизации (резистивное испарение либо магнетронное распыление) наносился проводящий подслой меди, затем на него – слой фоторезиста методом центрифугирования и последующего спекания в муфельной печке при температурах 90÷100°С. Полученные образцы подвергались обработке ультрафиолетовым излучением через маску, представляющую собой матрицу периодических структур с различным расстоянием между штрихами (до 10 штрихов на мм). Проявление осуществлялось в 1%-ном растворе гидроксида натрия. После задубливания пленка фоторезиста на поверхности медного подслоя представляла собой чередование периодических структур с различным разрешением, что давало возможность использовать полученные образцы для последующей электрохимической обработки с целью осаждения меди в пустоты, сформированные в слое фоторезиста. Электроосаждение меди производилось в электролитах двух типов. Один из электролитов представлял собой сернокислый электролит меднения ($CuSO_4 \cdot 5H_2O + H_2SO_4$), второй – раствор аммиаката меди ($Cu(NH_3)_4]SO_4$). При этом электрохимическая реакция сопровождалась облучением поверхности катода ультрафиолетовым излучением, что приводило к росту скорости осаждения в 3÷4 раза на подложках, полученных методом резистивного напыления, по сравнению с экспериментами, проводимыми без облучения. Основные этапы описанного процесса представлены на рисунке 1.

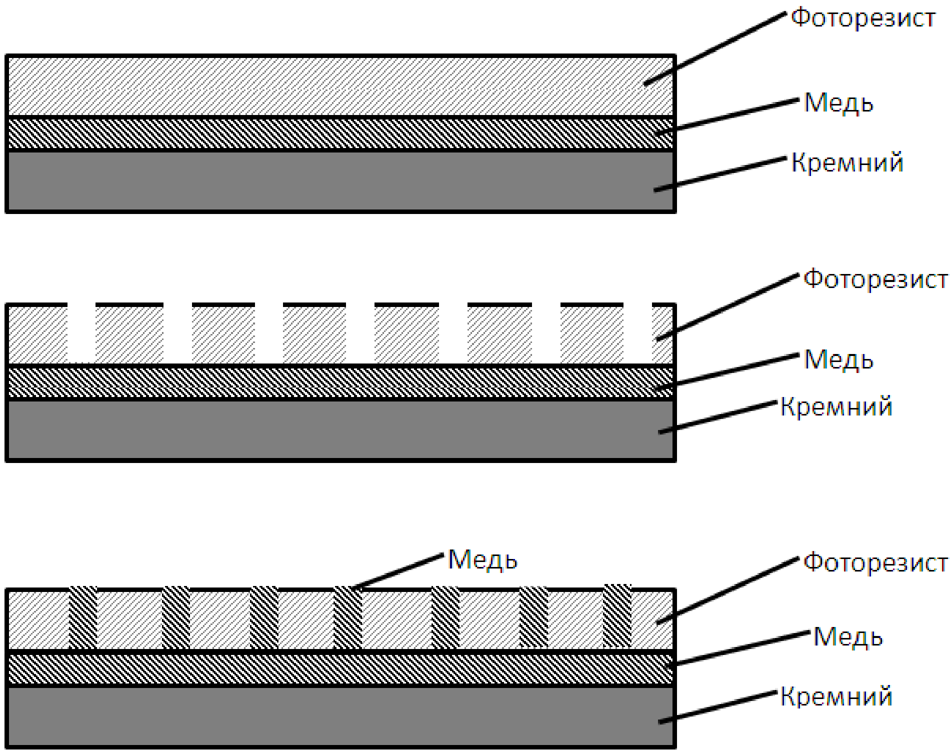



Рисунок 1 – Этапы формирования медных межсоединений в слое фоторезиста

***Результаты исследования***

Исследования проводились с целью определить, каким образом сказываются на электрических и микромеханических свойствах полученных трехмерных проводящих микроструктур способ формирования токопроводящего подслоя, а также тип электролита и наличие стимулирующего ультрафиолетового излучения, воздействующего на этапе электроосаждения.

Следует отметить, что покрытия, формируемые в вакууме методом магнетронного распыления, по сравнению с резистивным напылением традиционно обладают заметно большей адгезией к подложке и высокой однородностью (практически отсутствуют поверхностные дефекты). Однако, с точки зрения их использования в качестве проводящего подслоя, при последующем электроосаждении уступают покрытиям, полученным резистивным напылением, как раз по причине наличия поверхностных дефектов. Поверхностные дефекты медных плёнок, полученных резистивным напылением, выступают в качестве центров кристаллизации в процессе электрохимического осаждения, тем самым повышается скорость роста осадка, улучшается его адгезия и электропроводящие свойства.

С целью изучения электрических и микромеханических свойств полученных трёхмерных периодических структур были проведены исследования методами атомно-силовой микроскопии (АСМ), растровой электронной микроскопии (РЭМ), а также исследования химического состава поверхности.

Исследовались образцы четырёх типов: медный подслой, сформированный резистивным напылением в вакууме (тип 1) и методом магнетронного распыления (тип 2); медные межсоединения, осаждённые электрохимическим методом на подслое, сформированном резистивным напылением с использованием стимулирующего ультрафиолетового излучения (тип 3) и без него (тип 4). Медные межсоединения, сформированные на подслое, полученном магнетронным распылением, имели слабую адгезию к материалу подслоя и потому не исследовались. Результаты исследований высоты кристаллитов на поверхности указанных покрытий представлены на рисунке 2.

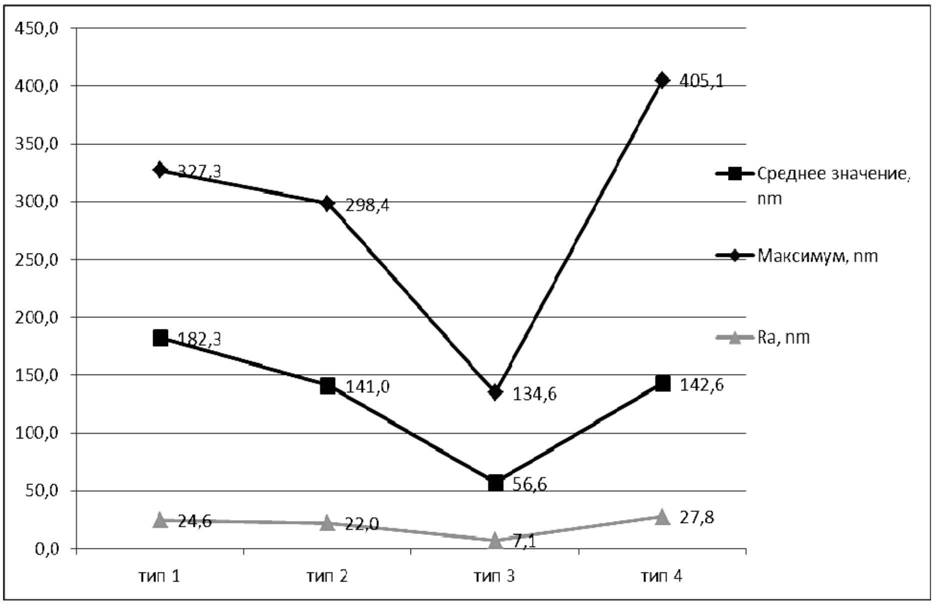



Рисунок 2 – Результаты исследования высоты неровностей методом АСМ

Как видно из диаграммы, представленной на рисунке 2, наименьшую высоту имеют неровности на поверхности образцов типа 3, кроме того, среднеквадратичное отклонение (Ra) тоже является наименьшим для образцов указанного типа, что говорит о высокой однородности данного типа покрытия по сравнению с прочими. Кроме того, исследования средней площади поверхности кристаллитов тем же методом указывают (см. рисунок 3) на то, что при сравнительно малой высоте отдельных кристаллитов покрытия типа 3 их площадь в 3÷5 раз превышает площадь зёрен на покрытиях прочих типов, в том числе и покрытиях подслоя. Этот факт указывает на плотноупакованную структуру покрытия, как правило обеспечивающую высокие эксплуатационные характеристики.


Рисунок 3 – Результаты измерения площади кристаллитов методом АСМ

Исследования медных межсоединений в слое фоторезиста методом растровой электронной микроскопии показали, что полученные периодические структуры, соответствующие типу 3, имеют четкие границы раздела. Высота медных межсоединений практически равна толщине слоя фоторезиста, как это видно на изображении микропрофиля исследуемой структуры, полученном методом РЭМ (рисунок 4).

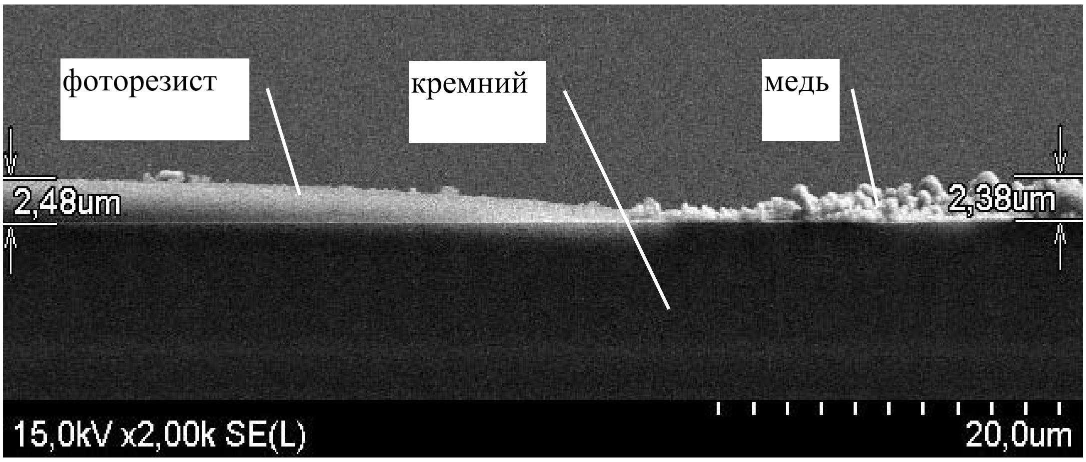
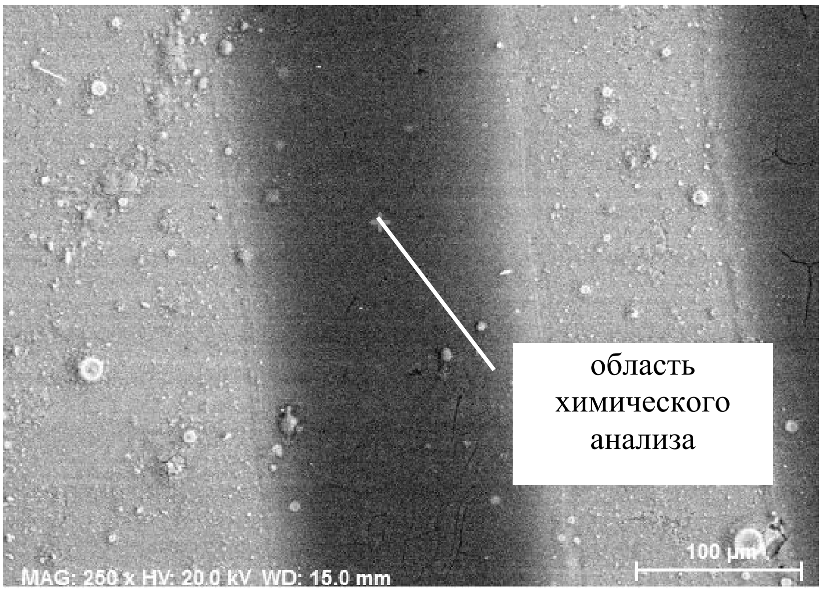



Рисунок 4 – Изображение микропрофиля покрытия, полученное методом РЭМ

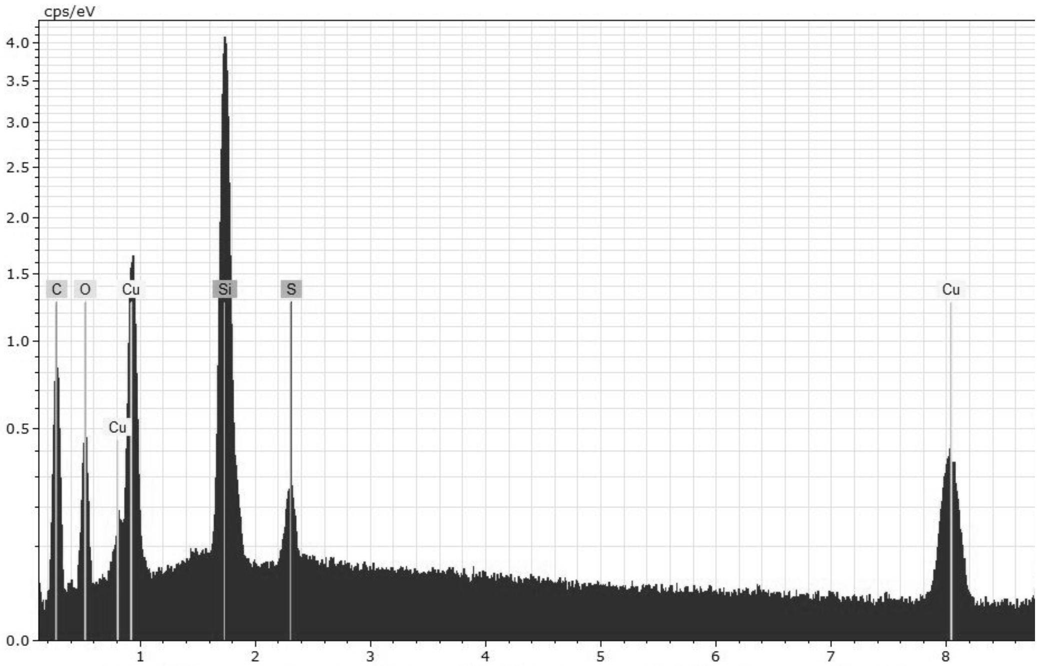
Химический состав в пределах каждой из зон периодической структуры фоторезист – медь однородный, физико-химические свойства фоторезиста в процессе электрохимического осаждения меди при воздействии стимулирующего ультрафиолетового излучения практически не изменились. Область исследования химического состава и его результаты приведены на рисунках 5 а) и 5 б) соответственно.

***Заключение***

Предложен метод формирования межслойных соединений на поверхности кремния в слое фоторезиста. В данном методе наряду с технологиями вакуумной металлизации использована технология электрохимического осаждения при воздействии стимулирующего ультрафиолетового излучения. Полученные медные межсоединения обладают плотноупакованной поверхностной структурой и однородны по химическому составу. Полученные результаты указывают на возможность использования такого метода при формировании изделий электронной техники.




а)




| El | AN | Series | unn. C [wt.%] | norm. C [wt.%] | Atom. C [at.%] | Error [wt.%] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| C | 6 | K-series | 45.80 | 46.38 | 65.75 | 6.2 |
| O | 8 | K-series | 17.21 | 17.43 | 18.55 | 2.5 |
| Si | 14 | K-series | 16.52 | 16.73 | 10.14 | 0.7 |
| S | 16 | K-series | 1.28 | 1.29 | 0.69 | 0.1 |
| Cu | 29 | K-series | 17.94 | 18.17 | 4.87 | 0.5 |
| | | Total: | 98.75 | 100.00 | 100.00 | |

б)

Рисунок 5 – Результаты исследования химического состава

**Литература**


1. Moore, G.E. Lithography and the future of Moore’s law / G.E. Moore // Proc. SPIE. – 1995. – Vol. 2440. – P. 2–17.
2. Zelentsov, S.V. Photoresists / S.V. Zelentsov, N.V. Zelentsova // Marcel Dekker Enc. Chem. Techn. – New York : Taylor & Francis, 2006. – P. 2111–2127.
3. Thompson, L.F. Introduction to Microlithography / L.F. Thompson, C.G. Willson, M.J. Bowden // 2nd Ed. American Chemical Society. – Washington : DC, 1994.
4. Моро, У. Микролитография / У. Моро. – М. : Мир, 1990. – Т. 1, 2.
5. Зеленцов, С.В. Современная фотолитография : уч.-метод. мат. по прогр. повыш. квал. «Новые материалы электроники и оптоэлектроники для информационно-телекоммуникационных систем» / С.В. Зеленцов, Н.В. Зеленцова. – Нижний Новгород, 2006. – 56 с.
6. Edelstein, D.C. IBM Res. Magazine / D.C. Edelstein. – 1997. – Vol. 16, № 4. – P. 773.
7. Rosenber, R. Annu. Rev. Mater. Sci. / R. Rosenber, D.C. Edelstein, C.-K. Hu et al. – 2000. – Vol. 30. – P. 229.
8. Дубинин, М.В. Формирование наноразмерных медных межсоединений элементов интегральных микросхем / М.В. Дубинин, В.Е. Борисенко // Доклады БГУИР. – 2011. – № 8(62). – С. 34–38.


Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 31.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 621.373.826*

# Анализ процесса развития трещины в процессе управляемого лазерного термораскалывания силикатных стекол в рамках линейной механики разрушения

С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа

Разработан алгоритм и выполнено конечно-элементное моделирование процесса развития трещины в силикатных стеклах при управляемом лазерном термораскалывании. Моделирование выполнено в рамках теории термоупругости и линейной механики разрушения. Показано, что зарождение трещины происходит на поверхности материала в области подачи хладагента, при развитии ее на глубину форма фронта трещины имеет характерный прогиб, что и наблюдается на эксперименте. Разработанный алгоритм моделирования можно использовать для оптимизации технологических режимов разделения хрупких неметаллических материалов.
**Ключевые слова:** лазер, термораскалывание, трещина, механика разрушения.

The algorithm is designed and finite-element modeling of a crack development in silicate glasses is carried out at laser controllable laser thermosplitting. Modelling is carried out within the limits of the thermoelasticity theory and the linear fracture mechanics. It is shown that crack initiation takes place on a surface of a material in the field of coolant feeding, and at its development on depth the form of a crack front has a characteristic bending, as is observed in the experiment. The designed algorithm of modelling can be used for optimization of technological modes of division of fragile nonmetallic materials.
**Keywords:** laser, thermosplitting, crack, fracture mechanics.

Одним из наиболее эффективных методов высокоточного разделения хрупких неметаллических материалов является управляемое лазерное термораскалывание (УЛТ), отличительная особенность которого заключается в том, что разделение материала на части заданной формы происходит вследствие образования микротрещины, формируемой в результате поверхностного нагрева материала лазерным излучением и последующего охлаждения зоны нагрева хладагентом. К основным преимуществам управляемого лазерного термораскалывания относятся высокая точность разделения и скорость обработки, безотходность процесса [1], [2]. Ранее в работах [3]–[7] авторами проведено в рамках теории термоупругости моделирование различных видов метода управляемого лазерного термораскалывания хрупких неметаллических материалов. В рамках квазистатической постановки задачи были выполнены расчеты температурных полей и полей упругих напряжений, формируемых в результате реализации различных видов термораскалывания, и определены механизмы формирования и развития разделяющей трещины. Было показано, что в момент воздействия лазерного излучения на поверхности формируется зона значительных по величине сжимающих напряжений, далее в момент воздействия следующего за лазерным пучком хладагента сжимающие напряжения переходят в растягивающие. Инициирование разделяющей трещины происходит в поверхностных слоях материала в зоне растягивающих напряжений, сформированных за счет подачи хладагента. Далее трещина распространяется вглубь материала, в зоне растягивающих напряжений, обусловленных взаимным расположением движущегося лазерного пучка и хладагента.

Такой анализ проводился для однородного материала в рамах теории термоупругости и не учитывал наличие и процесс развития формируемой в процессе обработки микротрещины. Как показано в работе [8], [9], появление микротрещины существенно влияет на распределение полей напряжений в материале, и поэтому моделирование процесса инициализации и развития трещины необходимо проводить не только в рамках теории термоупругости, но и линейной механики разрушения. Однако разработанный в этих публикациях алгоритм моделирования позволяет проводить анализ инициализации и развития трещины только фиксированной глубины.

В данной работе в рамках теорий термоупругости и линейной механики разрушения разработан алгоритм и проведено моделирование инициализации и развития трещины в хрупких неметаллических материалах в объеме образца.

Согласно [10] предположим, что условия разрушения можно представить одним параметром, в качестве которого можно использовать коэффициент интенсивности напряжений $K_I$. При этом необходимыми условиями роста трещины являются следующие: напряжения в вершине трещины должны быть растягивающими; коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины должен превышать критический коэффициент интенсивности напряжений $K_{IC}$. С учетом этих условий было выполнено моделирование процесса управляемого лазерного термораскалывания, при котором выполнялись расчеты коэффициента интенсивности $K_I$ в вершине трещины для определения динамики ее развития. Расчеты были выполнены с использованием метода конечных элементов, реализованного в программе ANSYS.

Моделирование выполнено для схемы однолучевого управляемого лазерного термораскалывания, представленной на рисунке 1. В качестве материала образца выбрано силикатное стекло вертикальной вытяжки, плотность которого $\rho = 2740$ кг/м$^3$, модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения полагались соответственно равными E = 73.5 ГПа, $\nu = 0.214$, $\alpha_т = 90 \cdot 10^{-7}$ (1/°C). Позицией 1 обозначен пучок $CO_2$-лазера с длиной волны 10.6 мкм, энергия которого поглощается в тонком поверхностном слое стекла, позицией 2 – зона воздействия хладагента. Лазерное излучение формируется в пучок с поперечным сечением в виде эллипса с размерами большой и малой осей 7 и 2 мм соответственно. При этом пучок ориентируется большой осью вдоль линии обработки материала (вдоль оси X). Хладагент в виде мелкодисперсной воздушно-водяной смеси формируется на поверхности материала в виде круга радиусом 5 мм и подается непосредственно за лазерным пучком.

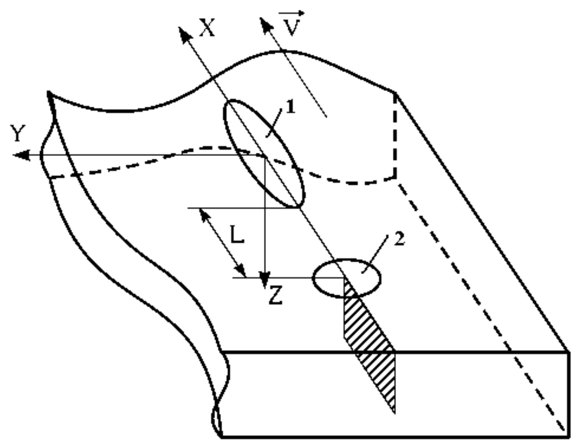



Рисунок 1 – Схема однолучевого управляемого лазерного термораскалывания

В качестве образца выбрана пластина толщиной 3 мм и геометрическими размерами 20x30 мм. Поскольку воздействие лазерного пучка осуществляется вдоль оси X ровно посередине образца, то распределение температур и упругих напряжений относительно данной плоскости будет симметрично, поэтому моделирование было выполнено для половины образца, при этом учитывалось, что перемещения узлов, не принадлежащих трещине, в направлении оси Y в плоскости симметрии должны быть ограничены.

При моделировании была выбрана следующая последовательность действий. На первом шаге решения выполняется геометрическое построение поверхности образца размером 20x15 мм, который разбивается на конечные элементы. При этом, как показано на рисунке 2, на краю образца вдоль линии инициализации и развития трещины выполняется построение нескольких областей (на рисунке показано четыре области), в центре которых формируются изопараметрические элементы, необходимые для моделирования вершины и фронта трещины. Далее данная поверхность выдавливается вдоль оси Z на величину равную толщине образца. При этом величину и пропорции разбиения вдоль оси Z можно варьировать. В результате вдоль оси Z формируются узлы, окруженные изопараметрическими элементами, которые могут быть использованы в дальнейшем как точки фронта развивающейся трещины. Лазерный пучок моделируется как поверхностный тепловой источник заданной мощности, а в области подачи хладагента осуществляется теплоотдача с коэффициентом равным 6800 Вт/м$^2$К [11]. При этом движение пучка осуществляется дискретно, с постоянным смещением на каждом шаге решения с заданной скоростью. После разбиения образца выполняется расчет температурных полей в образце при воздействии на него лазерного пучка и хладагента, при этом значения температур в каждом узле образца записываются в отдельный файл для использования на следующем шаге решения.

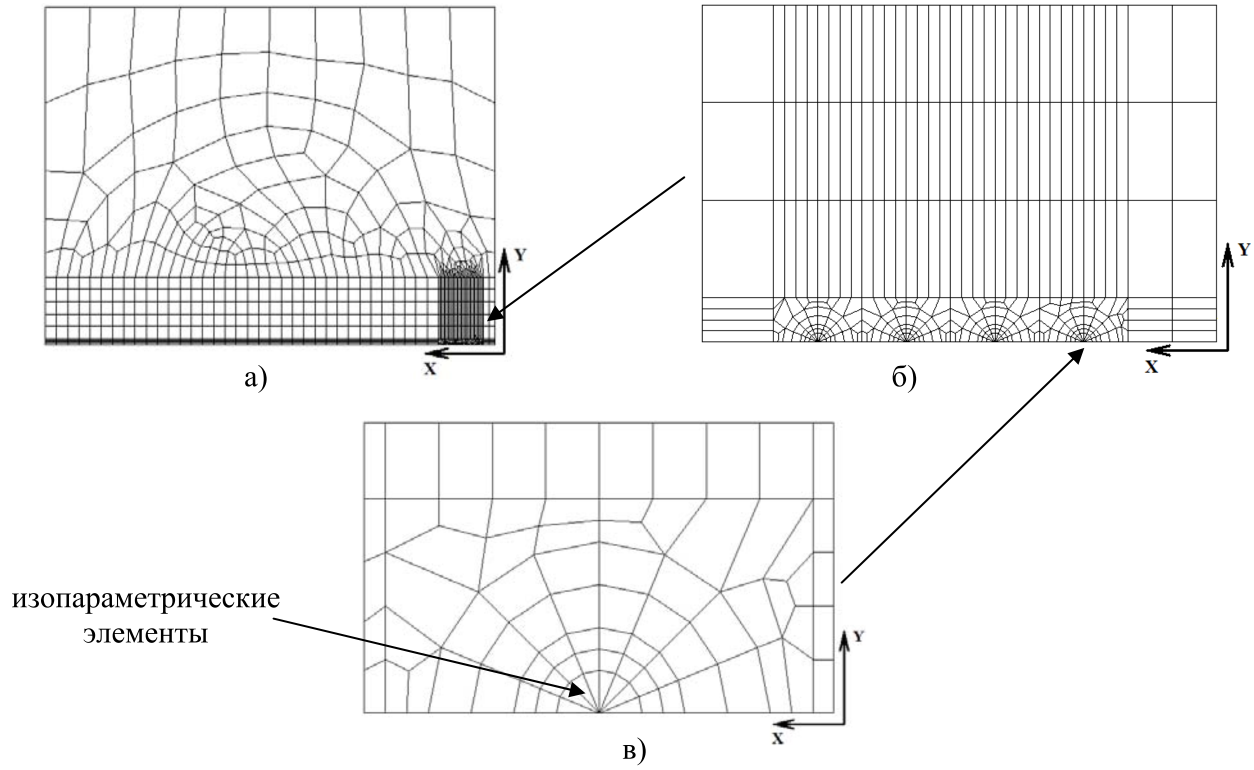



Рисунок 2 – Образец с нанесенной конечно-элементной сеткой:
а) общий вид модели в плоскости XY;
б) и в) увеличенная область с изопараметрическими элементами

На втором шаге решения заново осуществляется построение модели и считываются значения температур из первого шага решения как начальные условия для второго шага решения. Осуществляется смещение положения лазерного пучка и хладагента вдоль оси X и выполняется расчет температурных полей в образце с записью новых значений температур в отдельный файл для следующего шага решения. Далее решается структурная задача. Выбираем размер начальной трещины на краю образца длиной вдоль оси X равной 0.75 мм (от правого края образца до вершины первой области изопараметрических элементов) и глубиной вдоль оси Z равной 0.8 мм. Вследствие симметрии образца ограничиваем перемещения узлов, не принадлежащих трещине, в направлении оси Y в плоскости симметрии Y = 0. Координаты узлов, принадлежащих трещине, записываем в отдельный файл для последующих шагов решения. Выполняется расчет полей упругих напряжений в квазистатической постановке. По полученным распределениям упругих напряжений в образце производится пересчет коэффициентов интенсивности напряжений $K_I$ в точках фронта трещины на различных глубинах. Значения коэффициентов интенсивности напряжений, температур и напряжений в вершинах трещины записываем в отдельный файл для последующих шагов решения задачи.

На третьем и дальнейших шагах решения выполняется следующая последовательность действий. Вначале считываем данные о величинах напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в точках фронта трещины из предыдущего шага решения. Далее осуществляем проверку условий выполнения однопараметрического критерия разрушения. Если значение коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины на поверхности превышает критическое значение $K_{IC}$ (для силикатного стекла $K_{IC}$ = 0.5 МПа м$^{1/2}$) [8], и при этом напряжения в вершине трещины растягивающие, то координату вершины трещины увеличиваем в направлении движения лазерного пучка на величину равную шагу перемещения так, чтобы она совпала с вершиной соседней области изопараметрических элементов. В противном случае оставляем координату без изменений. Аналогичные действия выполняем в остальных точках фронта трещины вдоль оси Z. Если координата вдоль оси X вершины трещины на любом слое по глубине образца выходит за границы области изопараметрических элементов (далее, чем вершина четвертой от правого края области изопараметрических элементов), то при построении модели смещаем эту область вдоль оси X на величину равную шагу перемещения. Далее выполняем новую дискретизацию модели и интерполируем распределение температур с предыдущего шага решения на новую конечно-элементную сетку. Моделируем воздействие лазерного пучка и хладагента на поверхность материала. Считываем координаты узлов, принадлежащих трещине, из предыдущего шага решения, добавляем новые узлы с учетом выполненной ранее проверки роста трещины на разных глубинах и пересохраняем их для последующих шагов решения. Ограничиваем перемещения узлов, не принадлежащих трещине, в направлении оси Y и осуществляем расчет упругих напряжений в образце и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины, попадающих в область с изопараметрическими элементами на различных глубинах. Значения коэффициентов интенсивности напряжений, температур и напряжений в вершинах трещины записываем в отдельный файл для последующих шагов решения задачи.

Таким образом, по рассчитанным значениям напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины на каждом шаге решения, а также по координатам узлов можно определить не только глубину развития, но и форму разделяющей трещины.

В соответствии с предложенным алгоритмом было выполнено моделирование процесса управляемого лазерного термораскалывания в рамках теорий термоупругости и линейной механики разрушения по схеме, представленной на рисунке 1. Скорость обработки выбрана равной 10 мм/с, мощность лазерного пучка 20 Вт. На рисунке 3 представлены расчетные значения коэффициента интенсивности напряжений $K_I$ в вершинах трещины на различных глубинах Z образца от времени t. Кривая 1 соответствует вершине, разделяющей трещины на поверхности образца, кривая 2 – на глубине Z = 0.15 мм, кривая 3 – на глубине Z = 0.25 мм и кривая 4 – на глубине Z = 0.6 мм. На рисунках 4 и 5 представлены расчетные значения упругих напряжений $\sigma_{yy}$ в вершинах трещины и координат X вершин трещины на тех же глубинах Z образца от времени t.

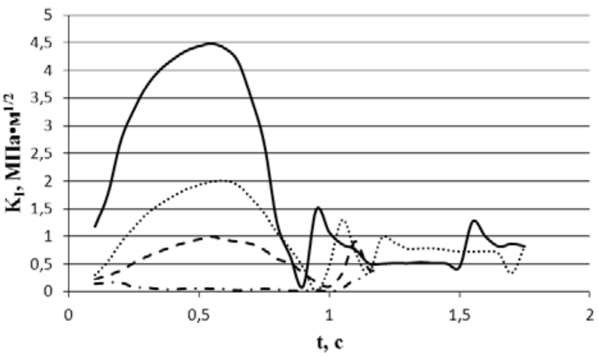



Рисунок 3 – Расчетные значения коэффициента интенсивности напряжений $K_I$ в вершинах трещины

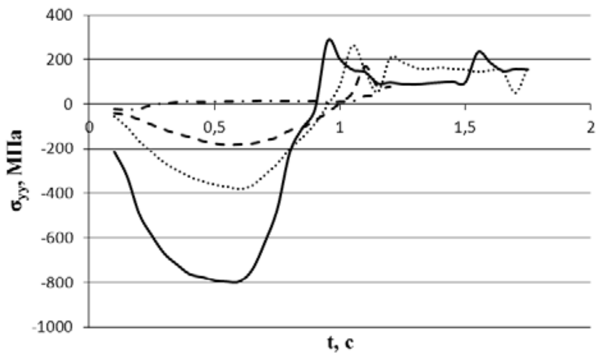



Рисунок 4 – Расчетные значения упругих напряжений $\sigma_{yy}$ в вершинах трещины

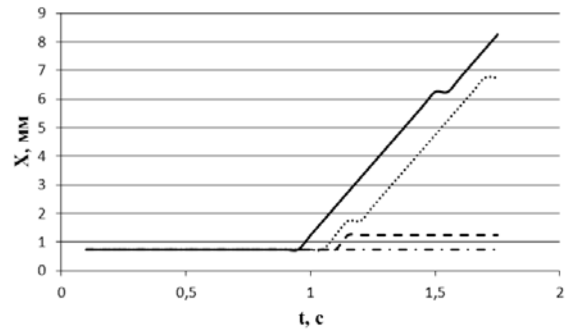



Рисунок 5 – Расчетные значения координат X вершин трещины

В промежуток времени от 0 до 0.65 секунды движения лазерного пучка и хладагента вершина стартовой трещины на поверхности образца подвергается воздействию лазерного излучения, и во всех вершинах стартовой трещины до глубины 0.5 мм формируются значительные по величине сжимающие напряжения. При этом роста трещины не происходит. Далее вершина стартовой трещины на поверхности образца попадает в область воздействия хладагента, происходит резкое охлаждение поверхности материала и напряжения перерастают в растягивающие, и уже в момент времени 0.95 секунды коэффициент интенсивности напряжений в этой вершине становится выше критического значения $K_{IC}$ для силикатного стекла. Трещина на поверхности образца начинает развитие вдоль оси X. В глубинных слоях образца также наблюдается рост по величине растягивающих напряжений и коэффициента интенсивности напряжений в вершинах трещины. Однако этот рост происходит с задержкой во времени по отношению к поверхностному слою материала вследствие того, что нагрев глубинных слоев происходит за счет передачи тепла от поверхностных слоев материала, где происходит поглощение энергии лазерного излучения, вглубь материала с заданным коэффициентом теплопроводности. Величина коэффициента интенсивности напряжений достигает критического значения $K_{IC}$ позже, нежели в поверхностных слоях материала, что приводит к росту трещины в глубинных слоях материала с отставанием вдоль направления развития трещины (вдоль оси X) по отношению к вершине трещины в поверхностном слое.

На рисунке 6 представлены расчетные значения координат X вершин трещины на различных глубинах в образце и проведена сглаживающая кривая профиля развивающейся трещины.

Как видно из представленного рисунка, профиль трещины имеет характерный прогиб. Именно такой профиль наблюдается визуально при разделении силикатных стекол методом управляемого лазерного термораскалывания в соответствии со схемой, приведенной на рисунке 1, что показывает адекватность разработанного алгоритма моделирования. При этом расчетная глубина трещины 0.34 мм оказывается чуть меньше, чем экспериментальное значение 0.39 мм. Это обусловлено как погрешностью самого метода конечных элементов, так и густотой выбранной конечно-элементной сетки.

Таким образом, разработанный алгоритм моделирования позволяет моделировать процесс управляемого лазерного термораскалывания и, варьируя параметры лазерного пучка и хладагента, скорость обработки, геометрические размеры образца и вид конечно-элементной сетки, получать информацию о профиле и глубине возникающей разделяющей трещины для различных методов лазерного термораскалывания. Полученные данные можно использовать для оптимизации технологических режимов разделения хрупких неметаллических материалов.

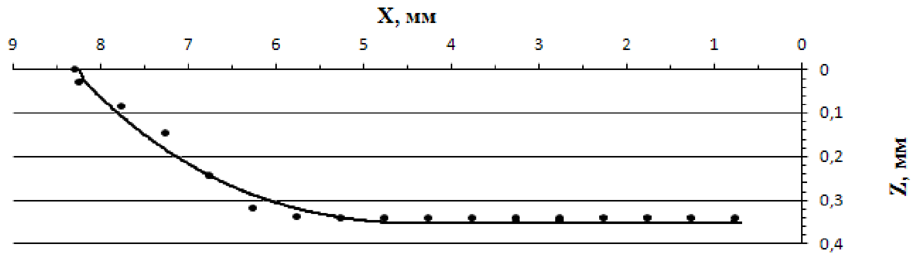



Рисунок 6 – Расчетные значения координат X вершин трещины на различных глубинах в образце

## Литература

1. Мачулка, Г.А. Лазерная обработка стекла / Г.А. Мачулка. – М. : Сов. радио, 1979. – 136 с.

2. Кондратенко, В.С. Лазерное управляемое термораскалывание хрупких материалов : курс лекций / В.С. Кондратенко. – М. : МГАПИ, 2004. – 88 с.

3. Шалупаев, С.В. Прецизионная лазерная обработка хрупких неметаллических материалов / С.В. Шалупаев, Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 3(30). – С. 87–92.

4. Шалупаев, С.В. Двулучевое лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов / С.В. Шалупаев, Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // Оптический журнал. – Т. 73, № 5. – 2006. – С. 62–66.

5. Shalupaev, S. The analysis of laser thermosplitting of materials by using of crescent shape beams / S. Shalupaev, Y. Nikitjuk, A. Sereda : материалы конф. Optical Techniques and Nano-Tools for aterial and Life Sciences (ONT4MLS-2010), Minsk, 15–19 June 2010 ; в 2-х т. Т. 2. – P. 36–43.

6. Shalupaev, S.V. The analysis of laser thermosplitting of materials by using of special geometry beams / V. Shalupaev, M. Aleksiejuk, Y.V. Nikitjuk, A.A. Sereda // Archives of metallurgy and materials. – Vol. 56, Issue 4. – 2011. – P. 1149–1155.

7. Сердюков, А.Н. Моделирование процесса двулучевого асимметричного термораскалывания хрупких неметаллических материалов / А.Н. Сердюков, С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2011. – № 6(69). – С. 124–127.

8. Shahani, A.R. Simulation of glass cutting with an impinging hot air jet / A.R. Shahani, M. Seyyedian // International journal of solids and structures. – 2004. – Vol. 41, № 5–6. – P. 1313–1329.

9. Shalupaev, S.V. Analysis of laser thermosplitting processes within the framework of the linear fracture mechanics / S.V. Shalupaev, M. Aleksiejuk, Y.V. Nikitjuk, A.A. Sereda // Ceramics. Polish ceramic bulletin. – Vol. 101. – Krakow, 2008. – P. 275–284.

10. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения : пер. с японск. / М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацусита. – М. : Мир, 1986. – 334 с.

11. Богуславский, И.А. Высокопрочные закаленные стекла / И.А. Богуславский. – М. : Изд-во литературы по строительству, 1969. – 208 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 621.373.826*

# Распределение температурных полей при двулучевой сварке кварцевого стекла

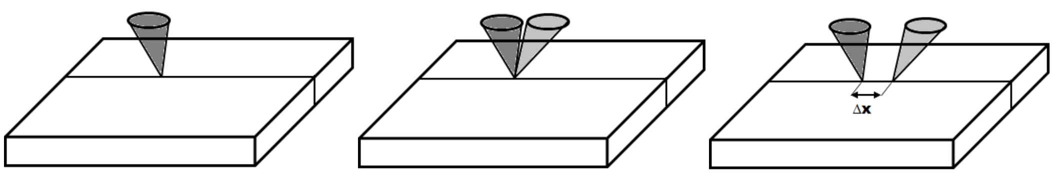
Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, А.Е. Шершнев

В данной статье приведены результаты компьютерного моделирования процесса двулучевой лазерной сварки кварцевого стекла. Выполненные расчеты показывают, что учет зависимости теплофизических свойств от температуры приводит к снижению максимальных расчетных значений температуры в 1,7 раза по сравнению с вариантом расчета, не учитывающим данные зависимости. В результате моделирования установлено, что суперпозиционная лазерная двулучевая сварка кварцевого стекла позволяет увеличить глубину проплавления по сравнению с однолучевой и с двулучевой последовательной лазерной сваркой.
**Ключевые слова:** сварка, кварц, температура, напряжение, теплоемкость, теплопроводность, плотность, коэффициент термического расширения.

The present article gives the results of computer modelling of two-beam laser welding of quartz glass. The calculations show that the dependence of thermal properties on the temperature leads to decreasing of maximum products of temperature in 1.7 times in comparison with the calculation that does not consider the given dependences. In the result of modelling it is established that superimposed laser two-beam welding of quartz glass allows us to increase the depth of profusion in comparison with one-beam and two-beam consecutive laser welding.
**Keywords:** welding, quartz, temperature, pressure, thermal capacity, heat conductivity, density, factor of thermal expansion.

В основе традиционных методов сварки кварцевого стекла лежит использование газовой горелки, основными недостатками которой являются низкая точность и низкая производительность сварки. Благодаря высокой концентрации энергии в лазерном пучке и высокой точности локализации лазерного излучения лазер позволяет добиться более высокой производительности и точности обработки по сравнению с традиционными методами. Развитие лазерной сварки происходит довольно интенсивно, однако широкое внедрение сварки кварцевых изделий сдерживается существующим уровнем технологических разработок. Известно, что успешное решение внедрения некоторых процессов лазерной сварки реализовано с использованием двулучевых методов обработки. Отметим, что в настоящее время успешно применяются двулучевые схемы сварки металлов [1]. В связи с этим представляется целесообразным проведение исследований аналогичных двулучевых схем в случае лазерной сварки кварцевых стекол. В работе были выполнены расчеты температурных полей для следующих случаев обработки кварцевых стекол с использованием $CO_2$-лазеров (рисунок 1):

1) однолучевая сварка кварцевого стекла;
2) двулучевая суперпозиционная сварка кварцевого стекла с использованием лазеров с различной дифракционной расходимостью;
3) двулучевая последовательная сварка кварцевого стекла.




а) б) в)

Рисунок 1 – Различные способы лазерной сварки: а) однолучевая сварка; б) двулучевая суперпозиционная сварка; в) двулучевая последовательная сварка

Для оптимизации процесса двулучевой сварки кварцевого стекла необходимо создать математическую модель лазерной сварки, которая бы учитывала зависимость теплофизических свойств материала от температуры в отличие от других моделей [2]. Эти зависимости имеют следующий вид [3], [4]:

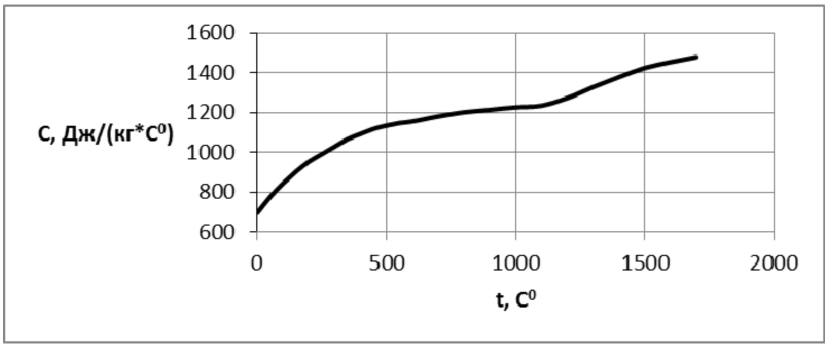



Рисунок 2 – Зависимость теплоемкости кварцевого стекла от температуры

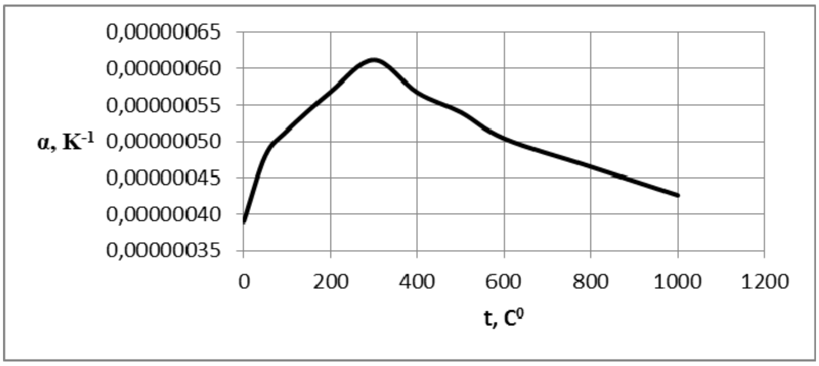



Рисунок 3 – Зависимость коэффициента линейного термического расширения кварцевого стекла от температуры

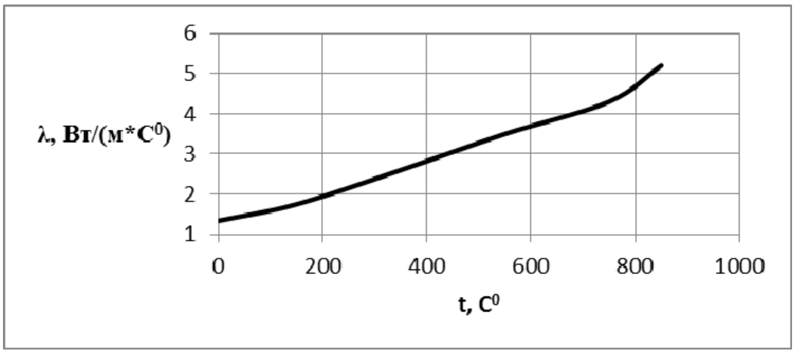



Рисунок 4 – Зависимость коэффициента теплопроводности кварцевого стекла от температуры

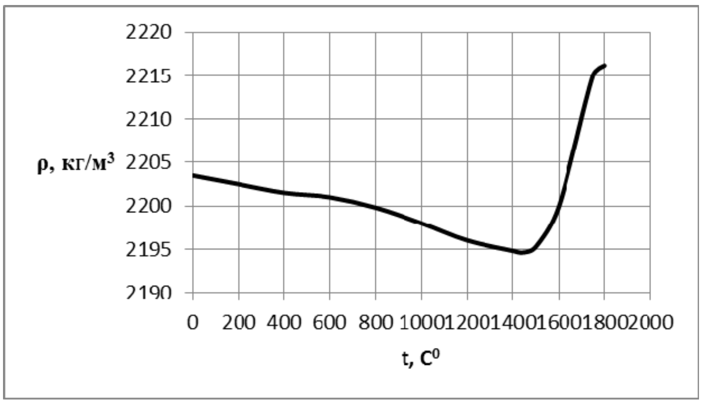
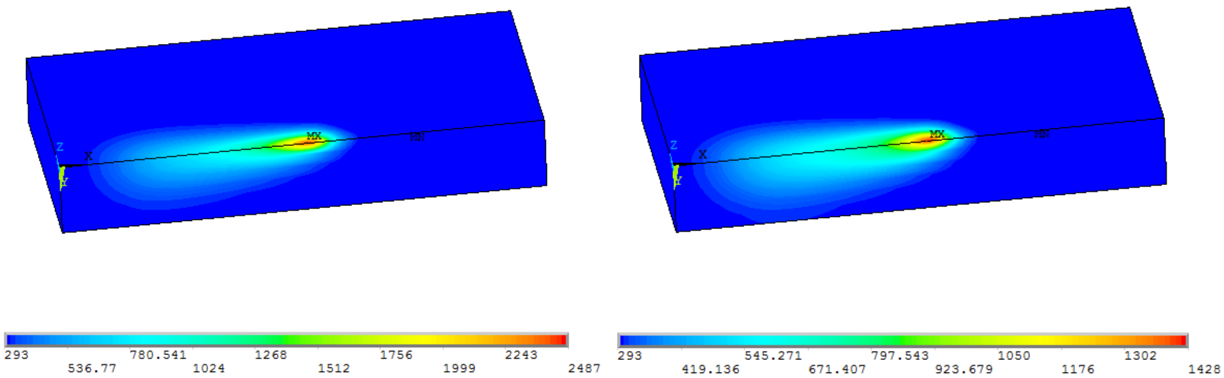



Рисунок 5 – Зависимость плотности кварцевого стекла от температуры

Моделирование процесса лазерной сварки проводилось в среде ANSYS, которая рассчитывает распределение температурных полей с помощью конечно-элементного анализа. Анализировалась глубина проплавления кварцевого стекла, мощность лазерного излучения варьировалась с учетом того, чтобы максимальная температура в зоне сварки не превышала температуру кипения.

Для проверки гипотезы о существенном влиянии теплофизических свойств кварцевого стекла при лазерной сварке и необходимости их учета разработаны две математические модели. Они отличаются тем, что в одной учитывается зависимость теплофизических свойств от температуры, а в другой нет.

Анализ результатов показывает, что учет зависимости теплофизических свойств приводит к уменьшению максимальной расчетной температуры в зоне сварки в 1,7 раза (рисунок 6).




а) б)

Рисунок 6 – Распределение температуры при однолучевой лазерной сварке кварцевого стекла: а) без учета зависимости теплофизических свойств кварцевого стекла от температуры; б) с учетом зависимости теплофизических свойств кварцевого стекла от температуры

Таким образом, для проведения расчетов температурных полей, возникающих при лазерной сварке кварцевого стекла, принципиально необходимо учитывать зависимость теплофизических свойств материала от температуры.

Было проведено моделирование двулучевой суперпозиционной лазерной сварки кварцевого стекла, в которой использовалось 2 луча с различной дифракционной расходимостью. У лазеров большой мощности обычно высокая расходимость луча, поэтому, чтобы улучшить распределение мощности в сечении пучка, можно использовать 2 менее мощных лазера, но с меньшей расходимостью луча [1]. В случае однолучевой лазерной сварки использовался лазер мощностью 300 Вт, а при суперпозиционной сварке – 2 лазера мощностью по 150 Вт. Распределение температуры по глубине в кварцевом стекле при однолучевой и двулучевой суперпозиционной сварке представлено на рисунке 7.

Как видно из рисунка, использование двух лазеров меньшей мощности, но с лучшими характеристиками луча позволило увеличить глубину проплавления с 0,2 мм до 0,25 мм.

Одним из недостатков лазерной сварки металлов при больших скоростях является гидродинамическая нестабильность жидкой фазы поверхности ванны расплава, приводящая к образованию неровностей [1]. Для уменьшения негативных последствий большой скорости сварки металлов используют последовательную двулучевую лазерную сварку с помощью двух лазеров различной мощности. Было проведено моделирование последовательной двулучевой лазерной сварки для кварцевого стекла. Общая мощность двух лазеров составила 300 Вт. Мощность лазера при однолучевой сварке составила также 300 Вт. Результаты моделирования представлены на рисунке 8 и рисунке 9.

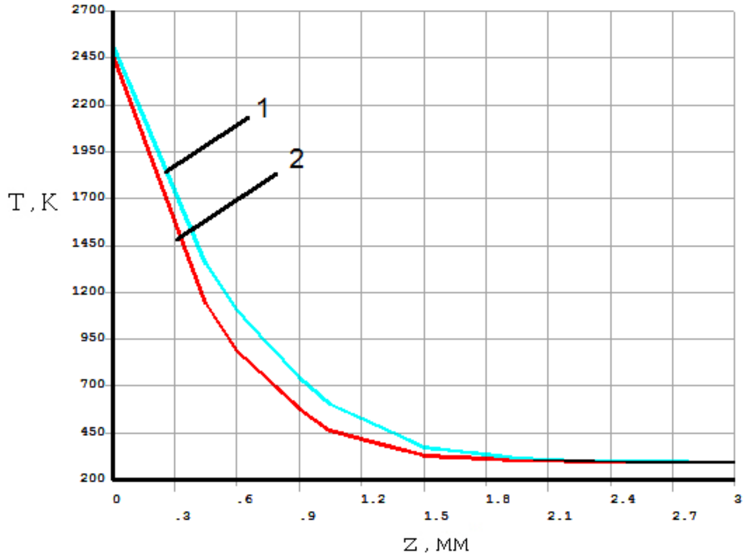



Рисунок 7 – Распределение температуры по глубине в зоне сварного шва при:
1) двулучевой суперпозиционной сварке; 2) при однолучевой лазерной сварке

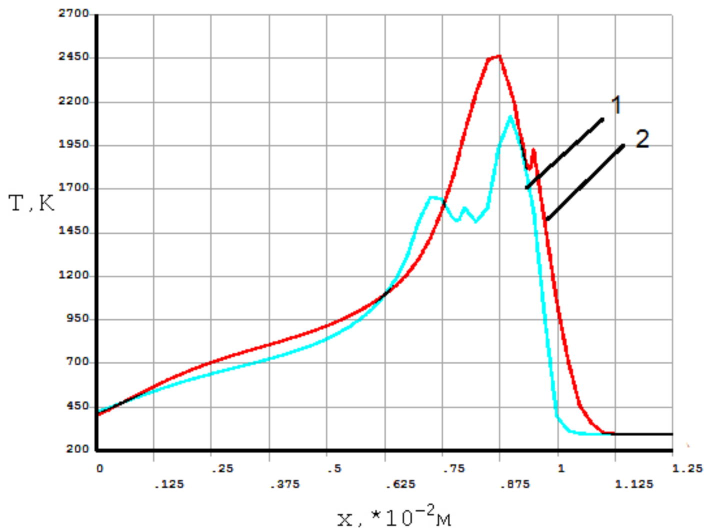



Рисунок 8 – Распределение температуры вдоль линии сварки при:
1) двулучевой последовательной сварке; 2) при однолучевой лазерной сварке

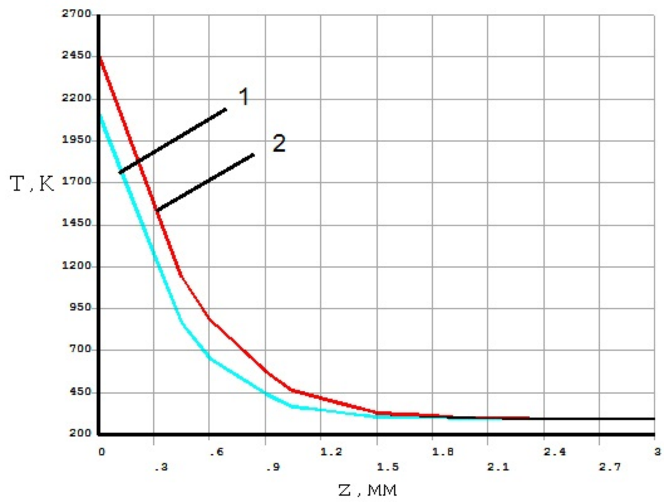



Рисунок 9 – Распределение температуры по глубине при:
1) двулучевой последовательной сварке; 2) при однолучевой лазерной сварке

Как видно из рисунка 8, последовательная двулучевая лазерная сварка позволяет замедлить спад температуры при остывании, однако кварцевое стекло обладает высокой вязкостью даже при высоких температурах, поэтому жидкая фаза ванны расплава шва, испытывающая гидродинамическую неустойчивость, характерная для металлов, для кварцевого стекла не образуется. Кроме того, анализ рисунка 9 показывает, что при последовательной двулучевой сварке уменьшается глубина проплавления, поэтому использование последовательной двулучевой лазерной сварки не целесообразно в случае обработки кварцевого стекла.

Из анализа полученных результатов следует, что учет зависимости теплофизических свойств кварцевого стекла от температуры (плотность, теплопроводность, теплоемкость, коэффициент линейного термического расширения) принципиально важен для расчета технологических режимов лазерной сварки. Также в результате моделирования установлено, что двулучевая суперпозиционная сварка позволяет увеличить глубину проплавления до 25% по сравнению с традиционной однолучевой сваркой.

**Литература**

1. Григорьянц, А.Г. Гибридные технологии лазерной сварки : уч. пособие / А.Г. Григорьянц, И.Н. Шиганов, А.М. Чирков. – М. : изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 52 с.

2. Борисовский, В.Е. Развитие теории и разработка комплекса технологий и оборудования для лазерной обработки кварцевого стекла : автореф. дис. … докт. техн. наук : 05.11.14 / В.Е. Борисовский В.Е. ; Моск. гос. унив. приб. и инф. – М., 2011. – 38 с.

3. Глаголев, С.П. Кварцевое стекло. Его свойства, производство и применение / С.П. Глаголев. – М. : ОНТИ, 1934. – 214 с.

4. Павлов, В.П. Стеклянная аппаратура для производства чистых веществ / В.П. Павлов, М.П. Макевнин. – М. : Машиностроение, 1972. – 332 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

## Информатика

*УДК 681.3.06:624.131*

# Приближённый аналитический метод определения осадки винтовой сваи в нелинейно-деформируемом грунтовом основании с учётом его уплотнения

В.Е. Быховцев, Д.В. Прокопенко

В работе предлагается оригинальный приближенный аналитический метод определения осадки винтовой сваи в нелинейно-деформируемом грунтовом основании при учёте уплотнения, полученного вследствие завинчивания сваи.
**Ключевые слова:** приближенный аналитический метод, винтовая свая, грунтовое основание, модуль деформации, несущая способность.

In this work we present the original analytical method of defining the screw pile settling in the non-linear deformed soil base taking into account the consolidation received owing to screwing up the pile.
**Keywords:** approached analytical method, screw pile, soil base, deformation module, bearing ability.

### *Физические предпосылки исследуемой системы*

Геометрические и физико-механические характеристики и законы деформирования элементов структуры грунтовых оснований фундаментов могут быть самые разнообразные. При определённых исходных условиях экономически целесообразным может оказаться фундамент на основе винтовых свай. Вследствие завинчивания сваи будет происходить уплотнение грунта в некоторой области вокруг ствола сваи с постепенным убыванием до его начального естественного состояния. В целом винтовая свая с уплотнённой областью грунтового основания образуют сложную по структуре и свойствам неоднородную и нелинейную физическую систему, физико-механические характеристики которой будут отличаться от их исходных значений. Исследование этой системы наиболее эффективно может быть выполнено математическими методами с позиций системного подхода.

### *Математическая модель системы «Грунтовое основание – винтовая свая»*

Математическую модель системы оснований и фундаментов построим на основе принципа минимума полной энергии системы. Исходя из сведений о размерах области существования системы, математическую модель исходной задачи можно представить следующим образом:

1. Механико-математическая модель элементов системы

- при линейно-упругом деформировании: $\sigma_i = E\varepsilon_i$,
- при нелинейно-упругом деформировании: $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, в частности,

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m,\ A > 0,\ 0 < m < 1, \tag{1}$$

где $\sigma_i$, $\varepsilon_i$ – интенсивности напряжений и деформаций;

$E$ – модуль деформации;

$A$, $m$ – параметры закона нелинейного деформирования.

2. Механико-математическая модель модуля деформации уплотнённого грунта в области выше лопасти винтовой сваи:

$$E = a \cdot r_i^{\,k},\ k < 0,\ a > 0. \tag{2}$$

3. Граничные условия и геометрическая модель области существования исследуемой системы

$U = V = 0$ при $r = r_{max},\ 0 < z \leq z_{max}$,
$U = V = 0$ при $z = z_{max},\ 0 \leq r \leq r_{max}$,
$U = 0$ при $r = 0,\ 0 < z \leq z_{max}$,
$Y = 0$ при $r = 0,\ 0 < z < z_{max}$,
$Y = \mathrm{P}$ при $z = 0,\ 0 \leq r \leq R$,
$Y = 0$ при $z = 0,\ R < r < r_{max}$,
$X = 0$ при $z = 0,\ 0 \leq r < r_{max}$,

где $R$ – радиус ствола сваи; r, z, $r_{max}$, $z_{max}$ – текущие координаты и их максимальные значения; U, V – компоненты вектора перемещения; X, Y – компоненты вектора внешних сил.

4. Ядро математической модели (условия равновесия системы):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = 0, \quad \text{где } \Pi = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\},$$

П – полная энергия деформируемой системы; {P} – вектор внешних сил;{σ}, {ε}, {U} – векторы напряжений, деформаций и перемещений; V – объём области существования исследуемой системы.

В случае линейного деформирования достаточно двух физико-механических характеристик: модуль деформации $E$ и коэффициент Пуассона $\mu$.

При нелинейном деформационном процессе уравнения закона деформирования будут иметь более сложные формы зависимости напряжений и деформаций в каждом элементе. В графическом представлении в общем случае зависимость интенсивностей напряжений и деформаций $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ может быть представлена неубывающей кривой параболического типа, проходящей через точку $O(0,0)$, в частности, $\sigma_i = A\varepsilon_i^m$, $A > 0$, $0 < m < 1$.

Параметры нелинейного закона деформирования, как правило, определяются экспериментально, что трудоёмко и дорого. В то же время для всех основных видов грунтов существуют хорошо отработанные методики определения их основных физико-механических характеристик и составлены соответствующие таблицы значений этих величин. Поэтому вполне естественно возникает задача определения параметров закона нелинейного деформирования через основные физико-механические характеристики грунта любого типа. В [1] параметры приведенного закона нелинейного деформирования (1) предложено определять по аналитическим формулам:

$$A = E^m \sigma_{i,кр}^{1-m} = \left(\frac{E}{\sigma_{i,кр}}\right)^m \cdot \sigma_{i,кр}, \quad m = \frac{1-2\mu}{1-\mu}, \qquad (3)$$

$\sigma_{i,кр}$ – напряжение, до которого грунт деформируется квазилинейно; μ – коэффициент Пуассона определяем, используя значение коэффициента $K$ бокового давления в покое. По определению из теории упругости $K = \mu/(1-\mu)$, по формуле Якоби $K = 1 - \sin\varphi$, φ – угол внутреннего трения [3].

В настоящей работе предложен разработанный способ определения параметров модели уплотнения грунта через его основные физико-механические характеристики. Используя построенные формы законов уплотнения и нелинейного деформирования грунта, разработана оригинальная методика аналитико-численного определения осадки винтовой сваи в уплотнённом нелинейно-деформируемом грунтовом основании.

### *Механико-математическая модель модуля деформации уплотнённого грунта*

Закономерность изменения модуля деформации грунта в уплотненной зоне вокруг ствола винтовой сваи может быть описана степенной функцией гиперболического типа (2): $\{E = a \cdot r^k,\ k < 0,\ A > 0\}$.

Параметры А, к подлежат определению. Их можно определить экспериментально, что очень трудоёмко и дорого. Поэтому ставится задача определения этих параметров математическими методами. В настоящей работе изложен оригинальный приближённый аналитический метод решения поставленной задачи исходя из понятия несущей способности грунта в зоне уплотнения вокруг винтовой сваи. Поставим в соответствие этой зоне некоторое однородное основание, эквивалентное по несущей способности с модулем деформации $E_{экв}$. На основании поставленного условия получим

$$(r_{\max}-r_0)E_{экв}=a\int_{r_0}^{r_{\max}} r^k dr. \tag{4}$$

В соответствии с теоремой о среднем значении интеграла будем иметь

$$a\int_{r_0}^{r_{\max}} r^k dr=a(r_{\max}-r_0)r_i^k, \quad r_0<r_i<r_{\max}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует $E_{экв}=a\,r_i^k.$ (6)

В (4) подинтегральная функция является интегрируемой в заданном интервале (5), поэтому

$$a\int_{r_0}^{r_{\max}} r^k dr=a(r_{\max}-r_0)^{k+1}/(k+1). \tag{7}$$

Из (4) и (7) следует

$$E_{экв}=a\,(r_{\max}-r_0)^k/(k+1). \tag{8}$$

Методом компьютерного моделирования на основе результатов натурного эксперимента показано k = $-f\mu$. Подставив это соотношение в (8), получим

$$E_{экв}=a(r_{\max}-r_0)^{-f\mu}/(1-f\mu). \tag{9}$$

Сравнивая (6) и (9) и учитывая, что $r_0 << r_{\max}$, будем иметь

$$r_i=\sqrt[f\mu]{1-f\mu}\,(r_{\max}-r_0)\approx\sqrt[f\mu]{1-f\mu}\cdot r_{\max}. \tag{10}$$

Согласно (2) при $r = r_{\max}$ будем иметь $E_0=a\,r_{\max}^k$. Учитывая (6), получим

$$E_{экв}=E_0\left(\frac{r_i}{r_{\max}}\right)^{-f\mu}=E_0\left(\frac{r_{\max}}{\sqrt[f\mu]{1-f\mu}\cdot r_{\max}}\right)^{f\mu}=\frac{E_0}{1-f\mu}. \tag{11}$$

Из (11) и (9), учитывая $r_0 << r_{\max}$, получим

$$a=E_0 r_{\max}^{f\mu}. \tag{12}$$

Полученное соотношение подставим в (2) и, учитывая, что k = $-f\mu$, получим

$$E=E_0\left(r_{\max}/r_i\right)^{f\mu}. \tag{13}$$

Значение $r_{\max}$ можно получить на основании рекомендаций СНиП для расчёта осадок свай или по результатам физического эксперимента.

Как показывает эксперимент, проведенный в БЕЛНИИС, на степень уплотнения грунта вокруг ствола сваи влияют ее геометрические размеры, а именно высота сваи и ее радиус. На основании этих экспериментальных данных была разработана формула для определения $f$:

$$f=\frac{\sqrt[3]{\frac{l}{L}R}}{\sqrt{2B}\,(R-r)},$$

где *R* – радиус расчетной области, м; *r* – радиус сваи, м; *L* – высота расчетной области, м; *l* – длина сваи, м; *B* – коэффициент консистенции грунта.

Все полученные результаты в целом позволяют построить приближённое аналитическое решение для осадки винтовой сваи в нелинейно-деформируемом грунтовом основании с учётом его уплотнения.

***Определение осадки винтовой сваи при сжимающей нагрузке***

При общей постановке задачи об определении осадки винтовой сваи исходными данными являются геометрические размеры сваи, геологические и физико-механические характеристики грунтов ненарушенной структуры строительной площадки. Как уже отмечалось, вследствие завинчивания сваи физико-механические характеристики грунтового основания сваи будут другими. Этот факт необходимо учитывать при решении поставленной задачи. В [3] приведена разработанная ранее формула для определения осадки винтовой сваи:

$$W = \frac{2m(1+\mu)}{\sqrt{3}\,(1-m)}\left(\frac{\sqrt{3}\,(1+m)\,\mu\,(1+\mu)\,P}{2ALr_c\,\kappa_\phi}\right)^{\frac{1}{m}} r_c\,\kappa_\phi, \tag{14}$$

где $r_{пр} = r_c\ \kappa_ф$, $\kappa_ф = 1 + \mu\dfrac{r_{лоп} - r_0}{3r_c}$; $\kappa_ф$ – коэффициент формы винтовой сваи, учитывает влияние лопасти сваи; $r_c$, $r_{лоп}$ – радиусы ствола и лопасти сваи.

Здесь необходимые исходные данные были взяты из натурного эксперимента, выполненного в РУП БелНИИС. Используя понятие эквивалентного грунтового основания и приведенное выше аналитическое решение для определения его характеристик, преобразуем выражение (14). При этом параметр A определим по формуле (3), эквивалентный модуль деформации определим по формуле (11) через его начальное значение. В итоге для определения осадки винтовой сваи в нелинейно-деформируемом грунтовом основании с учётом его уплотнения, используя начальные значения исходных данных, получим следующее выражение:

$$W = \frac{2m(1+\mu)(1-f\mu)\sigma_{кр}}{\sqrt{3}\,(1-m)E_0}\left(\frac{\sqrt{3}\,(1+m)\,\mu\,(1+\mu)\,P}{2\sigma_{кр}\,L\,r_c\,\kappa_\phi}\right)^{\frac{1}{m}} r_c\,\kappa_\phi. \tag{15}$$

Оценку полученного решения покажем на примере реальной задачи: винтовая свая с радиусом $r_c$ = 10 см заглублена на 4,1 м в однородное грунтовое основание с характеристиками (песок мелкий прочный) E = 32 МПа, φ = 35°, c = 3кПа, γ = 10,5 кН/м$^3$. На сваю действует вдавливающая нагрузка. Необходимо определить смещение сваи в заданном диапазоне нагрузок. Значения смещения винтовой сваи, полученные методом натурного эксперимента и по аналитическому решению (15) при учёте и без учёта уплотнения грунтового основания, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Осадка винтовой сваи в грунтовом основании ($S_{оп}$, $S_{ф.у}$, $S_{ф.н}$ – опытные и теоретические значения осадки сваи с лопастью с учётом и без учёта уплотнения грунтового основания)

| P(кН) | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_{оп}$(мм) | 0,4 | 1,2 | 2,3 | 4 | 6,7 |
| $S_{ф.у}$(мм) | 0,34 | 1,14 | 2,32 | 3,84 | 5,68 |
| $S_{ф.н}$(мм) | 0,51 | 1,7 | 3,5 | 5,8 | 8,7 |

Из анализа таблицы видно, что учёт уплотнения грунтового основания повышает его несущую способность на 30%, что обеспечивает значительное снижение ресурсоёмкости фундаментов из винтовых свай в грунтах РБ.

**Литература**

1. Быховцев, В.Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.

2. Быховцев, В.Е. Исследование деформации основания винтовой сваи методом компьютерного моделирования / В.Е. Быховцев, В.В. Бондарева, В.Н. Кравцов // Проблемы современного бетона и железобетона : сб. тр. II международного симпозиума. Ч. 1. – Минск : Минсктиппроект, 2009. – 584 с.

3. Никитенко, М.И. Буроинъекционные анкеры и сваи при возведении и реконструкции зданий и сооружений / М.И. Никитенко. – Минск : БНТУ, 2007. – 580 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 03.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 004.052*

# Определение скоростных характеристик каналов передачи ЛВС при использовании пакетных методов зондирования

В.Н. Кулинченко

В статье рассмотрены особенности алгоритмов реализации пакетных методов зондирования сегментов ЛВС. Созданная программная подсистема позволяет определить пропускную способность сети.

**Ключевые слова:** пакетное зондирование, пропускная способность, протоколы передачи, сегмент ЛВС, каналы передачи данных.

The article describes the features of the algorithm implementation methods for probing packet segments of a LAN. The created software subsystem enables to determine the network bandwidth.

**Keywords:** packet sensing, bandwidth, protocols, LAN segments, data channels.

Основная задача, для решения которой строится любая компьютерная сеть, – максимально быстрая передача информации между ее узлами с минимумом потерь. Основной характеристикой компьютерной сети является пропускная способность. И поэтому критерии, связанные с производительностью (пропускной способностью) сети или части сети, хорошо отражают качество выполнения сетью ее основной функции.

Существует большое количество вариантов определения критериев этого вида. Эти варианты могут отличаться друг от друга: выбранной единицей измерения количества передаваемой информации, характером учитываемых данных (только пользовательские данные, пользовательские данные вместе со служебными данными), количеством точек измерения передаваемых данных, способом усреднения результатов на сеть в целом и т. д.

Для измерения физических характеристик каналов передачи данных можно разработать и создать специальные технические устройства, но более привлекательной является возможность реализации программного их измерения на основе уже интегрированных в системы связи стандартных устройств. Существующие для этого методы получили название пакетных методов (пакет представляет собой набор данных, передаваемый по определенному маршруту).

Для критериев, отличающихся единицей измерения передаваемой информации, в качестве единицы измерения обычно используются пакеты (кадры) или биты. Соответственно, пропускная способность измеряется в пакетах в секунду или же в битах в секунду. Из-за переменного размера пакета (это характерно для всех протоколов за исключением ATM, имеющего фиксированный размер ячейки в 53 байта) измерение пропускной способности в пакетах в секунду связано с некоторой неопределенностью: пакеты какого протокола и какого размера имеются в виду? Чаще всего подразумевают кадры протокола Ethernet как самого распространенного, имеющие минимальный для протокола размер в 64 байта (без преамбулы). Кадры минимальной длины выбраны в качестве эталонных из-за того, что они создают для коммуникационного оборудования наиболее «тяжелый» режим работы.

Вычислительные операции, производимые с каждым пришедшим пакетом, в очень слабой степени зависят от его размера, поэтому на единицу переносимой информации обработка пакета минимальной длины требует выполнения гораздо большего количества операций, чем для пакета максимальной длины.

Измерение пропускной способности в битах в секунду для локальных сетей дает более точную оценку скорости передаваемой информации, чем при использовании пакетов.

При измерении пропускной способности необходимо принимать во внимание также и служебные данные, передаваемые по сети. В любом протоколе имеется заголовок, переносящий служебную информацию, и поле данных, в котором переносится информация, считающаяся для данного протокола пользовательской. Например, в кадре протокола Ethernet минимального размера 46 байт (из 64) представляют собой поле данных, а оставшиеся 18 байт являются служебной информацией. При измерении пропускной способности в пакетах в секунду отделить пользовательскую информацию от служебной невозможно, а при побитовом измерении можно.

Если пропускная способность измеряется без деления информации на пользовательскую и служебную, то в этом случае нельзя ставить задачу выбора протокола или стека протоколов для данной сети. Это объясняется тем, что даже если при замене одного протокола на другой мы получим более высокую пропускную способность сети, то это не означает, что для конечных пользователей сеть будет работать быстрее. Если доля служебной информации, приходящаяся на единицу пользовательских данных, у этих протоколов различная (а в общем случае это так), то можно в качестве оптимального выбрать более медленный вариант сети. Если же тип протокола не меняется при настройке сети, то можно использовать и критерии, не выделяющие пользовательские данные из общего потока.

При тестировании пропускной способности сети на прикладном уровне легче всего измерять как раз пропускную способность по пользовательским данным. Для этого достаточно измерить время передачи файла определенного размера между сервером и клиентом и разделить размер файла на полученное время.

Чтобы решить проблемы синхронизации между удаленными узлами можно усреднить время передачи, отправив объем данных серверу и переслав те же данные обратно клиенту от сервера, затем необходимо разделить разницу между временем получения клиентом данных и временем их отправки клиентом серверу на 2:

$$\overline{t_{передачи}} = \frac{t_{получения} - t_{отправки}}{2}.$$

При настройке сети необходимо различать номинальную и эффективную пропускные способности протокола. Под номинальной пропускной способностью обычно понимается битовая скорость передачи данных, поддерживаемая на интервале передачи одного пакета. Эффективная пропускная способность протокола – это средняя скорость передачи пользовательских данных, то есть данных, содержащихся в поле данных каждого пакета. В общем случае эффективная пропускная способность протокола будет ниже номинальной из-за наличия в пакете служебной информации, а также из-за пауз между передачей отдельных пакетов.

Знание общей пропускной способности между двумя узлами не может дать полной информации о возможных путях ее повышения, так как из общей цифры нельзя понять, какой из промежуточных этапов обработки пакетов в наибольшей степени тормозит работу сети. Поэтому могут быть полезны данные о пропускной способности отдельных элементов сети для принятия решения о способах ее оптимизации. Именно с этой целью необходимо измерять пропускную способность отдельных сегментов сети.

Существует множество инструментов, которые призваны помочь в измерении пропускной способности сетевого соединения. В пределах LAN в число этих инструментов входят bing, bmon, bwbar, bwm, bwm-ng, iftop, iperf, ipfm, speedometer, cbm, ibmonitor, pktstat, mactrack, MRTG, Cacti.

В масштабах Интернет существует несколько программных «тестов пропускной способности» или «тестов скорости», и многие из них доступны для интерактивного использования на общедоступных Интернет-сайтах (например, speedtest.net).

Пропускная способность глобальной сети постоянно варьируется, и измерить ее точно довольно сложно. Это, хотя и в меньшей степени, характерно и для локальных сетей. Измерение пропускной способности аппаратно-программного обеспечения сетей может осуществляться с использованием протоколов ICMP, SNMP, UDP, TCP.

Для диагностики каналов передачи данных пакетными методами сначала использовали наиболее простую модель описания процесса прохождения пакета по заданному пути – однопакетную модель. Рассмотрим, например, канал, состоящий из линий связи, соединённых между собой маршрутизаторами (М) с находящимися на обоих концах рабочими станциями (Р) (рисунок 1).


Рисунок 1 – Модель канала передачи данных

Будем пропускать через канал пакеты разного размера таким образом, чтобы от любого маршрутизатора мы могли получать маленькие пакеты-отклики определённого размера. Тогда время $t_1$ с момента передачи до момента приёма отклика от первого маршрутизатора будет равно:

$$t_1 = t_{create1} + \frac{S}{b_1} + \frac{l_1}{C} + t_{comp1} + t_{back1},$$

где $t_{create1}$ – время создания и выдачи пакета из памяти в сетевой интерфейс, $S$ – размер пакета, $b_1$ – пропускная способность интерфейса, $b$ – длина линии связи, $C$ – скорость света, $t_{comp1}$ – время обработки пакета приёмной станцией, $t_{back1}$ – время прихода отклика обратно. Будем полагать, что на обоих концах линии находятся одинаковые интерфейсы. Пример использования однопакетной модели приведен на рисунке 2.

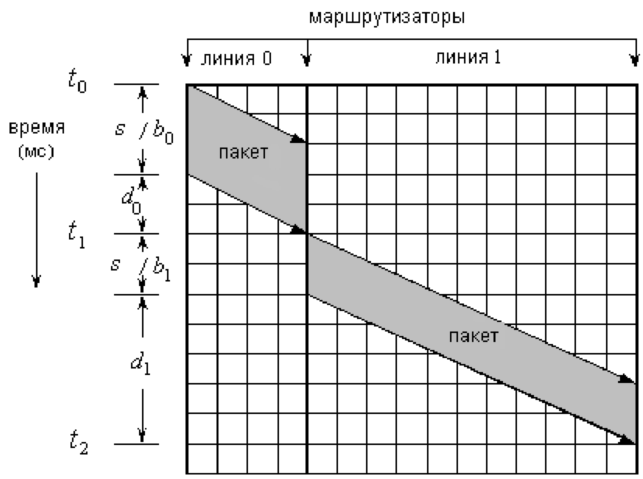



Рисунок 2 – Диаграмма прохождения пакета по каналу

Из формулы видно, что от размера пакета зависит только время передачи пакета из интерфейса в среду передачи $-\frac{S}{b_1}$. В дальнейшем всё, что не зависит от $S$, обозначим:

$$d_i = t_{createi} + \frac{l_i}{C} + t_{compi} + t_{backi}.$$

В однопакетной модели предполагается, что время передачи линейно по отношению к размеру пакета, все линии одноканальные (то есть пакеты не могут идти параллельно) и что существующий уже поток данных не будет заставлять посланные пакеты простаивать в очереди.

Первое предположение почти всегда верно, второе – в большинстве случаев, но вот третье предположение всегда не верно (ведь мы не единственные, кто пользуется сетью). Но несмотря на это, есть способ, позволяющий обойти это препятствие. Дело в том, что добавочный поток данных может только увеличить время прохождения пакета, следовательно, если мы проведём достаточно большую серию измерений, то сможем найти минимальное время, соответствующее тому времени, когда пакету никто не мешал.

Метод пакетной пары предназначен для определения номинальной пропускной способности канала, то есть максимально возможной пропускной способности незагруженного канала. Он основан на использовании пакетной пары – двух пакетов, выпущенных в канал непосредственно друг за другом.

Отправленные таким образом пакеты могут быть приняты с временным интервалом $\Delta = \frac{S}{C}$, где $S$ – размер пакета, $C$ – номинальная пропускная способность интерфейса, через который пакеты попали в канал.

Рассмотрим иллюстрацию работы этого метода на рисунке 3. Видно, что на выходе канала, состоящего из нескольких линий, интервал пакетной пары будет соответствовать самому узкому месту в канале.

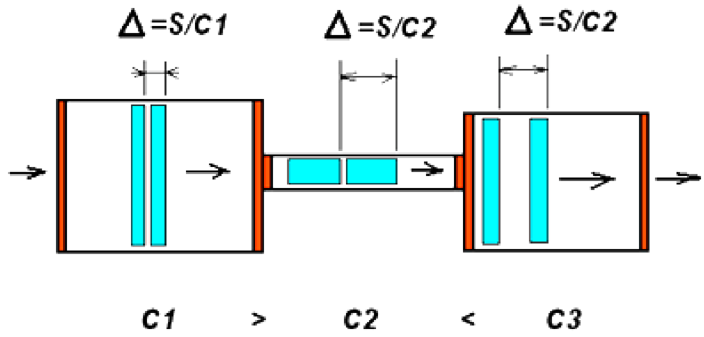



Рисунок 3 – Прохождение пакетной пары по каналу
(ширина каждой линии связи соответствует её пропускной способности)

При наличии загрузки канала другими потоками данных пакеты, распространяющиеся в канале, начинают взаимодействовать, а точнее перемешиваться с нашей пакетной парой. Какой-нибудь побочный пакет может войти между пакетами нашей пары, и тогда интервал времени увеличится. Либо если непосредственно перед пакетной парой промежуточный маршрутизатор примет большой побочный пакет, то интервал времени пакетной пары может уменьшиться, так как первый пакет пары не сможет отправиться, а будет стоять в очереди, ожидая передачи побочного пакета, и таким образом дождётся окончания приёма второго пакета.

Усовершенствовав модель пакетной пары, можно посылать большее число ($N > 2$) пакетов размером $S$, идущих друг за другом. Эта последовательность пакетов называется пакетной цепочкой длины $N$. Приёмник пакетов регистрирует интервал ($\Delta N$) пакетной цепочки – интервал времени от первого до последнего пакета. Тогда можно вычислить пропускную способность канала:

$$b(N) = \frac{(N-1)*S}{\Delta N}.$$

Без побочного трафика пропускная способность будет соответствовать пропускной способности самого узкого места в канале, так же, как и в случае пакетной пары. На первый взгляд может показаться, что использование пакетной цепочки приводит к меньшей зависимости от шумов, так как интервал времени возрастает пропорционально $N$, а шумы остаются прежними. Но это совсем не так, поскольку при возрастании интервала времени возрастает и вероятность того, что пакеты цепочки будут взаимодействовать с пакетами побочного потока.

Необходимо отметить, что использование пакетной цепочки для измерения пропускной способности по протоколу TCP может быть существенно затруднено использованием алгоритма Нейгла, если размер тестовых пакетов меньше MSS (maximum segment size – максимальный размер сегмента), а также тем, что во многих реализациях TCP при нормальных условиях ACK (флаг подтверждения получения пакета) посылается только на каждый второй сегмент.

В ходе исследования представленных на рынке решений по измерению пропускной способности сети можно прийти к выводу, что в абсолютном большинстве приложений используется метод однопакетного зондирования. Безусловно, он является наиболее простым с точки зрения реализации (в частности, при использовании протокола ICMP для определения пропускной способности канала между узлами, один из которых может являться не ПК, а, например, маршрутизатором). Однако для получения более полной картины пропускной способности и тщательного выявления «узких» мест сети лучше использовать сразу несколько подходов.

Также стоит отметить, что практически все приложения для измерения пропускной способности и мониторинга трафика имеют консольный или достаточно сложный графический интерфейс, с которым рядовому пользователю, желающему достаточно точно измерить пропускную способность сети, будет разобраться проблематично.

В приложениях с дружественным для конечного пользователя интерфейсом, как правило, отсутствует вариант возможности работы с приложением через консоль (подразумевающий высокую степень автоматизации тестов), что не позволяет вводить команды в пакетном режиме в файлах скриптов, и, соответственно, подобные приложения не востребованы у администраторов сетей и продвинутых пользователей, которые предпочтут именно такой режим работы с приложением.

***Заключение***

В качестве программного решения указанных проблем автором было принято решение о разработке приложения EaseNet, призванного помочь как неопытному пользователю ПК, так и системному администратору с достаточно высокой степенью точности определить значение пропускной способности сегмента локальной вычислительной сети.

## Литература

1. Семенов, Ю.А. Телекоммуникационные технологии : уч. пособие / Ю.А. Семенов. – ГНЦ ИТЭФ, 2010. – 600 с.

2. Закер, К. Компьютерные сети. Модернизация и поиск неисправностей : пер. с англ. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 1008 с.

3. Lai, K. Measuring Link Bandwidths Using a Deterministic Model of Packet Delay / K. Lai. – Stanford University, 2001.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 20.07.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 004.052*

# Методика повышения надежности вычислительных систем

А.И. Кучеров

В статье рассмотрено деление объектов на группы по различным показателям и методам оценки надежности. Описывается программный комплекс и его структура и функции.
**Ключевые слова:** надежность, программный комплекс, вычислительная система.

The paper considers the division of objects into groups according to various indicators and methods for assessing reliability. It describes the software system as well as its structure and functions.
**Keywords:** reliability, software system, computing system.

***Введение***

Рост значения проблемы надежности связан с некоторыми особенностями развития современной техники. Во-первых, существует стремление к подробному планированию хода производственных процессов, которые становятся все более сложными. Во-вторых, все больше распространяется автоматизация различных процессов. В-третьих, автоматизированные системы выполняют все более ответственные задачи [1].

В процессе эксплуатации вычислительных систем и компьютерных сетей возникают различные сбои и отказы. Некоторые из них можно предсказать и, соответственно, предотвратить. Для предсказания возникновения сбоев и отказов необходимо иметь достаточное количество информации об оборудовании и режимах его эксплуатации. Также со временем оборудование стареет, то есть изнашивается, и, соответственно, повышается вероятность появления сбоев и отказов, то есть, другими словами, надежность оборудования уменьшается. Это касается как вычислительных систем, так и компьютерных сетей. Но кроме сбоев и отказов самого оборудования, на его стальную работу сильно влияют сбои и отказы программных средств.

***Деление объектов на группы по различным показателям и методам оценки надежности***

Для определения надежности оборудования и программных средств давно существуют различные методики. Для объектов разного назначения и устройства применяются различные показатели надежности. Классификация объектов по показателям и методам оценки надежности приведена на рисунке 1.

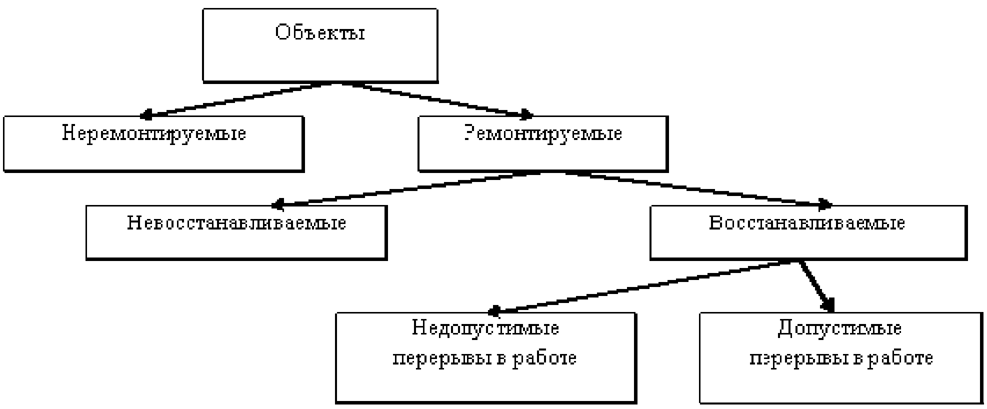



Рисунок 1 – Группы объектов, различающиеся показателями надежности

Можно выделить четыре группы объектов, различающихся показателями и методами оценки надежности [1]:

1. Неремонтируемые объекты, применяемые до первого отказа.
2. Ремонтируемые объекты, восстановление которых в процессе применения невозможно (невосстанавливаемые объекты).
3. Ремонтируемые восстанавливаемые в процессе применения объекты, для которых недопустимы перерывы в работе.
4. Ремонтируемые восстанавливаемые в процессе применения объекта, для которых допустимы кратковременные перерывы в работе.

***Использование программных средств для сбора информации с сети***

Для получения необходимой информации об оборудовании используются программные средства. Таких программных средств разработано большое множество, также много информации об оборудовании могут выдавать современные операционные системы. Некоторые программные средства, кроме общей информации об оборудовании, могут выдавать и более подробную информацию. Например, программы мониторинга жесткого диска сообщают о большом количестве параметров, при достижении критической точки на одном из параметров нельзя считать работу жесткого диска надежной. Все эти параметры хранятся в контроле жесткого диска, и надзор за их соблюдением выполняют микропрограммы контроллера. Но в вычислительных системах имеется ряд достаточно простых устройств, и невозможно заранее предугадать выход их из строя, так как они не имеют в своем составе сложных контролеров, проверяющих критические параметры их работы. Например, компьютерная мышь, клавиатура, джойстик, вентилятор на радиаторе процессора, вентилятор блока питания, «батарейка» на системной плате и др. Многие из этих устройств при включении вычислительной техники проверяются внутренней диагностикой, но она очень поверхностная.

Пользователи желают, а в производстве это крайне необходимо, чтобы вычислительные системы и компьютерные сети работали без сбоев и отказов или, по крайней мере, сбои и отказы оборудования можно было предугадать и предупредить. Поэтому технический персонал, обслуживающий оборудование, должен знать, сколько часов в сутки и сколько дней в неделю эксплуатировалось то или иное оборудование, в каких режимах оно работало и кто его эксплуатировал. Этого можно добиться административными средствами. Например, ведением «бумажных» журналов доступа к оборудованию с отметками, сколько времени работало то или иное оборудование и кто его эксплуатировал.

В случае вычислительной техники, подключенной к компьютерной сети, возможно собирать большое количество информации со всех рабочих станций и централизовано размещать ее на сервере с последующим анализов в целом.

Разрабатываемый программный комплекс мониторинга активности вычислительной системы (ВС) в корпоративной сети сбирает всю информацию об узлах сети и формирует базу данных на сервере. На рисунке 2 представлена функциональная схема комплекса.

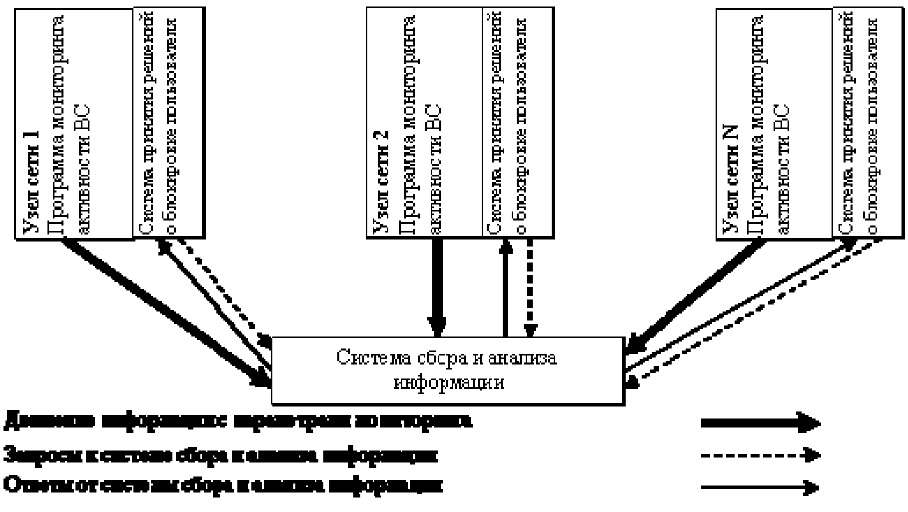



Рисунок 2 – Функциональная схема программного комплекса

Программный комплекс мониторинга активности вычислительной системы в корпоративной сети строится на основе модульного принципа разработки приложений. Каждый модуль выполняет одну определенную функцию, что позволяет уменьшить влияние одного программного модуля на другой. Это создает более гибкий и легко расширяемый по функциям программный продукт. Программные модули будут собирать информацию о действиях пользователей, например:

– скорость набора на клавиатуре (количество символов в единицу времени);
– скорость кликов на каждой кнопке манипулятора типа «мышь»;
– запускаемые приложения;
– время входа в узел сети;
– время выхода из узла сети;
– время блокировки пользователем узла сети;
– время простоя узла сети;
– и др.

Из собранной информации можно делать и другие выводы. Например, сколько каждый узел сети работает в течение дня, недели, месяца и т. д. От этого будет зависеть, как часто необходимо проводить профилактические работы с тем или иным узлом сети. При дальнейшей разработке программного комплекса будут уточняться цели и задачи создаваемой системы.

Мониторинг активности вычислительной системы – это сбор различных параметров по результатам деятельности пользователя на узле корпоративной сети. При разработке программного обеспечения использовался модульный принцип программирования, где каждый модуль отвечает за сбор только определенных параметров. На рисунке 3 показана функциональная схема программного продукта мониторинга вычислительной системы.

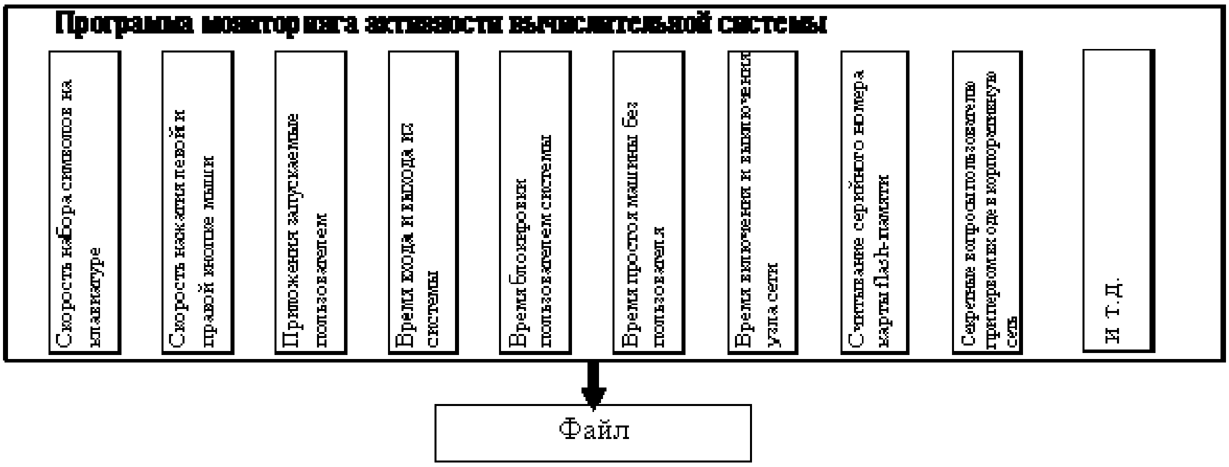



Рисунок 3 – Функциональная схема мониторинга активности вычислительной системы

Поскольку вся информация централизованно хранится на сервере, то ее легко анализировать по различным критериям. Например, чем более интенсивно будет использоваться компьютерная мышь, тем быстрее она износится, может утратиться чувствительность датчиков, а может наступить и механическая поломка. И так может происходить по целому ряду оборудования. Чем дольше работает оборудование и чем выше нагрузка на него, тем выше вероятность выхода его из строя. Соответственно, с течением времени надежность оборудования уменьшается. Поэтому очень важно собирать информацию об интенсивности использования оборудования. Под оборудованием, функционирующим в корпоративной сети, стоит понимать сервера, рабочие станции и сетевое оборудование. Даже в рамках одного кабинета или аудитории интенсивность использования вычислительной техники может серьезно отличаться, не говоря уже о крупном предприятии, где вычислительная техника исчисляется сотнями, а может и тысячами.

Если технический персонал, обслуживающий вычислительную технику при помощи программного комплекса, сможет оперативно получать информацию об интенсивности использования вычислительных систем, то он более оперативно сможет реагировать на возможные сбои и отказы, так как программный комплекс сможет оперативно сообщать о достижении некоторых критических параметров для каждой отдельной единицы оборудования. Например, если количество кликов на одной из кнопок «мыши» достигнет 100000, то программный комплекс должен сообщить обслуживающему персоналу, что на таком-то компьютере «мышь» может в скором времени выйти из строя и следует иметь в запасе другую. И такие критические параметры, как, например, количество кликов по кнопке, можно найти у различных компонентов вычислительной техники. Актуальным критическим параметром для всего спектра оборудования будет время активной работы. Только у каждой единицы этот параметр будет иметь свое значение. При достижении этого значения программный комплекс должен сообщить о будущих сбоях и отказах, а технический персонал, в свою очередь, должен провести профилактические работы по недопущению выхода из строя оборудования, таким образом повысить надежность оборудования.

***Заключение***

Предложенная методика повышения надежности вычислительных систем в корпоративной среде еще требует дальнейшей формализации и уточнения, но уже очевидно, что при своевременном реагировании на предупреждения программного комплекса будет уменьшаться количество сбоев и отказов оборудования.

## Литература

1. Лукьянов, В.С. Курс лекций по дисциплине «Надежность АСОИУ» : уч. пособие / В.С. Лукьянов, Е.С. Кузнецова [Электронный ресурс]. – Волгоград. – Режим доступа : http://evm.vstu.ru/files/nadezh.zip. – Дата доступа : 03.09.2012.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.09.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 531:004.925*

# Численное исследование эффективности армирования вертикальными сваями малого диаметра малопрочного грунта

С.В. Торгонская

Исследуется повышение несущей способности слабых грунтовых оснований методом его вертикального армирования.

**Ключевые слова:** грунтовое основание, деформации, армирование грунтов, осадка фундаментов, компьютерное объектно-ориентированное моделирование.

The increase of bearing strength of the weak ground grounds is probed by the method of his vertical reinforcing.

**Keywords**: soil basis, deformations, reinforcing of soil, deposit of the bases, object-oriented computer modelling.

### *Введение*

В настоящее время для строительства зданий и сооружений все чаще используются строительные площадки с грунтовыми основаниями, содержащими различные малопрочные включения. Несущая способность таких грунтовых оснований приводит к необходимости устройства сложных фундаментов зданий, что сопряжено со значительным увеличением стоимости одного квадратного метра возводимого здания. Решением этой проблемы может быть локальное повышение несущей способности малопрочных зон грунтового основания. В этом случае экономический эффект устройства фундаментов здания может достигать 20% от их общей стоимости.

Существуют несколько конструктивных методов, позволяющих увеличить несущую способность грунтовых оснований, содержащих малопрочные включения. Одним из таких методов является вертикальное армирование зоны малопрочного грунта сваями малого диаметра. Ставится задача определения количества, расположения, размеров и физико-механических характеристик армирующих элементов малопрочных зон грунтовых оснований.

### *Физическая постановка задачи*

Рассматривается грунтовое основание большеразмерного плитного фундамента. В структуре грунтового основания могут быть малопрочные включения различного вида: слои, линзы, вклинивания. Необходимо исследовать эффективность повышения несущей способности малопрочного грунтового основания способом вертикального армирования сваями малого диаметра таким образом, чтобы затраты на указанную инженерную подготовку малопрочного слоя были экономически целесообразными.

В формализованной постановке данная задача является многокритериальной краевой задачей нелинейной математической физики [1]. Наиболее эффективным методом решения указанной задачи является метод объектно-ориентированного компьютерного моделирования на основе системного подхода, метода конечных элементов, рассмотренного совместно с методом энергетической линеаризации [2], [3].

### *Математическая модель системы*

В настоящей работе рассматривается сложная нелинейная физическая система «Плитный фундамент – грунтовое основание». При компьютерном объектно-ориентированном моделировании реальной физической системе ставится в соответствие её виртуальная физическая модель, которая строится на экране монитора и отображает структуру исходной системы. Это сразу накладывает свои требования на структуру и содержание математической модели. Для рассматриваемого класса задач математическая модель будет иметь следующую структуру [2]:

1. Геометрическая модель геологического разреза основания.

2. Механико-математическая модель элементов структуры нелинейно-деформируемого грунтового основания принята в виде степенной функции

$$\sigma_i = A\,\varepsilon_i^{\,m}\,,\; A > 0,\; 0 < m < 1\,.$$

3. Система граничных условий задаётся в соответствии с классификацией поставленной задачи как краевой задачи математической физики. На части границы области определения исследуемой системы задаётся система внешних сил, обусловленных нагрузкой от здания или сооружения.

4. Условия равновесия системы (ядро математической модели):

$$\frac{\partial\,\Pi}{\partial\,\{U\}} = 0,$$

где $\Pi = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV - \{U\}^T\{P\}$ – полная энергия деформируемой системы; {P} – вектор внешних сил; $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{U\}$ – векторы напряжений, деформаций и перемещений; $V$ – объём области существования исследуемой системы. Вследствие применения процедур метода конечных элементов ядро математической модели преобразовывается к виду $[K]\{U\} = \{P\}$, где $[K]$ – матрица жесткости системы.

5. Математическая модель (форма) искомого решения

$$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z\,.$$

Данная структурная схема является общим эффективным алгоритмом построения математических моделей систем или объектов.

Исследование математической модели проводилось методом вариантного проектирования. Для этого было построено несколько вариантов модельных задач, учитывающих структуру и свойства неоднородного малопрочного нелинейно-деформируемого грунтового основания.

***Компьютерное моделирование деформирования армированного грунтового основания плитного фундамента***

*Модельная задача № 1(Базовая)*

Все элементы системы «Фундамент – грунтовое основание» рассматривались как трехмерный объект сложной нелинейной физической системы. Компьютерное моделирование проводилось с помощью программного комплекса «Энергия-3D» [2].

В качестве базовой задачи рассматривается большеразмерный плитный фундамент, заглубленный в <u>однородное</u> нелинейно-деформируемое грунтовое основание на 30 см. Модуль деформации для плиты Е = $20 \cdot 10^3$ МПа (200000 кг/см$^2$), коэффициент Пуассона μ = 0,1; модуль деформации для грунта Е = 25 МПа (250 кг/см$^2$), коэффициент Пуассона μ = 0,27. Необходимо определить осадку плиты под действием равномерно распределенной вертикальной нагрузки Р.

Наиболее эффективным методом решения поставленной задачи является метод конечных элементов [2], [3]. Дискретизация расчетной области производилась объемными конечными элементами в виде параллелепипедов и тетраэдров. При этом каждый конечный элемент характеризуется определенными свойствами и связями.

Технология компьютерного моделирования представлена на рисунке 1.

Решение задачи было получено при условии линейно-упругого и нелинейно-упругого деформирования грунтового основания. Осадка плитного фундамента на однородном грунтовом основании составила 3,82 см и 7,44 см при линейном и нелинейном деформировании соответственно.

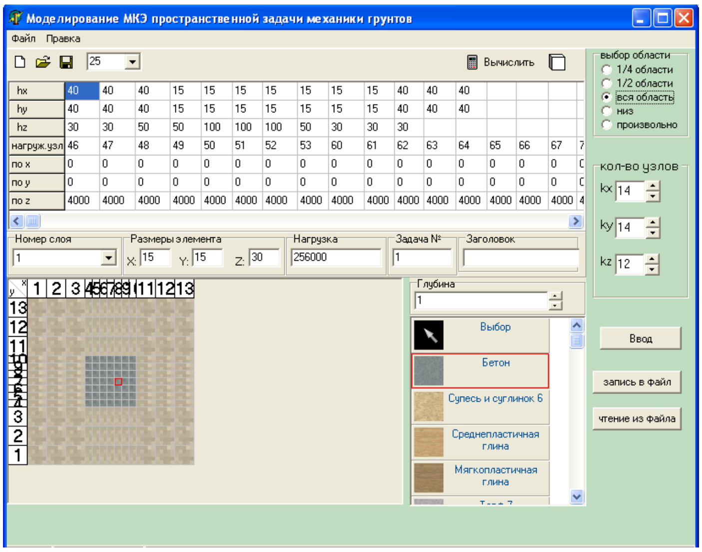



Рисунок 1 – Плитный фундамент и дискретизация расчётной области

*Модельная задача № 2*

Исследуется влияние наличия в грунте на глубине H = 130 см малопрочного слоя грунта мощностью h = 300 см со следующими характеристиками: модуль деформации E = 6 МПа (60 кг/см$^2$), коэффициент Пуассона μ = 0,46 на осадку плитного фундамента. При этом проекция плиты меньше проекции включения малопрочного слоя грунта.

В результате компьютерного моделирования было выявлено, что наличие малопрочного слоя грунта с заданными физико-механическими характеристиками увеличивает осадку плитного фундамента до 4,25 см и 9,16 см при линейном и нелинейном деформировании соответственно. Максимальные перемещения грунта наблюдаются в контактной области грунтового основания и плитного фундамента. Ближе к краям расчетной области наблюдается уменьшение как линейных, так и нелинейных перемещений грунта.

Следовательно, возникает задача *повышения* несущей способности малопрочного грунтового основания способом вертикального армирования сваями малого диаметра. Для решения данной задачи было рассмотрено 40 модельных задач, учитывающих:

– количество армирующих элементов;
– размеры армирующих свай (длина, диаметр);
– физико-механические характеристики армирующих свай;
– расположение армирующих свай в малопрочном слое грунтового основания.

Длина армирующих свай принималась равной 400, 450 см, диаметр сваи рассматривался от 10 до 15 см, модуль деформации варьировался от 100 до 1000 МПа.

В результате компьютерного моделирования выявлено, что расположение армирующих свай в малопрочном слое грунта при их равном количестве практически никакого влияния на осадку плиты не оказывает. Исследуемые варианты расположения армирующих элементов малопрочного слоя грунтового основания показаны на рисунке 2.

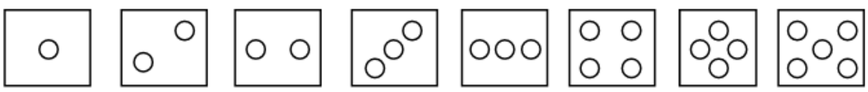


Рисунок 2 – Возможные варианты расположения армирующих свай
в неоднородном грунтовом основании

Результаты компьютерного моделирования осадки плитного фундамента на армированном сваями диаметра d = 15 см грунтовом основании представлены в таблице 1.

Как видно из таблицы 1, количество, длина, расстояние от фундамента и физико-механические характеристики армирующих свай зон малопрочного грунта имеют определяющее значение.

Таблица 1 – Осадки плитного фундамента (см)

| $E_{арм}$ (МПа) | 100 | | | | 300 | | | | 500 | | | | 1000 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_{арм}$ (см) | 400 | | 450 | | 400 | | 450 | | 400 | | 450 | | 400 | | 450 | |
| k | $S^e$ | $S^н$ | $S^e$ | $S^н$ | $S^e$ | $S^н$ | $S^e$ | $S^н$ | $S^e$ | $S^н$ | $S^e$ | $S^н$ | $S^e$ | $S^н$ | $S^e$ | $S^н$ |
| 1 | 4,24 | 9,09 | 4,23 | 9,05 | 4,21 | 8,90 | 4,19 | 8,81 | 4,19 | 8,79 | 4,15 | 8,69 | 4,15 | 8,67 | 4,09 | 8,51 |
| 2 | 4,23 | 9,05 | 4,21 | 8,90 | 4,18 | 8,76 | 4,13 | 8,61 | 4,14 | 8,63 | 4,06 | 8,35 | 4,07 | 8,36 | 3,94 | 7,95 |
| 3 | 4,21 | 8,97 | 4,19 | 8,90 | 4,14 | 8,63 | 4,07 | 8,37 | 4,09 | 8,39 | 3,98 | 8,02 | 3,99 | 8,09 | 3,81 | 7,57 |
| 4 | 4,20 | 8,93 | 4,17 | 8,84 | 4,11 | 8,47 | 4,01 | 8,11 | 4,04 | 8,22 | 3,89 | 7,72 | 3,93 | 7,85 | 3,69 | 7,16 |
| 5 | 4,19 | 8,86 | 4,15 | 8,77 | 4,08 | 8,35 | 3,96 | 7,91 | 4,00 | 8,09 | 3,82 | 7,53 | 3,89 | 7,67 | 3,60 | 6,90 |

где $E_{арм}$ – модуль упругости армирующей сваи; $L_{арм}$ – длина армирующей сваи; k – количество армирующих свай диаметром d = 15 см; $S^e$, $S^н$ – осадки фундаментной плиты при линейном и нелинейном деформировании основания.

Для данной конкретной задачи использование четырех армирующих свай длиной 450 см на площадке малопрочного слоя грунта указанных размеров с модулем деформации E = 1000 Мпа (10000 кг/см$^2$) позволяет заменить слабый слой грунтового основания эквивалентным по несущей способности слоем грунта.

***Заключение***

Использование вертикального армирования зоны малопрочного грунтового основания сваями малого диаметра дает возможность обеспечить необходимую несущую способность слабых грунтов и осадку фундаментов. При этом, варьируя расположением в плане фундамента, количеством, размерами и физико-механическими характеристиками армирующих элементов малопрочных зон грунтов, представляется возможным найти наиболее оптимальные решения поставленной задачи.

**Литература**

1. Партон, В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.

2. Быховцев, В.Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.

3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 540 с.

4. Цытович, Н.А. Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М. : Стройиздат, 1963. – 542 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 16.11.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 004.353.2*

# Аппаратно-программная реализация адаптивной яркости в устройствах отображения

П.Л. Чечет

В статье рассмотрены аппаратная и программная составляющие системы динамической регулировки яркости индикации в устройствах на микроконтроллерной основе. Рассмотрены варианты наличия и отсутствия аппаратного аналого-цифрового преобразователя в устройстве. Рассмотрены происходящие в системе процессы, приведён практический вариант реализации.
**Ключевые слова:** микроконтроллер, светоизлучающие индикаторы, аналого-цифровое преобразование.

The article describes the hardware and software components of the system dynamically adjusting the brightness in the display devices on the microcontroller basis. The variants of the presence and absence of hardware analog-to-digital converter in the device are described. The article deals with the processes occurring in the system and gives a practical embodiment.
**Keywords**: microcontroller, light-emitting indicators, analog-to-digital conversion.

***Введение***

Цифровые устройства отображения сегодня используются практически в каждом приборе или аппарате. При использовании индикаторов, использующих эффект отражения света, контрастность отображаемой информации автоматически меняется в зависимости от внешней освещенности. Такие экраны используются в микрокалькуляторах, электронных книгах и других устройствах, пользование которыми подразумевается при достаточном внешнем освещении. Однако многие цифровые устройства используются при значительных изменениях уровня внешнего освещения, что заставляет применять для отображения информации светоизлучающие индикаторы или экраны. В этом случае возникает задача выбора оптимальной яркости светоизлучающих составляющих экрана или индикатора. Ситуация осложняется тем, что условия работы прибора могут быть такими, что яркость внешнего освещения будет меняться более чем в 6 000 раз, что имеет место, например, при работе в тёмном помещении и на ярком солнечном свете [1].

Большинство современных приборов для выбора комфортных условий отображения имеет возможность установки пользователем требуемой яркости экрана или индикатора. Эта регулировка яркости в подавляющем большинстве случаев реализована в виде фиксированного, устанавливаемого пользователем вручную, уровня. В бытовых устройствах с этим ещё можно смириться, так как в случае значительного изменения уровня внешней освещённости у пользователя, как правило, достаточно времени, чтобы уставить новый уровень яркости. Ситуация принципиально иная, если это, например, экран отображения информации в автомобильной или авиационной аппаратуре. В этом случае у пользователя может просто не быть достаточно ресурсов времени, чтобы дополнительно ещё и регулировать уровень яркости экрана или дисплея. Причём, если уровень внешней освещённости меняется часто, то и регулировку нужно производить часто. Ведь недостаточная яркость затрудняет считывание информации, а излишняя – способствует снижению чувствительности зрительного анализатора оператора, что может оказаться критическим.

***Регулировка яркости индикаторов и экранов***

Вопросы выбора и регулировки яркости полупроводниковых индикаторов, а также некоторые варианты их решения рассмотрены в [1]. В частности, в [1] отмечено, что энергетически эффективным является использование широтно-импульсной модуляции (ШИМ) при регулировке яркости полупроводниковых светоизлучающих индикаторов. Там же отмечается сложность реализации данного метода с использованием доступной элементной базы 90-х годов.

Сегодня, спустя более 10 лет, подавляющее большинство устройств имеет в своём составе управляющий микроконтроллер. В этом случае возможности реализации ШИМ регулировки яркости индикаторов и экранов существенно возрастают. Высокие программные возможности современных микроконтроллеров позволяют значительно снизить требования к аппаратной части схемы, ответственной за измерение уровня внешней освещённости и регулировку яркости.

Наиболее простая аппаратная реализация получается в случае наличия в применённом в устройстве микроконтроллере свободного канала аналого-цифрового преобразователя (АЦП). В этом случае упрощённая схема аппаратной части устройства с поддержкой автоматической регулировки яркости будет иметь вид (рисунок 1). Измерение уровня внешней освещенности может осуществляться фоторезистором (вариант включения представлен в части «а» на рисунке 1) или фотодиодом, включенным в режиме источника напряжения (часть «б» на рисунке 1). В обоих случаях величина напряжения, зависящая от уровня внешней освещённости, поступает на вход АЦП микроконтроллера. Оцифрованное значение уровня напряжения, характеризующего яркость внешнего освещения, может быть использовано для управления свечением полупроводникового или электролюминесцентного индикатора с использованием ШИМ, реализуемого на аппаратной основе уже имеющейся стандартной динамической индикации (рисунок 1, часть «в»). В случае применения в устройстве или приборе экрана или индикатора с подсветкой возможно ШИМ управление свечением светодиодов или лампы подсветки (рисунок 1, часть «г»).

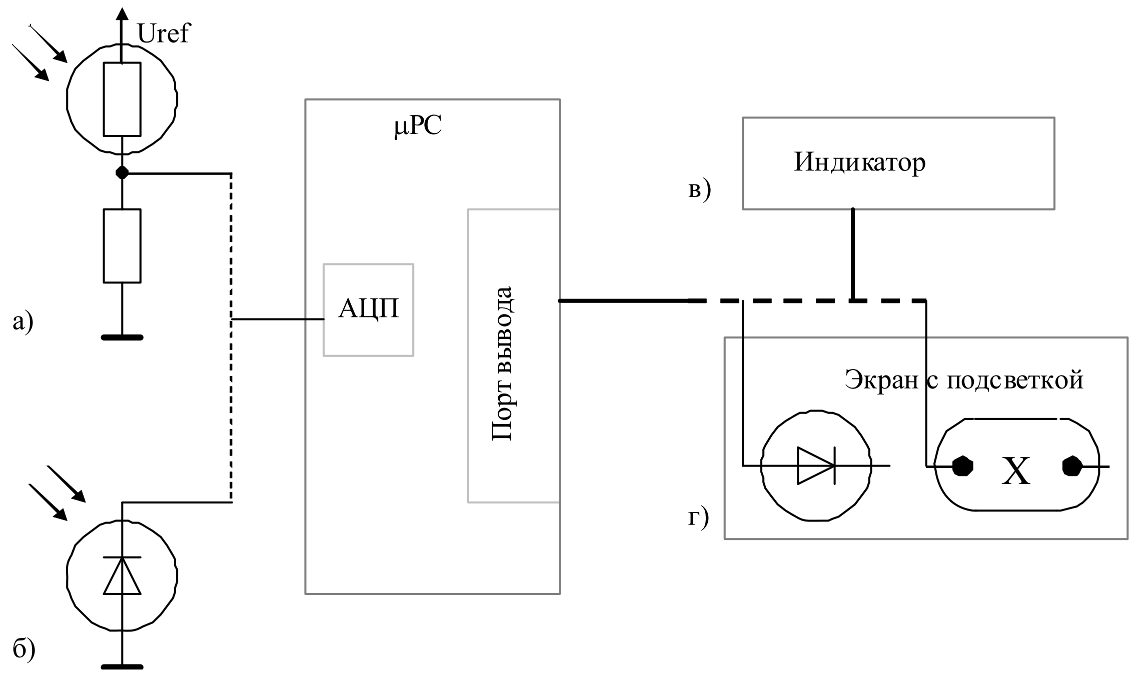



Рисунок 1 – Измерение освещённости и регулировки яркости с АЦП

Наличие программной составляющей на участке «значение напряжения» – «ШИМ управление яркостью» позволяет реализовывать различные дополнительные функции отображения, зависящие от яркости. Главное – это то, что зависимость напряжения, характеризующего внешнюю освещенность, и числового значения коэффициент заполнения для ШИМ нелинейная, поэтому для реализации данного отображения целесообразно использовать специальную таблицу в программном коде микроконтроллера. Пример таких данных приведён в таблице 1.

Таблица 1 – Пример соответствия значения уровня освещенности и ШИМ яркости

| Значение от АЦП | Значение для ШИМ | Комментарий |
|---|---|---|
| <10 | 2 | Минимальный уровень яркости |
| ≥10 и <30 | 8 | Уровень яркости 1 |
| ≥30 и <35 | 10 | Уровень яркости 2 |
| ≥35 и <50 | 12 | Уровень яркости 3 |
| ≥50 | 15 | Максимальный уровень яркости |

Использование таблицы позволяет также реализовать нужное изменение яркости, если минимальному значению уровня внешнего освещения соответствует максимальное значение от АЦП и наоборот.

Наличие программной обработки уровня внешней освещённости позволяет реализовывать дополнительные функции отображения информации. Например, в одном из практических примеров автором в устройстве с батарейным питанием был применён следующий алгоритм отображения аналоговой величины: в условиях низкой внешней освещённости величина отображалась светящим столбиком соответствующей высоты, причём яркость светодиодов столбика зависела от уровня внешней освещённости. В условиях высокой внешней освещённости яркость светодиодов увеличивалась, и в целях экономии энергии режим отображения переключался из «светящийся столбик» в «светящаяся точка».

***Измерение уровня освещенности без АЦП***

При использовании микроконтроллеров без аналого-цифрового преобразователя или при отсутствии свободных портов АЦП возникает задача оцифровки аналогового значения уровня внешней освещённости. В этом случае возможно применение внешнего или, как правило, имеющегося в составе микроконтроллера компаратора. Упрощённая схемная реализация такого АЦП представлена на рисунке 2. В этом случае к одному из входов компаратора подключается светочувствительный элемент, как и в случае с использованием встроенного АЦП. Второй вход компаратора подсоединён к резистору R и конденсатору C. Ключ Q – это имеющийся в составе микроконтроллера транзистор для вывода сигнала логического «0» в разряд порта микроконтроллера, с которым обычно совмещены входы встроенного компаратора.

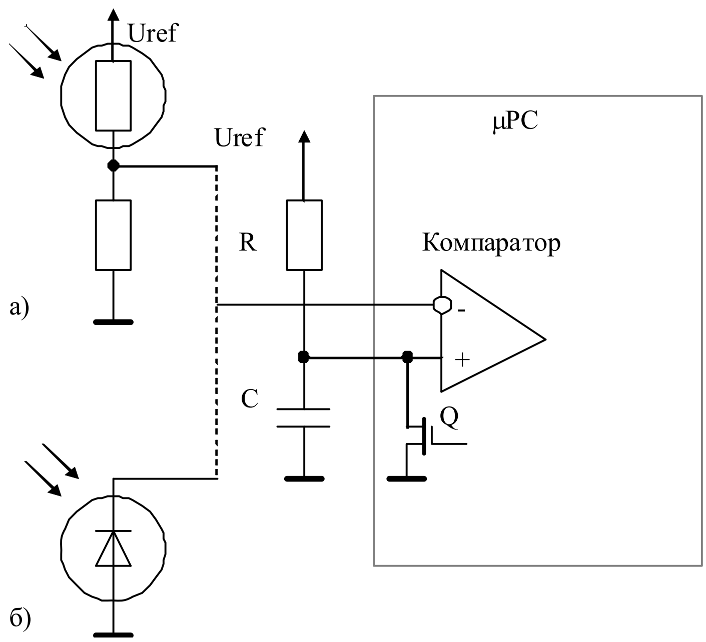



Рисунок 2 – Измерение освещённости с компаратором

Когда ключ Q замкнут, конденсатор C быстро разряжается через небольшое активное сопротивление транзистора. Когда ключ Q закрыт, конденсатор C начинает заряжаться через резистор R, напряжение на нём меняется во времени по известной формуле (1):

$$U = U_{ref}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (1)$$

Из формулы видно, что напряжение U на конденсаторе асимптотически приближается к $U_{ref}$. Если напряжение с измерителя уровня освещённости меньше $U_{ref}$, то в определённый момент времени произойдёт переключение компаратора. Время, прошедшее от закрытия ключа и до переключения компаратора, численно зависит от уровня внешней освещённости. Измерив это время, можно, аналогично случаю с использованием АЦП, используя таблицу соответствия, изменять скважность ШИМ для управления яркостью индикатора или его подсветки.

***Практическая реализация адаптивной яркости***

В варианте практической реализации адаптивной яркости был использован микроконтроллер без встроенного АЦП, но с компаратором. В качестве измерителя яркости был использован доступный фотодиод ФД-263 в режиме генератора напряжения. При прямом солнечном освещении ЭДС на выводах фотодиода составляет около 0,5 В. При меньшей освещённости ЭДС снижается. Для замера отрезков времени был задействован 8-битный таймер микроконтроллера, тактированный с частотой примерно 500 KHz. При этом время между переполнениями 8-битного таймера составило 512 микросекунд (2):

$$\frac{2^8}{500\,000} = 512\,\mu S. \quad (2)$$

Для случая наиболее яркого освещения нужно, чтобы за время 512 микросекунд напряжение на конденсаторе увеличивалось выше 0,5 В, что требуется для срабатывания компаратора. В реализации были выбраны R = 100 КОм и C = 47 нФ. В этом случае, согласно формуле (1), напряжение на конденсаторе с изменением времени меняется по графику, представленному на рисунке 3. Алгоритм измерения уровня внешней освещённости заключается в последовательном выполнении в цикле действий: разряд конденсатора, заряд с измерением времени переключения компаратора. Упрощённо алгоритм измерения уровня внешней освещённости представлен на рисунке 4.

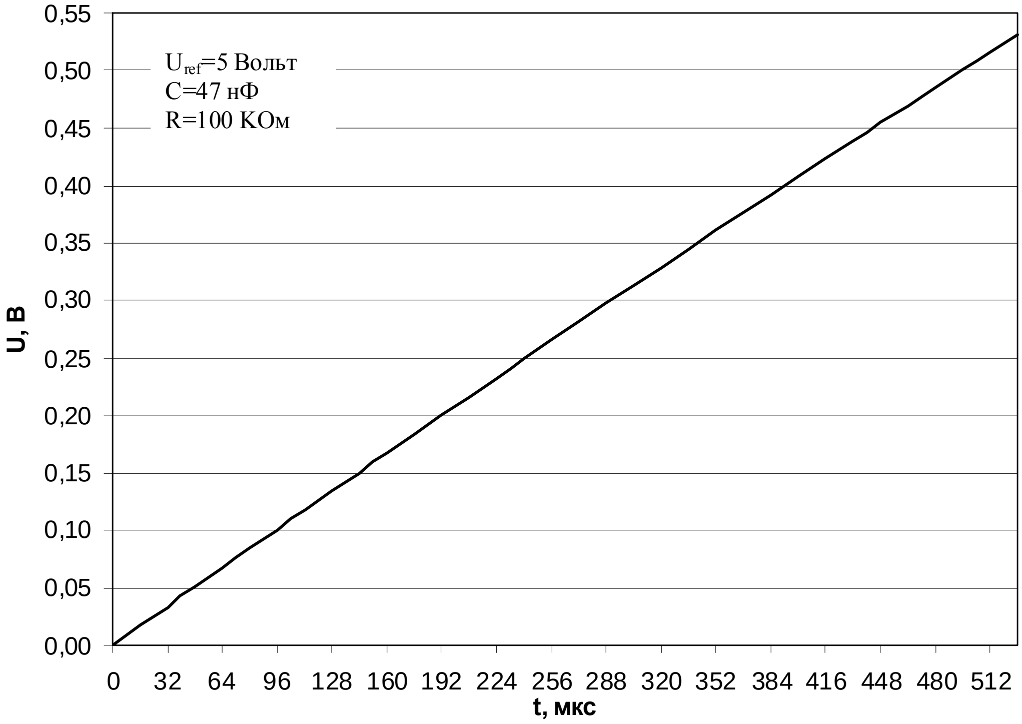



Рисунок 3 – Заряд конденсатора по времени

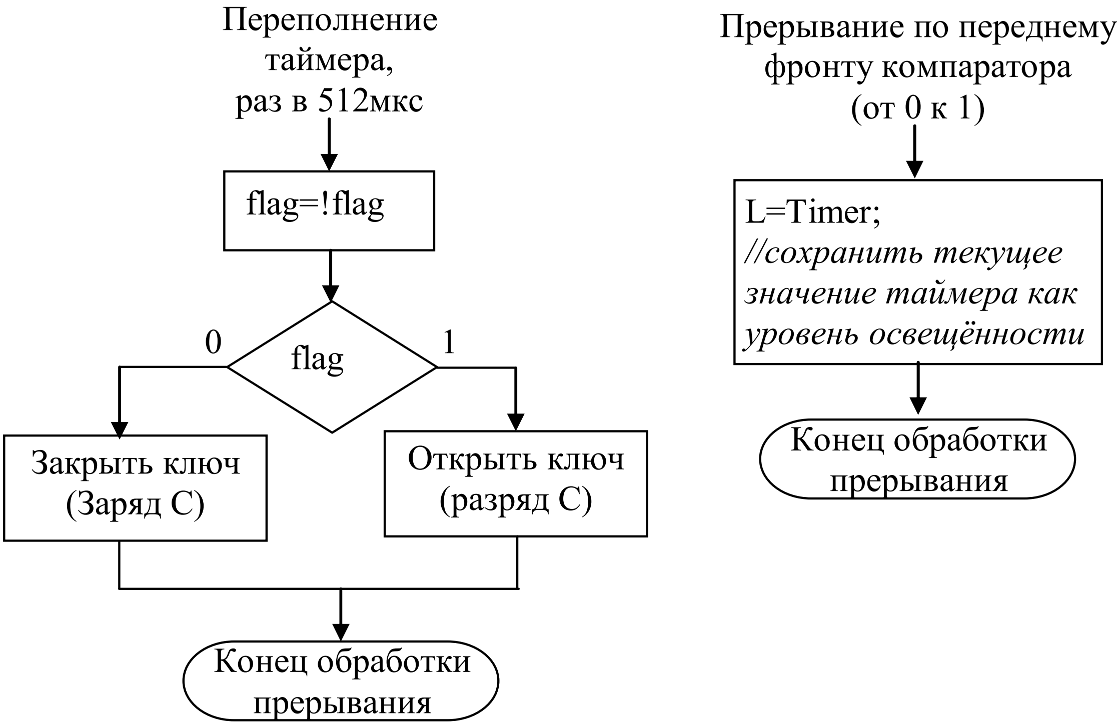



Рисунок 4 – Алгоритм измерения уровня освещённости

Элементы кода, реализующего данные алгоритмы на языке ассемблера для микроконтроллеров семейства AVR, в рассматриваемом проекте имеют следующий вид:

```
…
//инициализация
ldi r16,3
out ACSR,r16        ;прерывания по переднему фронту компаратора
out TCCR0,r16       ;включить Timer0, такт. CK/8=500KHz
cbi ACSR,7          ;включить компаратор
sbi ACSR,3
…

Display:            //обработчик переполнения таймера
sbrc r31,0
rjmp Measure
sbi DDRB,0          ;разрядка конденсатора
rjmp EndCap
Measure:
cbi DDRB,0          ;заряд-измерение
sbi ACSR,3          ;включить компаратор
EndCap:
…
inc r31
…
reti

Comparator:         //обработка переключения компаратора
in r29,TCNT0        ;запомнить в r29 значение таймера
cbi ACSR,3          ;выключить компаратор
reti
```

Сохраненное в регистре r29 значение таймера, при котором произошло переключение компаратора, преобразуется через диапазоны значений, приведённые в таблице 2, в значение коэффициента заполнения для ШИМ регулировки яркости индикаторов устройства.

Таблица 2 – Соответствие значений уровней освещения и яркости

| Значение r29 | Значение коэффициента заполнения ШИМ |
|---|---|
| <28 | Ошибка измерения, яркость не менять |
| 28÷34 | 2.0% |
| 35÷37 | 3.1% |
| 38÷41 | 6.3% |
| 42÷47 | 14.1% |
| 48÷53 | 18.0% |
| 54÷93 | 25.4% |
| 94÷103 | 33.6% |
| 104÷123 | 50.0% |
| ≥124 | 100% – максимальная яркость |

Значения коэффициентов заполнения при различных уровнях яркости подбирались эмпирическим путём для получения наиболее комфортных условий считывания информации с индикатора устройства.

***Заключение***

Практическая апробация предложенной программно-аппаратной адаптивной регулировки яркости показала свою высокую эффективность. Яркость индикатора устройства оказалась комфортна для работы как в абсолютной темноте, так и при ярком освещении. Проблемы со считыванием информации в некоторой степени имеют место только при прямом солнечном свете, попадающём на дисплей прибора. Если такой режим эксплуатации требуется часто, то возможно применение индикаторов с большей максимальной яркостью и допустимым током. Также возможен подбор соответствующего светофильтра для такого режима эксплуатации, как это описано в [1].

**Литература**

1. Васерин, Н.Н. Применение полупроводниковых индикаторов / Н.Н. Васерин, Н.К. Дадерко, Г.А. Прокофьев [Электронный ресурс]. – Энергоатомиздат, 1991. – Режим доступа : http://yanviktor.ru/elektron/lib/primenenie_indikatorov.pdf. – Дата доступа : 20.06.2012.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 20.06.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 53.083+004.67*

# Программная реализация измерения индуктивности с учётом паразитной ёмкости

П.Л. Чечет

В статье рассмотрен известный способ измерения величины индуктивности с учётом паразитной ёмкости измеряемого компонента. Предложен вариант микропрограммной реализации измерителя на основе рассмотренного способа. Рассмотрены основные вопросы программной и аппаратной составляющих измерителя.
**Ключевые слова:** измерение индуктивности, паразитная ёмкость, арифметические подпрограммы, микроконтроллер.

This article describes the well-known method of measuring the inductance with the parasitic capacitance of the measured component. It provides a version of microprogramme implementation of the measurer based on the process reviewed. It also gives basic information about the software and hardware components of the measurer.
**Keywords**: measurement of inductance, parasitic capacitance, arithmetic routines, microcontroller.

### *Введение*

Задача измерения параметров радиоэлектронных компонентов практически всегда стоит при разработке, отладке и ремонте различных устройств. Во многих конструкциях катушка индуктивности или обмотка трансформатора используется для получения резонансной цепи, настроенной на определённую частоту. Это и электронные балласты питания энергосберегающих ламп, радиоприёмные устройства, фильтры разделения звуковых частот (кроссоверы) и др. В этом случае помимо значения индуктивности крайне желательно знать ещё и паразитную ёмкость катушки или обмотки трансформатора. Существуют методы измерения паразитной ёмкости, например, основанные на явлении резонанса [1]. Однако подобные методы рассчитаны на ручное выполнение нескольких процедур, что повышает трудоёмкость и снижает оперативность работы. Широкое распространение микроконтроллеров позволяет реализовать оперативные методы измерения величины индуктивности с учётом паразитной ёмкости, а также при необходимости вычислить значение этой паразитной ёмкости. На сегодня в литературе достаточно вариантов реализаций приборов для измерения индуктивности, например [2]–[4]. Практически в каждом используется тот либо иной приём для учёта паразитной ёмкости самого устройства и измеряемой катушки индуктивности. Дополнительно в [3] автор реализовал режим измерения и отображения паразитной ёмкости измеряемой катушки индуктивности, но только для величин индуктивности более 10 мГн.

### *Измерение индуктивности с помощью LC генератора*

Способ измерения величины индуктивности с помощью LC генератора используется в большинстве измерительных приборов. Суть способа заключается во включении измеряемой катушки индуктивности в колебательный контур генератора колебаний (рисунок 1).

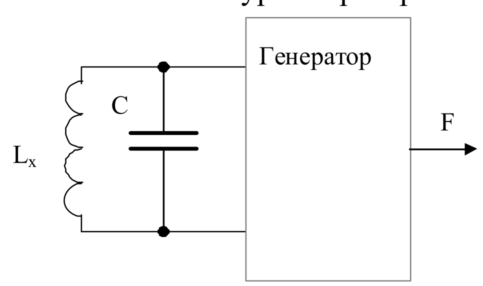



Рисунок 1 – Измерение индуктивности по частоте колебаний

При этом частота колебаний F на выходе генератора определяется резонансной частотой колебательного контура, образованного измеряемой катушкой с индуктивностью $L_x$ и конденсатором с известной ёмкостью C по формуле (1)

$$F = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_x C}}. \tag{1}$$

Из формулы (1) можно выразить $L_x$ (2)

$$L_x = \frac{1}{4\pi^2 F^2 C}. \tag{2}$$

Реальная катушка индуктивности обладает собственной паразитной ёмкостью, поэтому схема на рисунке 1 будет выглядеть так (рисунок 2).

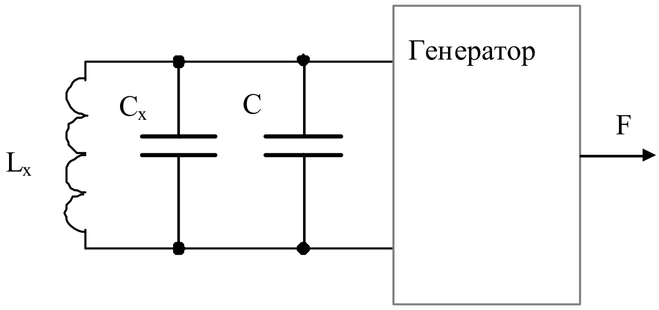



Рисунок 2 – LC контур с паразитной ёмкостью

В отличие от рисунка 1, здесь изображена паразитная ёмкость $C_x$, которой обладает измеряемая катушка индуктивности. В этом случае формула (1) примет вид (3):

$$F = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_x (C + C_x)}}. \tag{3}$$

Сложность точного вычисления индуктивности в этом случае обусловлена тем, что если емкость монтажа прибора можно измерить и численно включить в значение ёмкости C, то ёмкость $C_x$ непостоянна и зависит от измеряемой катушки индуктивности.

В этом случае, как и в измерителях [2], [3], можно использовать дополнительный подключаемый конденсатор $C_1$ (рисунок 3).

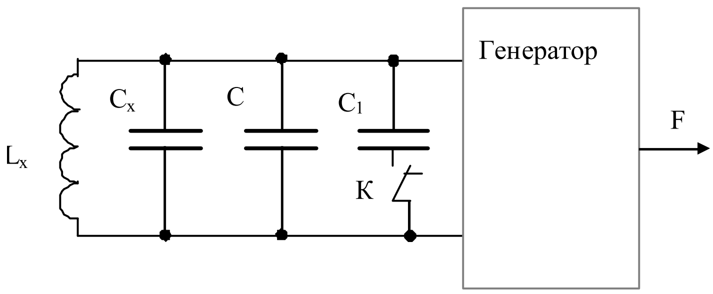



Рисунок 3 – LC контур с подключаемым конденсатором

В этом случае при разомкнутом ключе К частота колебаний генератора будет определяться формулой (3), а при замкнутом – формулой (4):

$$F = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_x (C + C_x + C_1)}}. \tag{4}$$

Обозначим частоту генератора при разомкнутом ключе K (3) как $F_1$, а при замкнутом ключе K как $F_2$. Получаем систему уравнений с двумя неизвестными $L_x$ и $C_x$ (5):

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_x(C+C_x)}} \\ F_2 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_x(C+C_x+C_1)}} \end{cases}. \tag{5}$$

Преобразуем её следующим образом (6):

$$\begin{cases} L_x(C+C_x) = \dfrac{1}{4\pi^2 F_1^2} \\ L_x(C+C_x+C_1) = \dfrac{1}{4\pi^2 F_2^2} \end{cases}. \tag{6}$$

От второго уравнения системы отнимем первое и получим (7):

$$\begin{cases} L_x(C+C_x) = \dfrac{1}{4\pi^2 F_1^2} \\ L_x C_1 = \dfrac{1}{4\pi^2 F_2^2} - \dfrac{1}{4\pi^2 F_1^2} \end{cases}. \tag{7}$$

Второе уравнение системы в записи (7) показывает, что, зная значения частот колебаний $F_1$ и $F_2$, можно вычислить значение измеряемой индуктивности, зная точно только ёмкость подключаемого конденсатора $C_1$. Паразитные ёмкости катушки и устройства в данном случае не влияют на результат измерения. Преобразовав второе уравнение системы (7), получаем (8):

$$L_x = \frac{1}{4\pi^2 C_1}\left(\frac{F_1^2 - F_2^2}{F_1^2 F_2^2}\right). \tag{8}$$

Из (8) видно, что выражение $\dfrac{1}{4\pi^2 C_1}$ является константой. Вычислив по формуле (8) значение индуктивности, можно по первому уравнению системы (7) вычислить и величину паразитной ёмкости измеряемой катушки индуктивности (9):

$$C_x = \frac{1}{4\pi^2 F_1^2 L_x} - C. \tag{9}$$

Значения по формулам (8) и (9) нужно вычислить для получения значения индуктивности измеряемой катушки и её паразитной ёмкости.

***Программная реализация измерения индуктивности и паразитной ёмкости***

Для конкретной практической реализации измерителя индуктивности в качестве конденсаторов C и $C_1$ были выбраны прецизионные полистирольные конденсаторы серии К71-7 ёмкостью 10 нФ и 4,7 нФ соответственно. Для подсчёта частоты генератора колебаний задействован 16-разрядный счётчик микроконтроллера, значение которого программно анализируется каждые $T_{изм}$ = 40 мс (частота измерения $F_{изм}$ = 25 Hz). В этом случае максимальная частота, которую можно программно измерить, составляет (10):

$$F_{\max} = \frac{2^n - 1}{T_{изм}} = \frac{2^{16}-1}{0,04} \approx 1\,638\ KHz. \tag{10}$$

В этом случае минимальное значение измеряемой индуктивности составит (11):

$$L_{\min} = \frac{1}{(2\pi \cdot F_{\max})^2 C} \approx 1 \text{ мкГн}. \quad (11)$$

В формуле (11) рассмотрен случай, когда в процессе измерения конденсатор $C_1$ не подключен в контур, так как с подключённым конденсатором $C_1$ частота генератора будет ниже.

Для получения оптимального программного кода микроконтроллера подпрограммы арифметических операций были разработаны для каждой операции вычисления индуктивности.

Вычисление целочисленного значения измеряемой индуктивности $L_x$ выполняется в мкГн по формуле (8). Для получения промежуточных значений оптимальной разрядности вычисление выполняется с получением значений промежуточных операндов $O_1$–$O_6$ в следующем порядке (12) (значение операнда $O_0$ является константой и однократно занесено в программу):

$$\begin{aligned}
&o_0 = \frac{10^6}{4\pi^2 \cdot C_1 \cdot F_{\text{изм}}^2} = \frac{10^6}{4\pi^2 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-9} \cdot 625} = 8\,623\,079\,459 = \text{const},\\
&o_1 = F_1^2,\ o_2 = F_2^2,\\
&o_3 = o_1 - o_2,\\
&o_4 = \frac{o_0}{o_1},\ o_5 = o_4 \cdot o_3,\\
&L_x = o_6 = \frac{o_5}{o_2}.
\end{aligned} \quad (12)$$

Вычисление целочисленного значения паразитной ёмкости $C_x$ в пФ выполняется по формуле (13), получаемой из (9) подстановкой в неё $L_x$ из (8):

$$C_x = \frac{1}{4\pi^2 F_1^2 L_x} - C = \frac{4\pi^2 C_1 \cdot F_1^2 F_2^2}{4\pi^2 F_1^2 (F_1^2 - F_2^2)} - C = \frac{C_1 \cdot F_2^2}{F_1^2 - F_2^2} - C. \quad (13)$$

Выражение (13) вычисляется последовательно с вычислением следующих промежуточных операндов $O_7$–$O_9$ (14):

$$\begin{aligned}
&o_7 = C_1 \cdot F_2^2 = C_1 \cdot o_2,\\
&o_8 = \frac{o_7}{F_1^2 - F_2^2} = \frac{o_7}{o_3},\\
&C_x = o_9 = o_8 - C = o_8 - 10\,000.
\end{aligned} \quad (14)$$

Прежде чем перейти к реализации алгоритмов арифметических вычислений, нужно вычислить максимальную разрядность каждого из операндов $O_0$–$O_9$. Известно, что для представления целочисленного значения $X$ в двоичном виде требуется $N$ разрядов (15):

$$N = \text{int}\left[\log_2 X + 0,(9)\right]. \quad (15)$$

Другими словами, значение $\log_2 X$ нужно округлить до ближайшего большего целого.

Для определения необходимой разрядности операндов проанализируем возможные их значения при максимальной и минимальной величинах измеряемой индуктивности $L_x$ и паразитной ёмкости $C_x$. Результаты анализа представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Разрядность промежуточных операндов в вычислениях

| Операнд | $L_x$ = 1 мкГн, $C_x$ = 1 пФ | $L_x$ = 10 Гн, $C_x$ = 10 нФ | Максимальная разрядность, N | Размер переменной, байт |
|---|---|---|---|---|
| $O_0$ | 8 623 079 459 | | 34 | 5 |
| $O_1$ | 4 052 468 281 | 196 | 32 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $O_2$ | 2 756 880 036 | 169 | 32 | 4 |
| $O_3$ | 1 295 588 245 | 27 | 31 | 4 |
| $O_4$ | 3 | 51 024 138 | 26 | 4 |
| $O_5$ | 3 886 764 735 | 1 377 651 726 | 32 | 4 |
| $O_6 = L_x$ | 1 | 7 028 836 | 23 | 4 |
| $O_7$ | 12 957 336 169 200 | 794 300 | 44 | 6 |
| $O_8$ | 10 001 | 29 418 | 15 | 2 |
| $O_9 = C_x$ | 1 | 19 418 | 15 | 2 |

Так как измерение паразитной ёмкости $C_x$ носит вспомогательный характер, было принято решение отказаться от поддержки переменной размером в 6 байт для операнда $O_7$, а ограничиться только 5-байтовым значением как самым длинным (для $O_0$ и $O_7$).

Для хранения промежуточных значений в процессе вычислений в ОЗУ микроконтроллера было задействовано 22 байта в диапазоне адресов от 0x60 до 0x75 включительно. В процессе вычислений ячейки ОЗУ используются, как показано в таблице 2.

Таблица 2 – Хранение промежуточных результатов в ОЗУ

| Шаг / операнд | Ячейки ОЗУ, размер | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0x60–0x63, 4 байта | 0x64–0x67, 4 байта | 0x68–0x6B, 4 байта | 0x6C–0x70, 5 байт | 0x71–0x75, 5 байт |
| $O_0$ | $\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}$ | $\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}$ | – | 8 623 079 459 | – |
| $O_1$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}$ | – | 8 623 079 459 | – |
| $O_2$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | – | 8 623 079 459 | – |
| $O_3$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | 8 623 079 459 | – |
| $O_4$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | 8 623 079 459 | $\frac{8\,623\,079\,459}{(F_1/F_{\text{изм}})^2}$ |
| $O_5$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | 8 623 079 459 | $\frac{8\,623\,079\,459}{(F_1/F_{\text{изм}})^2}\text{ x }\left(\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2\right)$ |
| $O_6 = L_x$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\frac{8\,623\,079\,459}{(F_1/F_{\text{изм}})^2(F_2/F_{\text{изм}})^2}\text{ x }\left(\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2\right)=L_x$ | $\frac{8\,623\,079\,459}{(F_1/F_{\text{изм}})^2}\text{ x }\left(\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2\right)$ |
| $O_7$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\frac{8\,623\,079\,459}{(F_1/F_{\text{изм}})^2(F_2/F_{\text{изм}})^2}\text{ x }\left(\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2\right)=L_x$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2\cdot C_1$ |
| $O_8$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{\text{изм}}}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2$ | $\frac{(F_2/F_{\text{изм}})^2\cdot C_1}{(F_1/F_{\text{изм}})^2-(F_2/F_{\text{изм}})^2}$ | $\left(\frac{F_2}{F_{\text{изм}}}\right)^2\cdot C_1$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_9 =$ $C_x$ | $\left(\frac{F_2}{F_{изм}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{изм}}\right)^2$ | $\left(\frac{F_1}{F_{изм}}\right)^2 - \left(\frac{F_2}{F_{изм}}\right)^2$ | $\frac{(F_2 / F_{изм})^2 \cdot C_1}{(F_1 / F_{изм})^2 - (F_2 / F_{изм})^2}$ $- -C = C_x$ | $\left(\frac{F_2}{F_{изм}}\right)^2 \cdot C_1$ |

Как видно из таблицы 2, на шагах вычисления операндов $O_6$ и $O_9$ в пятибайтовой переменной, расположенной в ячейке памяти по адресам 0x6C–0x70, находятся искомые значения измеряемой индуктивности $L_x$ и паразитной ёмкости $C_x$ соответственно. Далее программно реализован вывод полученных значений на индикатор для отображения пользователю. Выбор отображаемого значения ($L_x$ или $C_x$) осуществляется нажатием нефиксируемой кнопки.

***Заключение***

Рассмотренный способ измерения величины индуктивности позволяет, имея один точно подобранный эталонный конденсатор, измерять величину неизвестной индуктивности без влияния её паразитной ёмкости. Порядок величины емкости эталонного конденсатора зависит от максимально возможной паразитной ёмкости измеряемой катушки индуктивности. При измерении больших значений индуктивности с большой паразитной ёмкостью измеряемой катушки индуктивности возможна ситуация, когда числовые значения $F_1$ и $F_2$ совпадут, что приведёт к невозможности измерения как индуктивности $L_x$, так и паразитной ёмкости $C_x$. В этом случае нужно выбрать другие значения ёмкостей конденсаторов $C$ и $C_1$ и, соответственно, пересчитать все константы в вычислении операндов $O_0$–$O_9$.

## Литература

1. Резонансные методы измерения ёмкости конденсатора [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.scriru.com/15/33567158534.php. – Дата доступа : 15.07.2012.

2. Аникин, А. Цифровой LC-метр на контроллере PIC16F84 / А. Аникин, Д. Аникин [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.cqham.ru/lcmeter2.htm. – Дата доступа : 20.03.2009.

3. Буевский, А. Частотометр, измеритель ёмкости и индуктивности – FCL-meter / А. Буевский [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.cqham.ru/lcmeter3.htm. – Дата доступа : 19.03.2009.

4. Хлюпин, Н.П. Измеритель индуктивности и емкости / Н.П. Хлюпин [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.cqham.ru/ra4nal_lcmeter.htm. – Дата доступа : 05.04.2010.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 20.07.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

## Математика

*УДК 517.983.23:517.983.5*

# Применение $Q[a,b]$-исчисления к решению некоторых операторных уравнений

А.А. Атвиновский

Предложены теоремы, позволяющие разрешать уравнения, содержащие функции М.Г. Крейна от замкнутых операторов, спектр которых не пересекается с данным отрезком. Рассмотрен пример.
**Ключевые слова:** класс Крейна, функциональное исчисление, замкнутый оператор, операторное уравнение.

The theorems that allow us to solve equations with M.G. Kreins functions of closed operators whose spectrum doesn't meet the given segment are given in the article. The example is shown.
**Keywords:** Krein class, functional calculus, closed operator, operator equation.

В статье рассмотрен класс функций $R[a,b]$, введенный М.Г. Крейном [1], и класс замкнутых неограниченных операторов в банаховом пространстве $X$, спектр которых не пересекается с отрезком $[a,b]$. В работе [2] были предложены теоремы, позволяющие разрешать операторные уравнения, содержащие функции М.Г. Крейна от этих операторов, с помощью введенного там функционального исчисления ($Q[a,b]$-исчисления). Целью работы является расширение круга таких теорем и рассмотрение соответствующего примера.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о функциях классов Неванлинны $R$ и Крейна $R[a,b]$ [1].

Говорят, что функция $f$ принадлежит классу $R$, если она голоморфна в открытой верхней полуплоскости и отображает её в себя.

Пусть $a<b$. Будем говорить, что функция $g$ относится к классу $R[a,b]$, если она принадлежит $R$ и голоморфна и положительна на $(-\infty,a)$ и голоморфна и отрицательна на $(b,+\infty)$. При этом $g$ можно единственным образом представить в виде

$$g(z)=\int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z}, \tag{1}$$

где $\tau$ – ограниченная неубывающая функция, отличная от постоянной [1, с. 525–526].

Всюду далее $A$ будет обозначать замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве $X$, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с отрезком $[a,b]$.

**Определение 1.1** *Для функции $g$ класса $R[a,b]$ с интегральным представлением (1) положим*

$$g(A)=\int_a^b R(t,A)d\tau(t),$$

где $R(t,A)=(tI-A)^{-1}$ – резольвента оператора $A$.

Для решения задачи об обратимости оператора $g(A)$ рассмотрим класс функций $Q[a,b]$.

**Определение 2 2.** *Пусть $a<b$. Положим*

$$Q[a,b]=\{\phi \mid \phi(z)=1/g(z),\ g\in R[a,b]\}.$$

Известно [2], что $\varphi(z)$ можно единственным образом представить в виде

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z - h(z), \tag{2}$$

где $h \in R[a,b]$, интегралы, представляющие $h(a)$ и $h(b)$ по формуле (1), сходятся, а числа $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \alpha + \beta a - h(a) & \geq & 0 \\ \alpha + \beta b - h(b) & \leq & 0 \\ \beta & < & 0, \end{cases}$$

причем

$$\beta = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}, \alpha = \lim_{x\to\infty} (\varphi(x) - \beta x). \tag{3}$$

**Определение 3.3** [2] *Для функции* $\varphi \in Q[a,b]$ *вида (2) положим*

$$\phi(A) = \alpha I + \beta A - h(A),$$

($D(\varphi(A)) = D(A)$), где $h(A)$ понимается в смысле определения 1. Данное функциональное исчисление будем называть $Q[a,b]$-исчислением.

Роль $Q[a,b]$-исчисления видна из следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Для любой функции* $g \in R[a,b]$ *оператор* $g(A)$ *обратим, причем*

$$g(A)^{-1} = \varphi(A),$$

где $\varphi(z) = 1/g(z)$ и правая часть понимается в смысле $Q[a,b]$-исчисления.

**Следствие 1.4** *Пусть* $\varphi \in Q[a,b]$, $g(z) = 1/\varphi(z)$. *Тогда оператор* $\varphi(A)$ *ограниченно обратим, и его обратный можно вычислить по формуле*

$$\varphi(A)^{-1} = g(A),$$

где правая часть понимается в смысле $R[a,b]$-исчисления.

Теорема 1 означает, что уравнение

$$g(A)x = y$$

имеет для любого $y \in D(A)$ единственное решение $x = \varphi(A)y$, где $\varphi = 1/g \in Q[a,b]$ и правая часть понимается в смысле $Q[a,b]$-исчисления. При этом важно отметить, что, как и в работе [4], оператор $\varphi(A)$ можно вычислить с помощью формул обращения интегрального преобразования Стилтьеса. Аналогичное замечание можно сделать и по поводу следствия 1. Приведем две теоремы, служащие иллюстрацией этого тезиса. В первой из них рассматривается уравнение $\ln((A - dI)(A - cI)^{-1})x = y$.

**Теорема 2.** *Пусть* $0 \leq a \leq c < d \leq b$. *Для замкнутого оператора* $A$ *в банаховом пространстве* $X$, *спектр которого не пересекается с отрезком* $[a,b]$, *уравнение*

$$\int_c^d R(t, A)x dt = y$$

для любого $y \in D(A)$ имеет единственное решение

$$x = \frac{d+c}{2(d-c)} y - \frac{1}{d-c} Ay - \int_c^d \frac{R(\lambda, A)y}{\ln^2 \frac{d-\lambda}{\lambda - c} + \pi^2} d\lambda.$$

Проиллюстрируем предыдущую теорему следующим примером.

**Пример 1.** Пусть $\Delta = d^2/dt^2$ – оператор двукратного дифференцирования в пространстве $L^p(\mathsf{R}), 1 \leq p < \infty$ с областью определения $D(\Delta) = W^{2,p}(\mathsf{R})$ (пространство Соболева). Известно (см., например, [5, с. 235]), что его спектр не пересекается с $(0,\infty)$, причем при $\lambda > 0$ его резольвента суть

$$R(\lambda, \Delta)u = v_\lambda * u, u \in L^p(\mathsf{R}), \tag{4}$$

где

$$v_\lambda(t) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|t|}, \tag{5}$$

а звездочка обозначает свертку функций:

$$f * g(s) = \int_{\mathrm{R}} f(t) g(s-t) dt. \tag{6}$$

Так как

$$\int_c^d R(\lambda, \Delta) x d\lambda = \int_c^d \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|t|} x(s-t) dt \right) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(s-t) \left( \int_c^d \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|t|} d\lambda \right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{c}|t|} - e^{-\sqrt{d}|t|}}{|t|} x(s-t) dt$$

(теорема Фубини применима, так как функция $\left(e^{-\sqrt{c}|t|} - e^{-\sqrt{d}|t|}\right)/|t|$ принадлежит $L^q(\mathrm{R})$), то уравнение

$$\int_c^d R(\lambda, \Delta) x(s) d\lambda = y(s)$$

имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{c}|t|} - e^{-\sqrt{d}|t|}}{|t|} x(s-t) dt = y(s).$$

В силу теоремы 2 для любого $y \in W^{2,p}(\mathrm{R})$ последнее уравнение имеет единственное решение в пространстве $L^p(\mathrm{R})$ $(1 \le p < \infty)$, задаваемое равенством

$$x(s) = \frac{d+c}{2(d-c)} y(s) - \frac{1}{d-c} y''(s) - \int_c^d \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|t|} y(s-t) dt}{2\sqrt{\lambda}(\ln^2 \frac{d-\lambda}{\lambda - c} + \pi^2)} d\lambda. \tag{7}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем окончательно

$$x(s) = \frac{d+c}{2(d-c)} y(s) - \frac{1}{d-c} y''(s) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t) y(s-t) dt,$$

где

$$k(t) = \int_c^d \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|t|}}{2\sqrt{\lambda}(\ln^2 \frac{d-\lambda}{\lambda-c} + \pi^2)} d\lambda = \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{d}} \frac{e^{-s|t|}}{\ln^2 \frac{d-s^2}{s^2-c} + \pi^2} ds.$$

В заключение приведем теорему, которая фактически дает формулу для решения следующего уравнения с оператором $A$:

$$(d-c)x + A\ln((A-dI)(A-cI)^{-1})x = y \ (y \in D(A)).$$

**Теорема 3.5** *Пусть* $0 \le a \le c < d \le b$. *Для замкнутого оператора* $A$ *в банаховом пространстве* $X$, *спектр которого не пересекается с отрезком* $[a,b]$, *уравнение*

$$\int_c^d t R(t, A) x dt = y$$

для любого $y \in D(A)$ имеет единственное решение

$$x = \frac{4d}{3(d^2-c^2)} y - \frac{2}{d^2-c^2} Ay - \int_c^d \frac{R(t,A)y}{(d-c+t\ln\frac{d-t}{t-c})^2 + \pi^2} dt.$$

Доказательство. Из легко проверяемого равенства

$$(d-c)+z\ln\frac{z-d}{z-c}=\int_c^d\frac{tdt}{t-z}$$

следует, что функция $g(z)=(d-c)+z\ln(z-d)/(z-c)$, где $\ln$ обозначает главное значение логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, принадлежит классу $R[a,b]$ и имеет представляющую меру $tdt$. Стало быть, функция $\varphi(z)=1/(d-c+z\ln(z-d)/(z-c))$ принадлежит $Q[a,b]$, а исходное уравнение имеет вид $g(A)x=y$. Имея целью применить для его решения теорему 1, получим для $\varphi$ представление (2). Найдём $\alpha$ и $\beta$ из формул (3):

$$\beta=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(d-c+x\ln\frac{x-d}{x-c})}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{(c-d+tc)(t(d-c)+(c-d+tc)(t-t^2/2+o(t^2)))}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{2c(d-c)-(c-d)^2+4c(c-d)}=-\frac{2}{d^2-c^2}.$$

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{d-c+x\ln\frac{x-d}{x-c}}+\frac{2x}{d^2-c^2}\right)=$$

$$=\frac{2}{d^2-c^2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2+t(c-d+tc)(d-c)+(c-d+tc)^2(t-t^2/2+o(t^2))}{t(d-c)+(c-d+tc)(t-t^2/2+o(t^2))}=$$

$$=\frac{2}{d^2-c^2}\lim_{t\to 0}\frac{2(c-d)^2-6c(c-d)+6c^2}{-3(c-d)+6c}=\frac{4d}{3(d^2-c^2)}$$

(мы воспользовались заменой $t=-1+(x-d)/(x-c)$). Таким образом, $\beta=-2/(d^2-c^2),\alpha=(4d)/(3(d^2-c^2))$. Для получения интегрального представления функции $h$ из (2) воспользуемся комплексной формулой обращения преобразования Стилтьеса (см., например, [6, с. 70, формула 264] или [7, с. 340, теорема 7b]). В нашем случае функция $h(z)=\alpha+\beta z-\varphi(z)$ принадлежит $R[a,b]$. Будем искать ее интегральное представление в виде

$$h(z)=\int_a^b\frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Тогда функция

$$F(\zeta):=h(-\zeta)=\int_a^b\frac{f(t)dt}{t+\zeta}$$

может рассматриваться как преобразование Стилтьеса функции $f$, сосредоточенной на отрезке $[a,b]$. Поэтому в соответствии с упомянутой формулой обращения

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}(F(-x-i0)-F(-x+i0))=\frac{1}{2\pi i}(h(x+i0)-h(x-i0))=\frac{1}{2\pi i}(\varphi(x-i0)-\varphi(x+i0)).\qquad(8)$$

Заметим, что при $\mathrm{Re}(z)\in(c,d)$ для главного значения логарифма справедливо равенство $\ln(z-d)/(z-c)=\ln(z-d)-\ln(z-c)$. Следовательно,

$$\varphi(x\pm i0)=\frac{1}{d-c+(x\pm i0)(\ln((x-d)\pm i0)-\ln((x-c)\pm i0)}.$$

Воспользовавшись для вычисления правой части формулой $\ln(x\pm i0)=\ln|x|\pm i\pi\theta(-x)$, где $\theta$ – функция Хевисайда, имеем

$$\varphi(x\pm i0)=\frac{1}{d-c+(x\pm i0)(\ln(|x-d|/|x-c|)\pm i\pi\theta(-x+d)\pm i\pi\theta(-x+c))},$$

что после преобразований приобретает вид

$$\phi(x\pm i0)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c+x\ln\dfrac{x-d}{x-c}}, & \text{если} x\in(-\infty,c)\cup(d,\infty);\\ \dfrac{1}{d-c+x(\ln\dfrac{d-x}{x-c}\pm i\pi)}, & \text{если} x\in(c,d).\end{cases}$$

Подставляя это в (8), заключаем, что искомая функция $f$ сосредоточена на интервале $(c,d)$ и имеет на нем вид $f(x)=1/((d-c+x\ln\dfrac{d-x}{x-c})^2+\pi^2)$, а потому

$$\varphi(z)=\frac{d+c}{2(d-c)}-\frac{1}{d-c}z-\int_c^d\frac{dt}{\left(\left(d-c+t\ln\dfrac{d-t}{t-c}\right)^2+\pi^2\right)(t-z)}$$

(после замены $x=\ln\dfrac{d-t}{t-c}$ эта формула может быть проверена также с помощью вычетов (см. [8, с. 230, формула (3.10)]). Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 1 и определением 3.

Благодарю профессора А.Р. Миротина, под руководством которого была выполнена эта работа.

**Литература**

1. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М. : Наука, 1973. – 552 с.

2. Атвиновский, А.А. Об однозначной разрешимости одного класса операторных уравнений / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» : в 2-х т. Т. 1 : Математический анализ. – Минск : Ин-т матем. НАН Беларуси, 2012. – С. 28–32.

3. Атвиновский, А.А. Об интегральном представлении одного класса аналитических функций / А.А. Атвиновский // Изв. Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4(67). – С. 3–7.

4. Миротин, А.Р. Обращение операторно-монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин // Труды института математики. – 2004. – Т. 12, № 1. – С. 104–108.

5. Haasse, M. The functional calculus for sectorial operators / M. Haasse. – Basel. : Birkhauser Verlag, 2006. – 392 p.

6. Брычков, Ю.А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М., 1977. – 286 с.

7. Widder, D.V. The Laplace transform / D.V. Widder. – Princeton, 1946. – 406 p.

8. Евграфов, М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. – М., 1991. – 447 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 512.542*

# Композиционные формации с системами дополняемых подформаций

И.В. Близнец

В работе изучаются композиционные формации с системами дополняемых подформаций. В частности, доказана следующая теорема:
Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, $\mathfrak{F} \neq (1)$. Тогда следующие условия равносильны:
1) каждый атом решетки $L_c(\mathfrak{F})$ дополняем в решетке $L(\mathfrak{F})$;
2) каждая группа $G$ из $\mathfrak{F}$ имеет разложение
$$G = A \times A_1 \times \ldots \times A_t,$$
где $A$ – нильпотентная подгруппа в $G$, $A_1,\ldots,A_t$ – простые неабелевы группы.
**Ключевые слова:** конечная группа, класс групп, прямое разложение класса групп, формация, $\omega$-композиционный спутник, $n$-кратно $\omega$-композиционная формация.

The paper studies compositional formations with systems of complemented subformations. In particular, the following theorem is proved:
Let $\mathfrak{F}$ be a compositional formation, $\mathfrak{F} \neq (1)$. Then the following conditions are equivalent:
1) each atom lattice $L_c(\mathfrak{F})$ is complemented in the lattice $L(\mathfrak{F})$;
2) each $G$ group from $\mathfrak{F}$ has an expansion as follows,
$$G = A \times A_1 \times \ldots \times A_t,$$
where $A$ is a nilpotent subgroup in $G$, while $A_1,\ldots,A_t$ being simple non-abelian groups.
**Keywords:** finite group, class of groups, direct decomposition of class of groups, formation, $\omega$-composition satellite, $n$-multiply $\omega$-compositional formation.

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем пользоваться стандартной терминологией, принятой в [1]–[4].

Символом $c_\omega$ мы будем обозначать решетку всех $\omega$-композиционных формаций. Если $\mathfrak{F}$ – произвольная $\omega$-композиционная формация, то символом $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех $\omega$-композиционных подформаций $\omega$-композиционной формации $\mathfrak{F}$. В частности, символом $L_c(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех композиционных подформаций композиционной формации $\mathfrak{F}$.

На основе результатов [5] мы опишем композиционные формации, в которых каждый атом решетки $L_c(\mathfrak{F})$ дополняем в решетке $L(\mathfrak{F})$.

**Лемма 1.** *В том и только в том случае формация $\mathfrak{M}$ является атомом решетки $c_\omega$, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{M} = \mathrm{form}A$*, где $A$ – простая группа и $|A| \notin \omega$;*

2) $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$*, где $|A| = p \in \omega$.*

**Доказательство. Необходимость.** Поскольку по определению $\mathfrak{M} \neq (1)$, то в $\mathfrak{M}$ имеется простая группа $A$. Пусть $\mathfrak{M}_0 = c_\omega\mathrm{form}A$. Тогда поскольку $\mathfrak{M}$ – атом решетки $c_\omega$, то $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$. Если $|A| = p \in \omega$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$. Пусть $|A| \notin \omega$. Тогда формация $\mathrm{form}A$ является $\omega$-композиционной. Значит,
$$\mathrm{form}A = c_\omega\mathrm{form}A = \mathfrak{M}.$$

**Достаточность** доказывается прямой проверкой.

**Лемма 2.** *Пусть* $\mathfrak{F}=c_\omega\mathrm{form}G$ *– однопорожденная* $\omega$*-композиционная формация. Тогда у решетки* $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$ *имеется лишь конечное число атомов.*

**Доказательство.** Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$. Тогда, по лемме 1, $\mathfrak{M}=c_\omega\mathrm{form}A$ для некоторой простой группы $A$. Предположим, что $|A|=p\in\omega$. Тогда

$$A/C^p(A)\in f(Z_p),$$

где $f$ – минимальный $\omega$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, $f(Z_p)\neq 0$ и поэтому

$$Z_p\in K(\mathfrak{F})\cap\mathfrak{L}=K(G)\cap\mathfrak{L}.$$

Но у группы $G$ имеется лишь конечное число композиционных факторов. Следовательно, у формации $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное число таких подформаций $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$ и $K(\mathfrak{M})\subseteq\mathfrak{L}$.

Пусть теперь $|A|\notin\omega$. В этом случае $A_{E\mathfrak{L}}=1$. И поэтому

$$A\simeq A/A_{E\mathfrak{L}}\in f(L')=\mathrm{form}(G/G_{E\mathfrak{L}}).$$

Понятно, что $\mathrm{form}A=\mathfrak{M}$ – атом решетки всех подформаций формации $f(\mathfrak{L}')$. Но, согласно лемме 4.3.11 [3], в такой решетке имеется лишь конечное число атомов. Таким образом, в решетке $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число таких атомов $\mathfrak{M}$, что $K(\mathfrak{M})\cap\mathfrak{L}=\varnothing$.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– композиционная формация,* $\mathfrak{F}\neq(1)$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) *каждый атом решетки* $L_c(\mathfrak{F})$ *дополняем в решетке* $L(\mathfrak{F})$*;*

2) *каждая группа* $G$ *из* $\mathfrak{F}$ *имеет разложение*

$$G=A\times A_1\times\ldots\times A_t,$$

*где* $A$ *– нильпотентная подгруппа в* $G$, $A_1,\ldots,A_t$ *– простые неабелевы группы.*

**Доказательство.** Предположим прежде, что выполняется условие 1). Тогда

$$\mathfrak{F}\subseteq\bigcup_{G\in\mathfrak{F}}c_\omega\mathrm{form}G.$$

Значит, для доказательства 2) достаточно показать, что условие 2) выполняется в любой однопорожденной композиционной подформации $\mathfrak{F}_0$ из $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L_c(\mathfrak{F}_0)$. Тогда $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L_c(\mathfrak{F})$, и поэтому, согласно условию, в формации $\mathfrak{F}$ найдется такая подформация $\mathfrak{H}$, что

$$\mathfrak{F}=\mathrm{form}(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{H})=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{H}.$$

Пусть $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}_0$. Тогда $\mathfrak{H}_0$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}_0$. Действительно, согласно теореме 4.1.12 [3], решетка всех формаций модулярна. Значит,

$$\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}_0\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_0\cap(\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{H})=\mathfrak{M}\oplus(\mathfrak{F}_0\cap\mathfrak{H}).$$

Таким образом, условие 1) выполняется и в $\mathfrak{F}_0$. По лемме 6 [5], число атомов решетки $L_c(\mathfrak{F}_0)$ конечно. Пусть это число равно $n$. Утверждение 2) докажем индукцией по $n$. Согласно лемме 3 [5], формация $\mathfrak{F}_0$ сама является композиционной. И поскольку $\mathfrak{M}\mathfrak{H}_0$, то у решетки $L_c(\mathfrak{H}_0)$ число атомов меньше, чем $n$.

Если $n=1$, то $\mathfrak{H}_0=(1)$, т. е. $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{M}$. По лемме 5 [5], либо $\mathfrak{M}=\mathrm{form}A$, где $A$ – простая неабелева группа, либо $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_p$ для некоторого простого числа $p$. Согласно [2], в первом случае любая неединичная группа из $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{M}$ имеет вид $A_1\times\ldots\times A_t$, где $A_1\simeq A_2\simeq\ldots\simeq A_t$ – простая группа. Во втором случае любая группа из $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p$ нильпотентна.

Предположим теперь, что $n>1$ и что утверждение 2) верно для всех композиционных формаций, у которых решетка композиционных подформаций имеет число атомов меньше, чем $n$. В этом случае, конечно, утверждение 2) относительно $\mathfrak{H}_0$ верно. Но $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}_0$ и поэтому каждая группа $G$ из $\mathfrak{I}$ имеет вид:

$$G = A \times B,$$

где $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{H}_0$. Значит, утверждение 2) выполняется относительно формации $\mathfrak{I}_0$. Таким образом, это условие выполняется и относительно формации $\mathfrak{I}$.

Предположим теперь, что выполняется утверждение 2) и $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L_c(\mathfrak{I})$. Покажем, что $\mathfrak{M}$ имеет дополнения в решетке $L(\mathfrak{I})$.

Пусть $\mathfrak{X}_1$ – множество всех простых групп, входящих в формацию $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ – множество всех простых групп, входящих в формацию $\mathfrak{I}$, и $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_1$. Пусть $\mathfrak{H} = c\mathrm{form}\mathfrak{X}_2$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $L(\mathfrak{I})$, т. е. что

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1), \quad \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{I}.$$

Прежде установим, что

$$\mathfrak{I} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Предположим, что это не так, и пусть $A$ – группа минимального порядка из

$$\mathfrak{I} \setminus \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Тогда группа $A$ монолитична, и если $R$ – цоколь группы $A$, то $R = A^{\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})}$. В силу свойства 2) либо $A$ – $p$-группа для некоторого простого $p$, либо $A$ – простая неабелева группа. Предположим, что имеет место первый случай. Предположим, что $R = A$ – группа порядка $p$. Тогда $A$ – простая группа. Но $A \in \mathfrak{I}$ и поэтому либо $A \in \mathfrak{X}_1$, либо $A \in \mathfrak{X}_2$. В обоих случаях это дает

$$A \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}),$$

что противоречит выбору группы $A$. Таким образом, $R \neq A$. Но

$$A / R \in \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$$

и поэтому формации $\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ принадлежит группа $B$ порядка $p$. Предположим $B \notin \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$. Тогда, согласно теореме 1.2.25 [3], в формации $\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ найдется группа $H$ с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \ldots, N_t, M_1, \ldots, M_t$ $(t \geq 2)$, что выполняются следующие утверждения: a) $H / N \simeq A$, $M / N = \mathrm{Soc}(H / N)$; b) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$; c) $H / N_i$ – монолитическая $\mathfrak{X}$-группа с монолитом $M_i / N_i$, который $H$-изоморфен $M / N$.

Из условий a) и c) вытекает, что

$$B \in K(M_i / N_i) \subseteq K(H / N_i) \subseteq K(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) = K(\mathfrak{M}) \cup K(\mathfrak{H}).$$

Если $B \in K(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$ и поэтому $A \in \mathfrak{M}$. Аналогично, видим, что если $B \in K(\mathfrak{H})$, то $A \in \mathfrak{H}$, т. е.

$$A \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}),$$

противоречие. Итак, $A$ – простая неабелева группа. Но тогда, согласно лемме 2.1.7 [3], мы сразу имеем, что

$$A \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Полученное противоречие показывает, что

$$\mathfrak{I} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Покажем теперь, что

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Предположим, что это не верно. И пусть $A$ – произвольная простая группа из пересечения $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $|A| = p$ – простое число. Из [4]

$$K(\mathfrak{M}) = K(\mathfrak{X}_1), \quad K(\mathfrak{X}_2) = K(\mathfrak{H}).$$

Но

$$A \in K(\mathfrak{M}) \cap K(\mathfrak{H}).$$

Значит,

$$A \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2 = \varnothing,$$

противоречие. Таким образом,

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1),$$

т. е. $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $L(\mathfrak{I})$. Теорема доказана.

## Литература

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989 – 253 с.

3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

4. Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

5. Близнец, И.В. Разложимые $n$-кратно $\omega$-композиционные формации / И.В. Близнец, А.Н. Скиба // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4(67). – С. 45–48.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 26.04.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 512.542*

# О пересечении $A$-допустимых максимальных подгрупп, не содержащих $p$-нильпотентный радикал

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич

Исследуются пересечения заданных систем максимальных подгрупп конечных групп.
**Ключевые слова:** максимальная подгруппа, группа операторов, локальная формация, $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа, подгруппа Фраттини.

The intersections of the given systems of maximal subgroups of finite groups are studied in this article.
**Keywords:** maximal subgroup, group of operators, local formation, $\mathfrak{F}$-abnormal subgroup, Frattini subgroup.

***Введение***

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Одно из направлений теории пересечений максимальных подгрупп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Данное направление берет начало с работы Фраттини [1], установившего нильпотентность пересечения $\Phi(G)$ всех максимальных подгрупп конечной группы $G$. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографии [2] и [3]).

В настоящее время одно из направлений развития данной теории связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не содержащих некоторую нормальную подгруппу конечной группы [4].

Данная работа посвящена развитию указанного направления в группах с операторами.

***Определения и обозначения***

Через $M_G$ обозначают ядро подгруппы $M$ в группе $G$ (то есть пересечение всех подгрупп из $G$, сопряженных с подгруппой $M$).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой $G$ и все группы, изоморфные $G$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы $G$ – пересечение всех нормальных подгрупп $N$ группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ – формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, то наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы $G$ и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть даны группа $G$, множество $A$ и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы $G$ в себя или эндоморфизм группы $G$. Подгруппа $M$

называется $A$-допустимой, если $M$ выдерживает действие всех операторов из $A$, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является $A$-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных $A$-допустимых подгрупп. Если таких подгрупп в группе $G$ нет, то положим $\Phi(G, A) = G$.

Заметим, что максимальная $A$-допустимая подгруппа $M$ либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-радикал группы $G$, либо $MG_{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение $A$-допустимых подгрупп $A$-допустимо и $G_{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а следовательно, $A$-допустимая, то $MG_{\mathfrak{F}} = M$ или $MG_{\mathfrak{F}} = G$. Аналогичные рассуждения верны и для $\mathfrak{F}$-корадикала.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, через $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим подгруппу, равную пересечению ядер всех максимальных $A$-допустимых подгрупп группы $G$, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Введем следующие обозначения:

$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G, A)$ – подгруппа группы $G$, равная пересечению ядер всех максимальных $A$-допустимых подгрупп группы $G$, не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал, $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$;

$D^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G, A)$ – подгруппа группы $G$, равная пересечению ядер всех максимальных $A$-допустимых подгрупп группы $G$, не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал и $\mathfrak{F}$-корадикал;

$D^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G, A)$ – подгруппа группы $G$, равная пересечению ядер всех максимальных $A$-допустимых подгрупп группы $G$, содержащих $\mathfrak{F}$-радикал и не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал.

В частном случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация $p$-нильпотентных групп $G_{p'}G_p$ (нильпотентных групп N), подгруппу $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_F}}(G, A)$ будем обозначать $\overline{D}^{p}_{\overline{F}_p}(G, A)$ ($\overline{D}^{N}_{\overline{F}}(G, A)$).

Если $A$ – единичная группа операторов, то понятия $A$-допустимой максимальной подгруппы, не содержащей $\mathfrak{F}$-корадикал, и максимальной $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппы совпадают. В этом случае будем использовать обозначения $\overline{\Phi}^{p}_{\overline{F}_p}(G)$ и $\overline{\Phi}^{N}_{\overline{F}}(G)$.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из $G$ совпадает с самой группой $G$.

Напомним, что подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют подгруппу, равную пересечению всех ненормальных максимальных подгрупп группы $G$.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной $A$-допустимой относительно некоторой группы операторов $A$, а также не всякая максимальная $A$-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

**Пример 2.1.** *Пусть $Q$ – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G = [Q]Z_3$, $Z_3$ – группа операторов для $Q$. В группе $Q$ подгруппа $K$ порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов $Z_3$, но не является максимальной подгруппой группы $Q$.*

**Пример 2.2.** *Рассмотрим группу*

$$G^* = < a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c > .$$

*Тогда $G^* = [G]A$, где $G = < b > \times < c >$ и $A = < a >$ – группа операторов группы $G$. Простая проверка показывает, что в группе $G$ есть максимальная $A$-допустимая подгруппа $H = < bc >$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например $b$, являются $A$-*

*допустимыми. Отмеченный класс групп становится достаточно широким, если образовать группу* $R = G^{*} \times Q$, *где* $Q$ *– сверхразрешимая группа и* $(|G|,|Q|) = 1$.

***Вспомогательные результаты***

**Теорема 3.1. [5, с. 59].** *Пусть* $\Im$ *–* $S_n$*-замкнутая локальная формация и группа* $G$ *имеет группу операторов* $A$ *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$. *Тогда* $D^{\Im}(G,A) = A \times B$, *где* $A \in \Im$, $B \subseteq \Phi(G,A)$, $\pi(B) \cap \pi(\Im) = \varnothing$.

**Теорема 3.2. [5, с. 59].** *Пусть группа* $G$ *имеет группу операторов* $A$, $\Im$ *– формация. Если в группе* $G$ *существуют максимальные* $A$*-допустимые подгруппы, не содержащие* $\Im$*-корадикал и не принадлежащие* $\Im$, *тогда пересечение всех таких подгрупп совпадает с* $D^{\Im}(G,A)$.

**Теорема 3.3. [5, с. 59].** *Пусть* $\Im$ *–* $S_n$*-замкнутая локальная формация и группа* $G$ *имеет группу операторов* $A$ *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$. *Если* $N$ *– нормальная* $A$*-допустимая подгруппа группы* $G$ *и* $N / N \cap D^{\Im}(G,A) \in \Im$, *тогда* $N$ *представима в виде прямого произведения* $N = N_1 \times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

*1)* $N_1 \in \Im$;

*2)* $\pi(N_2) \cap \pi(\Im) = \varnothing$;

*3)* $N_2 \subseteq \Phi(G,A)$.

**Лемма 3.1.** *Пусть группа* $G$ *имеет группу операторов* $A$ *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$ *и* $D^{p}(G,A) \neq G$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

*1)* $D^{p}(G,A) \subseteq F_p(G)$, *если* $G$ *– разрешимая неединичная группа, то* $D^{p}(G,A) \subset F_p(G)$;

*2)* $F_p(G / D^{p}(G,A)) = F_p(G) / D^{p}(G,A)$.

**Доказательство.** Из теоремы 3.1 следует, что $D^{p}(G,A)$ является $p$-нильпотентной подгруппой. Следовательно, $D^{p}(G,A) \subseteq F_p(G)$. Пусть $G$ – разрешимая неединичная группа. Тогда $G / D^{p}(G,A)$ разрешима и неединична. Пусть $B / D^{p}(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G / D^{p}(G,A)$. Так как $B / D^{p}(G,A)$ – $p$-группа для некоторого простого $p$, а формация $p$-нильпотентных групп является нормально наследственной локальной формацией, содержащей все нильпотентные группы, то по теореме 3 из [5] $B$ является $p$-нильпотентной, а это значит, что $B \subseteq F_p(G)$. Следовательно, $D^{p}(G,A) \subset G$.

Если $F_p(G / D^{p}(G,A)) = K / D^{p}(G,A)$, то $K$ является $p$-нильпотентной подгруппой, поэтому $K \subseteq G$ и $F_p(G / D^{p}(G,A)) \subseteq F_p(G) / D^{p}(G,A)$. Обратное включение следует из определения подгруппы $F_p(G)$.

***Основной результат***

**Теорема 4.1.** *Пусть группа* $G$ *имеет группу операторов* $A$ *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) в разрешимой неединичной группе выполняется равенство* $D^{p}_{\overline{F}_p}(G,A) = D^{p}(G,A)$;

*2) в разрешимой не* $p$*-нильпотентной группе подгруппа* $D^{p}_{F_p}(G,A) \in (G_{p'}G_p)^2$.

**Доказательство.** Подгруппы $D^{p}_{\overline{F}_p}(G,A)$ и $D^{p}_{F_p}(G,A)$ являются характеристическими в $G$ и

$$D^p_{\overline{F}_p}(G,A)\cap D^p_{F_p}(G,A)=D^p(G,A).$$

Для факторгруппы $G/D^p(G,A)$ выполняется

$$F_p(G/D^p(G,A))=F_p(G)/D^p(G,A),$$

поэтому

$$D^p_{\overline{F}_p}(G/D^p(G,A))=D^p_{\overline{F}_p}(G,A)/D^p(G,A).$$

Предположим, что $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)/D^p(G,A)\neq 1$ и пусть $K/D^p(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/D^p(G,A)$, содержащаяся в $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)/D^p(G,A)$. Так как формация $p$-нильпотентных групп содержит формацию всех нильпотентных групп, то $K/D^p(G,A)$ $p$-нильпотентна и по теореме 3.3 $K$ является $p$-нильпотентной подгруппой. Следовательно, $K\subseteq F_p(G)$. Тогда

$$K\subseteq D^p_{\overline{F}_p}(G,A)\cap D^p_{F_p}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)/D^p(G,A)=1$, а значит, $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)=D^p(G,A)$.

Пусть $G$ – разрешимая не $p$-нильпотентная группа. Из того, что $F_p(G)\subseteq D^p_{F_p}(G,A)F_p(G)$ и $D^p_{F_p}(G,A)/F_p(G)=D^p(G/F_p(G),A)$, следует, что подгруппа $D^p_{F_p}(G,A)\in(G_{p'}G_p)^2$.

**Следствие 4.1.1.** *Пусть группа $G$ имеет группу операторов $A$ такую, что $(|G|,|A|)=1$, тогда в разрешимой неединичной группе подгруппа $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ $p$-нильпотентна.*

Если группа операторов $A$ является тривиальной, то имеет место следующее

**Следствие 4.1.2.** *Пусть $G$ – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) если $G\neq 1$, то $\Phi^p_{\overline{F}_p}(G)=\Phi^p(G)$;*

*2) в любой не $p$-нильпотентной группе $G$ подгруппа $\Phi^p_{F_p}(G)\in(G_{p'}G_p)^2$.*

**Следствие 4.1.3.** *В разрешимой неединичной группе подгруппа $\Phi^p_{\overline{F}_p}(G)$ является $p$-нильпотентной.*

Если вместо формации $p$-нильпотентных групп выбрать формацию всех нильпотентных групп, то из следствия 4.1.2 вытекает результат из работы [4].

**Теорема 4.2.** *Пусть группа $G$ имеет группу операторов $A$ такую, что $(|G|,|A|)=1$, $G$ – разрешимая группа. Если $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)\neq G$, то $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)=D^p(G,A)$.*

**Доказательство.** Пусть $G$ обладает не $p$-нильпотентными максимальными $A$-допустимыми подгруппами, не содержащими $G_{p'}G_p$-корадикал и не содержащими $F_p(G)$. Не сложно заметить, что

$$D^p(G,A)\subseteq\overline{D}^p(G,A)\subseteq\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$$

и согласно теореме 3.2 $D^p(G)=\overline{D}^p(G,A)$.

Пусть подгруппа $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ не совпадает с подгруппой $\overline{D}^p(G,A)$, тогда $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{D}^p(G,A)\neq 1$, и пусть $K/\overline{D}^p(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\overline{D}^p(G,A)$, содержащаяся в $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{D}^p(G,A)$. Так как формация $p$-нильпотентных групп содержит формацию всех нильпотентных групп, то $K/\overline{D}^p(G,A)$ $p$-нильпотентна. Тогда на основании теоремы 3.3 следует, что $K$ $p$-нильпотентная подгруппа. Следовательно, $K \subseteq F_p(G)$. Тогда

$$K \subseteq \overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A) \cap \overline{D}^p_{F_p}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{D}^p(G,A)=1$, а значит, $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)=D^p(G,A)$.

Применяя теоремы 3.1 и 4.2, получаем следующее

**Следствие 4.2.1.** *Пусть группа* $G$ *имеет группу операторов* $A$ *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, $G$ *– разрешимая группа. Если* $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)\neq G$, *то* $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ *–* $p$*-нильпотентная подгруппа группы* $G$.

В случае, когда группа операторов $A$ является тривиальной, из теоремы 2 получаем

**Следствие 4.2.2.** *Пусть* $G$ *– разрешимая группа. Если* $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G)\neq G$, *то* $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G)=\Phi^p(G)$.

**Следствие 4.2.3.** *Пусть* $G$ *– разрешимая группа. Если* $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G)\neq G$, *то* $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G)$ *–* $p$*-нильпотентная подгруппа группы* $G$.

Если вместо формации $p$-нильпотентных групп взять формацию нильпотентных групп, то из теоремы 2 получаем

**Следствие 4.2.4.** *Пусть* $G$ *– разрешимая группа. Если в группе* $G$ *существуют ненильпотентные неинвариантные максимальные подгруппы, не содержащие* $F(G)$, *то пересечение всех таких подгрупп совпадает с* $\Delta(G)$.

Из следствия 4.2.4 вытекает соответствующий результат работы [4].

## Литература


1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

5. Бородич, Е.Н. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник Брестского университета. – 2012. – Сер. 1, № 1. – С. 54–62.


Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 02.11.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 512.542*

# О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп

А.С. Вегера

В работе изучаются свойства класса конечных групп с $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальными силовскими подгруппами. Установлено, что класс таких групп является насыщенной формацией.
**Ключевые слова:** конечная группа, силовская подгруппа, $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа, насыщенная формация.

The properties of the class of finite groups with $K$ - $\mathfrak{F}$ -subnormal Sylow subgroups are studied in the article. It is shown that the class of such groups is a saturated formation.
**Keywords:** finite group, Sylow subgroup, $K$ - $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup, saturated formation.

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа $G$ нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа является субнормальной в группе $G$. В 1969 году Т. Хоукс [1] обобщил понятие субнормальности, введя определение $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в разрешимой группе. Предложенная им идея состояла в выделении в группе с помощью непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ семейства подгрупп, которые имеют свойства, аналогичные свойствам субнормальных подгрупп, и совпадают с последними в случае, когда $\mathfrak{F}$ есть формация $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп.

В 1978 году Л.А. Шеметков в монографии [2] распространил понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы для произвольных конечных групп. В этом же году О. Кегель в работе [3] ввел понятие $\mathfrak{F}$-достижимой ($K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной, согласно [4]) подгруппы. Понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной и $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп активно изучались в различных направлениях и нашли многочисленные приложения (например, см. [4]). В работе [5] А.Ф. Васильевым было начато рассмотрение следующей проблемы. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Что можно сказать о строении группы $G$, если все ее силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в $G$? В статьях [6]–[10] были продолжены исследования по данной проблеме.

В данной работе для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ вводится понятие класса $\bar{w}\mathfrak{F}$ всех групп, силовские подгруппы которых являются $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальными. Исследуются свойства данного класса, в частности, установлено, что $\bar{w}\mathfrak{F}$ образует насыщенную формацию.

***Предварительные сведения***

В работе используются стандартные обозначения, определения и результаты. Необходимые сведения из теории формаций, в частности, насыщенных формаций можно найти в монографиях [2], [4], [11]–[12]. Напомним, что $\mathfrak{G}$ обозначает класс всех групп; $\mathfrak{G}_\pi$ – класс всех $\pi$-групп, где $\pi$ – некоторое множество простых чисел ($\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_\pi$, для $\pi = \{p\}$); $O_p(G)$ – наибольшая нормальная $p$-подгруппа группы $G$ для данного простого числа $p$; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга, $F^*(G)$ – обобщенная подгруппа Фиттинга [12, с. 580].

**Определение 1.** *Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если $\mathfrak{F}$ является замкнутым классом относительно взятия гомоморфизмов и подпрямых произведений.*

**Определение 2.** *Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если она является насыщенным классом, т. е. если $G/N \in \mathfrak{F}$, $N \le \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

**Определение 3.** *Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой своей группой содержит все ее подгруппы.*

Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы $G$, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из $G$, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

**Определение 4.** *Подгруппа $U$ группы $G$ называется $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной ($\mathfrak{F}$-достижимой* [3]) *подгруппой в $G$ (кратко записывается $U$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$), если либо $U = G$, либо существует цепь подгрупп: $U = U_0 \le U_1 \le \ldots \le U_n = G$ такая, что $U_{i-1}$ либо нормальна в $U_i$, либо $U_i^{\mathfrak{F}} \subseteq U_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.*

Будем обозначать через $\mathrm{sn}_{K-\mathfrak{F}}(G)$ множество всех $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы $G$. В дальнейших рассуждениях нам потребуются известные свойства $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, которые перечислены в следующих двух леммах.

**Лемма 5 [4].** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, $G$ – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $H$ – подгруппа из $G$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$;*

2) *если $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$, $T$ – подгруппа из $G$, то ($H \cap K$) $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $T$;*

3) *если $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$, то $H^x$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$ для любого $x \in G$.*

**Лемма 6 [4].** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, $H$ – подгруппа группы $G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$, то $HN/N$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G/N$;*

2) *если $HN/N$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G/N$, то $HN$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$;*

3) *если $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $K$ и $K$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$, то $H$ $K$-$\mathfrak{F}$-$sn$ $G$.*

**Замечание 7.** Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ − формация всех нильпотентных групп и $sn(G)$ означает множество всех субнормальных подгрупп группы $G$. Тогда $sn_{K-\mathfrak{N}}(G) \subseteq sn(G)$ для любой группы $G$. В общем случае равенство не имеет места, как показывает пример знакопеременной группы степени 5 $Alt(5) = G$ и $1 \in sn(G) \setminus sn\ (G)$. Однако, если $G$ разрешима, то $sn_{K-\mathfrak{N}}(G) = sn(G)$.

**Замечание 8.** Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ − формация всех сверхразрешимых групп и $sn^*(G)$ обозначает множество $\{H \in S(G) \mid \text{либо } H = G,$ либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для $i = 1, \ldots, n\}$. Тогда, согласно замечанию 2 из [2, с. 93], $sn_{K-\mathfrak{U}}(G) \subseteq sn^*(G)$ для любой группы $G$. Если $G$ разрешима, то $sn_{K-\mathfrak{U}}(G) = sn^*(G)$.

В дальнейшем мы будем обозначать через $Syl_p(G)$ множество всех силовских $p$-подгрупп группы $G$ для данного простого числа $p$. Тогда $Syl(G) = \bigcup_{p \in \pi(G)} Syl_p(G)$ обозначает множество всех силовских подгрупп группы $G$.

Отметим следующие известные свойства силовских подгрупп.

**Теорема 9 [11].** *Пусть $G$ – группа, $p$ – простое число, $P \in Syl_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $P \cap N \in Syl_p(N)$ *и* $PN/N \in Syl_p(G/N)$;

2) $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$;

3) *если $K$ − нормальная подгруппа группы $G$, то $PN \cap PK = P(N \cap K)$.*

## *Определение и свойства класса $\overline{w}\mathfrak{F}$*

Введем класс групп, определяемых заданным вложением силовских подгрупп в группу, и исследуем некоторые его общие свойства. В дальнейших рассуждениях будем рассматривать только непустые формации.

**Определение 10.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация. Класс групп* $\overline{w}\mathfrak{F}$ *определяется следующим образом*: $\overline{w}\mathfrak{F} = (G \mid \forall H \in \mathrm{S}yl(G) : H\ \mathrm{K}\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G)$.

Используя свойства силовских подгрупп группы и лемму 6, получаем следующие леммы:

**Лемма 11.** *Если* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация, то* $\overline{w}\mathfrak{F}$ *– наследственная формация.*

*Доказательство.* Докажем, что $\overline{w}\mathfrak{F}$ – гомоморф. Пусть группа $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Рассмотрим $P/N \in Syl(G/N)$. По свойству силовских подгрупп $P/N = HN/N$ для некоторой силовской $p$-подгруппы $H$ группы $G$, где $p \in \pi(P/N)$. Из $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$ следует, что $H\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G$. Тогда по утверждению 1) леммы 6 подгруппа $P/N = HN/N\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G/N$.

Докажем теперь, что класс групп $\overline{w}\mathfrak{F}$ является замкнутым относительно взятия подпрямых произведений. Пусть $G$ – группа наименьшего порядка такая, что в $G$ существуют нормальные подгруппы $N_1$ и $N_2$, для которых $G/N_1 \in \overline{w}\mathfrak{F}$, $G/N_2 \in \overline{w}\mathfrak{F}$, но $G/N_1 \cap N_2 \notin \overline{w}\mathfrak{F}$.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Рассмотрим произвольную силовскую $p$-подгруппу $R$ группы $G$. Так как $RN_i/N_i$ – силовская $p$-подгруппа в $G/N_i$ и $G/N_i \in \overline{w}\mathfrak{F}$, то $RN_i/N_i\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G/N_i$, $i = 1,2$. Ввиду утверждения 2) леммы 6, утверждения 2) леммы 5 и утверждения 3) теоремы 9 подгруппа $RN_1 \cap RN_2 = R(N_1 \cap N_2) = R\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G$. Получаем, что $G/N_1 \cap N_2 \cong G \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору $G$. Таким образом, $\overline{w}\mathfrak{F}$ является формацией.

Для доказательства наследственности $\overline{w}\mathfrak{F}$ возьмем $G \in \mathfrak{F}$ и любую подгруппу $P$ из $G$. По теореме Силова, силовская $q$-подгруппа $T$ из $P$ содержится в некоторой силовской $q$-подгруппе $Q$ группы $G$. Из $Q\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G$ по утверждению 2) леммы 5 следует $K\text{-}\mathfrak{F}$-субнормальность $P \cap Q = T$ в $P$. Следовательно, $P \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

**Лемма 12.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация. Тогда:*

1) $\mathfrak{F} \subseteq \overline{w}\mathfrak{F}$;
2) $\mathfrak{N} \subseteq \overline{w}\mathfrak{F}$;
3) $\overline{w}(\overline{w}\mathfrak{F}) = \overline{w}\mathfrak{F}$.

*Доказательство.* Утверждение 1) следует из утверждения 1) леммы 5.

Так как любая нормальная подгруппа группы является $K\text{-}\mathfrak{F}$-субнормальной, то утверждение 2) следует из определения класса $\overline{w}\mathfrak{F}$.

Докажем утверждение 3). Пусть $\mathfrak{H} = \overline{w}\mathfrak{F}$. Из леммы 11 и утверждения 1) доказываемой нами леммы следует, что $\mathfrak{H} \subseteq \overline{w}\mathfrak{H}$. Докажем обратное включение. Пусть $G$ – группа наименьшего порядка из $\overline{w}\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Возьмем любую $Q \in Syl(G)$. Допустим, что $G = Q$. Тогда по утверждению 2) данной леммы $Q \in \mathfrak{N} \subseteq \overline{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Это противоречит выбору $G$.

Итак, $G \neq Q$, т. е. $|\pi(G)| > 1$. Так как $G \in \overline{w}\mathfrak{H}$, то в $G$ найдется максимальная подгруппа $M$ такая, что $Q \subseteq M$ и либо $G^{\mathfrak{H}} \subseteq M$, либо $M \lhd G$. Пусть $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $M$. По лемме 11, $G/N \in \overline{w}\mathfrak{H}$. Из $|G/N| < |G|$ следует, что $G/N \in \mathfrak{H}$. Поэтому $QN/N\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G/N$. Отсюда $QN\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G$ ввиду утверждения 2) леммы 6.

Из наследственности $\overline{w}\mathfrak{H}$ и $G \in \overline{w}\mathfrak{H}$ следует, что $QN \in \overline{w}\mathfrak{H}$. Так как $QN \neq G$, $QN \in \mathfrak{H}$. Ввиду того, что $\mathfrak{H} = \overline{w}\mathfrak{F}$ и $Q \in Syl(QN)$, $Q\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ QN$. По утверждению 3) леммы 6 $Q\ K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn}\ G$. Получили, что $G \in \mathfrak{H}$. Это противоречит выбору $G$. Утверждение 3) доказано. Лемма доказана.

### *Насыщенность формации* $\overline{w}\mathfrak{F}$

**Теорема 13.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация и* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *Тогда* $\overline{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ *– наследственная насыщенная формация.*

*Доказательство.* Так как класс групп $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией, то по лемме 11, $\overline{w}\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда $\overline{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ – наследственная формация. Докажем, что $\overline{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ является насыщенной формацией.

Пусть $G$ – группа наименьшего порядка такая, что $G/\Phi(G) \in \overline{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$, но $G \notin \overline{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Из насыщенности класса $\mathfrak{G}_\pi$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_\pi$.

Пусть $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Так как $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \in \overline{w}\mathfrak{F}$, то $G/N/\Phi(G/N) \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Ввиду выбора $G$ получаем, что $G/N \in \overline{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Класс $\overline{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ является формацией, поэтому $N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Значит, $N \subseteq \Phi(G)$. Отсюда следует, что $N$ – $p$-группа для некоторого простого числа $p$ и $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $Q$ – произвольная силовская $q$-подгруппа группы $G$.

Если $q = p$, то $QN/N$ – $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы $G/N$. Из $N \subseteq Q$ и утверждения 2) леммы 6 следует $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальность $QN = Q$ в $G$.

Пусть $q \neq p$. Обозначим $H = Q\widetilde{F}(G)$, где $\widetilde{F}(G)$ – подгруппа группы $G$, определяемая условиями (см. подробнее [2, с. 79]: $\widetilde{F}(G) \supseteq \Phi(G)$ и $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$ является цоколем группы $G/\Phi(G)$).

Тогда $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$ квазинильпотентна. Поэтому $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) \subseteq F^*(H/\Phi(G))$. Отсюда $H/\Phi(G) = Q\Phi(G)/\Phi(G)F^*(H/\Phi(G))$.

Так как $Q\Phi(G)/\Phi(G)$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $H/\Phi(G)$ и $Q\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то ввиду $\pi(G/\Phi(G)) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и насыщенности $\mathfrak{F}$ по теореме 6.1.11 из [4] $H/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда для максимального внутреннего локального экрана $f$ формации $\mathfrak{F}$ $H$ действует $f$-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$. Отсюда ввиду $O_{p'}(G) = 1$ по теореме 9.18 из [2] $H$ действует $f$-стабильно на $\Phi(G)$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$. По лемме 5 получаем, что $Q$ – $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы $QN$. Так как $QN$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$, то по утверждению 3) леммы 6 $Q$ $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$. Итак, $G \in \overline{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

## Литература

1. Hawkes, T. On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

3. Kegel, O.H. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den Subnormalteil-erverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.

4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.

5. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

6. Васильева, Т.И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.

7. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

8. Семенчук, В.Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Матем. заметки. – 2011. – № 1(89). – С. 104–108.

9. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2. – С. 21–27.

10. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4(9). – С. 86–91.

11. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

12. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 22.11.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 539.4:621.6*

# Создание автоматизированных методик определения физико-механических характеристик материалов для труб с ППУ-ОЦМ изоляцией и оболочки ПИ-труб

В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, С.В. Шилько

Разработана автоматизированная методика исследования, определения физико-механических свойств материалов труб с ППУ-ОЦМ изоляцией и оболочки ПИ-труб, разработан алгоритм и создана программа, реализующая расчет и хранение различных характеристик стальных труб ППУ. Проведены экспериментальные исследования.
**Ключевые слова:** автоматизированная методика, свойства материалов, трубы с изоляцией.

The automated calculation method of physical and mechanical characteristics of the materials for polyurethane foam pipes with insulation and their cover has been developed as well as the algorithm and the program that implements the calculation and storage of various characteristics of polyurethane foam steel pipes. The experiments have been carried out.
**Keywords:** automated method, characteristics of materials, pipes with insulation.

***Введение***

В последнее время борьба с коррозией и потерей тепла в трубопроводах теплосети успешно решается с помощью применения стальных труб с теплоизоляцией в виде изолирующего слоя из жесткого пенополиуретана (ППУ) в спиральновитой герметичной оболочке из тонколистовой оцинкованной стали (далее – трубы с ППУ-ОЦМ изоляцией для надземных прокладок трубопроводов) и внешней гидрозащитной полиэтиленовой оболочки *(ПИ-труб)* для подземной бесканальной прокладки [1], [2].Труба ППУ является прочной конструкцией благодаря адгезии между стальной трубой, изолирующим слоем из ППУ, а также связи между пенопластом ППУ и внешней гидрозащитной полиэтиленовой оболочкой. Для изготовления полиэтиленовой оболочки используется термосветостабилизированный полиэтилен низкого давления высокой плотности черного цвета марки 273-79 высшего и первого сорта. Показатели основных свойств тепловой изоляции труб ППУ-ПЭ изоляцией должны соответствовать ГОСТ 3073. Требования к трубопроводам с оцинкованной оболочкой изложены в ГОСТ 30732-2006 «Трубы и фасонные изделия стальные с тепловой изоляцией из пенополиуретана с защитным покрытием». Проведение проектными организациями расчетов и экспериментов согласно ГОСТ для таких стальных труб представляет довольно сложную задачу, поэтому возникает необходимость разработки программного комплекса на ПЭВМ, позволяющего автоматизировать данный процесс для оболочки ПИ-труб и труб с ППУ-ОЦМ изоляцией.

***Автоматизированная методика определения физико-механических свойств материалов труб***

В настоящее время возникла необходимость разработки современных методов оценки ресурса оборудования (трубопроводов, сосудов) из новых материалов, в том числе композиционных, на основе диагностической информации. Опыт создания таких комплексных программ и методик имеется [3]–[5]. Поэтому актуальна разработка программного комплекса на ПЭВМ, позволяющего автоматизировать данный процесс. Разработана автоматизированная методика определения физико-механических свойств материалов труб с ППУ-ОЦМ изоляцией и оболочки ПИ-труб, разработан алгоритм и создана программа, реализующая расчет и хранение различных характеристик стальных труб ППУ. Приведем краткое описание программы.

На стартовой форме можно выбрать один из двух режимов работы с программой: режим расчета и изменения данных или режим просмотра результатов. После чего появляется главное окно программы (см. рис. 1), где реализованы расчет и хранение различных характеристик стальных труб ППУ и оболочки ПИ-труб: наружного диаметра изолированной трубы, отклонения осевой линии от оси оболочки, водопоглощения, прочности на сдвиг в осевом направлении, прочности на сдвиг в тангенциальном направлении, термоусадка и т. д.

.

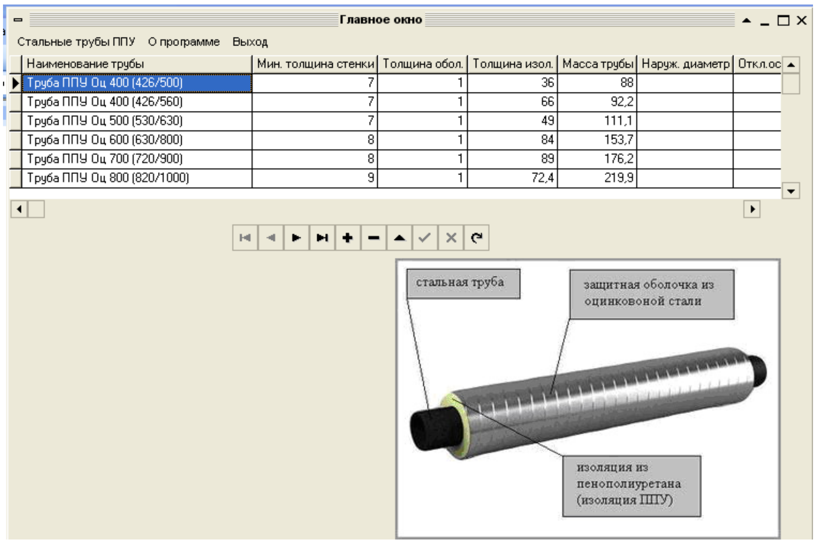



Рисунок 1 – Главное окно программы

В программе предусмотрена возможность поиска и сортировки по основным полям, обработаны все возможные случаи ввода некорректных данных. Расчет различных характеристик стальных труб ППУ и оболочек ПИ-труб: наружного диаметра изолированной трубы, отклонения осевой линии от оси оболочки, водопоглощения, прочности на сдвиг в осевом направлении, прочности на сдвиг в тангенциальном направлении и т. д. – осуществляется в отдельном окне, при расчете характеристик, для которых необходимо проводить расчет на 3 или 10 образцах (например, водопоглощение), рассчитывается среднее значение соответствующей характеристики. После нажатия кнопки «Сохранить» (см. рис. 2) рассчитанная характеристика заносится в таблицу базы данных с расширением mdb (Access). Для некоторых характеристик доступен рисунок (согласно ГОСТ). Также в программе предусмотрена возможность построения отчетов по рассчитанным характеристикам.

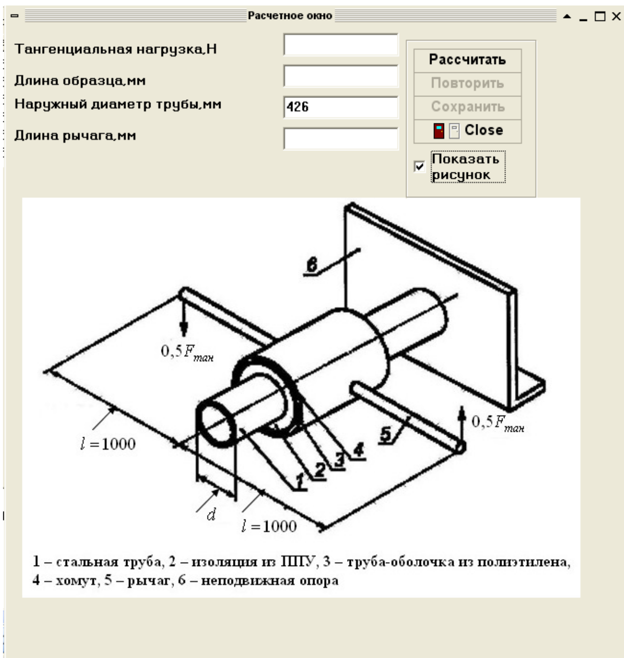
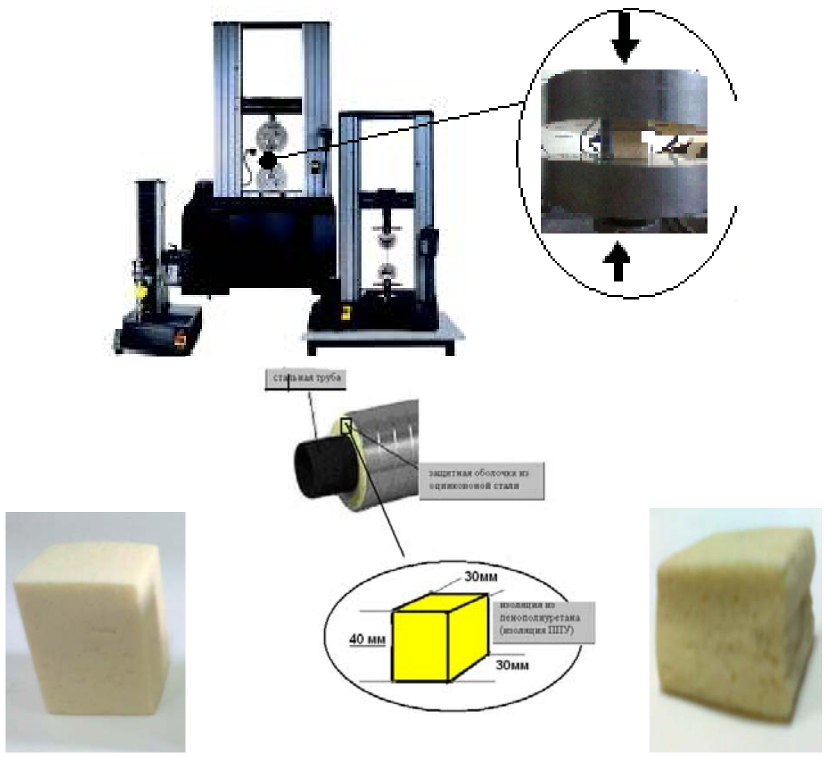



Рисунок 2 – Расчетное окно

База данных построена по технологии ADO, приложение запускается из любого места без предварительной настройки и не требует наличия на компьютере специальных программ (BDE Administrator и т. д.). В программе предусмотрена возможность сравнения рассчитанных характеристик с ГОСТ. В новом окне для текущей стальной трубы или оболочки ПИ-труб будет показано сравнение рассчитанных в программе характеристик с ГОСТ и сделано заключение о соответствии или несоответствии трубы ГОСТ. Сравнение с ГОСТ возможно только в том случае, если для исследуемой трубы определен хотя бы один из требуемых параметров.

***Пример экспериментального исследования***

Для определения физико-механических характеристик труб была разработана методика экспериментального исследования (рис. 3), успешно используемая для выполнения хоздоговорных работ.




ППУ до испытаний после испытаний

Рисунок 3 – Испытательная машина INSTRON 5567 для статических испытаний материалов на растяжение, изгиб, сжатие

Эксперименты для труб с ППУ изоляцией проводились с использованием методики, описанной в [3]. В результате проведения экспериментов были также построены зависимости «напряжение – деформация» для материала изоляции ППУ, изображенные на рис. 4 (черная линия – экспериментальные результаты, фиолетовая линия – теоретическая модель). Из рисунка 4 видно, что линейность зависимости «напряжение – деформация» сохраняется до деформаций 6%, $E = 11{,}6 МПа$, после чего имеет место выраженный горизонтальный участок (до деформации 25–30%). Теоретически эти диаграммы можно описать в виде моделей А.А. Ильюшина $\sigma = E\varepsilon(1-\omega)$, где значение функции $\omega(\varepsilon)$ зависит от диаграммы сжатия и меняется в пределах $0 \le \omega(\varepsilon) \le 1$. Далее происходит ужесточение материала, обусловленное смятием и закрытием пор, что проявляется в нелинейном возрастании сжимающего усилия (напряжения). На основании экспериментальных результатов была разработана автоматизированная методика расчета на прочность образцов ППУ, а также проведены испытания на водопоглощение в соответствии с ГОСТ и испытания адгезионной прочности соединения теплоизолирующего материала с металлической трубой.

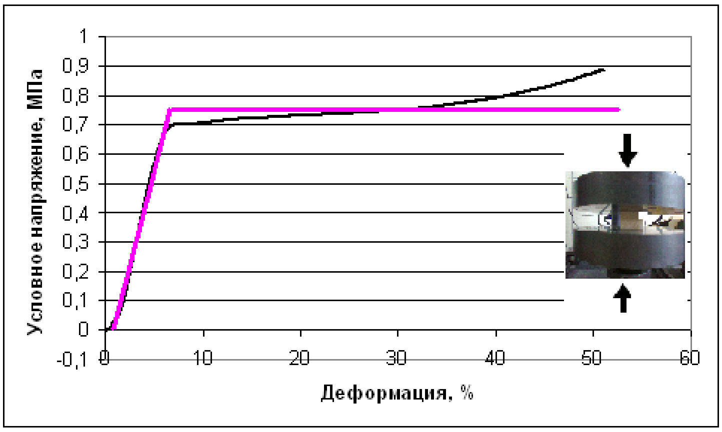



Рисунок 4 – Диаграмма испытания материала ППУ на сжатие

***Заключение***

В статье рассмотрена автоматизированная методика определения физико-механических свойств материалов труб с ППУ и изоляцией и оболочки ПИ-труб; разработана методика проведения экспериментов (и проведены эксперименты), которая соответствует ГОСТ. Разработанная программа позволяет определять плотность материала муфты и оболочки ПИ-трубы, определять процентное содержание сажи в материале оболочки ПИ-трубы, определять показатель текучести расплава (ПТР), проводить испытания на термоусадку, статические механические испытания, определять статические механические характеристики материала трубы-оболочки и другие свойства рассматриваемых материалов. Разработанную методику можно легко обобщить на другие трубопроводные системы, построенные с использованием новых композитных материалов и оболочек.

## Литература

1. Проектирование и строительство тепловых сетей бесканальной прокладки из стальных труб с индустриальной теплоизоляцией из пенополиуретана в полиэтиленовой оболочке, СП 41-105-2002 / редкол. : М. Касцюк (гл. ред.) [и др.]. – М., Госстрой России. – 2003.

2. Batallas, M. Determining the performance of polyurethane foam pipe insulation for high temperature service / M. Batallas, H. Yih, P. Singh // Northern area western conference Calgary, Alberta, february 6–9, 2006. – P. 1–18.

3. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрических труб с учетом неоднородности материала / В.В. Можаровский [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2009. – № 1. – С. 77–82.

4. Программный комплекс контроля и диагностики сосудов и трубопроводов / В.В. Можаровский [и др.] // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2002. – № 1. – С. 28–31.

5. Концепція автоматизації процесу контролю технологічного стану промислових трубопровідних систем, посудин і резервуарів / В.В. Можаровський [і др.] // Вісник Національного унівеситета «Львівська політехніка. Інформаційні системи і мережи». – 2011. – № 699. – С. 175–184.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 25.09.12

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

*УДК 512.542*

# О произведениях нормальных обобщенно сверхразрешимых подгрупп конечных групп

Е.Н. Мысловец

В работе изучаются свойства произведений нормальных $Jc$-сверхразрешимых и $Jca$-сверхразрешимых подгрупп конечных групп.

**Ключевые слова:** конечная группа, $Jc$-сверхразрешимая группа, $Jca$-сверхразрешимая группа, $Jca$-разрешимая группа.

The article studies the products of normal $Jc$-hypersolvable and $Jca$-hypersolvable subgroups of finite groups.

**Keywords:** finite group, $Jc$-hypersolvable group, $Jca$-hypersolvable group, $Jca$-soluble group.

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $G = HK$, где $H$ и $K$ – нормальные сверхразрешимые подгруппы группы $G$. Хорошо известно, что в общем случае $G$ не является сверхразрешимой группой. Однако это возможно, если: 1) подгруппы $H$ и $K$ имеют взаимно простые индексы в $G$; 2) коммутант группы $G$ нильпотентен; 3) одна из подгрупп $H$ или $K$ нильпотентна.

В работе [1] В.А. Ведерниковым были введены понятия $ca$-разрешимых, $c$-сверхразрешимых групп и $ca$-сверхразрешимых групп, обобщающие понятия разрешимых и сверхразрешимых групп, а также получены их некоторые свойства. Напомним, что группа $G$ называется $c$-сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого являются простыми группами, $ca$-сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого являются простыми группами, а каждый ее абелев фактор централен в $G$, и $ca$-разрешимой, если она обладает главным рядом, все абелевы факторы которого центральны в $G$.

В дальнейшем А.Ф. Васильев и Т.И. Васильева [2], используя метод композиционных экранов, нашли новые свойства $c$-сверхразрешимых групп, а также получили для $c$-сверхразрешимых групп обобщения отмеченных выше результатов о произведениях нормальных сверхразрешимых подгрупп. В [3] они ввели понятия $Jca$-разрешимых, $Jc$-сверхразрешимых и $Jca$-сверхразрешимых групп, являющихся локальными аналогами понятий $ca$-разрешимых, $c$-сверхразрешимых и $ca$-сверхразрешимых групп. Задача о нахождении свойств произведений нормальных $Jc$-сверхразрешимых ($Jca$-сверхразрешимых и др.) подгрупп оставалась неисследованной. Решению данной задачи и посвящена настоящая работа.

### *Предварительные сведения*

В работе используются стандартные обозначения, определения и результаты. Необходимые сведения из теории формаций, в частности, композиционных формаций, можно найти в монографии [4]. Напомним, что $A$-группой называется группа, у которой все силовские подгруппы являются абелевыми. Класс всех $A$-групп образует наследственную формацию. Обозначается $\mathfrak{A}^P$. Через $\mathfrak{A}(p-1)$ мы будем обозначать класс всех абелевых групп, экспонента которых делит $p-1$.

Пусть $J$ – некоторый класс (возможно, пустой) простых групп. Будем говорить, что группа $G$ является $J$-группой, если множество $K(G)$ всех композиционных факторов группы $G$ содержится в $J$.

**Определение 1 [3].** *Группа $G$ называется $Jca$-разрешимой, если ее любой главный $J$-фактор, являющийся абелевым, централен в $G$.*

Класс всех $Jca$-разрешимых групп обозначается через $\mathfrak{S}_{Jca}$.

**Замечание 1.** *Если $J$ совпадает с классом всех простых групп, то понятие $Jca$-сверхразрешимой группы совпадает с понятием $ca$-сверхразрешимой группы.*

**Определение 2 [3].** *Группа $G$ называется $Jc$-сверхразрешимой, если любой главный $J$-фактор группы $G$ является простой группой.*

Класс всех $Jc$-сверхразрешимых групп обозначается через $\mathfrak{U}_{Jc}$.

**Замечание 2.** *Если $J$ совпадает с классом всех простых групп, то понятие $Jc$-сверхразрешимой группы совпадает с понятием $c$-сверхразрешимой группы.*

**Определение 3 [3].** *Группа $G$ называется $Jca$-сверхразрешимой, если она является $Jc$-сверхразрешимой и каждый ее абелев $J$-фактор централен в $G$.*

Класс всех $Jca$-сверхразрешимых групп обозначается через $\mathfrak{U}_{Jca}$.

**Замечание 3.** *Если $J$ совпадает с классом всех простых групп, то понятие $Jca$-сверхразрешимой группы совпадает с понятием $ca$-сверхразрешимой группы.*

В [3] установлено, что классы $\mathfrak{S}_{Jca}$, $\mathfrak{U}_{Jc}$ и $\mathfrak{U}_{Jca}$ являются нормально наследственными композиционными формациями.

Используя метод доказательства теоремы 1 из [2], нетрудно получить утверждения следующих теорем 1 и 2.

**Теорема 1.** *Пусть $J$ – некоторый класс простых групп. Формация $\mathfrak{U}_{Jc}$ является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран $h$ такой, что $h(L)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$, если $L$ – простая $p$-группа из $J$; $h(L)=\mathfrak{U}_{Jc}$, если $L$ – простая неабелева группа из $J$; $h(L)=\mathfrak{U}_{Jc}$, если $L \notin J$.*

**Теорема 2.** *Пусть $J$ – некоторый класс простых групп. Формация $\mathfrak{U}_{Jca}$ является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран $h$ такой, что $h(L)=\mathfrak{N}_p$, если $L$ – простая $p$-группа из $J$; $h(L)=\mathfrak{U}_{Jca}$, если $L$ – простая неабелева группа из $J$ и $h(L)=\mathfrak{U}_{Jca}$, если $L \notin J$.*

**Лемма 1 [2].** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$ такая, что $|N|=p^a$ для некоторого простого числа $p$. Если $N$ содержится в подгруппе $H$ из $G$ и $H/C_H(U/V)\in\mathfrak{F}$ для любого $H$-главного фактора $U/V$ группы $N$, то $H/C_H(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

**Лемма 2 [2].** *Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – некоторая подформация из $\mathfrak{A}$. Если $G=HK$, где $H$ и $K$ – нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы $G$ и $(|G:H|,|G:K|)=1$, то $G\in\mathfrak{F}$.*

**Лемма 3 [2].** *Пусть группа $G$ имеет неабелеву единственную минимальную нормальную подгруппу $N$ такую, что $G/N\in\mathfrak{U}_{Jc}$. Если $G=HK$, где $H$ и $K$ – нормальные $Jc$-сверхразрешимые подгруппы из $G$, то $G$ $Jc$-сверхразрешима.*

**Лемма 4 [2].** *Пусть $\mathfrak{H}$ – подформация из $A$ и группа $G\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^P$. Если $G=HK$, где нормальные в $G$ подгруппы $H$ и $K$ принадлежат $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$, то $G\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$.*

**Лемма 5.** *Пусть $J$ – некоторый класс простых групп. Если $G/N\in\mathfrak{U}_{Jc}$ и $K(N)\cap J=\varnothing$, то $G\in\mathfrak{U}_{Jc}$.*

### *Основной результат*

**Теорема 3.** *Справедливы следующие утверждения.*

*1) Если группа $G=HK$, где $H$ и $K$ – нормальные $Jc$-сверхразрешимые подгруппы из $G$ и фактор-группы $G/H$ и $G/K$ не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных $J$-факторов, то $G$ $Jc$-сверхразрешима.*

*2) Если группа $G$ есть расширение $Jc$-разрешимой группы с помощью $A$-группы и $G = HK$, где $H$ и $K$ – нормальные $Jc$-сверхазрешимые подгруппы из $G$, то $G$ $Jc$-сверхразрешима.*

*3) Если группа $G = HK$, где $H$ – нормальная $Jca$-сверхразрешима подгруппа и $K$ – нормальная $Jc$-сверхразрешимая подгруппа из $G$, то $G$ $Jc$-сверхразрешима.*

*4) Если группа $G = MN$, где $M$ и $N$ – нормальные $Jca$-сверхразрешимые подгруппы группы $G$, то $G$ также является $Jca$-сверхразрешимой группой.*

*Доказательство.* Докажем справедливость утверждения 1). Пусть $G$ – группа наименьшего порядка, для которой утверждение 1) теоремы неверно. Обозначим через $N$ минимальную нормальную подгруппу группы $G$. Легко показать, что для $G/N$ все условия утверждения 1) выполняются. Поэтому $G/N \subseteq \mathfrak{U}_{Jc}$. Так как $\mathfrak{U}_{Jc}$ является формацией, то $N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$, $N = G^{\mathfrak{U}_{Jc}}$ и $N \subseteq H \cap K$.

Пусть $N$ не является $J$-группой. Тогда по лемме 5 группа $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$.

Пусть $N$ является $J$-группой и пусть $N$ – абелева $p$-группа для некоторого простого числа $p$. Рассмотрим максимальный внутренний композиционный экран $h$ формации $\mathfrak{U}_{Jc}$. Тогда по теореме 1 $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Пусть $U/V$ – любой $H$-главный фактор группы $N$. Так как $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$. По лемме 1 имеем $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Аналогично показывается, что $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Рассмотрим группу $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N)KC_G(N)/C_G(N)$.

Из $HC_G(N)/C_G(N) \cong H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$ и $KC_G(N)/C_G(N) \cong K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$ ввиду леммы 2 получаем $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Следовательно, фактор $N$ является $h$-центральным в $G$. Отсюда и из $Jc$-сверхразрешимости $G/N$ следует $Jc$-сверхразрешимость группы $G$. Противоречие.

Если $N$ – неабелева группа, то $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$ по лемме 3. Это противоречие завершает доказательство утверждения 1).

Докажем утверждение 2). Пусть $G$ – группа наименьшего порядка, для которой утверждение 2) неверно. Можно считать, что $G$ обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $N$ такой, что $N = G^{\mathfrak{U}_{Jc}}$ и $N \subseteq H \cap K$.

Пусть $N$ не является $J$-группой. Тогда по лемме 5 группа $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$.

Пусть $N$ является $J$-группой и пусть $N$ – абелева $p$-группа для некоторого простого $p$. Покажем, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^P$. Обозначим $\mathfrak{A}^P$-корадикал группы $G$ через $T$. Так как $T \in \mathfrak{S}_{ca}$, то $C_T(U/V) = T$ для любого $T$-главного фактора $U/V$ группы $N$. Ввиду леммы 1 получаем $T/C_T(N) \in \mathfrak{N}_p$. Тогда группа $G/C_T(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^P$, т. к. она есть расширение $p$-группы $T/C_T(N)$ с помощью $A$-группы $G/T$. Отсюда и из $C_T(N) \subseteq C_G(N)$ следует, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^P$. Рассмотрим максимальный внутренний композиционный экран $h$ формации $\mathfrak{U}_{Jc}$. Так как $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$ для любого $H$-главного фактора $U/V$ группы $N$. По лемме 1 $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Аналогично, $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Поскольку $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$, где $HC_G(N)/C_G(N) \cong H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ и $KC_G(N)/C_G(N) \cong K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$, то по лемме 4 заключаем $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1) = h(p)$. Это означает, что фактор $N$ является $h$-центральным в $G$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ получаем $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Противоречие.

Если $N$ неабелева, то по лемме 3 группа $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Противоречие с выбором $G$. Утверждение 2) доказано.

Установим справедливость утверждения 3). Предположим, что $G$ – группа наименьшего порядка, для которой утверждение 3) не выполняется. Тогда в $G$ имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $N$ такая, что $N = G^{\mathfrak{U}_{Jc}}$ и $N \subseteq H \cap K$.

Пусть $N$ не является $J$-группой. Тогда по лемме 5 группа $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$.

Пусть $N$ является $J$-группой и пусть $N$ – $p$-группа для некоторого простого $p$. Ввиду $K \in \mathfrak{U}_{Jc}$ для максимального внутреннего композиционного экрана $h$ формации $\mathfrak{U}_{Jc}$ и любого $K$-главного фактора $U/V$ группы $N$ имеем $K/C_K(U/V) \in h(p)$. Тогда, используя лемму 1, имеем $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Из $H \in \mathcal{U}_{Jca}$ для любого $H$-главного фактора $U/V$ группы $N$ получаем, что $C_H(U/V) = H$. Отсюда $H/C_H(N)$ является $p$-группой по лемме 1. Таким образом, группа $G/C_G(N)$ есть произведение $p$-группы $HC_G(N)/C_G(N)$ и $\mathfrak{N}_p h(p)$-группы $KC_K(N)/C_K(N)$, т. е. $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Это означает, что фактор $N = G^{\mathfrak{U}_{Jc}}$ является $h$-центральным в $G$. Тем самым получаем противоречие с $G \notin \mathfrak{U}_{Jc}$.

Если $N$ неабелева, то $G$ $Jc$-сверхразрешима по лемме 3. Это противоречие с выбором $G$ завершает доказательство утверждения 3).

Установим справедливость утверждения 4). Пусть $G = MN$, где $M$ и $N$ – нормальные $Jca$-сверхразрешимые подгруппы группы $G$. Покажем индукцией по порядку группы $G$, что она является $Jca$-сверхразрешимой.

Пусть $K$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Если $K = G$, то $G$ – простая группа, а значит, она по определению является $Jca$-сверхразрешимой группой. Будем считать, что $K \neq G$. Заметим, что $G/K = MK/K \cdot NK/K$, где $MK/K$ и $NK/K$ – нормальные подгруппы группы $G/K$. Из $MK/K \cong M/(M \cap K)$ и $Jca$-сверхразрешимости подгруппы $M$, а также из того, что класс $Jca$-сверхразрешимых групп является формацией, следует $Jca$-сверхразрешимость подгруппы $MK/K$. Аналогично доказывается $Jca$-сверхразрешимость подгруппы $NK/K$. Так как $|G/K| < |G|$, то по индукции $G/K$ является $Jca$-сверхразрешимой.

Если $P$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$, отличная от $K$, то аналогично можно показать, что группа $G/P$ также является $Jca$-сверхразрешимой. Но тогда из того, что класс $Jca$-сверхразрешимых групп является формацией, следует, что $G/(K \cap P) \cong G$ является $Jca$-сверхразрешимой группой.

Можно считать, что $K$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы $G$. Заметим, что $K \subseteq M \cap N$. Возможны следующие случаи.

1. Подгруппа $K$ не является $J$-группой. Так как $G/K$ – $Jca$-сверхразрешимая группа, то очевидно, что $G$ также $Jca$-сверхразрешима.

2. Подгруппа $K$ является $J$-группой. Рассмотрим два случая.

Пусть $K$ – абелева группа. Тогда $K$ является $p$-группой для некоторого простого числа $p$. Из $K \subseteq M \cap N$ и леммы 1 нетрудно видеть, что $M/C_M(K)$ является $p$-группой. Аналогично доказывается, что $N/C_N(K)$ также является $p$-группой. Так как $MC_G(K)/C_G(K) \cong M/M \cap C_G(K) = M/C_M(K)$, то получаем, что $MC_G(K)/C_G(K)$ является нормальной $p$-группой в $G/C_G(K)$. По лемме 3.9 из [4] получаем, что $M \subseteq C_G(K)$. Аналогично, $N \subseteq C_G(K)$. Из $G = MN$ следует, что $G = C_G(K)$. Тогда $K$ – центральный главный фактор группы $G$, и группа $G$ является $Jca$-сверхразрешимой.

3. Пусть $K$ – неабелева группа. Тогда по лемме 3 получаем, что группа $G$ является $Jca$-сверхразрешимой. Теорема доказана.

***Заключительные замечания***

Рассматривая различные конкретные множества $J$ из теоремы 3, можно получить многочисленные следствия. Отметим некоторые из них.

**Следствие 1.** *Если группа* $G = HK$*, где* $H$ *и* $K$ *– нормальные* $Jc$*-сверхразрешимые подгруппы из* $G$ *и* $(|G:U|, |G:K|) = 1$*, то* $G$ $Jc$*-сверхразрешима.*

Группа $G$ называется полусверхразрешимой (полунильпотентной), если $G$ $Jc$-сверхразрешима (соответственно, $Jca$-разрешима) и $J$ совпадает с классом всех групп, имеющих простой порядок.

**Следствие 2.** *Если группа* $G = HK$*, где* $H$ *и* $K$ *– нормальные полусверхразрешимые подгруппы из* $G$ *и фактор-группы* $G/H$ *и* $G/K$ *не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, то* $G$ *полусверхразрешима.*

**Следствие 3.** *Если группа* $G$ *есть расширение полунильпотентной группы с помощью* $A$*-группы и* $G = HK$*, где* $H$ *и* $K$ *– нормальные полусверхразрешимые подгруппы из* $G$*, то* $G$ *полусверхразрешима.*

**Следствие 4.** *Если группа* $G = HK$*, где* $H$ *– нормальная полусверхразрешимая подгруппа и* $K$ *– нормальная полунильпотентная подгруппа из* $G$*, то* $G$ *полусверхразрешима.*

Пусть $\pi$ – некоторое множество простых чисел. Группа $G$ называется $A_\pi$-группой, если любая силовская $p$-подгруппа из $G$ для $p \in \pi$ является абелевой. В частности, если $\pi$ совпадает с множеством всех простых чисел, то это понятие совпадает с понятием $A$-группы.

**Следствие 5.** *Если группа* $G$ *есть расширение* $Jca$*-сверхразрешимой группы с помощью* $A$*-группы и* $G = HK$*, где* $H$ *и* $K$ *– нормальные* $Jc$*-сверхразрешимые подгруппы из* $G$*, то* $G$ $Jc$*-сверхразрешима.*

**Следствие 6.** *Если группа* $G$ *есть расширение* $\pi$*-нильпотентной группы с помощью* $A_\pi$*-группы и* $G = HK$*, где* $H$ *и* $K$ *– нормальные* $\pi$*-сверхразрешимые подгруппы из* $G$*, то* $G$ $\pi$*-сверхразрешима.*

**Следствие 7.** *Если группа представима в виде произведения нормальной* $Jca$*-сверхразрешимой подгруппы и нормальной* $Jc$*-сверхразрешимой подгруппы, то она* $Jc$*-сверхразрешима.*

### Литература

1. Ведерников, В.А. О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // Докл. АН БССР. – 1988. – Т. 2, № 10. – С. 872–875.

2. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.

3. Васильев, А.Ф. О конечных группах с заданными свойствами главных рядов / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Междунар. науч. конф. «Дискретная математика, алгебра и их приложения». Тез. докл. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2009. – С. 12–14.

4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Минск : Наука, 1978. – 272 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 15.11.12

## Содержание

### Физика



### Информатика

**Математика**

## Contents

### PHYSICS



### INFORMATICS

## MATHEMATICS

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья представляется в редакцию в двух экземплярах на белорусском, русском или английском языках и является оригиналом для печати. Объем статьи, как правило, не должен превышать 10 страниц, и ее разметка не требуется. Статья должна иметь разрешение соответствующего научного учреждения на опубликование. Статья должна иметь индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК), к ней следует приложить краткое резюме и ключевые слова (на русском и английском языках), название статьи, фамилии и инициалы авторов на английском языке. Ее необходимо подписать всем авторам, указать полное название учреждения, где выполнена работа, а также почтовый адрес, номер телефона (служебный и домашний). Плата за опубликование статей не взимается.

Авторы представляют на дискете (либо по электронной почте e-mail: `vesti@gsu.by`) tex-файл со статьей, подготовленной в LaTeX'e с опцией 12pt в стандартном стиле article (\textwidth 165 mm, \textheight 245 mm). Аналогичны требования для статей, набранных в редакторе MS Word. При наборе формул в редакторе MS Word необходимо использовать Microsoft Equation. Для набора формул не должны использоваться пакеты сторонних разработчиков (MathType и др.). Занумерованные формулы выключаются в отдельную строку, номер формулы ставится у правого края страницы. Нумеровать следует лишь те формулы, на которые имеются ссылки.

Статьи, претендующие на научный приоритет, оформляются в виде кратких сообщений объемом до 2 страниц текста и, как правило, публикуются в ближайших номерах журнала.

Ссылки в тексте обозначаются порядковым номером в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Поступившие в редакцию статьи направляются на рецензию специалистам. Основным критерием целесообразности публикации является новизна и информативность статьи. Авторы не должны направлять статьи, которые уже опубликованы либо приняты к печати в других изданиях. Если по рекомендации рецензента статья возвращается автору на доработку, то переработанная рукопись вновь рассматривается редколлегией, и датой поступления считается день получения редакцией окончательного ее варианта. Лицам, осуществляющим послевузовское обучение, предоставляется право первоочередного опубликования статей.

Технический редактор: *И.В. Близнец.* Корректоры: *Е.В. Убоженко, И.А. Хорсун*

Подписано в печать 05.12.2012. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 19,99. Уч.-изд. л. 17,41. Тираж 100 экз. Заказ № 673

Цена свободная

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.